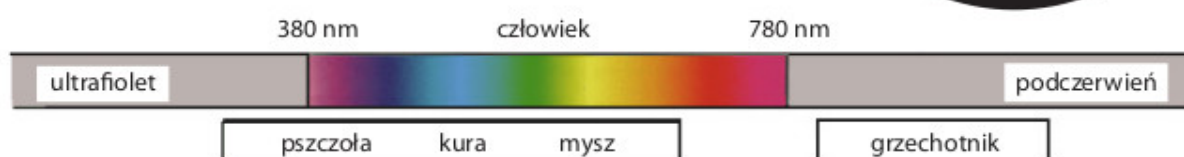
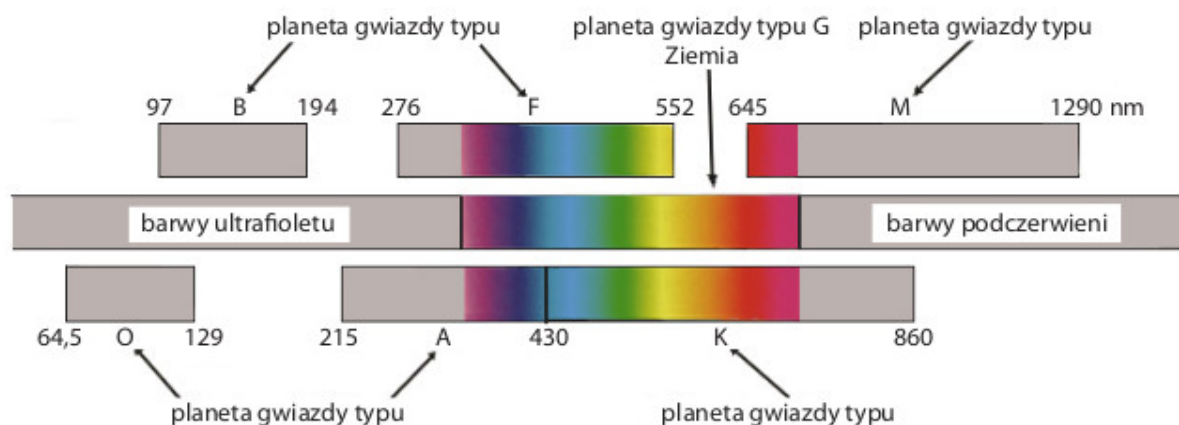


**Barwne światy
 mieszkańców planet
 pozasłonecznych**

str. 14



Zakresy widzenia barwnego





Nagrodę Dziekanów za najlepszy artykuł *Delta*
w roku akademickim 2016/7 otrzymał
Marek GRAD


za tekst

Jak badamy głębokie wnętrza Ziemi?
zamieszczony w numerze 11(510)/2016.

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (526)

Z notatnika geniusza
Jarosław Górnicki str. 1

Programowanie
półcałkowitoliczbowe
Krzysztof Kiljan str. 4

 Zadania str. 6

Migawka informatyczna:
Eter jednak istnieje! str. 7

Jak zrobić z fał pułapkę?
Szymon Charzyński str. 8

Jak radzić sobie z Hydrą?
Krzysztof Piecuch str. 10

Ciemna materia z profilu
Klaudia Kowalczyk str. 12

Barwne światy mieszkańców
planet pozasłonecznych
Lech Falandysz str. 14

Problem promienia protonu
(chyba) wyjaśniony
Grzegorz Łach str. 15

Tak samo,
ale zupełnie inaczej
Marek Kordos str. 16


Konsekwencje twierdzenia
Dirichleta
Witold Bednarek str. 18


Informatyczny kącik
olimpijski (113):
Kieszonkowe str. 19

Klub 44 str. 20

Prosto z nieba: Szybka wizyta str. 22

Niebo w marcu str. 22

 Blog, w którym
wycofujemy,
nie potwierdzając
Magdalena Fikus str. 24

 Pasujemy do siebie!
Joanna Jaszewska str. 25

W następnym numerze piszemy o Maryam Mirzakhani.



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600
Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:
Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Z notatnika geniusza

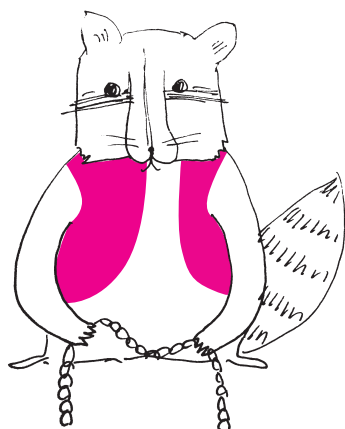
Jarosław GÓRNICKI*

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Srinivasa Ramanujan Ijengar (1887–1920) był indyjskim matematykiem z prowincji Madras, genialnym samoukiem obdarzonym niezwykłym talentem do odkrywania zaskakujących zależności liczbowych. Swobodnie posługiwał się ułamekami łańcuchowymi, szeregami liczbowymi, funkcjami eliptycznymi. Pozostawił około 3900 wzorów, z których jedynie niewielka część została dotychczas sprawdzona.

Część 1. Dla odważnych

Wgląd w nadzwyczajne zdolności i wyobraźnię Ramanujana daje lektura fragmentu jego listu wysłanego z Madrasu 16 stycznia 1913 r. do angielskiego matematyka Godfreya Harolda Hardy'ego (1877–1947). List zawierał około 120 wzorów matematycznych bez wyjaśnień i komentarzy. Kilkanaście z nich Hardy uznał za reprezentatywne [2] (każdy może zmierzyć się z ich uzasadnieniem).



$$(1) 1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 + \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right)$$

$$(2) 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

$$(3) 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi} \cdot \{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2}$$

$$(4) 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^4}$$

$$(5) \int_0^\infty \frac{1 + (\frac{x}{b+1})^2}{1 + (\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1 + (\frac{x}{b+2})^2}{1 + (\frac{x}{a+1})^2} \dots dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b + \frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)},$$

$[0 < a < b + \frac{1}{2}]$

$$(6) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\dots)}$$

(7) jeżeli $\alpha \cdot \beta = \pi^2$, to

$$\alpha^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right)$$

$$(8) \int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{2}{2a + \frac{3}{a + \frac{4}{2a + \dots}}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{2}{2a + \frac{3}{a + \frac{4}{2a + \dots}}}}}$$

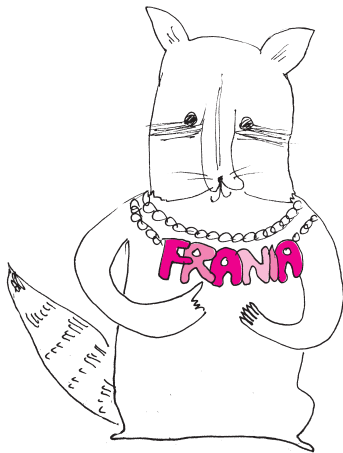
$$(9) 4 \int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1+} \frac{1^2}{1+} \frac{1^2}{1+} \frac{2^2}{1+} \frac{2^2}{1+} \frac{3^2}{1+} \frac{3^2}{1+} \dots$$

$$(10) \text{ jeżeli } u = \frac{x}{1+} \frac{x^5}{1+} \frac{x^{10}}{1+} \frac{x^{15}}{1+} \dots \text{ i } v = \frac{\sqrt[5]{x}}{1+} \frac{x}{1+} \frac{x^2}{1+} \frac{x^3}{1+} \dots,$$

$$\text{to } v^5 = u \cdot \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}$$

$$(11) \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+\dots} = \left\{ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\} \cdot e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$(12) \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+} \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\dots} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{5}{2}}}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right] \cdot e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$



Wzory (1)–(4) okazały się przykładami szeregów hipergeometrycznych, których badanie zapoczątkowali Euler i Gauss. Wzory (5) i (6) wydały się Hardy’emu najmniej efektywne. Wykazał ich słuszność, choć miał z tym większy kłopot, niż się spodziewał. We wzorach (7)–(9) Hardy rozpoznał równości znane sobie i swoim współpracownikom. Natomiast wzory (10)–(12) Hardy uznał za bardzo zagadkowe i trudne do uzasadnienia. Pisał o nich „zupełnie mnie pokonały; nigdy wcześniej nie widziałem czegoś choćby podobnego. Wystarczyło jedno spojrzenie, by się zorientować, że zostały napisane przez matematyka najwyższej klasy”, i dodał „muszą być prawdziwe, bo nikt nie miałby tyle wyobraźni, żeby je wymyślić”. Prawdziwość wzorów (10)–(12) potwierdzili wiele lat później L.J. Rogers (1921) i G.N. Watson (1929).

W lutym 1913 r., wspierając się opinią J.E. Littlewooda, Hardy zyskał pewność – Ramanujan jest matematycznym geniuszem!

Część 2. Dla ciekawych

W 1914 r. Ramanujan, zgodnie ze swoim zwyczajem, podał bez uzasadnienia wzór

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390 \cdot k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}$$

Wzór okazał się prawdziwy i zapoczątkował prace nad ciągami szybko zbieżnymi do wartości π (patrz [1]).

Najcenniejszym efektem współpracy Hardy’ego i Ramanujana, podczas jego pobytu w Trinity College w Cambridge, jest wzór z 1918 r. na przybliżoną wartość funkcji rozkładu $p(n)$ (patrz [2]). Liczba $p(n)$ określa, na ile sposobów można przedstawić liczbę naturalną w postaci różnych sum liczb naturalnych. Ponieważ

$$4 = 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 3 + 1,$$

więc $p(4) = 5$. Możemy sprawdzić, że $p(10) = 42$ i $p(n)$ szybko rośnie wraz ze wzrostem n . Nikt nie miał jednak pomysłu na oszacowanie wartości funkcji $p(n)$. Hardy i Ramanujan wykazali zaskakującą zależność

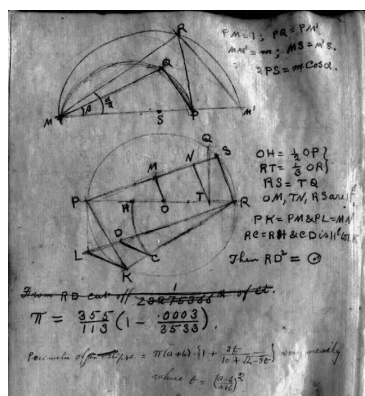
$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$

co oznacza, że stosunek prawej i lewej strony dąży do 1, gdy $n \rightarrow \infty$. Liczba π była bohaterką wielu rozważań Ramanujana. Przed 1913 r., korzystając jedynie z twierdzenia Talesa i twierdzenia Pitagorasa, Ramanujan podał zaskakująco dokładne przybliżone rozwiązania kwadratury koła [3] i rektyfikacji okręgu [4].

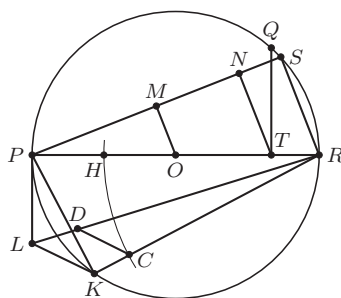
Konstrukcja 1 (Kwadratura koła według Ramanujana)

Pomysł uwidoczniiony jest na 54 stronie zachowanych rękopisów Ramanujana, „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan”.

Niech PR będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O (rys. 1). Niech H połowi odcinek OP , a odcinek RT ma długość $\frac{1}{3}$. Kreślimy odcinek $TQ \perp PR$, i odkładamy taką cięciwą RS , że $|RS| = |TQ| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Odcinek PS ma długość $\frac{\sqrt{31}}{3}$. Kreślimy odcinki $TN \parallel OM \parallel RS$ i obliczamy $|PM| = \frac{1}{2}|PS| = \frac{\sqrt{31}}{6}$, $|MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Rysujemy cięciwę PK o długości $|PK| = |PM|$ i w punkcie P wystawiamy styczną do okręgu PL . Mamy $|PL| = |MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Na boku RK o długości $\frac{\sqrt{113}}{6}$ odkładamy taki odcinek RC , że $|RC| = |RH| = \frac{3}{2}$, a następnie rysujemy odcinek $CD \parallel KL$.



Strona 54 z „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan”.



Rys. 1

Z twierdzenia Talesa, $\frac{|RC|}{|RK|} = \frac{|RD|}{|RL|}$, więc $|RD| = \sqrt{\frac{355}{113}}$. Wówczas kwadrat o boku RD ma pole bliskie polu koła jednostkowego,

$$|RD|^2 = \frac{355}{113} \approx 3,1415929203\dots,$$

jest przybliżeniem liczby π z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku.

Ramanujan w swoich obliczeniach korzystał (co widać na reprodukcji) z lepszego przybliżenia liczby π w postaci $\frac{355}{113} (1 - \frac{0,0003}{3533})$, które jest dokładne do czternastego miejsca po przecinku.

Ułamek $\frac{355}{113}$ jako przybliżenie wartości π został wskazany już w V wieku przez chińskiego astronoma Tsu Ch'ung-chih (430–501). Tysiąc lat później, w 1573 roku ponownie odkrył to przybliżenie Valentinus Otho (1545–1603) oraz w 1585 roku holenderski matematyk Adriaen Anthonisz (1527–1607).

Konstrukcja 2 (Rektyfikacja okręgu według Ramanujana)

Niech AB będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O . Niech punkt C dzieli łuk ACB na połowę i odcinek AT ma długość $\frac{1}{3}$ (rys. 2). Na odcinku BC odkładamy odcinki $|CM| = |MN| = \frac{1}{3}$. Łączymy punkty AM i AN , $|AM| = \frac{\sqrt{19}}{3}$, $|AN| = \frac{\sqrt{22}}{3}$, i na odcinku AN odkładamy taki odcinek AP , że $|AP| = |AM|$. Kreślimy odcinek $PQ \parallel NM$. Z twierdzenia Talesa uzyskujemy $\frac{|AQ|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|AN|}$, więc $|AQ| = \frac{19}{3\sqrt{22}}$. Łączymy O z Q i z punktu T prowadzimy równoległą do OQ , która przecina odcinek AM w punkcie R . Wówczas, $|AR| = \frac{1}{3}|AQ| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. W punkcie A kreślimy styczną do okręgu i odkładamy taki odcinek AS , że $|AS| = |AR| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. Wtedy odcinek OS ma długość

$|OS| = \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}$. Średnia proporcjonalna (geometryczna) między odcinkami $|OS|$ i $|OB|$, czyli odcinek OU (rys. 3), jest równa w przybliżeniu szóstej części długości okręgu, gdyż

$$3\sqrt{1 \cdot \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3,1415926525826\dots,$$

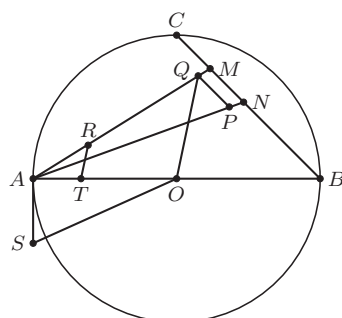
co jest przybliżeniem wartości π z dokładnością do ośmiu cyfr po przecinku.

Ułamek $\frac{2143}{22}$ otrzymamy, przyjmując przybliżenie $\pi^4 \approx 97,4(09)$.

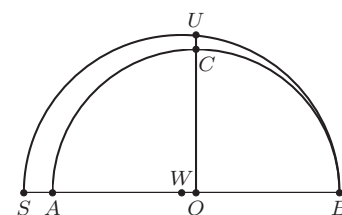
Literatura

- [1] J.M. Borwein, P.B. Borwein, D.H. Bailey: Ramanujan, modular equations, and approximations to pi or how to compute one billion digits of pi, *Amer. Math. Monthly* 96 (1989), 201–219.
- [2] G.H. Hardy: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge Univ. Press, London 1940.
- [3] S. Ramanujan: Squaring the circle, *J. Indian Math.* 5 (1913), 132.
- [4] S. Ramanujan: Modular equations and approximations to pi, *Quart. J. Math.* 45 (1914), 350–372.

Zainteresowanym postacią Srinivasa Ramanujana polecamy książkę Roberta Kanigela *Człowiek który poznał nieskończoność*, której recenzję można znaleźć w Δ_{17}^9 .

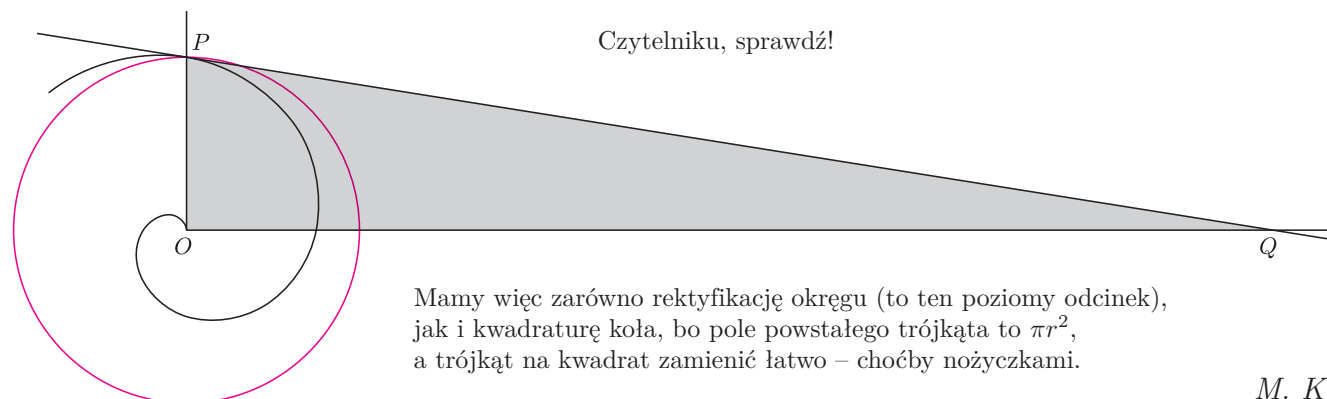


Rys. 2



Rys. 3

Archimedes rektyfikację okręgu i kwadraturę koła wykonał za pomocą swojej spirali, czyli krzywej opisanej w układzie biegunowym przez $r(\varphi) = a \cdot \varphi$. Jeśli odcinek OP , łączący punkt spirali odpowiadający 2π z jej początkiem, będzie miał długość r , to styczna do spirali w tym punkcie przetnie wychodzącą z O półprostą prostopadłą do OP w takim punkcie Q , że $|OQ| = 2\pi r$.



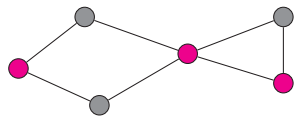
Mamy więc zarówno rektyfikację okręgu (to ten poziomy odcinek), jak i kwadraturę koła, bo pole powstałego trójkąta to πr^2 , a trójkąt na kwadrat zamienić łatwo – choćby nożyczkami.

M. K.

Programowanie półcałkowitoliczbowe

Krzysztof KILJAN*

*student, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Graf z zaznaczonym kolorem jego minimalnym pokryciem wierzchołkowym

W tym artykule zmiemy się z problemem pokrycia wierzchołkowego (*Vertex Cover*). Poruszymy kilka kwestii na pograniczu optymalizacji liniowej, złożoności obliczeniowej oraz algorytmów parametryzowanych. Większość Czytelników może znać ten problem z różnych źródeł (między innymi pojawiał się on już w *Delcie* przed laty), ale na wszelki wypadek na początek przypomnę definicję.

Definicja 1. *Pokryciem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ nazwiemy taki zbiór wierzchołków, że dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$, występującej w grafie, przynajmniej jeden z wierzchołków u, v należy do pokrycia.*

Minimalne pokrycie wierzchołkowe to, oczywiście, takie, które zawiera najmniejszą możliwą liczbę wierzchołków.

Z teorii złożoności wiemy już, że nasz problem jest NP-zupełny. Znaczący to, że jeśli potrafilibyśmy go szybko rozwiązać, to poprzez pewne redukcje umielibyśmy również szybko rozwiązać wszystkie problemy z klasy NP. W tym przypadku przez „szybko” rozumiemy rozwiązanie działające w czasie wielomianowym, czyli $O(n^c)$ dla pewnej stałej c . Jedną ze słynniejszych hipotez w informatyce mówi, że $P \neq NP$, czyli że klasa problemów rozwiązywalnych w deterministycznym czasie wielomianowym jest mniejsza od tej rozpoznawanej w niedeterministycznym (czyli nie zachodzi $NP \subseteq P$, zawieranie $P \subseteq NP$ jest oczywiste). Przy założeniu, że hipoteza ta jest prawdziwa, problemów NP-zupełnych nie da się rozwiązywać w deterministycznym czasie wielomianowym.

Jak możemy znaleźć minimalne pokrycie wierzchołkowe?

Pierwszym pomysłem, jaki możemy mieć, jest przejrzanie wszystkich podzbiorów wierzchołków naszego grafu i wybranie takiego, który jest pokryciem wierzchołkowym i ma najmniejszy rozmiar. Takich podzbiorów jest 2^n (gdzie n to liczba wierzchołków w naszym grafie).

Możemy też się zabrać za to inaczej – okazuje się, że bardzo często w problemach kombinatorycznych z pomocą przychodzi programowanie liniowe.

Tak też jest i w naszym przypadku. Dla każdego wierzchołka v w naszym grafie stworzymy zmienną całkowitą x_v oznaczającą, czy bierzemy v do naszego pokrycia, czy też nie. Oczywiście, będziemy chcieli zminimalizować liczbę wziętych wierzchołków. Wymaganie co do pokrycia krawędzi wyrazimy, tworząc dla każdej krawędzi (u, v) nierówność $x_u + x_v \geq 1$.

Podsumowując powyższe, dostajemy następujący program liniowy całkowitoliczbowy:

$$\begin{aligned} &\text{Minimalizuj} \quad \sum_{v \in V} x_v \\ &\text{z zachowaniem warunków: } x_u + x_v \geq 1 \quad \text{dla każdego } (u, v) \in E, \\ & \quad \quad \quad x_w \in \{0, 1\} \quad \text{i dla każdego } w \in V. \end{aligned}$$

Potrąfimy wyrazić więc problem NP-zupełny za pomocą ILP (*Integer Linear Programming* – programowanie całkowitoliczbowe). Oznacza to dokładnie, że pokazaliśmy w tym momencie NP-trudność problemu ILP. Tym samym nie oczekujemy, że dla ILP istnieje jakkolwiek algorytm działający w czasie wielomianowym.

Co się stanie, gdy zapomnimy o warunkach całkowitości dla naszych zmiennych?

Dostaniemy zwykły program liniowy, a przecież do rozwiązywania takiego istnieją już algorytmy wielomianowe! Pytanie, czy wyniki tego programu mogą się nam do czegoś przydać. Mogłoby się wydawać, że nie – przykładowo dla cyklu o 3 wierzchołkach optymalnym rozwiązaniem będzie dać $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, które nam za wiele nie mówi.

Dla niezaznajomionych z terminem programowania liniowego – jest to forma przedstawienia problemu za pomocą zbioru zmiennych, równań i nierówności liniowych na nich oraz pewnej funkcji liniowej tych zmiennych, którą minimalizujemy lub maksymalizujemy.

Program liniowy całkowitoliczbowy to taki, dla którego zmienne przyjmują wartości tylko ze zbioru liczb całkowitych.

Okazuje się jednak, że ta forma programu liniowego może być dla nas wciąż użyteczna! W dziedzinie algorytmów parametryzowanych istnieje dział zwany *kernelizacją*. Wykorzystamy rozwiązanie naszego LP (*Linear Programming*) właśnie w procesie kernelizacji. Najpierw jednak może warto wspomnieć, co kryje się pod tajemniczymi hasłami użytymi powyżej.

W skrócie algorytmy parametryzowane to takie, w których wybieramy sobie parametr opisujący w pewien sposób instancję naszego problemu, a następnie względem tego parametru będziemy optymalizować prędkość działania naszego algorytmu. Parametry te mogą w najróżniejszy sposób opisywać problem, z którym się mierzymy. Oczywiście, podstawowym parametrem może być wielkość naszego problemu wejściowego, jednak dużo z takiego parametru raczej nie wyciągniemy. Sensowniejszym przykładem dla problemów grafowych może być, na przykład, maksymalny stopień wierzchołka w rozważanym grafie. W ogólności, do każdego problemu da się wymyślić dużo różnych parametrów, ale wybranie tego właściwego może okazać się sporym wyzwaniem.

Drugie tajemnicze słowo, czyli „kernelizacja”, można przetłumaczyć jako znajdowanie jądra problemu – chcemy w szybkim czasie z jakiejś instancji problemu NP-zupełnego wydobyć jego najtrudniejszą obliczeniowo część. Dzięki temu bardzo często jesteśmy w stanie mocno ograniczyć rozmiary problemu, z którym się borykamy, co znacząco przyspieszy nasze obliczenia (zostanie nam dużo mniej zadań, które musimy przetworzyć w czasie wykładniczym). Aby rozjaśnić te pojęcia, za chwilę zilustrujemy je na przykładzie pokrycia wierzchołkowego.

Skupimy się tym razem na wersji decyzyjnej problemu pokrycia wierzchołkowego – czy dla danego grafu G istnieje pokrycie zawierające co najwyżej k wierzchołków. Jako parametru użyjemy rozmiaru poszukiwanego rozwiązania (czyli liczby wierzchołków k w pokryciu).

Używając rozwiązania naszego programu liniowego Minimalizuj $\sum_{v \in V} x_v$ z zachowaniem warunku $x_u + x_v \geq 1$ dla każdego $(u, v) \in E$, podzielimy wierzchołki na 3 zbiory:

- $V_0 = \{v : 0 \leq x_v < \frac{1}{2}\}$
- $V_{1/2} = \{v : x_v = \frac{1}{2}\}$
- $V_1 = \{v : \frac{1}{2} < x_v \leq 1\}$.

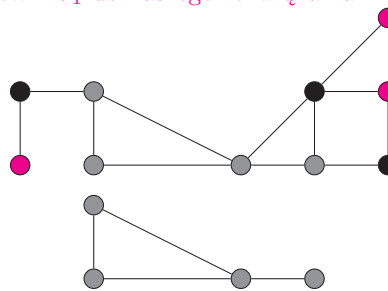
W tym momencie jasne się powinno stać, skąd w tytule wzięła się nazwa półcałkowite – przekształcamy rozwiązanie LP tak, żeby oprócz wartości całkowitych 0 i 1 osiągało ono trzecią wartość $\frac{1}{2}$. Okazuje się, że taka postać rozwiązania jest niezwykle użyteczna w znajdowaniu jądra. Pierwszym spostrzeżeniem, jakie możemy poczynić, jest to, że jeśli spojrzymy na którykolwiek wierzchołek $v \in V_0$, to musi mieć on sąsiada należącego do zbioru V_1 . Można jednak udowodnić dużo ciekawsze twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Nemhausera–Trottera). *Istnieje takie minimalne pokrycie wierzchołkowe S w grafie G , że:*

$$V_1 \subseteq S \subseteq V_1 \cup V_{1/2}.$$

Dowód powyższego twierdzenia, oczywiście, pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika. Skorzystamy z niego podczas następującej redukcji naszego problemu.

Mamy dany graf G oraz liczbę k (rozmiar pokrycia, który sprawdzamy). Jeśli $\sum_{v \in V} x_v > k$, to zwracamy odpowiedź nie. W przeciwnym przypadku zmniejszamy nasz graf poprzez wyrzucenie z niego wierzchołków należących do $V_0 \cup V_1$ oraz zmniejszenie wielkości poszukiwanego pokrycia w reszcie grafu do $k - |V_1|$. Odpowiada to zachłannemu wzięciu wszystkich wierzchołków z V_1 do naszego rozwiązania.



Rys. 2. U góry graf z odpowiednio zaznaczonymi kolorem wierzchołkami z V_0 , szaro z $V_{1/2}$ i czarno z V_1 . Na dole ten sam graf po wykonaniu na nim powyższej redukcji

Pozostało wykazać, że redukcja ta jest bezpieczna oraz sprawdzić jakiej wielkości jest jądro po jej zastosowaniu. Dalej przez (G', k') będę oznaczał instancję problemu, którą dostaniemy po zastosowaniu redukcji. Aby wykazać, że jest ona bezpieczna, wykażemy, że w (G', k') możemy znaleźć rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy mogliśmy je znaleźć w (G, k) .

Zacznijmy od wykazania, że krok stwierdzający odpowiedź *nie* jest poprawny. Wiadomo, że wynik LP jest zawsze nie większy niż ILP. Z tego też powodu, jeśli wynik LP będzie większy niż k , czyli stwierdzimy, że się nie da znaleźć rozwiązania w wersji bez warunku o całkowitości liczb, to tym bardziej z tym warunkiem by się nie dało.

Druga część bezpieczeństwa nie jest wiele trudniejsza do wykazania. Najpierw uzasadnimy implikację

$$(G', k') \text{ tak} \rightarrow (G, k) \text{ tak}.$$

Jeśli S' to pokrycie grafu G' , to na mocy wcześniejszej obserwacji, jeśli dołożymy wierzchołki z $V_1 \cup V_0$ do grafu, a V_1 do pokrycia, to dostaniemy dokładnie pokrycie grafu G co najwyżej o rozmiarze k .

W przeciwną stronę: aby wykazać

$$(G, k) \text{ tak} \rightarrow (G', k') \text{ tak},$$

korzystamy z twierdzenia Nemhausera–Trottera przytoczonego powyżej. Weźmiemy wtedy S' , będącą częścią wspólną pokrycia S dla całego grafu, oraz $V_{1/2}$, aby otrzymać pokrycie dla G' o rozmiarze co najwyżej k' .

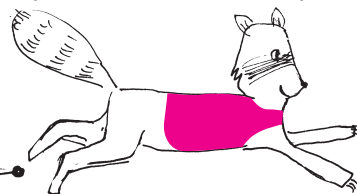
Ostatnią rzeczą jest wielkość jądra, które otrzymamy. Okazuje się, że rozmiar naszego nowego grafu G' będzie wynosił co najwyżej $2k$. Wystarczy zauważyć, że jest on tym samym, co liczba wierzchołków „połowicznych”, co z kolei wynosi nie więcej niż podwojona wielkość rozwiązania naszego LP, które musi być mniejsze niż k , gdyż w przeciwnym przypadku dostalibyśmy już odpowiedź *nie*. Powyższe zdanie matematycznie zapiszemy w postaci

$$|V(G')| = |V_{1/2}| = \sum_{v \in V_{1/2}} 2x_v \leq 2 \sum_{v \in V} x_v \leq 2k.$$

W ten oto prosty sposób udało nam się ograniczyć przestrzeń, którą musimy przejrzeć w czasie wykładniczym z n do $2k$. Nie jest to, oczywiście,

jedyna redukcja, którą można zastosować do tego problemu. Okazuje się, że sam proces redukcji można jeszcze przyspieszyć, sprowadzając nasze LP do problemu przepływu w grafie. Po więcej szczegółów na temat algorytmów parametryzowanych (jak i tego sprowadzenia) można zajrzeć do książki *Parameterized Algorithms*, która na użytek własny jest dostępna za darmo w internecie.

Oczywiście, nie jest to też jedyne zastosowanie programowania półcałkowitoliczbowego. W internecie można znaleźć pracę *Half-integrality, LP-branching and FPT Algorithms*, w której jest więcej szczegółów, jak i zastosowań tego rozwiązania. Serdecznie zachęcam do lektury!



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1558. Czy istnieją liczby całkowite a, b, c o tej własności, że każdy z trójmianów kwadratowych

$$ax^2 + bx + c \quad \text{oraz} \quad (a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$$

ma obydwie pierwiastki całkowite?

Rozwiązanie na str. 22

M 1559. Pierwsza ćwiartka płaszczyzny z kartezjańskim układem współrzędnych jest podzielona prostymi o równaniach $x = n$ oraz $y = n$ dla $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ na kwadraty jednostkowe, zwane dalej *polami*. Czy można wyróżnić niektóre pola w taki sposób, że:

- każdy kwadrat o bokach całkowitej długości równoległych do osi układu i jednym z wierzchołków w punkcie $(0, 0)$ zawiera więcej pól wyróżnionych niż niewyróżnionych;
- każda prosta równoległa do prostej $y = x$ przecina wewnątrz tylko skończenie wielu wyróżnionych pól?

Rozwiązanie na str. 11

M 1560. Wyznaczyć iloczyn długości wszystkich boków i przekątnych n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

Rozwiązanie na str. 22

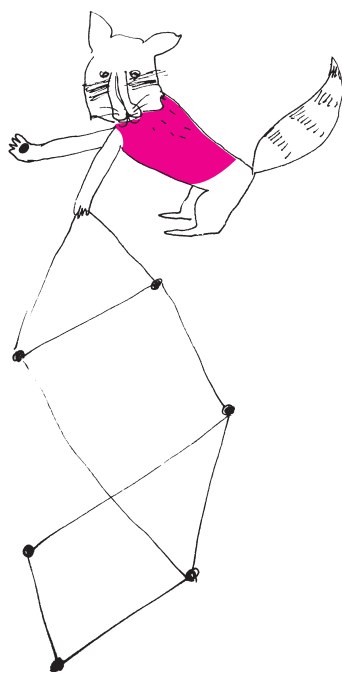
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 947. Doświadczenia z rozpraszaniem cząstek naładowanych na jądrach atomowych wskazują, że promień jądra R rośnie z liczbą A nukleonów jak $R = r_0 A^{1/3}$, gdzie $r_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-15}$ m. Korzystając z zasady nieoznaczoności, oszacuj na tej podstawie średnią energię E_B wiązania nukleonu w jądrze. Masa nukleonu $M \approx 940 \text{ MeV}/c^2$, a iloczyn \hbar , tj. stałej Plancka podzielonej przez 2π i prędkości światła c wynosi $\hbar c = 197 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \cdot \text{m}$.

Rozwiązanie na str. 18

F 948. Jony uranu U, znajdujące się w ciekłym cyrkonie ZrSiO_4 , mieszają się z nim, podstawiając jony Zr, a jony ołowiu Pb nie reagują z cyrkonem i szybko dyfundują poza jego objętość. Po zestaleniu cyrkonu, dyfuzja praktycznie ustaje. W kryształach cyrkonu, znajdujących się w skale znalezionej w Zimbabwie, zmierzono, że stosunek liczby atomów ołowiu ^{206}Pb do liczby atomów uranu ^{238}U wynosi $x = 0,5$. Jaki jest wiek tej skały, jeśli w serii kolejnych rozpadów alfa i beta, ^{238}U rozpada się do ^{206}Pb z czasem połowicznego zaniku $t_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ lat?

Rozwiązanie na str. 18



Eter jednak istnieje!

Naturalnie, wszystko się zaczyna od *tabula rasa*.

Toteż założmy, że dysponujemy wielką niezapisaną tablicą. Po tej tablicy pisać będzie mógł absolutnie każdy, kto tylko chce. Pisać wolno wszystko, należy się jedynie podpisywać. Komunikaty nigdy nie znikają, a budowa tablicy jest taka, że łatwo się zorientować, w jakiej kolejności pojawiały się obecne na niej napisy.

Taka tablica jak wyżej, wyeksponowana gdzieś na *Forum Romanum*, może już posłużyć do stworzenia systemu bankowego, opartego o własną nową walutę tablicową \mathbb{T} . Umawiamy się tylko, że raz na pół godziny publicznie losujemy obywatela X i zapisujemy komisyjnie na tablicy napis:

„Obywatel X wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.

Jako się rzekło, każdy może pisać co chce, ale przede wszystkim zapisuje się przelewy. Oto przykład kilku kolejnych możliwych komunikatów zapisanych na tablicy:

1. „Obywatel A wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.
2. „ A przelewa do B $0,5\mathbb{T}$ ”, podpisano: A .
3. „Obywatel A wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.
4. „ A przelewa do C $1,5\mathbb{T}$ ”, podpisano: A .
5. „ C przelewa do D $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: C .
6. „Obywatel E wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.

Wszystko powyżej wygląda w porządku, ale przecież tablica mogłaby wyglądać również, na przykład, tak:

1. „Obywatel A wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.
2. „ A przelewa do B $0,5\mathbb{T}$ ”, podpisano: A .
3. „ A przelewa do C $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: A .
4. „Obywatel B wylosował $1\mathbb{T}$ ”, podpisano: Komisja.
5. „ B przelewa do C $1\mathbb{T}$ ”, podpis: niewyraźny.

W takiej sytuacji dla każdego członka społeczności jest jasne, że należy zignorować napis trzeci (A próbuje przelać pieniądze, których nie ma) oraz napis piąty (nie jest poprawnie podpisany), a obywatele A , B i C dysponują odpowiednio $0,5\mathbb{T}$, $1,5\mathbb{T}$, $0\mathbb{T}$.

Pomysł, aby waluta działająca tak jak wyżej, była wykorzystywana do codziennych opłat za zakupy czy usługi, wydaje się bardzo podejrzany. Przede wszystkim zaskakuje to, że pieniądze pojawiają się trochę znikąd – w drodze losowania. Po drugie, historia wszystkich transakcji jest publicznie znana. A jednak! Takie rozwiązanie istnieje w naszym świecie i nazywa się Bitcoin. Oczywiście, z jednej strony można argumentować, że przecież nie ma w tym nic aż tak ekonomicznie szokującego. Przez setki lat walutą były przecież różne szlachetne kruszce, które mają bardzo podobne właściwości jak nasze \mathbb{T} – znajdujemy je rzadko i dość losowo, same w sobie nie mają wielkiej bezpośredniej wartości, a jednak istnieją osoby o zdrowych zmysłach, które są w stanie np. wymienić swój własny dom na kilka kilogramów złotawego,

błyszczącego metalu. Mimo to wciąż może szokować, że istnieją osoby (również o zdrowych zmysłach), które są w stanie oddać ten szlachetny kruszec za wpis na dziwnej publicznej tablicy od osoby, która np. właśnie wylosowała bitcoina.

Dla porządku napiszmy, że w świecie Bitcoina nie mówimy o publicznej tablicy, a o *blockchainie* (łańcuchu blokowym). Spełnia on tę samą rolę, ale jego stworzenie nie jest wcale łatwe.

(Jedna rzecz jest nawet lepsza. W Bitcoinie łatwo jest się ukryć za cyfrowym pseudonimem. Pełnej anonimowości więc, oczywiście, tutaj nie ma, ale jest tzw. pseudonimowość.)

Oczywiście, byłoby ono zupełnie trywialne, gdybyśmy założyli istnienie jednej zaufanej strony, która wszystko uczciwie zapisuje, losuje, nie dodrukowuje sobie pieniędzy i generalnie dba, żeby hajs się zgadzał. My, ze względu na bezpieczeństwo i słabość do anarchii, chcemy jednak, żeby system był rozproszony. Co to znaczy i jak to jest zrobione technicznie, opisał już w *Delcie* 6/2016 Łukasz Mazurek. Dalej będziemy zakładać, że bezpieczną tablicę (pardon, blockchain) po prostu mamy dostępną. Zastanówmy się, jakie (inne niż przelewy) napisy na tej tablicy mogłyby być użyteczne. Oto przykłady:

...
 130. „ A przelewa $1\mathbb{T}$ pierwszej osobie, która poda rozkład na czynniki pierwsze liczby 681148087 ”, podpisano: A .
 131. „ C przelewa do D $10\mathbb{T}$, jeśli Jagiellonia Białystok zostanie mistrzem Polski w piłce nożnej w sezonie 2017/18.”, podpisano: C .
 132. „ 681148087 rozkłada się na 21739 i 31333 ”, podpisano: B .

W roku 2015 Witalik Buterin stworzył nową walutę Ethereum (czasem zwaną Bitcoinem 2.0) opartą o blockchain, który umożliwia łatwe tworzenie i realizowanie właśnie tego typu zobowiązań, tutaj zwanych *inteligentnymi kontraktami* (smart contracts), zapisanych w wygodnym języku Solidity. Oto przykład takiego kontraktu (autor niniejszego felietonu zobaczył go kiedyś w prezentacji Daniela Malinowskiego i Łukasza Mazurka):

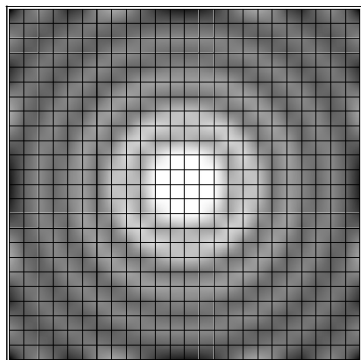
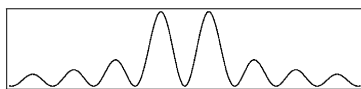
```
contract Factor
{
  function factor681148087 (uint p, uint q)
  {
    if (p > 1 && q > 1)
      && (p * q == 681148087)
      { msg.sender.send(1 ether); }
  }
}
```

Przykład powyżej może wydać się trochę akademicki, jednak Ethereum naprawdę ma ogromny praktyczny potencjał. Informatycy już pokazali, jak zrobić na jego bazie choćby rozproszony system do gier hazardowych typu poker (oparty tylko o – publiczny przecież! – blockchain). Ale to już temat na inną opowieść...

Tomasz KAZANA

W największych istniejących na Ziemi urządzeniach badawczych, takich jak LHC i LIGO też używa się próżni jako izolatora. Cząstki krążące w LHC podróżują wewnątrz próżnej rury i utrzymywane są na odpowiednim torze za pomocą pól elektrycznych i magnetycznych. Światło laserowe w detektorach LIGO również porusza się w próżni i odbija się od lusterek zawieszonych także wewnątrz próżniowej komory. Próżnia w LIGO pozwala wyeliminować wpływ wielu czynników zewnętrznych, między innymi fal akustycznych, które nie rozchodzą się w próżni i dzięki temu nie poruszają lusterek.

W 1989 roku Hans G. Dehmelt i Wolfgang Paul otrzymali połowę Nagrody Nobla z Fizyki (drugą połowę otrzymał Norman F. Ramsey) za zbudowanie pułapki pozwalającej na utrzymywanie i badanie pojedynczych jonów. W swoim wykładzie noblowskim Wolfgang Paul pokazał mechaniczny analog swojej pułapki. Na powierzchni w kształcie siodła położył stalową kulkę, która, oczywiście, staczała się na jedną bądź drugą stronę – jej położenie było niestabilne. Kiedy jednak siodło wprawiane było w ruch obrotowy z odpowiednio dobraną częstością, kulka spoczywała stabilnie na powierzchni obracającego się siodła, oscylując wokół położenia równowagi. Pułapka Paula jest najpopularniejszą metodą wykorzystywaną obecnie w laboratoriach do kontrolowania pojedynczych jonów.



Rys. 1. Natężenie w wiązce Bessela

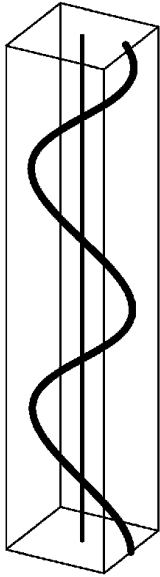
W poprzednim numerze pisaliśmy o falach niosących moment pędu. Wprowadziliśmy rozróżnienie na *spinowy* i *orbitalny* moment pędu. Ten pierwszy jest związany z *polaryzacją* fali i w związku z tym charakteryzuje tylko fale *poprzeczne*, dla których występuje zjawisko polaryzacji. Orbitalny moment pędu jest natomiast związany z kształtem *frontu falowego* i może być niesiony przez każdy rodzaj fali. Teraz zajmiemy się bliżej własnościami fal niosących orbitalny moment pędu.

Kluczowym elementem wielu współczesnych eksperymentów fizycznych jest skuteczne izolowanie badanego układu od otoczenia. Dotyczy to, na przykład, eksperymentów z kondensatem Bosego–Einsteina (o których pisaliśmy w Δ_{16}^3), w których trzeba uwięzić i schłodzić do bardzo niskiej temperatury chmurkę kilkuset tysięcy atomów. Jony wykorzystywane do obliczeń kwantowych (pisaliśmy o tym w Δ_{17}^{12}) również wymagają izolacji od otoczenia, które wpływając na ich stan, niszczyłoby obliczenia kwantowe. W tych i wielu innych eksperymentach nie ma mowy o tym, aby cząstki miały kontakt z jakimkolwiek materialnym naczyniem – jedyny możliwy do zastosowania izolator to ten najlepszy z istniejących, czyli próżnia. Należy więc wypompować z naczynia powietrze i jakoś badany układ zawiesić wewnątrz pustego naczynia z daleka od jego ścianek. Takie zawieszenie nazywa się *pułapkowaniem*, ponieważ elementy badanego układu znajdują się w pułapce – obszarze w przestrzeni, którego nie mogą opuścić. Skoro nie można takiej pułapki zbudować z materii, to wykonuje się ją z pola sił. W warunkach ziemskich jest to zawsze jakaś konfiguracja złożona z pola elektromagnetycznego i wszechobecnego pola grawitacyjnego naszej planety. Istnieje wiele różnych rodzajów pułapek wytwarzanych za pomocą magnesów, cewek, laserów itp. odpowiednich do rodzaju pułapkowanego materiału. Badania nad doskonaleniem systemów pułapkowania i poszukiwanie nowych metod chwytania i więzienia cząstek to ważna gałąź współczesnej fizyki.

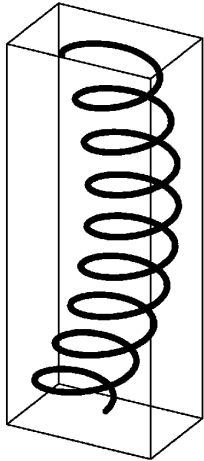
W 1861 roku James Clerk Maxwell zebrał i uzupełnił prawa opisujące klasyczne pole elektromagnetyczne, formułując zestaw czterech równań, które noszą jego nazwisko. Równania te przewidywały istnienie fal elektromagnetycznych, których pierwszej kontrolowanej emisji i absorpcji w zakresie innym niż światło dokonał Heinrich Hertz w 1886 roku. Badania nad własnościami klasycznego promieniowania elektromagnetycznego mają więc już grubo ponad stuletnią historię, dlatego zaskakujący może wydawać się fakt, że ciągle znajduje się nowe rozwiązania równań Maxwella o interesujących, nieznanych wcześniej własnościach. Takim zaskakującym odkryciem jest, stosunkowo niedawno opisana, własność wiązki promieniowania elektromagnetycznego niosącego orbitalny moment pędu (pierwsza publikacja na ten temat [1] jest z roku 2004). Wiązki takie mają charakterystyczną linię wirową, wokół której „kręci się” pole elektromagnetyczne. Charakterystyczny kształt frontu falowego takiej fali pokazaliśmy i opisaliśmy w poprzednim numerze *Delty*. Okazuje się, co odkryto właśnie niedawno, że takie wiązki pułapkują naładowane cząstki wokół wspomnianej linii wirowej. Oznacza to, że taka schwytna w pułapkę cząstka porusza się, mniej więcej, wzdłuż linii wirowej, wykonując wokół niej niewielkie drgania, co zostało pokazane na rysunku 2.

Przykładem rozwiązania równań Maxwella, będącego falą niosącą orbitalny moment pędu i mającego własność pułapkowania cząstek, jest tzw. *wiązka Bessela*. Swą nazwę wiązka zawdzięcza temu, że zapisując składowe pole elektromagnetyczne w naturalnych dla tego rozwiązania współrzędnych walcowych (ρ, ϕ, z) , zależność od współrzędnej radialnej ρ opisuje funkcja Bessela, czyli jedna z bogatego zbioru tzw. funkcji specjalnych. Wiązka ta ma wiele ciekawych własności. W przeciwieństwie do większości wiązek nie rozplywa się w czasie propagacji, w szczególności ma symetrię śrubową – jeżeli przesuniemy wiązkę wzdłuż osi z (która jest tak wybrana, aby pokrywać się z linią wirową fali) i jednocześnie obrócimy o odpowiedni kąt wokół tej osi, to rozwiązanie się nie zmieni, tzn. przesunięte i obrócone rozwiązanie przyjmie w każdym punkcie przestrzeni te same wartości.

Oddziaływanie wiązki Bessela na cząstki naładowane ma tę zaskakującą własność, że zarówno cząstki naładowane dodatnio, jak i ujemnie, są przyciągane do



Rys. 2. Trajektoria cząstki uwięzionej w otoczeniu linii wirowej



Rys. 3. Trajektoria cząstki wykonującej szybki ruch po okręgu, którego środek powoli dryfuje. Krzywa przedstawiona na tym rysunku jest powiększeniem małego wycinka krzywej pokazanej na rysunku 2

osi wirowej. Jest to zachowanie sprzeczne z intuicją opierającą się tylko na doświadczeniach z polami statycznymi. Wszak zarówno pole elektrostatyczne, jak i magnetostatyczne działa na cząstki o przeciwnych ładunkach siłami o przeciwnych zwrotach. Dzięki temu można łatwo w doświadczeniach odróżniać ładunki przeciwnych znaków, wpuszczając je w obszar stałego pola magnetycznego – tory przeciwnych ładunków uginają się w przeciwnych kierunkach. Aby wyjaśnić ten zaskakujący fakt, że cząstki o przeciwnych znakach zachowują się tak samo, należy dokładniej przyjrzeć się trajektorii ruchu cząstki. W rozważanej sytuacji fizycznej mamy do czynienia z dwiema skalami czasowymi i ruch cząstki jest złożeniem dwóch ruchów, z których każdy ma inny charakter. Krótka skala czasowa wyznaczana jest przez częstość ω , z jaką oscyluje fala. Ponieważ wiązka Bessela ma tę własność, że w każdym punkcie przestrzeni wektory natężeń pola elektrycznego i magnetycznego obracają się z częstością ω , więc zmuszają ładunek do wykonywania ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiązki. Ruch ten jest bardzo szybki, ale ma tak małą amplitudę, że na rysunku 2 go nie widać. Aby go zobaczyć, należy wielokrotnie powiększyć wycinek pokazanej trajektorii. Zobaczymy wtedy obrazek jak na rysunku 3, czyli ruch po okręgu w płaszczyźnie xy , który złożony ze swobodnym ruchem wzdłuż osi z , daje ruch po linii śrubowej. Widać jednak, że środek okręgu, po którym krąży cząstka, powoli dryfuje – jest przyciągany do osi wiązki. Prędkość tego powolnego dryfu wyznacza drugą, znacznie większą, skalę czasową, która opisuje okres, w jakim cząstka wykonuje oscylacje wokół osi wiązki.

Powstaje pytanie: skąd bierze się ten powolny dryf? Pułapkująca wiązka ma tę własność, że natężenie pola znika na jej osi (widać to na rysunku 1). W miarę oddalania się od osi natężenie pola rośnie, aż do pewnego maksimum, aby potem spaść do zera i przechodzić przez kolejne coraz niższe maksima. Jeżeli cząstka porusza się w obszarze bliskim osi, czyli w bezpiecznej odległości od pierwszego maksimum, to czuje silniejsze pole wtedy, kiedy się oddala od osi, i słabsze, kiedy się do niej zbliża. Gdyby natężenie pola było stałe w przestrzeni, a jedynie jego kierunek obracałby się z częstością ω , to cząstka poruszałaby się po okręgu, którego środek tkwiłby cały czas w jednym punkcie. Jednak nasza cząstka wykonując ruch po okręgu, na zmianę zbliża się i oddala od osi wiązki i w konsekwencji przechodzi przez obszary silniejszego i słabszego pola. Oddalając się od osi, czuje siłę dośrodkową o trochę większej wartości niż ta, którą czuje, będąc bliżej osi fali. Ponieważ średnica okręgu jest bardzo mała, więc różnica tych sił jest bardzo niewielka. Jednak różnica ta działa konsekwentnie cały czas w tę samą stronę, co powoduje powolny dryf cząstki w stronę linii wirowej. Jak już cząstka „rozpędzi się” w stronę osi, to ją z rozpędu przekracza i następnie siła pułapkująca wyhamowuje ją, zwraca z powrotem do osi i powtarzają się powolne oscylacje (rysunek 2). Cząstki o przeciwnych ładunkach wykonują ruch po okręgu (czy też śrubowy) w przeciwnych kierunkach – czyli zgodnie z intuicją, że przeciwnie naładowane cząstki poruszają się w przeciwnie strony. Jednakże, wirując bardzo szybko w przeciwnych kierunkach, powoli dryfują w tę samą stronę, ponieważ opisane powyżej rozumowanie wyjaśniające powolny dryf nie zależy od znaku ładunku cząstki. Więcej o tym mechanizmie można przeczytać w [2].

Niestety, wiązki Bessela nie da się wytworzyć w rzeczywistości. Rozwiązanie to miałyby nieskończoną energię, ponieważ zbyt wolno zanika w nieskończoności (podobnie jak fala płaska). Okazuje się jednak, że można w laboratorium generować wiązki bardzo zbliżone do wiązek Bessela, za pomocą których udało się potwierdzić doświadczalnie zjawisko pułapkowania. Opisany tu mechanizm ogranicza ruch cząstek w dwóch kierunkach, pozwala im natomiast poruszać się swobodnie wzdłuż osi wiązki. Krzyżując dwie wiązki, można uwięzić cząstkę w obszarze ograniczonym we wszystkich kierunkach, a dodając do wiązki Bessela inne fale, można uzyskać pułapkowanie wokół innych krzywych, a nie tylko wokół linii prostych.

Na zakończenie opuścimy odmęty elektromagnetyzmu i zanurzymy się myślami w morzu promieniowania grawitacyjnego, o którym jest ostatnio tak głośno. Czy w tym grawitacyjnym morzu również można wzbudzać fale o podobnych własnościach? Okazuje się, że tak. Grawitacyjne wiązki Bessela, niosące orbitalny moment pędu, są rozwiązaniami zlinearyzowanej teorii grawitacji [3]. Badania teoretyczne nad pułapkowaniem przez takie wiązki są w toku, wstępne wyniki wyglądają obiecująco, ale to temat na kolejną opowieść.

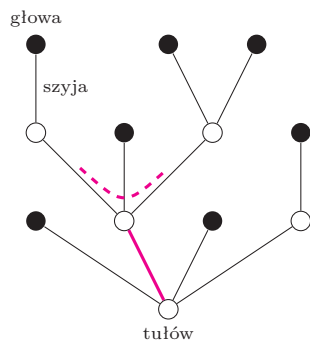
Literatura

- [1] I. Białynicki-Birula, Phys. Rev. Lett. **93**, 020402 (2004).
- [2] I. Białynicki-Birula, Z. Białynicka-Birula i N. Drozd, Trapping of charged particles by Bessel beams, w *The Angular Momentum of Light*, (Cambridge University Press, 2012).
- [3] I. Białynicki-Birula, Z. Białynicka-Birula, New J. Phys. **18**, 023022 (2016).

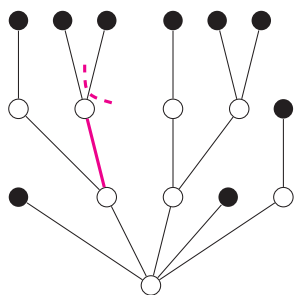
Jak radzić sobie z Hydrą?

Krzysztof PIECUCH*

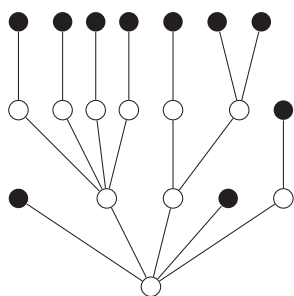
*doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski



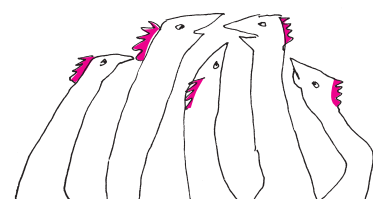
Rys. 1. Przykładowa Hydra



Rys. 2. Hydra po odcięciu pierwszej głowy



Rys. 3. Hydra po odcięciu drugiej głowy



Drodzy Poszukiwacze Przygód, witam Was na kolejnym szkoleniu. Dzisiaj nauczymy się jak rozpoznawać, znajdować i radzić sobie w boju z Hydrą. Hydry to paskudne stworzenia, zamieszkujące świat grafów. Niech Was nie zmyli rysunek 1. Zobaczcie, jak przerażająco on wygląda. Hydry to bestie, które tylko upodobniają się do drzew, aby Was zmylić! Tam, gdzie niektórzy z Was dostrzegają korzeń, znajduje się tułów bestii. Tam, gdzie wydają się być liście, są głowy naszego stwora. Krawędzie to szyje, a wierzchołki wewnętrzne to zgięcia.

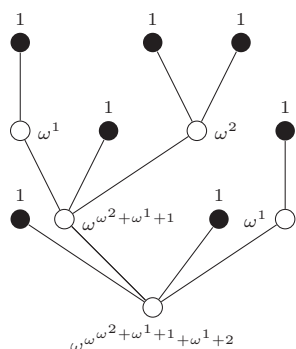
Walka z tą poczwara jest długa i wykańczająca. Jeśli kiedykolwiek spotkacie tego stwora, bierzcie nogi za pas. Jednakże, gdyby Wam przyszło zmierzyć się z Hydrą, dam Wam garść wskazówek. Po pierwsze, ścinajcie głowy pojedynczo – nie chcecie uszkodzić swojego miecza. Po drugie, głowę Hydry ścinajcie wraz z szyją, przy samym zgięciu. Tak jak na rysunku 1. Jeśli zdecydowaliśmy się uciąć głowę, która znajduje się przy samym tułowie, to mamy spokój. Jednak, jeżeli ucieliśmy którąkolwiek inną, musimy przygotować się na niespodziankę. Popatrzcie na szyję przy zgięciu, która idzie w stronę tułowia (na rysunku 1 zaznaczona kolorem). Zostanie ona skopiowana wraz z całą zawartością i razy, gdzie i to liczba głów, które ścieliście do tej pory. Jeśli ze zgięcia, przy którym cieliśmy, nie wyrasta już żadna szyja – to zgięcie zamienia się w nową głowę. Jeżeli, na przykład, głowa z rysunku 1 była pierwszą, którą ścieliśmy, to po jej ścięciu Hydra będzie wyglądała tak jak na rysunku 2. Po ucięciu głowy z rysunku 2 Hydra będzie wyglądała tak jak na rysunku 3. By pokonać Hydrę, musimy ściąć wszystkie głowy, tak by pozostał sam tułów.

Walka z Hydrą wydaje się beznadziejna. Spróbujcie sami na kartce. Liczba głów wydaje się rosnać. I to rosnać bardzo szybko. Czy jest jakaś strategia, postępując według której, uda nam się w końcu pokonać stwora? Okazuje się, że prawdziwa jest stara maksyma, która mówi, że trzeba odpowiednio długo machać mieczem i nigdy się nie poddawać.

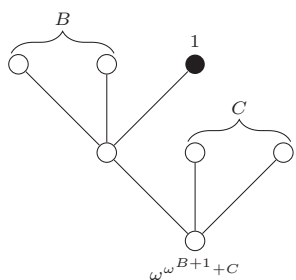
Zaskakujące Twierdzenie 1. Każda strategia ścinania głów prowadzi do pokonania Hydry.

Liczba głów Hydry potrafi urosnąć bardzo szybko. A, jak to mówił klasyk: by mówić o wyższych liczbach, potrzebujemy wyższej matematyki. Z pewnością, Drodzy Poszukiwacze Przygód, potrafiacie liczyć. Niektórzy z Was potrafią liczyć do dziesięciu, niektórzy do stu albo do miliona. Pewnie są też wśród Was tacy, którzy potrafią liczyć do nieskończoności. Dzisiaj nauczymy się liczyć poza nieskończoność. Będzie nam potrzebny specjalny symbol ω , czyli ostatnia litera alfabetu greckiego. Oznaczać ona będzie najmniejszą „liczbę” większą od dowolnej liczby naturalnej. Zatem dla każdej liczby naturalnej n będzie zachodziło $n < \omega$. Ponadto symbol ten będziemy traktowali jak zwykłą liczbę naturalną – będziemy mogli ją dodawać, mnożyć i potęgować. Niedozwolone będzie natomiast odejmowanie i dzielenie. Jak Wam wiadomo – operacje te wyprowadzają nas poza liczby naturalne.

Kiedy wprowadziliśmy już sobie jedno oznaczenie, będziemy mogli liczyć dosyć daleko. Następną liczbą większą po ω jest $\omega + 1$, później $\omega + 2$, $\omega + 3$ i tak dalej. Najmniejszą liczbą większą od każdej liczby postaci $\omega + n$ (gdzie n to liczba naturalna) jest $\omega + \omega$, czyli $2 \cdot \omega$. Następnymi liczbami będą $2 \cdot \omega + 1$, $2 \cdot \omega + 2$ i tak dalej. Gdy skończą nam się liczby postaci $n \cdot \omega + m$, zawsze możemy użyć liczby $\omega \cdot \omega$, czyli ω^2 . Gdy braknie liczb postaci ω^n , możemy użyć ω^ω i tak dalej. Jak widać, za pomocą tylko jednego dodatkowego symbolu nauczyliśmy się liczyć dalej, niż kiedykolwiek wcześniej myśleliśmy, że liczyć można. Matematycy nazywają te liczby porządkowymi. Ponadto matematykom nie wystarcza jeden symbol i mają liczby dalece większe niż te, które da się wyrazić za pomocą symbolu ω . Jednak na dzisiejszym szkoleniu zadowolimy się tym jednym symbolem.



Rys. 4. Sposób wyznaczania liczby bestii



Rys. 5. Liczba bestii maleje po ścięciu dowolnej głowy

Teraz nauczymy się wyznaczać liczbę (numer) bestii. Aby to zrobić, zaczynamy od głów. Każdej głowie nadajemy liczbę 1. Każdemu zgięciu (jak i tułowiu) nadamy liczbę ω^K , gdzie K to suma liczb głów i zgięć wychodzących z tego zgięcia. Liczba bestii to numer, który nadaliśmy tułowiu. Na rysunku 4 mamy przykład, w jaki sposób należy liczyć liczbę bestii.

Pokażę Wam teraz, że liczba bestii zawsze maleje po obcięciu jednej z głów. Oczywiście, jeśli odetniemy głowę zaraz przy tułowiu – nic nie odrasta i liczba bestii się zmniejsza. Odetnijmy zatem jakąś głowę, która nie znajduje się przy tułowiu. Odcinamy głowę, która, oczywiście, ma numer 1. Ze zgięcia, przy którym odcinaliśmy, mogą wychodzić inne głowy i zgięcia. Powiedzmy, że sumarycznie mają one wartość B (rys. 5). Zatem zgięcie ma numer ω^{B+1} . Zgięcie to wychodzi z innego zgięcia (lub tułowia). Z tego zgięcia mogą wychodzić inne zgięcia. Oznaczmy sumę ich numerów jako C . Zatem zgięcie to ma numer $\omega^{\omega^{B+1} + C}$. Równie łatwo możemy obliczyć liczbę tego zgięcia po odcięciu głowy. Jeśli była to i -ta głowa, którą odcięliśmy, to otrzymamy numer $\omega^{i \cdot \omega^{B+1} + C}$. Wykonując proste rachunki, możemy przekonać się, że jest to liczba mniejsza.

$$\begin{aligned}
 i &< \omega \\
 i \cdot \omega^B &< \omega^{B+1} \\
 i \cdot \omega^B + C &< \omega^{B+1} + C \\
 \omega^{i \cdot \omega^B + C} &< \omega^{\omega^{B+1} + C}
 \end{aligned}$$

Do pełni szczęścia potrzebujemy jeszcze indukcji matematycznej po liczbie zgięć od tułowia do tego zgięcia, aby udowodnić, że również sama liczba bestii ulega zmniejszeniu. Pewnie zastanawiacie się: czy potrzebowaliśmy wprowadzać taką dziwną liczbę, aby udowodnić to Twierdzenie? Otóż tak!

Zaskakujące Twierdzenie 2. *Zaskakującego Twierdzenia 1 nie da się udowodnić w arytmetyce Peano.*

Dla przypomnienia – arytmetyka Peano to aksjomatyzowana wersja arytmetyki znanej ze szkoły. Każdą Hydrę możemy zakodować w postaci liczby. Dzięki temu możemy mówić o bitwach w języku arytmetyki pierwszego rzędu. Doświadczony w bojach Poszukiwacz Przygód może zauważyć, że nie każdą strategię jesteśmy w stanie zapisać w arytmetyce Peano. To dlatego, że strategie są obiektami nieskończonymi. Nie przeszkadza nam to, gdyż możemy ograniczyć Zaskakujące Twierdzenie 1 do strategii rekursywnych, czyli takich, które można całe zapisać za pomocą arytmetyki Peano.

Jeśli słyszeliście kiedykolwiek o Twierdzeniu Gödla, Hipotezie continuum albo o geometrii absolutnej, powinniście wiedzieć, że w matematyce zdarzają się twierdzenia danej teorii, których nie da się ani udowodnić, ani im zaprzeczyć. Mało tego, że znaleźliśmy twierdzenie, którego nie da się ani udowodnić, ani obalić w arytmetyce Peano; pokazaliśmy także, że jest to twierdzenie prawdziwe (w pewnej szerszej teorii)! To jednak nie wszystko!

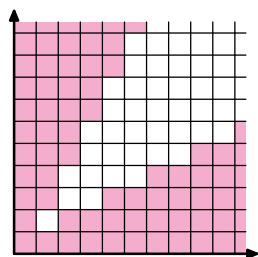
Zaskakujące Twierdzenie 3. *Każda technika dowodowa, wystarczająco silna, aby udowodnić Zaskakujące Twierdzenie 1, jest wystarczająco silna, aby udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano.*

Zgodnie z Twierdzeniem Gödla – wewnątrz arytmetyki Peano nie możemy udowodnić niesprzeczności tej teorii (no chyba, że jest ona wewnętrznie sprzeczna). Aby to zrobić, potrzebujemy pewnej szerszej teorii. Na przykład dodanie „liczby” większej od każdej liczby naturalnej do arytmetyki Peano poszerzy ją w pewien sposób. Skorzystał z tego Gentzen, dowodząc niesprzeczności arytmetyki Peano w 1936 roku. Zaskakujące Twierdzenie 3 jest ogólniejsze. Mówi, że jakkolwiek rozszerzymy arytmetykę Peano tak, aby możliwe było udowodnienie Zaskakującego Twierdzenia 1, będziemy w stanie również udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano.

Okazuje się, że czasem teoretyczne dywagacje na temat potyczek z bestiami mogą być równie pasjonujące, jak sama walka. To wszystko, co miałem Wam do przekazania dzisiaj. Odmaszerować!



Rozwiązanie zadania M 1559. Każde pole będziemy utożsamiać ze współzrędnymi jego lewego dolnego rogu. Udowodnimy, że jeżeli wyróżnimy tylko takie pola (i, j) , że $2i \leq j$ lub $2j \leq i$, to warunki zadania będą spełnione.



Rzeczywiście, dla każdego $r \in \mathbb{R}$ prosta $y = x + r$ przecina skończony wiele wyróżnionych pól, mianowicie takie pola $(x, x + d)$, że $x \in [0, d] \cap \mathbb{Z}$, przy czym $d \in \{\lfloor r \rfloor, \lceil r \rceil\}$.

Z kolei każdy kwadrat o lewym dolnym rogu $(0, 0)$, a prawym górnym $(2k, 2k)$ zawiera dokładnie

$$2k(k+1) - 1$$

wyróżnionych pól, czyli więcej od $\frac{1}{2}(2k)^2$. Stąd każdy kwadrat o lewym dolnym rogu $(0, 0)$, a prawym górnym $(2k-1, 2k-1)$ zawiera o $2k$ wyróżnionych pól mniej, czyli

$$2k(k+1) - 1 - 2k = 2k^2 - 1,$$

co jest większe od $\frac{1}{2}(2k-1)^2$.

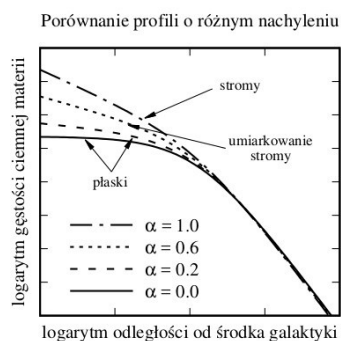
* Centrum Astronomiczne
im. M. Kopernika PAN

Krzywa rotacji to wykres prędkości kołowej gwiazd w dysku galaktyki jako funkcji odległości od jej środka. Przy wyznaczaniu krzywej rotacji z obserwacji prędkości gwiazd wzdłuż linii widzenia należy uwzględnić nachylenie dysku w stosunku do obserwatora.

Temperatura materii jest związana z prędkościami tworzących ją cząstek. Ciemna materia jest kinematycznie zimna – cząstki mają prędkości dużo mniejsze od prędkości światła. Przeciwnie zimnej ciemnej materii jest gorąca materia, której cząstki poruszają się z relatywistycznymi prędkościami.

Więcej o symulacjach kosmologicznych napiszemy w Δ_{18}^5 .

O innym z problemów pisał też niedawno Wojciech Hellwing w Δ_{17}^{11} .



Cztery profile gęstości ciemnej materii różniące się nachyleniem w centrum galaktyki. Jednostki na osiach są umowne, a znaczniki służą jedynie ogólnemu wyobrażeniu skali.

Tajemnica ciemnej materii fascynuje naukowców od dekad: w latach siedemdziesiątych Vera Rubin zaobserwowała odbiegające od przewidywań zachowanie się krzywej rotacji galaktyki w Andromedzie (M31). Nie da się jej wyjaśnić na gruncie dynamiki Newtona bez uwzględnienia, obok obserwowanych gwiazd, gazu i pyłu, dodatkowego masywnego składnika rozciągającego się daleko poza obszar zajmowany przez materię świecącą. Składnik ten nazywamy *halo ciemnej materii*.

Ciemna materia istnieje w powszechnej świadomości jako niestandardowe „niewidzialne cząstki”. Takie rozumienie jest poniekąd uzasadnione. Z definicji ciemna materia oddziałuje jedynie grawitacyjnie (oczywiście nie jest wykluczone, że podlega również jakimś innym, nieodkrytym do tej pory siłom), a tym samym różni się od zwykłej (barionowej) materii oddziałującej także elektromagnetycznie oraz jądrowo (słabo i silnie). Ciemnej materii nie da się zatem zobaczyć, można jedynie *poczuć* jej wpływ.

Aby formułować przewidywania dotyczące ciemnej materii w poszczególnych galaktykach, potrzebny jest model kosmologiczny i jego pełny opis matematyczny. Obecnie powszechnie stosuje się model Λ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*), czyli model zimnej ciemnej materii ze stałą kosmologiczną Λ . Z danych satelity Planck badającego mikrofalową poświatę po Wielkim Wybuchu wynika, że Wszechświat składa się w 5% z materii barionowej, zaś ciemna materia stanowi aż 27%. Pozostała większość, czyli 68% to wspomniana już stała kosmologiczna, zwana także *ciemną energią*.

Uzbrojeni w model kosmologiczny możemy prześledzić wynikającą z niego ścieżkę ewolucyjną Wszechświata oraz porównać przewidywania z jego aktualnym stanem (13,8 miliardów lat po Wielkim Wybuchu). Rozwiązania analityczne tak złożonych problemów są, niestety, nieosiągalne. Z tego też powodu w badaniach formowania się struktur i ewolucji Wszechświata posilkujemy się symulacjami komputerowymi, w których cząstki reprezentujące różne składniki galaktyk poruszają się zgodnie z opisującymi je prawami fizycznymi, a odpowiednie równania rozwiązywane są numerycznie. Obecnie do największych symulacji wykorzystywane są superkomputery, ale symulacje zawierające kilkaset tysięcy cząstek można przeprowadzić w stosunkowo krótkim czasie nawet na domowym komputerze.

Wczesne symulacje Wszechświata w modelu Λ CDM wygenerowały szereg niezgodności z obserwacjami. Jedną z nich wiąże się z charakterem profilu (czyli wykresu gęstości $\rho(r)$ jako funkcji odległości od środka galaktyki) halo ciemnej materii (*cusp-core problem*).

Nachylenie profilu gęstości α w centrum galaktyki określa, asymptotyczne dla małych promieni, zachowanie funkcji $\rho(r)$ proporcjonalne do $r^{-\alpha}$. Rysunek przedstawia porównanie profili o różnych wartościach α , zarówno „stromych”, jak i „płaskich”.

Symulacje z lat 90. sugerowały, że istnieje uniwersalny dla wszystkich galaktyk, stromy w centrum ($\alpha = 1$) profil, zazwyczaj oznaczany NFW od nazwisk odkrywców: Navarro, Frenka i White’a, jednakże dopasowania teoretycznych krzywych rotacji do danych obserwacyjnych nie zgadzały się z tymi obliczeniami. Wręcz przeciwnie, pokazywały one, że w niektórych galaktykach rozkład ciemnej materii jest wręcz płaski. Dotyczy to głównie galaktyk karłowatych, które krążą wokół dużych galaktyk, np. Drogi Mlecznej. Galaktyki satelitarne są co prawda o rzędy wielkości mniejsze i mniej masywne od galaktyki głównej, ale odsetek zawartej w nich ciemnej materii sięga nawet 99%. Dominacja ciemnej materii sprawia, że wpływ nachylenia profilu na krzywą rotacji jest w przypadku galaktyk karłowatych silniejszy, a wykrycie rozbieżności między teorią a obserwacjami łatwiejsze.

Czy zatem powinno się odrzucić model Λ CDM? Niekoniecznie. W przypadku profilu NFW problemem okazały się bowiem same symulacje. Ze względu na ograniczone możliwości ówczesnych komputerów uwzględniały one jedynie



Ogólnopolska Matematyczna Konferencja Studentów „OMatKo!!!” to największe matematyczne wydarzenie przeznaczone dla studentów i doktorantów z całego kraju. Obok młodych matematyków, prezentujących swoje wyniki badań, gościmy również wielu specjalistów. W tym roku wykład otwierający konferencję wygłosi dr hab. Krzysztof Burnecki. Zapewniamy także dobrą zabawę, organizując m.in. loterię lamigłówek czy wieczorną integrację. Na „OMatKo!!!” możesz zachwycić teoretycznym lub praktycznym obliczeniem matematyki, wygrywając przy tym atrakcyjne nagrody – wystarczy, że wygłosisz referat albo stworzysz matematyczny plakat. Jeśli masz głowę pełną matematycznych pomysłów albo chcesz spędzić niezapomniany weekend w towarzystwie „królowej nauk”, to zapraszamy do Centrum Kongresowego Politechniki Wrocławskiej w dniach 13–15 kwietnia 2018 r.

Więcej informacji znajdziesz na stronie <http://omatko.im.pwr.wroc.pl>



Serdecznie zapraszamy na 4. Szkołę Kosmologiczną, która odbędzie się w Krakowie w dniach 8–22 lipca 2018 r. Szkoła przeznaczona jest w zamierzeniu dla studentów i doktorantów, ale jej poprzednie edycje okazały się interesujące też dla starszych stażem naukowców. Wykładowcami będą wybitni polscy oraz zagraniczni specjaliści. Wykłady obejmą szeroki zakres zagadnień związanych z kosmologią obserwacyjną i teoretyczną. Organizatorzy kładą duży nacisk na warsztaty komputerowe z modelowania widm galaktyk, symulacji numerycznych oraz wykorzystania narzędzi Wirtualnego Obserwatorium. Więcej informacji wraz z formularzem rejestracyjnym można znaleźć na naszej stronie: cosmoschool2018.oa.uj.edu.pl Zapraszamy także na Facebooka: [fb.me/CosmologySchool](https://www.facebook.com/CosmologySchool) oraz Twittera: twitter.com/CosmologySchool

ciemną materię. Po dodaniu do symulacji materii barionowej zauważono, że procesy gwiazdotwórcze oraz wybuchy supernowych są źródłem dodatkowej energii, która wystarcza do spłaszczenia profilu ciemnej materii.

Problem kształtu profilu ciemnej materii nie jest jednak zamknięty.

Do „wypłaszczenia” profilu potrzebna jest dość duża, większa niż obserwowana w galaktykach karłowatych, masa zawarta w barionach. Obecnie nie potrafimy powiedzieć, jaki mechanizm mógłby być odpowiedzialny za powstawanie w tych galaktykach płaskiego rozkładu ciemnej materii. Co więcej, nie wiemy, jaki jest faktycznie profil ich halo.

Większość karłowatych galaktyk satelitarnych nie rotuje. Siła grawitacyjna jest w nich kompensowana chaotycznym ruchem gwiazd, mierzonym przez dyspersję prędkości, czyli średnie odchylenie od wartości średniej. Wyznaczenie nachylenia profilu ciemnej materii, a nawet masy halo z dopasowania profilu dyspersji prędkości jest znacznie trudniejsze niż z użyciem krzywej rotacji. Jest za to odpowiedzialna degeneracja profilu masy i anizotropii prędkości związanej z kształtem orbit, po jakich poruszają się gwiazdy w galaktyce. Degeneracja oznacza, że różne kombinacje parametrów profilu masy i anizotropii dają taki sam profil dyspersji.

Oczywiście, naukowcy nie dają tak łatwo za wygraną, ulepszając metody, które byłyby zdolne uporać się z degeneracją. Niestety, w tym miejscu pojawia się kolejna trudność: niewystarczająca jakość dostępnych danych obserwacyjnych. Płaski rozkład gęstości, o ile występuje, zajmuje tylko mały obszar w samym środku galaktyki (zauważmy, iż wykres na rysunku jest w skali logarytmicznej), mając silny wpływ na ruch gwiazd jedynie blisko centrum. Z powodu ograniczonej czułości instrumentów nie da się wykonać w tym obszarze spektroskopii, a tym samym pomiarów prędkości dla dużej liczby gwiazd, jaka byłaby konieczna do otrzymania wniosków statystycznie znaczących, czyli obciążonych małą niepewnością. Pozostaje nam zatem czekać na kolejne generacje przyrządów i dane, których mają dostarczyć.

Na zakończenie warto wspomnieć o niezwykle ciekawej, choć bardzo ograniczonej metodzie stwierdzenia obecności płaskiego rozkładu ciemnej materii. Metoda ta wykorzystywana jest od kilku lat, lecz pochylny się tutaj nad najnowszą (na chwilę redagowania niniejszego artykułu) pracą.

W Eridanus II, jednej z pobliskich galaktyk o bardzo małej jasności (tzw. galaktyk ultra-słabych), obserwuje się gromadę kulistą, która znajduje się na niebie w małej odległości od środka tejże galaktyki. Nie wiemy, jaka jest rzeczywista odległość gromady od centrum, ale... jeżeli gromada znajduje się na ciasnej orbicie, to byłaby obserwowana (po zrzutowaniu na płaszczyznę nieba) w małej odległości od środka w czasie całego okresu orbitalnego. Z drugiej strony, jeżeli orbita gromady jest szeroka, to ze względu na projekcję obserwowalibyśmy ją w pożądanym odległości tylko przez krótki czas jej orbitalnej wędrówki, a i to jedynie przy sprzyjającym nachyleniu płaszczyzny orbity względem obserwatora. Tym samym rozległa orbita nie jest wykluczona, ale jest mało prawdopodobna.

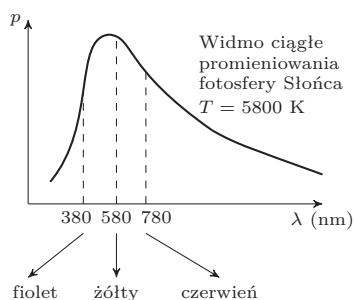
Jakie ma to znaczenie dla halo ciemnej materii? Po przeprowadzeniu symulacji astronomowie stwierdzili, że gromada mogłaby przetrwać na ciasnej orbicie jedynie w potencjale generowanym przez płaski rozkład ciemnej materii. Gdyby profil gęstości był stromy, gromada uległaby rozerwaniu w krótkim, w skali dynamiki galaktyk, czasie, co dodatkowo zmniejszałoby prawdopodobieństwo dokonanej obserwacji.

Opisane podejście bynajmniej nie wyklucza stromego profilu. Pokazuje jedynie, iż musiałyby zaistnieć wiele (zbyt wiele?) korzystnych dla obserwatora okoliczności, aby dane zgodziły się z teorią.

Λ CDM to, oczywiście, nie jedyny „poważny” model kosmologiczny. Pamiętajmy, że do tej pory nie udało się zarejestrować cząstek ciemnej materii. Rozwijane są modele, w których ten dodatkowy składnik Wszechświata nie występuje, ale wymagają one modyfikacji naszego rozumienia grawitacji... to jednak temat na inny artykuł.

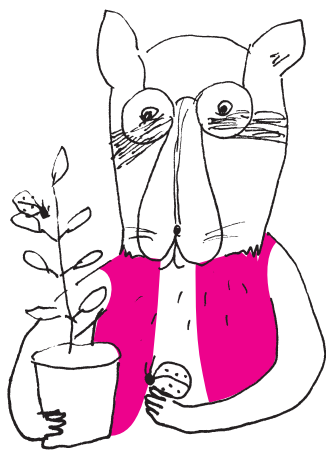
Barwne światy mieszkańców planet pozasłonecznych

Zastanówmy się, czy mieszkańcy innych planet mogą postrzegać barwy w sposób podobny do naszego. Zagadnienie to jest, oczywiście, bardzo hipotetyczne, ponieważ: *primo* – nie znamy jeszcze mieszkańców jakichkolwiek planet innych niż Ziemia, *secundo* – jeżeli są tam mieszkańcy, to nie wiemy, na jaki zakres długości fal elektromagnetycznych wrażliwe są ich narządy wzroku. Puśćmy jednak wodze fantazji i dokonajmy odpowiednich obliczeń, wzorując się na właściwościach wzroku ludzi i zwierząt, biorąc pod uwagę niektóre cechy promieniowania słonecznego dochodzącego do powierzchni naszej planety.



I. Na Ziemi. Promieniowanie elektromagnetyczne Słońca dochodzi do Ziemi w bardzo szerokim zakresie długości fal. Największa moc przypada dla promieni dających wrażenie barwy żółtej (patrz rysunek). W toku długotrwałej ewolucji człowieka jego wzrok dostosował się do warunków oświetlenia tak, że jest najbardziej wrażliwy właśnie na promienie żółte, czyli te promienie widoczne są jako najjaśniejsze. Ale widzimy też fale o długościach dłuższych i krótszych, które tworzą zakres od około 380 nm do około 780 nm. Promieniowanie elektromagnetyczne z tego przedziału długości fali nazywamy światłem widzialnym.

Narządy wzroku innych zwierząt mają niejednakowe zakresy wrażliwości na światło, ale często zakresy te w dużej części pokrywają się z zakresem widzenia człowieka. Na okładce przedstawiono kilka przykładów widzenia barwnego u zwierząt.



Jeśli pszczoła siądzie na czerwonym maku, to dlatego, że odbija on trochę światła ultrafioletowego i jest dla niej widoczny w jakiejś barwie z tego zakresu. Grzechotnik jest ślepy na światło (widzialne dla nas), ale widzi promieniowanie podczerwone – to, czego my nie widzimy oczami, ale odczuwamy skórą jako dochodzące do nas ciepło od pobliskiego rozgrzanego ciała.

II. Na innych planetach. W ostatnich latach astronomowie odkryli wiele planet, które krążą wokół gwiazd po orbitach leżących w obszarach tzw. ekosfer – czyli niezbyt blisko i nie za daleko od swoich gwiazd, tak aby warunki fizyczne (np. temperatura) sprzyjały powstawaniu żywych organizmów oraz ich ewolucji. Gwiazdy dzieli się na typy widmowe (oznaczane literami) odpowiadające różnym temperaturom fotosfery, czyli tej warstwy gwiazdy, z której emitowane jest promieniowanie uciekające w przestrzeń kosmiczną i dolatujące do naszych oczu i teleskopów. Podstawowe typy widmowe gwiazd przedstawia poniższa tabela (Słońce jest typu G):

typ widmowy	O	B	A	F	G	K	M
temperatura [K]	30 000	20 000	9 000	7 000	5 800	4 500	3 000
λ_m [nm]	97	145	322	414	500	644	967

Korzystając ze wzoru Wiena: $\lambda_m = b/T$, gdzie $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ mK, w tabeli przedstawiono również długości fali λ_m , dla której przypada maksimum natężenia promieniowania dla każdego typu widmowego. Narządy wzroku hipotetycznych mieszkańców planety, krążącej wokół gwiazdy danego typu, prawdopodobnie wyczuliły się na pewien zakres długości fal wokół λ_m , ponieważ to promieniowanie jest tam najintensywniejsze. Korzystając z analogii do zakresu fal świetlnych na Ziemi, można określić przybliżone granice tego zakresu. Przyjąłem zasadę, że długości z krańców zakresu różnią się około dwukrotnie długościami (dla światła jest to 2,05). Na okładce przedstawione są również tak znalezione zakresy długości fal odbieranych przez wzrok ewentualnych mieszkańców planet.

znajduje się w ekosferze. Proxima to niewielka, zimna gwiazda typu M, odległa o 4,25 lat świetlnych od Słońca. Ewentualni mieszkańcy planety okrążającej Proximę widzą więc barwę czerwoną oraz nieznaną nam barwę podczerwieni. Fale krótsze niż 645 nm – a więc barwy od pomarańczowej do fioletu – raczej nie są przez nich postrzegane. Zapewne nasza wymiana poglądów z inteligentnymi mieszkańcami tej planety byłaby bardzo utrudniona. Pojęcia takie jak „zielony” czy „niebieski” byłyby nieprzetłumaczalne, bo nie miałyby odpowiednika w ich języku. Większość barw na dziełach naszych wielkich malarzy byłaby dla nich niewidzialna, widzieliby natomiast jakieś barwy z zakresu, którego nasi artyści, tworząc swoje dzieła, nie kontrolowali. Byłoby to zupełnie nowe spojrzenie na naszą sztukę.

Rozważmy przykład odkrytej niedawno planety krążącej wokół gwiazdy Proxima Centauri, która prawdopodobnie

Lech FALANDYSZ

Problem promienia protonu (chyba) wyjaśniony

Wiadomo, że proton nie jest cząstką punktową – złożony jest z trzech kwarków „posklejanych” gluonami i jest opisywany przez pewien przestrzenny rozkład ładunku elektrycznego, rozkład momentu magnetycznego, polaryzowalność elektryczną i magnetyczną. W szczególności sensowne jest pytanie o to, jaki jest promień protonu, a w burzliwej historii pomiarów tej wielkości właśnie nastąpił kolejny zwrot akcji. Aby docenić jego doniosłość, trzeba cofnąć się do poprzedniego zwrotu akcji, który miał miejsce w roku 2010, kiedy opublikowano w czasopiśmie *Nature* wyniki pomiarów różnicy energii stanów $2S$ i $2P$ w wodorze mionowym, co pozwoliło wyznaczyć promień protonu z dokładnością kilkadziesiąt razy lepszą niż uzyskiwana przed rokiem 2010.

Wygodną jednostką długości, dostosowaną do skali rozmiarów jąder atomowych, jest *femtometr*: $1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m}$. Promień protonu to trochę mniej niż 1 fm . W interferometrach LIGO i Virgo, rejestrujących fale grawitacyjne, których prostopadłe ramiona mają kilka kilometrów długości, mierzy się zmiany różnicy długości ramion interferometru z dokładnością do 10^{-18} m . Dla porównania, często mówi się, że to jest tyle, co jedna tysięczna promienia protonu. Ciekawostką jest fakt, że na razie samego promienia protonu nie potrafimy zmierzyć z tak dużą precyzją.

Wspomniana niepunktowość protonu (czyli jego przestrzenna rozciągłość) daje wkład do energii przejść pomiędzy stanami atomu wodoru, którego jądrem jest pojedynczy proton. Oznacza to, że gdyby cały ładunek protonu był skupiony w jednym punkcie, to te energie byłyby inne niż dla rozciągniętego protonu, przy czym energie te wyznacza się za pomocą przybliżonych rachunków, w których najpierw oblicza się dokładne wartości dla punktowego protonu (bo te umiemy obliczyć ściśle), następnie za pomocą przybliżonych rachunków oblicza się kolejne tzw. poprawki, uwzględniające różnorakie efekty. Największa poprawka jest proporcjonalna do tzw. średniej kwadratowej rozkładu ładunku w protonie (czyli pewnej miary jego rozciągłości). Wkład ten jest niewielki, ale większy niż dokładność pomiarów spektroskopowych i szacowany błąd obliczeń teoretycznych, co oznacza, że powinno dać się go zmierzyć. Obliczenia energii przejść w atomie wodoru opierają się na elektrodynamice kwantowej i są jednymi z najbardziej skomplikowanych rachunków kiedykolwiek wykonanych. Naturalnie, to, czy tak skomplikowane obliczenia da się wykonać, nie popołniając w ich trakcie błędu, jest źródłem pewnego sceptycyzmu wobec uzyskanych wyników, ale ufano im na tyle, że publikowana przed 2010 rokiem wartość promienia ładunkowego protonu wyznaczana była głównie z porównania pomiarów energii różnych przejść pomiędzy stanami atomu wodoru z teoretycznymi przewidywaniami wykonanymi dla punktowego jądra. Istniały także niezależne pomiary promienia protonu pochodzące z doświadczeń nad rozpraszaniem elektronów na protonach.

Jednym z pomysłów na dokładniejszy pomiar rozkładu ładunku w protonie było wykonanie pomiarów spektroskopowych w wodorze mionowym – atomie wodoru, w którym elektron byłby zastąpiony przez 200 razy cięższy mion. Ta różnica mas sprawia, że

względny wkład rozmiaru protonu do energii przejść zwiększa się o czynnik 200^3 i nie jest to już mała poprawka pośród setek tysięcy innych, dużo bardziej subtelnych.

Cząstki elementarne *elektron, mion oraz taon* są bardzo podobne. Mają ten sam ładunek elektryczny oraz spin. W odróżnieniu od *kwarków* (z których jest zbudowany np. proton) nie podlegają oddziaływaniom silnym. Istotnie różnią się jedynie masą. Odkryty w 1936 roku mion jest 203 razy cięższy od elektronu, a odkryty w 1975 roku taon jest 3477 razy cięższy od elektronu (a więc prawie 2 razy cięższy od protonu). Dzięki temu, że mion jest tak podobny do elektronu, może go zastąpić w atomie, ale na krótko, ponieważ jest nietrwały – jego średni czas życia to około $2 \cdot 10^{-6}\text{ s}$, co w porównaniu z innymi nietrwałymi cząstkami elementarnymi jest bardzo długim czasem życia. Swą „długowieczność” mion zawdzięcza właśnie temu, że nie podlega oddziaływaniom silnym i za jego rozpad odpowiadają tylko oddziaływania słabe. Cząstki rozpadające się poprzez oddziaływania silne robią to znacznie szybciej. Te dwie milionowe części sekundy muszą wystarczyć badaczom, aby połączyć mion z protonem w atom i zdążyć zmierzyć energię przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi, zanim mion się rozpadnie.

Po kilkunastu latach prób, w 2010 roku, wykonano w końcu wspomniany pomiar energii przejść $2S - 2P_{1/2}$ i $2S - 2P_{3/2}$ w wodorze mionowym i... okazało się że zmierzony w ten sposób promień protonu ($0,84184 \pm 0,00067\text{ fm}$) jest znacząco (o 5%) mniejszy niż wcześniej publikowane wartości ($0,8768 \pm 0,0069\text{ fm}$). Różnica pomiędzy rozmiarem protonu wydedukowanym z pomiarów „elektronowych” i „mionowych” siedem razy przekraczała szacowany błąd wcześniejszych wyników.

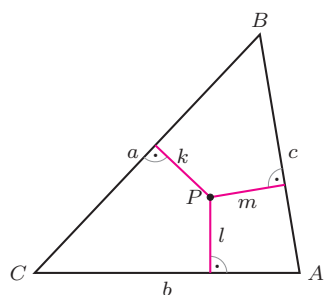
Przez siedem lat podejmowano kolejne nieudane próby odkrycia, co jest powodem niezgodności. Tytułowy „problem promienia protonu” był jednym z bardziej tajemniczych nierozwiązanych problemów fizyki współczesnej. Pomysłów początkowo były setki, od błędów w niezwykle skomplikowanych obliczeniach elektrodynamiki kwantowej, rozmaitych błędów doświadczalnych w starych pomiarach elektronowych i w nowych – mionowych, powstawania egzotycznych cząsteczek z udziałem mionów, które zaburzałyby pomiary, aż po najbardziej fascynujące: manifestacje „nowej fizyki” – jakieś nowe zjawisko – być może nowe cząstki lub nowe oddziaływanie, o którym dotąd nie wiedzieliśmy. Najmniej podejrzany był wynik pomiaru w wodorze mionowym, bo mierzony efekt był duży, a cały eksperyment był prosty i w zasadzie nie było gdzie w nim zrobić błędu.

5 października 2017 opublikowano w magazynie *Science* artykuł, który przyczynia się wreszcie do wyjaśnienia zagadki. Zmierzono ponownie, używając nowych technik doświadczalnych, dwa przejścia ($2S - 4P_{1/2}$ i $2S - 4P_{3/2}$) w atomie wodoru (tym zwykłym, elektronowym). Okazało się, że wynik znacząco różni się od opublikowanego wcześniej i jest zgodny z tym, co powinno było wyjść, jeśli by wierzyć obliczeniom teoretycznym i wartości promienia protonu z pomiarów w wodorze mionowym. Opublikowane wyniki wskazują, że obecnie najbardziej prawdopodobne wytłumaczenie zagadki promienia protonu to przyjęcie, że część z pomiarów energii przejść w zwykłym elektronowym atomie wodoru była błędna.

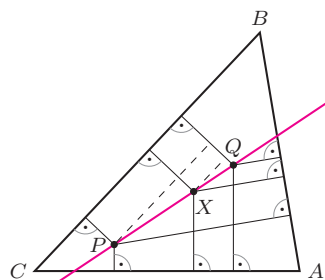
Grzegorz ŁACH

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

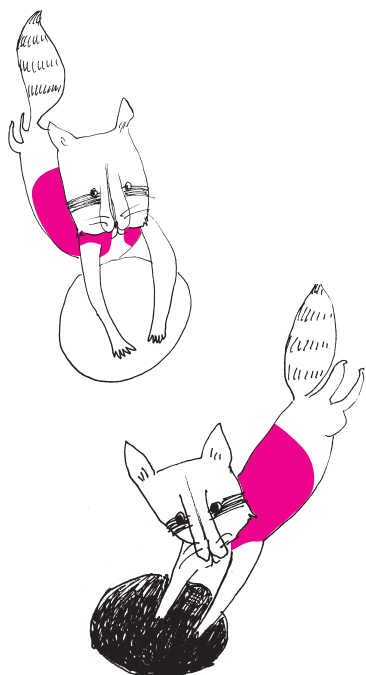
Funkcja m zmiennych jest jednorodna w stopniu k , gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dla dowolnego λ i dowolnych x_1, x_2, \dots, x_m ze swojej dziedziny; np. funkcja $x^\pi \sin(y/x) + y^\pi \sin(x/y)$ jest jednorodna w stopniu π . Funkcja jest gładka w stopniu k , gdy ma k ciągłych pochodnych.



Rys. 1



Rys. 2



Geometry od dawna marzyli o współrzędnych jednorodnych, czyli takich n -tkach liczb (dalej dla uproszczenia będzie mowa o parach i trójkach) przyporządkowanych punktom, że gdy wszystkie liczby w n -tce pomnożymy przez tę samą liczbę, to nowa n -tka będzie współrzędnymi tego samego punktu.

Traci się w ten sposób jednoznaczność współrzędnych danego punktu, ale zyskuje się to, że wszelkie sytuacje geometryczne będą opisywane wyłącznie funkcjami jednorodnymi. To wielka wygoda, bo okazuje się, że dla k naturalnych

funkcja jednorodna w stopniu k i gładka w stopniu k to zawsze wielomian.

Dowód tego faktu jest bardzo prosty (Euler), ale wymaga – rzecz jasna – użycia pojęcia pochodnej, więc go pominię.

Aby ten cel osiągnąć, Julius Plücker zaproponował **współrzędne trójkątowe** zwane też **trójliniowymi**.

Jak się łatwo domyślić, potrzebny jest w tym celu trójkąt, ale trójkąt, w którym dysponujemy całymi prostymi zawierającymi jego boki. Współrzędne punktu to będą odległości od tych prostych, przy czym odległość będziemy brali ze znakiem „+”, gdy punkt leży po tej samej stronie prostej, co nieleżący na niej wierzchołek trójkąta, i ze znakiem „-” w przeciwnym przypadku.

Jak widać, na rysunku 1 punkt P ma wszystkie współrzędne dodatnie. Takimi też będą się posługiwał, pozostawiając Czytelnikowi (łatwe) rozpatrzenie innych przypadków.

Oznaczmy pole trójkąta ABC przez $\frac{1}{2}\Delta$. Współrzędnymi P jest więc trójka (k, l, m) . Zauważmy też, że

$$a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m = \Delta.$$

To proste spostrzeżenie pozwala potwierdzić, że współrzędne te są faktycznie jednorodne, bo jednostki miar długości czy pola możemy dobrać dowolnie.

Zaletą dodatkową współrzędnych trójkątowych jest to, iż proste mają w tych współrzędnych równania liniowe. Sprawdźmy to.

Niech współrzędnymi P będzie trójka (k, l, m) , a współrzędnymi Q trójka (p, q, r) . Znajdźmy warunek na to, by punkt X o współrzędnych (x, y, z) leżał na prostej PQ .

$$\text{Z rysunku 2 mamy } \frac{x-k}{p-k} = \frac{PX}{PQ}. \text{ Podobnie } \frac{y-l}{q-l} = \frac{PX}{PQ} = \frac{z-m}{r-m}.$$

Teraz potrzebna nam będzie trójka (α, β, γ) spełniająca dwa warunki

$$\alpha \cdot k + \beta \cdot l + \gamma \cdot m = 0 \quad \text{ i } \quad \alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot r = 0.$$

Takie warunki użytkownicy algebry liniowej nazywają znikaniem iloczynu skalarnego, a poszukiwana trójka to dla nich iloczyn wektorowy. Nie trzeba jednak tych pojęć znać, by sprawdzić poprawność zgadniętej odpowiedzi.

Taką trójką jest $(\alpha, \beta, \gamma) = (lr - mq, mp - kr, kq - lp)$. Z udowodnionych wyżej proporcji mamy więc $\alpha(x - k) + \beta(y - l) + \gamma(z - m) = 0$, a na koniec $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ – i takie jest równanie prostej PQ .

Bardzo ładnie, ale co z tego za pożytek?

Aby go zobaczyć, trzeba spojrzeć na to oczyma kolegi Plückera (to nie żart: byli rówieśnikami i bliskimi znajomymi), Ferdinanda Möbiusa.

Möbius postanowił zamiast korzystać z boków trójkąta skorzystać z jego wierzchołków. Co więcej, odwołał się do fizyki, a konkretnie użył środków ciężkości. Już od czasów Archimedesusa wiadomo, że grawitacja działa tak „w dół”, jak „do góry” (balony, statki na wodzie). Dlatego mamy do czynienia z ciężarami i wyporami, co w szkolnej fizyce prowadzi do pojęcia dźwigni jedno- bądź dwustronnej.

Gdy obciążymy dwa punkty A i B , to ich środek ciężkości może wypaść w dowolnym punkcie prostej AB . Dokładniej – obowiązuje zasada „ramię razy siła”, czyli gdy w punkcie A umieścimy ciężar/wypór m_A , a m_B w punkcie B , wówczas środek ciężkości będzie spełniał warunek $\vec{AS} \cdot m_A + \vec{BS} \cdot m_B = 0$. Możemy parę (m_A, m_B) uznać za współrzędne punktu S na prostej AB . Takie współrzędne Möbius nazwał **współrzednymi barycentrycznymi**. Czytelnik zechce sprawdzić, że współrzędne punktów na poniższym rysunku



mogą być następujące: $P = (2, -1)$, $Q = (1, 3)$, $R = (-3, 5)$. Mogą, bo współrzędne barycentryczne są jednorodnie – przecież obciążać punkty możemy równie dobrze w gramach, jak w tonach.

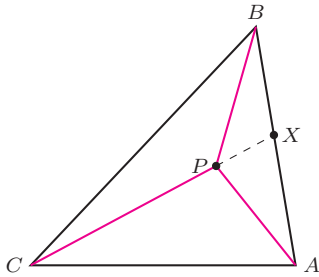
Aby wprowadzić współrzędne barycentryczne na płaszczyźnie, trzeba na niej wskazać odpowiednik zasady „ramię razy siła”. A oto i on

Jeśli środkiem ciężkości (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to pole trójkąta XYZ .

Rzeczywiście, mamy bowiem (rys. 3)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{ACX}} = \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{ACX} - \Delta_{APX}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{ACP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

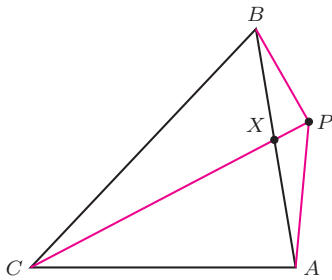
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.



Rys. 3

Kolejność wierzchołków przy „deltach” jest pomyślana tak, by rachunek przebiegał równie dobrze dla punktów leżących poza wnętrzem trójkąta ABC (rys. 4) – trzeba tylko zamienić pojęcie pola na pojęcie pola zorientowanego, czyli wyróżnić jeden sposób obiegania wierzchołków trójkąta (np. „zgodnie z ruchem wskazówek zegara”, czyli ruchem Słońca na naszym niebie) i uznać pola obiegane w ten sposób za dodatnie, a pozostałe za ujemne.

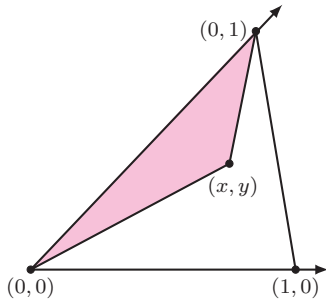
Teraz obciążenia wierzchołków trójkąta odpowiadające punktowi P możemy uznać za jego współrzędne barycentryczne.



Rys. 4

I tu warto porównać rysunek 1 i 3 – przecież w obu zainteresowanie skoncentrowane jest na polach trójkątów APB , BPC , CPA . Po chwili zastanowienia dochodzimy do wniosku, że Plücker i Möbius wymyślili to samo, a tylko inaczej na to spojrzeli.

Co więcej, wymyślone przez nich współrzędne są w doskonałej zgodności ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi. Uzasadnienie tego jest na rysunku 5.



Rys. 5

Punkty A, B, C potraktujmy jak wyznaczające kartezjański układ współrzędnych punkty $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Rozpatrzmy, jak trzeba obciążyć te punkty, by środek ciężkości wypadł w punkcie o kartezjańskich współrzędnych (x, y) . Ze współrzędnych barycentrycznych tego punktu wybierzmy te, które sumują się do 1 (wystarczy podzielić każdą ze współrzędnych przez ich sumę – o ile jest niezerowa) – takie szczególne współrzędne nazywają się **arealne**. Czytelnik z łatwością zauważy, że obciążenie punktu $(1, 0)$ to właśnie będzie x . Podobnie $(0, 1)$ należy obciążyć ciężarem/wyporem y . No, a $(0, 0)$? Oczywiście, $1 - x - y$, bo to współrzędne arealne, czyli sumujące się do 1.

Dziś monografia Plückera *Analytisch-geometrische Entwicklungen* jest praktycznie zapomniana, natomiast dzieło Möbiusa *Der barycentrische Calcül* cieszy się znacznym szacunkiem. Powód jest niebagatelny, a da się pokazać już w przypadku współrzędnych na prostej: punktu o współrzędnych barycentrycznych $(1, -1)$ na prostej nie ma! Bo gdy znaki są różne, punkt leży poza odcinkiem AB z tej strony, z której wartość bezwzględna obciążenia jest większa (proszę porównać z rysunkiem na górze strony!), a tutaj... Podobnie nie ma na płaszczyźnie punktów, których suma współrzędnych barycentrycznych znika.

I Möbius zaproponował, by płaszczyznę (prostą, przestrzeń) uzupełnić o te punkty. I tak wskazał, że jego współrzędne stosują się także w geometrii rzutowej (bo tak nazywają się pouzupełniane w ten sposób przestrzenie różnego wymiaru), a **geometria rzutowa to**, jak za Cayleym mówią do dziś geometry, **cała geometria**.

O współrzędnych barycentrycznych można więcej przeczytać w moim artykule *Co mogą nam dać ciężary i wypory?*, Δ_{12}^3 , a o geometrii rzutowej w *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Δ_{13}^5 .



Rozwiązanie zadania F 947.

Z informacji $R = r_0 A^{1/3}$ wynika, że objętość jądra jest proporcjonalna do liczby nukleonów, a więc średnio, na każdy nukleon przypada objętość kuli o promieniu r_0 . Tym samym możemy przyjąć, że nieoznaczoność każdej ze współrzędnych nukleonu wynosi r_0 . Zgodnie z zasadą nieoznaczoności dla współrzędnej x mamy $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, gdzie p_x oznacza pęd w kierunku x . Analogiczne nierówności spełnione są dla współrzędnych i pędów w kierunkach y i z . Pozwala to wyznaczyć nieoznaczoność pędu w każdym z kierunków $i = x, y, z$:

$$\Delta p_i \approx p_i \geq \frac{\hbar}{2r_0}.$$

Ruch nukleonu odbywa się w ograniczonym obszarze i wobec tego ma charakter oscylacyjny, co pozwala nam utożsamiać nieoznaczoność pędu Δp_i z jego wartością p_i . Dla energii kinetycznej E_k ruchu nukleonu otrzymujemy:

$$E_k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2M} \geq \frac{3(\hbar c)^2}{8Mc^2 r_0^2},$$

a po podstawieniu danych liczbowych $E_k \gtrsim 10$ MeV. Wartość średniej energii wiązania E_B nukleonu musi być większa od jego energii kinetycznej. Otrzymujemy oszacowanie $E_B \gtrsim 10$ MeV. Dla ciężkich jąder mierzona średnia energia wiązania na nukleon wynosi około 8 MeV.



Rozwiązanie zadania F 948.

W chwili zastygania skały znajdującej się w niej jony uranu, a nie ma jonów ołowiu. Wszystkie jony ^{206}Pb znajdujące w skałe pochodzą więc z późniejszych rozpadów jonów ^{238}U . Niech U_0 oznacza początkową liczbę jonów ^{238}U w próbce. Ich liczba po czasie t wynosi

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}\right),$$

a liczba jonów ^{206}Pb wynosi $U_0 - U(t)$, bo wszystkie powstały w wyniku rozpadu ^{238}U . Stosunek liczby jonów ^{206}Pb do liczby jonów ^{238}U , wynosi więc

$$x = 1 - \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}\right).$$

Stąd otrzymujemy wiek skały

$$t = t_{1/2} \frac{\ln(x+1)}{\ln 2} \approx 2,6 \cdot 10^9 \text{ lat.}$$

Konsekwencje twierdzenia Dirichleta

Słynne twierdzenie Dirichleta głosi, że jeżeli liczby naturalne $a, r \geq 1$ są względnie pierwsze, to ciąg arytmetyczny $a, a+r, a+2r, \dots$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Przedstawimy kilka wniosków płynących z tego twierdzenia.

Wniosek A

W każdym takim ciągu dla każdej liczby naturalnej s istnieje nieskończenie wiele wyrazów będących iloczynami s różnych liczb pierwszych. Dowód tego stwierdzenia można znaleźć w książeczce Wacława Sierpińskiego „250 zadań z elementarnej teorii liczb” (WSiP, Warszawa 1986, zadanie nr 70).

Wniosek B

Dla każdej liczby naturalnej $m \geq 1$ istnieje taka liczba pierwsza $p > 2m$, że przedziały $[p-2m, p)$ i $(p, p+2m]$ nie zawierają liczby pierwszej. Dowód powyższego stwierdzenia znajduje się w moim artykule *Tryptyk o liczbach pierwszych* w Δ_{00}^8 .

Wniosek C

Jeżeli w takim ciągu pewien wyraz jest k -tą potęgą liczby naturalnej, to ciąg ten zawiera nieskończenie wiele k -tych potęg liczb pierwszych.

Dowód Andrzeja Schinzla (korespondencja prywatna). Załóżmy, że $b^k \equiv a \pmod r$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}^+$. Skoro $\text{NWD}(a, r) = 1$, to wynika stąd, że $\text{NWD}(b, r) = 1$. Zatem na mocy twierdzenia Dirichleta istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że $p \equiv b \pmod r$. W konsekwencji $p^k \equiv b^k \pmod r$, czyli $p^k \equiv a \pmod r$, co kończy dowód.

Wniosek D

Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$ ciąg arytmetyczny $1, 1+r, 1+2r, \dots$ zawiera nieskończenie wiele k -tych potęg liczb pierwszych.

Uzasadnienie. Wystarczy zauważyć, że $a = 1 \equiv 1^k \pmod r$ i skorzystać z poprzedniego wniosku.

Wniosek E

Niech $a, r \geq 1$ będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Wówczas dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$ istnieje nieskończenie wiele takich par p, q liczb pierwszych, że pewien wyraz ciągu arytmetycznego $a, a+r, a+2r, \dots$ jest postaci pq^k .

Dowód. Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Niech q będzie dowolnie ustaloną liczbą pierwszą, nie dzielącą r . Skoro liczby q^k i r są wtedy względnie pierwsze, to istnieją takie liczby naturalne $s, t \geq 1$, że

$$(*) \quad sq^k - tr = 1.$$

Przy tym widać, że liczby s i r są względnie pierwsze. Ponadto z założenia liczby a i r są względnie pierwsze. Wynika stąd, że $\text{NWD}(as, r) = 1$. Zatem, wykorzystując twierdzenie Dirichleta, stwierdzamy, że ciąg arytmetyczny $as+r, as+2r, as+3r, \dots$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech więc $m \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $p = as + mr$ będzie liczbą pierwszą i przy tym takich liczb p jest nieskończenie wiele. Połóżmy $n = 1 + at + mq^k$. Wtedy n -ty wyraz ciągu arytmetycznego $a, a+r, a+2r, \dots$ jest, wobec (*), równy:

$$\begin{aligned} a + (n-1)r &= a + (at + mq^k)r = a(1+tr) + mq^k r = asq^k + mq^k r = \\ &= (as + mr)q^k = pq^k. \end{aligned}$$

Wniosek F

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których zapis dziesiętny kończy się na:

$$11\dots 1, \quad 33\dots 3, \quad 77\dots 7, \quad 99\dots 9.$$

Dowód tej własności pozostawiam Czytelnikowi. Powodzenia!

Witold BEDNAREK

Informatyczny kącik olimpijski (113): Kieszonkowe

Zadanie (VIII Olimpiada Informatyczna Gimnazjalistów w roku szkolnym 2013/2014). Danych jest n stosów, ponumerowanych od 1 do n . Każdy stos zawiera dokładnie dwie monety, ułożone jedna na drugiej. Ciąg g_1, g_2, \dots, g_n oznacza nominały monet, znajdujących się na górze kolejnych stosów, zaś ciąg d_1, d_2, \dots, d_n nominały monet, znajdujących się na dole kolejnych stosów. Staś, bohater zadania, może wykonać co najwyżej k ruchów. W każdym ruchu chłopiec wybiera dowolny niepusty stos i zabiera monetę ze szczytu tego stosu. Jaki jest największy możliwy zysk Stasia?

Rozwiązanie dynamiczne

Zadanie możemy rozwiązać, korzystając z metody programowania dynamicznego. Niech $DP[i][j]$ oznacza maksymalny zysk dla problemu ograniczonego do stosów o numerach od 1 do i oraz maksymalnej liczbie ruchów równej j . Łatwo obliczyć wartości DP dla pierwszego stosu ($i = 1$):

- $DP[1][0] = 0$;
- $DP[1][1] = g_1$;
- $DP[1][j] = g_1 + d_1$, dla $j > 1$.

Przejdźmy teraz do obliczenia wyników dla większej liczby stosów. Dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ oraz $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ aby obliczyć wartość $DP[i][j]$, należy rozpatrzyć trzy sytuacje:

- nie bierzemy ani jednej monety z i -tego stosu, wtedy wynikiem jest $DP[i-1][j]$;
- bierzemy jedną monetę z i -tego stosu, wtedy wynikiem jest $DP[i-1][j-1] + g_i$;
- bierzemy dwie monety z i -tego stosu, wtedy wynikiem jest $DP[i-1][j-2] + g_i + d_i$.

Wartością $DP[i][j]$ jest maksimum z trzech powyższych wartości. Oczywiście, druga sytuacja jest możliwa tylko dla $j > 0$, podobnie trzecia tylko dla $j > 1$. Największym zyskiem Stasia jest $DP[n][k]$.

Wszystkich stanów jest $O(nk)$. Obliczenie wyniku dla każdego stanu odbywa się w czasie stałym. Stąd złożoność czasowa rozwiązania wynosi $O(nk)$.

Rozwiązanie zachłanne

Okazuje się, że istnieje rozwiązanie o lepszej złożoności czasowej. Na początku podzielmy stosy na dwie grupy. Niech pierwsza grupa zawiera stosy, których górna moneta ma nominal nie mniejszy niż dolna moneta, nazwijmy je A -stosami. Pozostałe stosy niech tworzą drugą grupę i nazwijmy je B -stosami. Każdą z tych grup rozważmy oddzielnie.

Przypadek 1: A -stosy

Załóżmy, że mamy m A -stosów. Chcemy wybrać x monet, których sumaryczna wartość jest największa. Załóżmy dodatkowo, że w każdym ruchu możemy wybrać dowolną monetę (górną lub dolną). Nietrudno zauważyć, że aby zmaksymalizować zysk, należy wybrać x monet o największym nominale. Zatem posortujmy wszystkie monety malejąco według nominalu. Otrzymujemy ciąg a_1, a_2, \dots, a_{2m} , oznaczający wartości wszystkich monet. Największy zysk uzyskamy, jeśli weźmiemy następujące monety: a_1, a_2, \dots, a_k .

Strategia zachłanna, która została opisana powyżej, jest również poprawna bez dodatkowego założenia o braniu dowolnej monety. Ustalamy zatem, że możemy brać tylko monety ze szczytu stosu. Przypuśćmy, że w optymalnym rozwiązaniu chcemy wziąć dwie monety a_i (górną) i a_j (dolną), które tworzą jeden stos. Skoro rozważamy A -stos ($a_i \geq a_j$) oraz ciąg a jest posortowany malejąco, to $i \leq j$. Zatem strategia zachłanna jest poprawna, ponieważ najpierw wybierze górną monetę a_i , a dopiero potem dolną a_j . Tutaj jest drobna subtelnosc, jeśli dwie monety mają ten sam nominal, wtedy pierwszeństwo ma górna.

Przypadek 2: B -stosy

Załóżmy, że mamy m B -stosów. Chcemy wybrać x monet, których sumaryczna wartość jest największa. Przypuśćmy, że w optymalnym rozwiązaniu istnieją dwa stosy (o numerach i oraz j), z których zabieramy po jednej monecie. Bez straty ogólności możemy założyć, że $g_i \leq g_j$. Wiadomo (z własności B -stosu), że $g_j < d_j$. Skoro $g_i \leq g_j$ oraz $g_j < d_j$, to $g_i < d_j$. Zatem wzięcie po jednej monecie ze stosów i i j nie jest optymalnym rozwiązaniem, gdyż bardziej opłaca się wziąć dwie monety z j -tego stosu. Stąd otrzymujemy, że w optymalnym rozwiązaniu nie ma dwóch stosów, z których zabieramy po jednej monecie. Innymi słowy, jest co najwyżej jeden stos, z którego zabieramy jedną monetę.

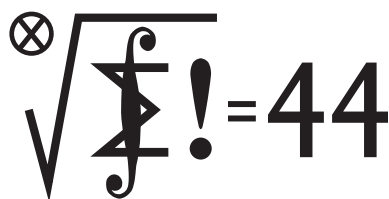
Zatem posortujmy stosy według malejącej sumy nominalów. Otrzymujemy ciąg s_1, s_2, \dots, s_n , gdzie s_i oznacza sumę nominalów i -tego najcenniejszego stosu. Jeśli x jest parzyste, to wybieramy monety ze stosów $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}}$. W przeciwnym przypadku rozważamy dwie sytuacje. Pierwsza z nich polega na wzięciu stosów $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}}$ oraz monety o największym nominale spośród szczytów pozostałych stosów. Druga zaś polega na wzięciu stosów $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}+1}$ bez monety o najmniejszym nominale spośród spodów wybranych stosów.

Podsumowanie

Rozwiązanie opiera się na rozpatrzeniu dla każdego $x \in \{0, 1, \dots, k\}$ następującego przypadku: wybieramy x monet z A -stosów oraz $k - x$ monet z B -stosów. Wynikiem jest maksimum spośród wyników dla tych przypadków. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$. Szczegóły implementacyjne pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 757, 758

Redaguje Marcin E. KUCZMA

757. Funkcje $f, g: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ są określone wzorami

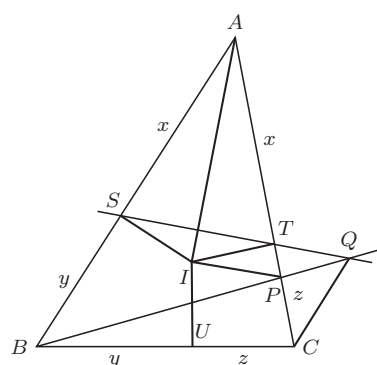
$$f(k) = \max\{1, k - 1\}, \quad g(k) = \min\{n, k + 1\}.$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ ustalić, ile jest funkcji $h: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, dających się wyrazić jako złożenia skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji f, g . [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji f, g), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe $h(k) = k$.]

758. Trzy okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu R . Wykazać, że

$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} \leq 3R.$$

Zadanie 758 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.



Rozwiązania zadań z numeru 11/2017

Przypominamy treść zadań:

749. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I , stycznym do boków AB i AC w punktach S i T . Na boku AC leży taki punkt P , że $IP \parallel ST$. Proste ST i BP przecinają się w punkcie Q . Dowiedź, że $QC \parallel AB$.

750. Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych p, q ($p > q$), dla których także liczby $(p^2 + q^2)/2$ oraz $(p^2 - q^2)/24$ są pierwsze.

749. Oznaczmy przez U punkt styczności boku BC z okręgiem wpisanym (rys.) i niech

$$x = |AS| = |AT|, \quad y = |BS| = |BU|, \quad z = |CT| = |CU|,$$

$$r = |IS| = |IT| = |IU|, \quad s = x + y + z.$$

Zachodzi równość $xyz = r^2 s$ (znany fakt – lub nietrudne ćwiczenie).

Odcinek IT jest wysokością w trójkącie prostokątnym AIP ; zatem $|PT| = r^2/x = yz/s$. Stąd

$$\frac{|AP|}{|PT|} = \frac{|AT| + |PT|}{|PT|} = 1 + \frac{|AT|}{|PT|} = 1 + \frac{sx}{yz} =$$

$$= \frac{yz + (x + y + z)x}{yz} = \frac{(x + y)(x + z)}{yz}.$$

Prosta BP przecina boki trójkąta AST (lub ich przedłużenia) w punktach Q, P, B więc w myśl wzoru Menelausa

$$\frac{|QS|}{|TQ|} = \frac{|AP|}{|PT|} \cdot \frac{|SB|}{|BA|} = \frac{(x + y)(x + z)}{yz} \cdot \frac{y}{x + y} =$$

$$= \frac{x + z}{z} = \frac{|AC|}{|CT|}.$$

Uzyskana proporcja implikuje równoległość prostych QC i AB (odwroćenie twierdzenia Talesa).

750. Przyjmijmy, że liczby p, q spełniają postawione warunki; w szczególności $p^2 - q^2 = 24r$, gdzie r jest liczbą pierwszą. Jasne, że $q \neq 2, q \neq 3$. Iloczyn liczb naturalnych $(p + q)/2$ i $(p - q)/2$ wynosi $6r$, więc jedna z nich dzieli się przez r . W takim razie druga jest dzielnikiem liczby 6; wobec czego mniejsza z nich nie przekracza 6. Dostajemy oszacowanie $p - q \leq 12$.

Jeżeli $q = 5$, to $p \leq 17$, czyli $p \in \{7, 11, 13, 17\}$. Sprawdzamy, że tylko para $(p, q) = (17, 5)$ jest dobra.

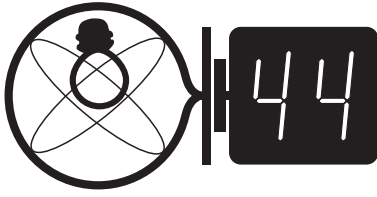
Dalej przyjmujemy, że $p > q > 5$. Wówczas $p^4 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{5}$, więc

$$(p^2 - q^2)(p^2 + q^2) \equiv 0 \pmod{5}.$$

To pokazuje, że iloczyn liczb całkowitych $r = (p^2 - q^2)/24$ oraz $s = (p^2 + q^2)/2$ dzieli się przez 5. Są to z założenia liczby pierwsze, więc któraś z nich jest równa 5. Ale $2s = p^2 + q^2 \geq 11^2 + 7^2$. Pozostaje możliwość $r = 5$.

Iloczyn liczb naturalnych $(p + q)/2$ i $(p - q)/2$ wynosi $6r = 30$. Cztery możliwe rozkłady $(30 \cdot 1, 15 \cdot 2, 10 \cdot 3, 6 \cdot 5)$ dają pary (p, q) , odpowiednio, $(31, 29), (17, 13), (13, 7), (11, 1)$. Ostatnia odpada. Dla $p = 31, q = 29$ wychodzi $s = 901$, liczba złożona. Pozostałe dwie pary są już dobre. Wraz z parą znaną wcześniej, ostatecznie otrzymujemy trzy rozwiązania. Wypiszemy je, podając również wartości r i s :

p	q	r	s
17	5	11	157
17	13	5	229
13	7	5	109

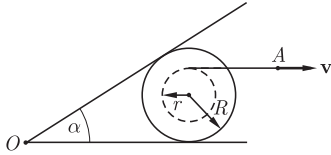


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

Zadania z fizyki nr 654, 655

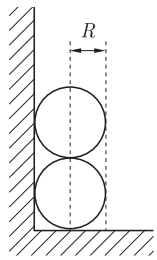
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

654. Na szpulę o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R nawinięta jest linka (rys. 1). Koniec A linki ciągnięty jest poziomo z prędkością v . Na szpuli opiera się deska, która może obracać się wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O . Szpula toczy się bez poślizgu po powierzchni poziomej. Jaka jest prędkość kątowa deski, gdy tworzy ona z poziomem kąt α ?



Rys. 1

655. Ciężarek o masie m wisi na nici. Na jaką najmniejszą wysokość należy podnieść ciężarek, aby spadając, rozerwał nić? Minimalna siła wystarczająca do rozerwania nici wynosi Mg (g jest przyspieszeniem ziemskim) i przed rozerwaniem wydłuża ją o a . Zakładamy, że siła naprężenia nici jest proporcjonalna do jej wydłużenia aż do zerwania.



Rys. 2

Przypominamy treść zadań:

646. Dwie kulki o jednakowych masach i promieniach R leżą jedna na drugiej na poziomej powierzchni, stykając się ze ścianą (rys. 2). Po zakłóceniu równowagi kulka górna ślizga się wzdłuż ściany, kulka dolna ślizga się po poziomej powierzchni, a ich prędkości początkowe są zerowe. Nie ma tarcia. Znaleźć prędkość kulki dolnej po utracie kontaktu między kulkami.

647. Nienaładowany, metalowy walec obraca się z prędkością kątową ω wokół swojej osi. Walec umieszczony jest w jednorodnym polu magnetycznym, którego wektor indukcji \vec{B} jest równoległy do osi walca. Znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca.

646. Dopóki kulki się stykają, środek masy układu S porusza się po okręgu o środku w punkcie O i promieniu R (rys. 3). Siła dośrodkowa spełnia równanie

$$2mv^2/R = 2mg \sin \alpha - F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha,$$

gdzie v jest prędkością środka masy, \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 siłami reakcji ze strony podłoża i ściany, α jest kątem, jaki tworzy wektor położenia środka masy zaczepiony w punkcie O z poziomem. Oznaczając przez N wartość siły oddziaływania między kulkami, możemy zapisać związki $F_2 = N \cos \alpha$, $F_1 = mg + N \sin \alpha$. Gdy kulki przestają się stykać, w położeniu opisanym kątem α_0 mamy $F_2 = 0$, $F_1 = mg$,

$$(1) \quad v^2 = (gR \sin \alpha_0)/2$$

Oznaczmy prędkości kulek dolnej i górnej w chwili utraty kontaktu odpowiednio przez $\mathbf{v}_1 = (v_1, 0)$ i $\mathbf{v}_2 = (0, v_2)$. Z definicji środka masy mamy

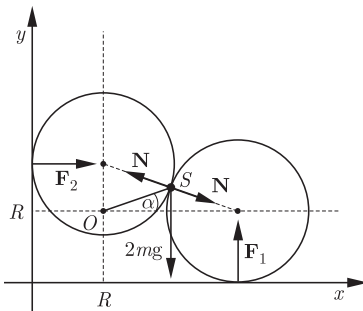
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2, \text{ zatem } v_x = v \sin \alpha_0 = v_1/2, \quad v_y = v \cos \alpha_0 = v_2/2.$$

Ponieważ nie ma tarcia, spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej

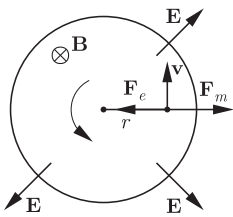
$$2mgR = 2mgR \sin \alpha_0 + m(v_1^2 + v_2^2)/2 = 2mgR \sin \alpha_0 + 2mv^2.$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy: $\sin \alpha_0 = 2/3$, $v^2 = gR/3$. Szukana prędkość dolnej kulki

w chwili utraty kontaktu z górną dana jest wzorem $v_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{gR}{3}}$.

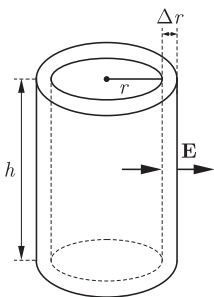


Rys. 3



Rys. 4

647. 1. Rozpatrzmy przypadek, gdy wektory indukcji pola magnetycznego \mathbf{B} oraz prędkości kątowej walca ω mają zwroty przeciwne (rys. 4). Na swobodny elektron wewnątrz walca, poruszający się po okręgu o promieniu r , działa siła magnetyczna $F_m = e\omega Br$ zwrócona na zewnątrz okręgu (e oznacza wartość bezwzględnej ładunku elektronu). Wypadkowa siła działająca na elektron jest siłą dośrodkową, zatem siła elektryczna $F_e = eE$ jest większa od siły magnetycznej i ma zwrot do środka okręgu (E jest natężeniem pola elektrycznego wewnątrz walca). Równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = eE - e\omega Br$, stąd natężenie pola elektrycznego $E = \omega r(m\omega + eB)/e = \alpha r$ ma zwrot na zewnątrz walca, a jego wartość rośnie liniowo z odległością od środka walca. Rozważmy ciekłą warstwę cylindryczną o grubości Δr wewnątrz walca (rys. 5). Oznaczając przez $\rho(r)$ gęstość ładunku wewnątrz tej warstwy, możemy zapisać prawo Gaussa $2\pi h (E(r + \Delta r) \cdot (r + \Delta r) - E(r) \cdot r) = \pi \rho(r) h (r + \Delta r)^2 - r^2) / \epsilon_0$, gdzie h jest wysokością walca. Stąd $\rho(r) = 2\epsilon_0 E(r)/r = 2\epsilon_0 \omega (m\omega + eB)/e > 0$. Gęstość ładunku wewnątrz walca jest stała i dodatnia, ładunek ujemny rozłożony jest na powierzchni walca.



Rys. 5

2. Gdy wektory \mathbf{B} i ω mają zwroty przeciwne, siła magnetyczna działająca na swobodny elektron ma zwrot do środka okręgu, równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = e\omega Br \pm eE$. Znak $+$ opisuje przypadek, gdy $\omega > eB/m$, znak $-$, gdy nierówność ma znak przeciwny. Szukana gęstość ładunku dana jest wzorem $\rho = 2\epsilon_0 \omega (m\omega - eB)/e$ i może być dodatnia albo ujemna. Gdy $\omega = eB/m$, gęstość ładunku wynosi 0.



Rozwiązanie zadania M 1560.

Odpowiedź: $n^{n/2}$.

Dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ oraz $\epsilon = e^{2i\pi/n}$ niech $a_k = \epsilon^k$. Wówczas liczby a_k wyznaczają na płaszczyźnie zespolonej n -kąć foremny wpisany w okrąg o promieniu 1.

Zauważmy, że wielomiany

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \text{oraz} \quad g(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - a_k)$$

stopnia $n-1$ mają równe współczynniki przy najwyższej potędze z oraz $n-1$ wspólnych pierwiastków zespolonych, mianowicie $z = a^k$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ (ze względu na równość

$$f(z) = (1 - z^n)/(1 - z) \quad \text{dla} \quad z \neq 1.$$

Stąd wynika, że wielomiany f i g są równe, w szczególności

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - a_k) = g(1) = f(1) = n,$$

a zatem

$$\prod_{k=1}^{n-1} |a_0 - a_k| = n.$$

Powyższa równość oznacza, że iloczyn długości boków i przekątnych zawierających wierzchołek a_0 rozważanego wielokąta (czyli, z uwagi na symetrię, dowolny ustalony wierzchołek) jest równa n . Wobec tego

$$\prod_{i < j} |a_i - a_j| = \left(\prod_{i \neq j} |a_i - a_j| \right)^{1/2} = n^{n/2}.$$



Rozwiązanie zadania M 1558.

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją. Przypuśćmy nie wprost, że trójka (a, b, c) ma opisaną własność. Wówczas trójka $(-a-1, -b-1, -c-1)$ również ją ma, więc możemy bez straty ogólności założyć, że a jest liczbą parzystą.

Jeżeli x_1, x_2 są całkowitymi pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, to liczby $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ oraz $\frac{c}{a} = x_1 x_2$ są całkowite, co wobec parzystości a oznacza, że liczby b oraz c również są parzyste.

Tymczasem jeżeli $a = 2k, b = 2\ell, c = 2m$ dla całkowitych k, ℓ, m , to wyróżnik trójmianu $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$, równy

$$(b+1)^2 - 4(a+1)(c+1) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}k(k+1) - 2\ell m - \ell - m \right) - 3,$$

daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8, co oznacza, że nie może być kwadratem liczby całkowitej. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Prosto z nieba: Szybka wizyta

Przestrzeń międzyplanetarna jest pełna mniejszych lub większych ciał – komet i asteroid – poruszających się względem Ziemi i potencjalnie jej zagrażających. Dane NEO Coordination Centre (*Near-Earth Objects*, obiektów bliskich Ziemi) Europejskiej Agencji Kosmicznej zawierają parametry orbit około 15 tys. obiektów NEO (w tym ponad 100 komet), z czego ponad 500 jest sklasyfikowanych jako obiekty o niezerowym prawdopodobieństwie kolizji z Ziemią. Rzecz jasna, wciąż odkrywane są nowe obiekty. Niedawno zarejestrowano NEO nowego rodzaju.

Bolid oznaczony numerem A/2017 U1 nadleciał z kierunku gwiazdozbioru Lutni z prędkością 25,5 km/s, zbliżając się do Układu Słonecznego po trajektorii niemal prostopadłej do ekliptyki (płaszczyzny, w której znajduje się orbita Ziemi, i w przybliżeniu także orbity innych planet i planetoid w naszym układzie). 2 września 2017 roku obiekt o rozmiarze około 400 metrów przekroczył płaszczyznę ekliptyki w okolicy orbity Merkurego, a najbliżej Słońca znalazł się w dniu 9 września. A/2017 U1 został formalnie odkryty 19 października przez zespół pracujący na teleskopie Pan-STARRS (*Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System*) Uniwersytetu Hawajskiego w Haleakali, podczas rutynowego przeglądu nieba w poszukiwaniu obiektów bliskich Ziemi.

W czasie przelotu przez Układ Słoneczny A/2017 U1 nie znalazł się niebezpiecznie blisko żadnej z ośmiu głównych planet. Po przejściu przez płaszczyznę ekliptyki i ugięciu toru ruchu w polu grawitacyjnym Słońca, tajemnicze ciało znalazło się 14 października w odległości około 24 milionów km od Ziemi (około 60 razy większej niż odległość do Księżyca). Obecnie oddala się od Słońca z prędkością około 44 km/s, poruszając się w kierunku gwiazdozbioru Pegaza.

Od dawna przypuszczano, że asteroidy lub komety przemieszczające się między gwiazdami i czasami przechodzące w pobliżu układów planetarnych muszą pojawiać się także i w naszym Układzie Słonecznym i przenosić między planetami zarodek życia (hipoteza panspermii). Jak dotąd wszystko – a w szczególności prędkość ruchu większa od prędkości ucieczki z Układu Słonecznego – wskazuje, że A/2017 U1 to pierwszy tego typu obiekt międzygwiazdny w naszym Układzie. Zbierane w trakcie jego krótkiej wizyty dane mają to ostatecznie potwierdzić i ustalić więcej informacji o pochodzeniu i składzie obiektu.

Michał BEJGER

Niebo w marcu

Do końca marca wysokość Słońca w południe zwiększy się jeszcze wyraźniej niż w lutym – o ponad 11° i w tym czasie długość dnia urośnie o kolejne 2 godziny, do prawie 13 godzin. 20 marca, o godzinie 17:15 naszego czasu Słońce przekroczy równik niebieski w drodze na północ i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna wiosna. Ze względu na refrakcję atmosferyczną do faktycznej równonocy dojdzie trzy dni wcześniej. Pierwszy dzień wiosny to również środek procesu wydłużania się dnia i skracania nocy. Potrwa on jeszcze kolejne trzy miesiące, do przesilenia letniego (w tym roku 21 czerwca). W nocy z soboty 24 marca na niedzielę 25 marca zacznie obowiązywać czas letni.

W lutym nie było pełni Księżyca, za to w marcu Srebrny Glob przejdzie przez tę fazę dwukrotnie. Miesiąc zacznie się właśnie pełnią Księżyca, przypadającą rankiem drugiego marca. 9 marca Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, 17 marca – przez now, 24 marca – przez I kwadrę i 31 marca – ponownie przez

pełnię. Jak łatwo zauważyć, bezksiężycowe noce występują jedynie w środku miesiąca, przy czym (ze względu na nachylenie ekliptyki) na niebie porannym Księżyc będzie widoczny słabo i będzie znikał w zorzy porannej już kilka dni przed nowiem, natomiast na wieczornym będzie widoczny bardzo dobrze i już 18 marca, 45 minut po zmierzchu oraz 28 godzin po nowiu, można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Księżycyca w fazie 2%, tuż nad zachodnim widnokregiem. Jego odnalezienie znacznie ułatwi znajdująca się wtedy kilka stopni od niego para jasnych planet Wenus-Merkury.

W marcu Księżyc dwukrotnie zakryje gwiazdę Regulus we Lwie, najpierw pierwszego, a następnie 28 marca. Za pierwszym razem oba ciała niebieskie zajdą tuż przed początkiem zakrycia (widoczność na zachód od Polski), natomiast za drugim zjawisko da się obserwować jedynie z północno-wschodniej Azji. Podobnie zdarzy się przy zakryciu Aldebarana w Byku 22 marca – Księżyc zajdzie niewiele przed początkiem zjawiska. Z jaśniejszych gwiazd Hiad za Księżycem zniknie tylko gwiazda 75 Tau. Za to dzień wcześniej Srebrny Glob w fazie 20% zbliży się do gwiazdy 4. wielkości 5 Tau. Na północ od linii Łębork-Gdańsk-Mragowo dojdzie do jej zakrycia przez Księżyc.

Tegoroczny marzec to miesiąc wszystkich planet oprócz Neptuna. W trakcie miesiąca wszystkie będą dostępne obserwacjom. Na niebie wieczornym ciasną początkowo parę tworzą Merkury z Wenus. Pierwsza planeta od Słońca 18 marca osiągnie maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą jednak tylko 18°. Tego wieczora godzinę po zachodzie Słońca planeta wzniesie się na wysokość prawie 7° nad zachodni widnokrąg, a w odległości 4° towarzystwa Merkuremu dotrzyma Wenus. Pierwszego kwietnia Merkury przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem, stąd planeta pozostanie widoczna do 25 marca. Następnie Merkury przejdzie na niebo poranne, 29 kwietnia osiągając maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 27°. Mimo większego o 9° oddalenia od Słońca niekorzystne nachylenie ekliptyki do widnokregu sprawi, że w kwietniu planety nie da się obserwować z dużych północnych szerokości geograficznych. W trakcie miesiąca tarcza Merkurego będzie rosła, zaś faza i jasność – malała. Na początku miesiąca Merkury rozbłyśnie do $-1,3^m$, przy średnicy tarczy 5'' i fazie 92%. 25 marca jasność planety osłabnie do $+2,5^m$, tarcza urośnie do 10'', zaś faza spadnie do 9%.

Jak już wspominałem, w marcu niedaleko Merkurego przebywa planeta Wenus, powracająca na niebo wieczorne po styczniowej koniunkcji ze Słońcem. Planeta dąży do sierpniowej (niekorzystnej) maksymalnej elongacji wschodniej i przez cały miesiąc warunki obserwacyjne Wenus będą się poprawiać. Na początku marca godzinę po zmierzchu planeta schowa się już pod horyzont, lecz potem powędruje szybko w górę i ostatniego dnia miesiąca o tej samej porze zajmie pozycję na wysokości 7° nad zachodnim widnokregiem. W marcu blask planety prawie się nie zmieni i wyniesie $-3,9^m$. Tarcza Wenus urośnie, ale tylko do 11'',

natomiast faza spadnie do 94%. Na początku marca do Wenus zbliży się Merkury na odległość 1°. 15 marca dystans między planetami przekroczy 4°, a następnie nieco spadnie, lecz po 22 marca Merkury zacznie szybko zbliżać się do Słońca i tak samo szybko oddali się od Wenus. 18 marca blisko obu planet przejdzie Księżyc tuż po nowiu.

Planeta Uran dobrze widoczna jest tylko na początku marca, gdy około godz. 19:15 zajmie pozycję na wysokości ponad 20°, świecąc jako gwiazda o jasności $+5,9^m$. Z upływem czasu planeta zbliży się do widnokregu i pod koniec miesiąca o tej samej porze Uran dotrze już do horyzontu. 29 marca czeka go bardzo bliskie spotkanie z Wenus i około 2 w nocy obie planety oddzieli jedynie nieco ponad 4'. Niestety, wtedy nie da się ich obserwować z Polski. U nas 18 marca planety zbliżą się na 19', dzień później dystans urośnie do prawie 1°. Obie planety znajdą się niewiele ponad 1° od gwiazdy *o* Psc.

W drugiej połowie nocy marcowej poprawiają się warunki obserwacyjne trzech najbliższych Ziemi planet zewnętrznych. Jowisz przygotowuje się do majowej opozycji i – jak zawsze – dwa miesiące przed nią zmienia kierunek swojego ruchu z prostego na wsteczny, co nastąpi 9 marca. Stąd planeta przez cały miesiąc wśród gwiazd przesunie się bardzo niewiele, zajmując pozycję w środku gwiazdozbioru Wagi, 8° na południe od gwiazdy Zuben Eschamali (β Lib). Jowisz pokaże się na nieboskłonie przed północą, a w trakcie miesiąca jego jasność urośnie do $-2,4^m$, zaś średnica tarczy – do 43''. 7 marca 4° od Jowisza przejdzie Księżyc w fazie 72%.

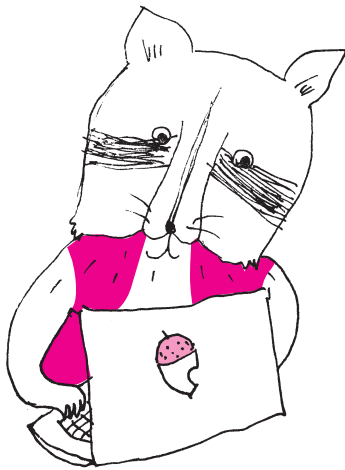
Mars oraz Saturn będą widoczne nad ranem. Początkowo Mars będzie wschodził około godziny 2:30, Saturn – godzinę później, ale z upływem miesiąca Czerwona Planeta zbliży się do Saturna, zmniejszając dystans z 17° na początku marca do niecałych 80' na początku kwietnia. W marcu Mars przejdzie z Wężownika do Strzelca, gdzie przez cały czas przebywa Saturn, zwiększając przy tym jasność do $+0,3^m$ i średnicę do 8'', prezentując fazę 88%. 19 marca Czerwona Planeta przejdzie tylko 31' na południe od słynnej mgławicy M20, natomiast pod koniec marca minie w odległości 2° gwiazdę 3. wielkości Kaus Borealis. W tym samym czasie Saturn zwiększy swój blask do $+0,5^m$ i średnicę tarczy do 17''. Pod koniec miesiąca Saturn minie w odległości niecałych 100' gromadę kulistą M22. 10 marca Księżyc po ostatniej kwadrze spotka się z Marsem, dobę później w fazie 34% minie Saturna.

Na wiosnę warto zwrócić uwagę na gwiazdę R Leo. Jest to miryda z okresem zmian blasku 310 dni, a jej maksimum jasności w tym roku przypada w kwietniu. Może wtedy osiągnąć blask nawet $+4,5^m$. R Leo jest łatwa do odnalezienia, gdyż znajduje się 5° na zachód od jasnej gwiazdy Regulus. Dodatkowo wyróżnia się ona wyraźnie czerwoną barwą. W marcu R Leo góruje około 22, w kwietniu – około 21 (po zmianie czasu na letni).

Ariel MAJCHER

Blog, w którym wycofujemy, nie potwierdzając

W sierpniu 2010 r. dwóch wydawców prasy i książek naukowych, Adam Marcus i Ivan Oransky, postanowiło założyć bloga *Retraction Watch* (śledzenie wycofań), nazywając go oknem do samokorekcji nauki. Chodziło o znajdowanie publikacji, które z różnych powodów należy z obiegu wycofać, skreślić! Początkowo martwili się, czy im wystarczy materiałów – dziś tych obaw nie wyrażają, cytując około tysiąca przykładów rocznie. W blogu zapisywane są publikacje wycofywane (przez autora, czasopismo) po stwierdzeniu, że są: efektem pomyłki w doświadczalnych wynikach i wnioskach, świadomą kradzieżą danych (zdarzają się nawet takie przypadki, że dokonuje ich recenzent odrzucający pracę), zmyśleniem co do afiliacji instytucjonalnej, brakiem danych do ilustracji i wykresów, zwykłym fałszerstwem, plagiatem czy też nadużyciami finansowymi nieznanymi usprawiedliwienia w wynikach. Metoda naukowa tylko pozornie takie przypadki wyklucza, ponieważ zakłada rzetelne przeprowadzenie doświadczeń i konkluzji, wieloetapową drogę od autora do publikacji, a następnie stosunkowo szybką weryfikację przez życie i pracujących w tej samej dziedzinie „konkurentów” (chyba że praca dotyczy zupełnie nieistotnych zjawisk i szybko popada w zapomnienie). Niemniej jednak wszystkie te okoliczności nie eliminują zjawiska, zdarzają się bowiem przypadki wieloletniego trwania oszustwa, także w świadomości społecznej.



Okno, do którego swojego bloga przyrównali Marcus i Oransky, jest bardzo przydatne. Najsłynniejszy przykład to publikacja A.J. Wakefielda o powodowaniu autyzmu po podaniu trójskładnikowej szczepionki przeciw odrze, śwince i różyczce, opublikowana w prestiżowym czasopiśmie *Lancet* w 1998 roku. Fałszywości tezy dowodzono w około 150 tysiącach różnych komunikatów i publikacji, *Lancet* pracę wycofał, a jednak, nawet do dziś, jest cytowana (w nienaukowych źródłach) i powraca wielokrotnie. Istnienie fałszywych danych w obiegu informacyjnym wprowadza w błąd kolejnych badaczy tego samego zagadnienia, oszukuje podatników i dawców grantów, obniża poziom i wiarygodność czasopism naukowych i ogólną opinię o nauce i naukowcach. Najczęstsze obecnie fałszerstwa i pomyłki dotyczą medycyny (w szczególności badań nad rakiem), GMO i zmian klimatycznych. Nic dziwnego – są to jednocześnie tematy interesujące popularne media.

Na łamy codziennych wiadomości trafiło ostatnio wycofanie przez autorów pracy sygnowanej przez Jacka Szostaka (laureata Nagrody Nobla z medycyny i fizjologii w 2009 r.), opublikowanej w *Nature Chemistry* w 2016 r. Czyli pracy z najwyższej półki, ogłoszonej w czasopiśmie, po które też wysoko trzeba sięgać.

Jack Szostak od wielu lat stara się rozświetlić podstawową zagadkę naszego istnienia: jak powstało życie na Ziemi? Trudno sobie wyobrazić bardziej fascynujące pytanie i trudniejszą drogę dochodzenia do odpowiedzi. Nie wiemy, w jakich warunkach to życie się „zaległo”, tym bardziej nie wiemy, czy bylibyśmy w stanie takie warunki na dzisiejszej planecie (oczywiście w laboratorium) odtworzyć. Życie dzisiejsze na poziomie cząsteczek biegnie po ścieżce: informacja w DNA przekazywana jest do RNA, następnie RNA kieruje syntezą białek o niezliczonych funkcjach (często katalitycznych), warunkujących reakcje życiowe. Także synteza samych DNA i RNA przebiega w wielu procesach prowadzonych przez enzymy, białka katalityczne. Zatem znaleźliśmy się w pytaniu, pozornie żartobliwym, o pierwszeństwo jaja lub kury. Badacze

początków życia odwołują się do hipotezy „świata RNA”, według której to RNA niegdyś wypełniał podwójne funkcje replikatora i katalizatora, w wyniku ewolucji przejęte przez DNA i białka. Ślady takiej aktywności RNA odnajdujemy także dziś w niektórych procesach komórkowych. Wycofana dopiero co praca Szostaka dotyczyła możliwości udziału szczególnych, krótkich peptydów (bogatych w argininę) w replikacji RNA.

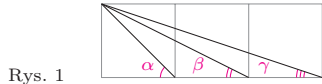
Dziś Szostak pisze, że doświadczeń tych nie potwierdzili inni badacze i jego własne laboratorium. Swoją błąd wiąże z nadmiernym podnieceniem wynikami, które okazały się pomyłką oraz z niewystarczającą ostrożnością w ich weryfikacji i interpretacji. Wyznaje ze wzruszającą szczerością: to jest *definitely embarrassing*.

Szostak należy do tych noblistów, którzy po otrzymaniu najwyższego dowodu uznania świata w dziedzinie nauki dalszych badań nie zaprzestali, ukierunkował je na najbardziej wymagające dziedziny badań. Można wyrazić mu uznanie i życzyć, by znalazł odpowiedzi na stawiane sobie (i nam) pytania.

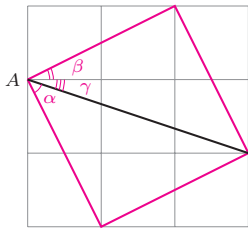
Magdalena FIKUS

W wielu zadaniach, w których występują kąty lub ich sumy, przydatne bywa przeniesienie pewnych figur tak, by kąty te znalazły się obok siebie. Szczególnie wygodne jest to wtedy, gdy suma pewnych kątów równa jest np. 90° lub 360° , a także, gdy niektóre z danych odcinków są równej długości.

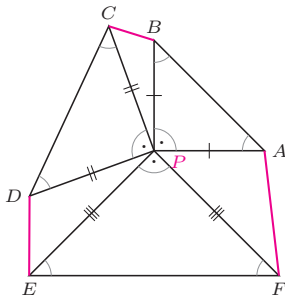
1. Dane są trzy kwadraty, ustawione jak na rysunku 1. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma$.



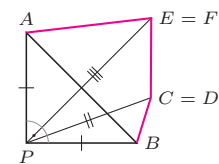
Rys. 1



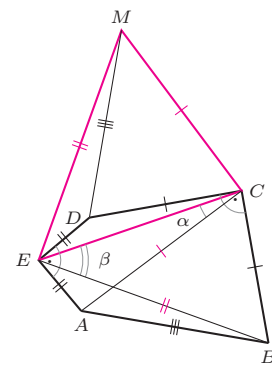
Rys. 2



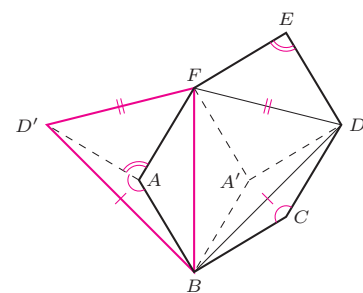
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

2. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ leży taki punkt P , że spełnione są równości $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP = \sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = 45^\circ$. Udowodnij, że suma długości odcinków BC , DE i FA jest nie mniejsza od każdego z odcinków AB , CD i EF .

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Udowodnij, że z odcinków o długościach AC , CE , EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC .

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F$. Udowodnij, że przekątne AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

R1. Kolorowy czworokąt na rysunku 2 jest kwadratem, gdyż jego boki są przekątnymi prostokątów o wymiarach 2×1 , na przemian „pionowych” i „poziomych”. Przy wierzchołku A schodzą się kąty α, β, γ z treści zadania: między odpowiednimi bokami a przekątnymi w kolorowym kwadracie i w prostokątach 2×1 oraz 3×1 . Stąd $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. \square

R2. Z równości kątów w treści zadania wynika, że trójkąty APB , CPD , EPF są prostokątne równoramienne (rys. 3). Stąd $AP = BP$, $CP = DP$, $EP = FP$ oraz $\sphericalangle BPC + \sphericalangle DPE + \sphericalangle FPA = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$.

Wobec tego trójkąty BPC , DPE , FPA oraz odbity symetrycznie trójkąt prostokątny równoramienny APB można ustawić jak na rysunku 4. Kolorowa łamana ma wówczas długość $BC + DE + FA$, nie mniejszą od odcinka AB łączącego jej końce. Dowód dla odcinków CD i EF przebiega analogicznie. \square

R3. Suma kątów wewnętrznych pięciokąta to 540° , więc z założenia wnioskujemy, że w rozważanym pięciokącie $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D = 540^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Stąd i z danych równości boków wynika, że z trójkątów EAB , ABC i CDE można złożyć trójkąt CEM tak jak na rysunku 5, o bokach żądanej długości: $MC = AC$, CE , $EM = EB$.

Ponadto skoro $\sphericalangle BCD = 90^\circ$, to także $\sphericalangle ACM = 90^\circ$ (gdyż kąty ACB i MCD są przystające), a więc $\sphericalangle ECM = 90^\circ - \alpha$. Analogicznie $\sphericalangle CEM = 90^\circ - \beta$ i wobec tego $\sphericalangle CME = 180^\circ - \sphericalangle ECM - \sphericalangle CEM = \alpha + \beta$. \square

R4. Suma kątów wewnętrznych sześciokąta to 720° , więc z założenia wnioskujemy, że $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$. Stąd i z równości wszystkich boków sześciokąta wynika, że z trójkątów równoramiennych FAB , BCD , DEF można złożyć trójkąt BFD' w sposób przedstawiony na rysunku 6.

Trójkąty BFD' i BFD są przystające (gdyż mają równe odpowiednie boki) oraz symetryczne względem prostej BF . Niech A' będzie obrazem punktu A w tej symetrii. Wówczas odcinki $A'D$, $A'B$, $A'F$ mają długości równe bokom sześciokąta.

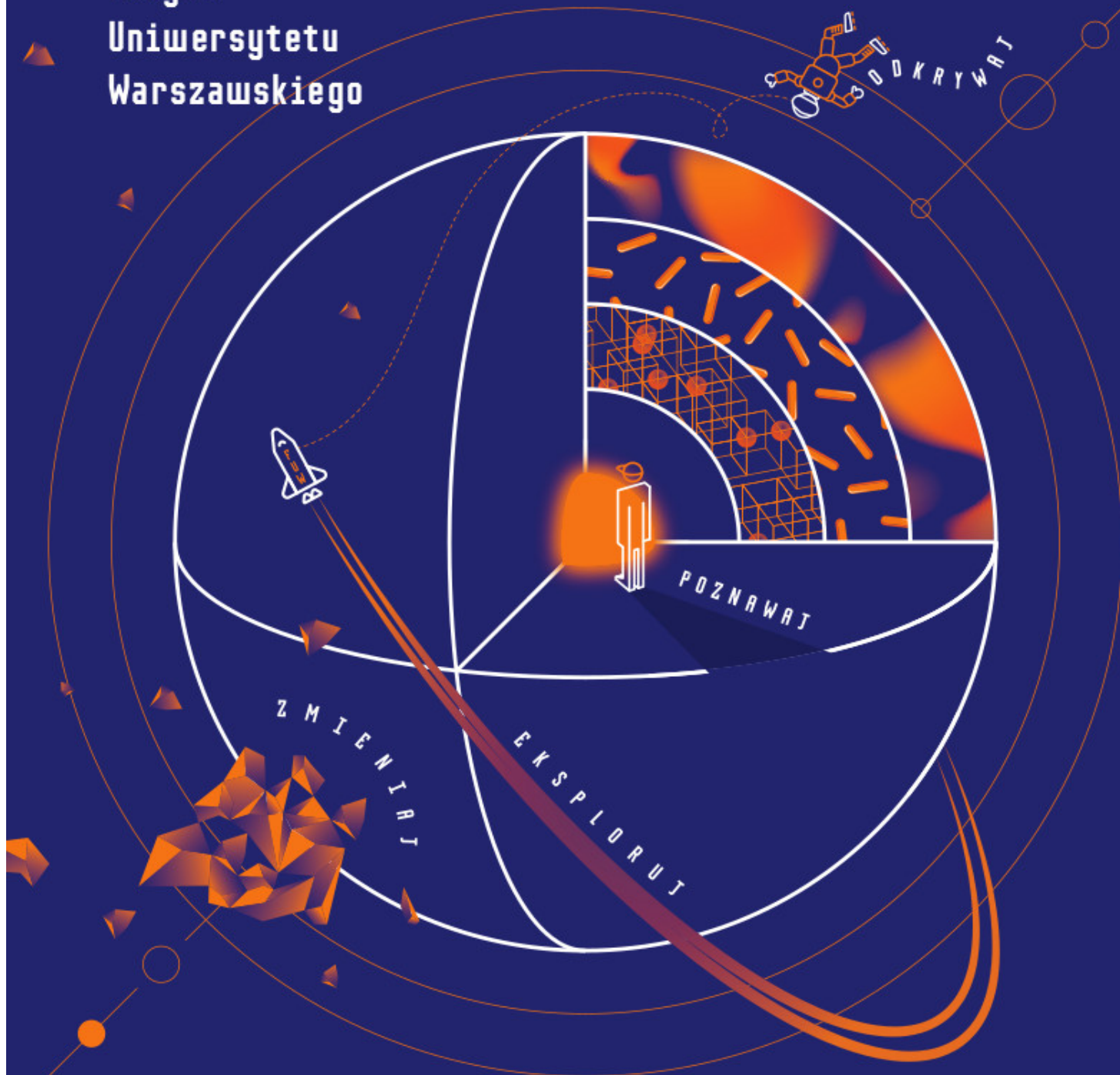
Stąd czworokąty $FABA'$, $BCDA'$, $DEFA'$ są rombami, a więc $ABDE$ jest równoległobokiem (bo odcinki AB i DE są równe i równoległe). Wobec tego przekątne AD i BE mają wspólny środek. Analogicznie przekątne AD i CF mają wspólny środek, co kończy dowód. \square

Zadanie 1 rozwiązano inaczej w *deltoidzie* 5/2009. Zadanie 2 pochodzi z książki W. Pompe *Wokół obrotów* (Wyd. Szkolne Omega, 2016). Zadania 3 i 4 pochodzą z LVIII i LV Olimpiady Matematycznej.

Wydział
Fizyki
Uniwersytetu
Warszawskiego



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



FIZYKA

ASTRONOMIA

STUDIA INDYWIDUALNE

(fizyka, astronomia)

**ZASTOSOWANIA FIZYKI
W BIOLOGII I MEDYCYNIE**

Biofizyka molekularna

Projektowanie molekularne i bioinformatyka

Fizyka medyczna

Neuroinformatyka

**EUROPEJSKIE STUDIA OPTYKI
OKULAROWEJ I OPTOMETRII**

www.esooio.uw.edu.pl

GEOFIZYKA W GEOLOGII

www.gwg.uw.edu.pl

INŻYNIERIA NANOSTRUKTUR

www.nano.fuw.edu.pl

**ENERGETYKA
I CHEMIA JĄDROWA**

atom.chem.uw.edu.pl



Wydział Fizyki UW należy
do elitarnej grupy A+
najlepszych jednostek
naukowych w Polsce

www.fuw.edu.pl