

Deltami

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

ISSN 1643-1034 J-5 T-3,141592

NR 6 (529) 2018

CENA 4zł - VAT 5%

PL ISSN 0137-5005 (NR ND 35-550 X)

MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl



9 770137 500809



Nakład: 3500 egz.

**Mathematica
i fraktale**
str. 1

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (529)

Mathematica i fraktale <i>David Dąbkowski</i>	str. 1
O uzgadnianiu drzew <i>Paweł Górecki</i>	str. 4
W sieci Bayesa <i>Lukasz Rajkowski</i>	str. 6
Jeśli...	str. 8
Internet Rzeczy <i>Konrad Iwanicki</i>	str. 9
 Zadania	str. 11
 O mierzeniu trójkątów <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 12
Jak Galileusz Arystotelesa ośmieszył	str. 13
Przez eter do teorii względności <i>Michał Tarnowski</i>	str. 14
Dobble	str. 17
 Ufać? Być „anty”? <i>Magdalena Fikus</i>	str. 18
Informatyczny kącik olimpijski (116): <i>Ciągi i łańcuchy</i>	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: WTF, KIC 8462852?	str. 22
Niebo w czerwcu	str. 22
Aktualności Zagadka tonących bąbelków	str. 24
 Odbicia w paraboli <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25

W następnym numerze piszemy, skąd się wzięły pierwiastki.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbkowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Lukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, pokój 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA
Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



Na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego co roku odbywa się konkurs na projekt stworzony w Mathematicie. W roku 2017 nagrodzono program, o którym piszę w tym artykule. Pliki źródłowe do tego i innych programów można pobrać ze strony: <http://mathematica.mimuw.edu.pl/competition.html>

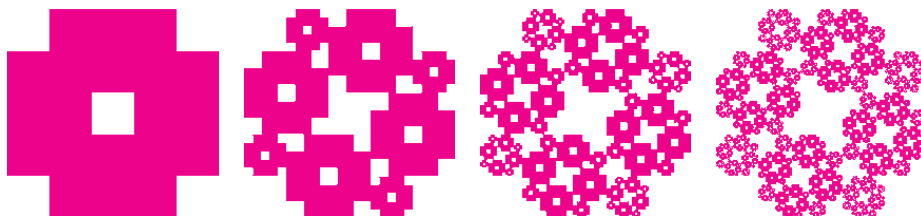
Mathematica jest programem płatnym, lecz niektóre jej funkcjonalności dostępne są za darmo. Za pomocą darmowego programu Wolfram CDF Player można przeglądać programy zapisane w rozszerzeniu .cdf. Istnieje dedykowana strona, na której można znaleźć wiele ciekawych demonstracji. Pod tym adresem znaleźć można wersję demonstracyjną mojego programu o fraktalach: <http://demonstrations.wolfram.com/FractalsAndTheirHausdorffDimension/>

Mathematica i fraktale

Dawid DĄBKOWSKI*

Wolfram Mathematica to popularny, nie tylko wśród studentów matematyki, system obliczeniowy, który umożliwia rozwiązywanie zadań z dziedzin, takich jak matematyka, fizyka czy ekonomia. Mamy tu oczywiście rachunek różniczkowy i całkowy, algebrę i statystykę, lecz także najróżniejsze metody z zakresu od matematyki czysto teoretycznej aż po zastosowania w data science, biznesie, inżynierii czy medycynie. Łącznie mamy prawie 5000 wzajemnie zintegrowanych, wbudowanych funkcji. Mathematica używa własnego języka programowania Wolfram Language, który cechuje się wydajnym operowaniem na listach. Zaletą systemu Mathematica jest także przyjazny interfejs z rozbudowaną dokumentacją każdej z funkcji, a także szerokie możliwości interaktywnej wizualizacji obliczeń.

Choć zastosowania Mathematici są bardzo szerokie, tutaj skupię się na tych czysto teoretycznych. Pokażę bowiem, jak Mathematicę zastosować do elementarnej teorii fraktali. Opiszę założenia teoretyczne oraz pokażę funkcje, dzięki którym użytkownik może sprawdzać poprawność danych wejściowych, obliczać analitycznie i numerycznie wymiar Hausdorffa i wreszcie generować piękne wizualizacje fraktali!



Rys. 1. Wizualizacja kolejnych iteracji fraktala, stworzona w Mathematicie

Fraktale na kartce

Zanim zaczniemy programować, przybliżmy nieco temat fraktali. Różne są definicje fraktali. Mówiąc o fraktalach, mamy zwykle na myśli zbiory w przestrzeni \mathbb{R}^n , które są samopodobne, a więc składają się z wielu przeskalowanych kopii samych siebie.

Matematyk zwykle powie, że fraktal to zbiór, którego *wymiar Hausdorffa* jest większy od jego wymiaru topologicznego. O wymiarze Hausdorffa można myśleć jako o uogólnieniu wymiaru topologicznego dla zbiorów, których nie da się łatwo sparametryzować. O fraktalach możemy myśleć jako o zbiorach (zwykle) niecałkowitego wymiaru!

Formalnie, dla zbioru $F \subset \mathbb{R}^n$ i $s \geq 0$ definiujemy s -wymiarową miarę Hausdorffa:

$$H^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ jest } \delta\text{-pokryciem } F \right\},$$

gdzie $|V|$ oznacza średnicę zbioru v . Mówiąc prościej, ustalamy δ i s i pokrywamy zbiór F zbiorami o średnicy nie większej niż δ . Ze wszystkich takich pokryć wybieramy to, które minimalizuje wyrażenie $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$. Następnie zmniejszamy δ . Klasa możliwych pokryć zbioru będzie się zmniejszać, zatem infimum będzie rosnąć. Okazuje się, że zbiegając z δ do zera, otrzymamy konkretną granicę $H^s(F) \in [0, \infty]$. O mierze tej wiemy, że przyjmuje stałe wartości ∞ aż do pewnego \bar{s} , powyżej którego jest stałe równa 0. Właśnie to \bar{s} , dla którego następuje swoista „nieciągłość” miary, to nasz wymiar Hausdorffa:

$$\dim_H(F) := \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}.$$

Wyznaczanie wymiaru Hausdorffa z tej definicji jest zwykle bardzo trudne. W naszym programie rozpatrywać będziemy jednak tylko szczególną klasę fraktali, dla których szczęśliwie zachodzi pewne dogodne twierdzenie.



*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

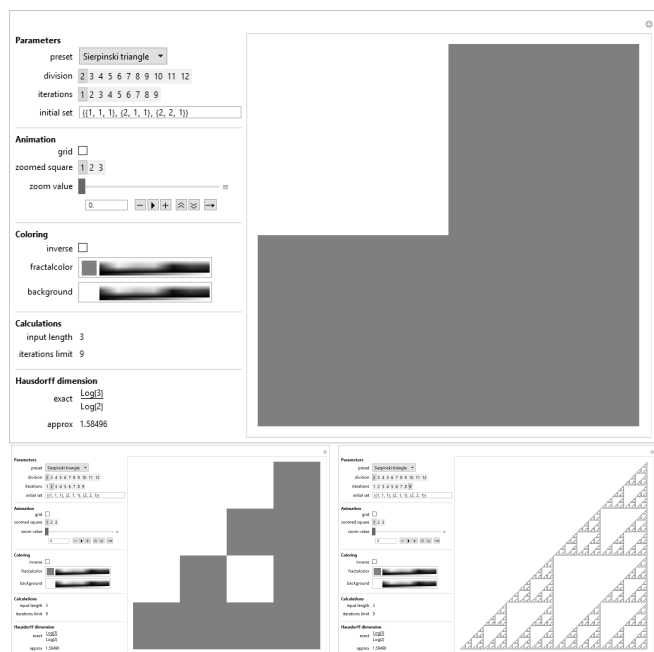
Fraktale powstawać będą rekurencyjnie wewnątrz kwadratu podzielonego na równą siatkę. W pierwszym kroku wczytywana jest lista współrzędnych i wielkości kwadratów, które zaznaczone są na siatce. Kwadraty mogą mieć wspólną co najwyżej krawędź lub wierzchołek i nie mogą wystawać poza linie siatki. Cały obraz jest następnie skalowany i rysowany w każdym z zaznaczonych kwadratów. Procedurę tę powtarza się kilka razy, aż do określonej liczby rekurencji. Mamy więc funkcje podobieństw $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, które przekształcają cały zbiór na jeden z mniejszych kwadratów, ze skalami podobieństw c_1, \dots, c_m . Formalnie nasz fraktal jest tzw. *atraktorem układu iterowanych odwzorowań*. Zachodzi wówczas następujące twierdzenie:

Załóżmy, że podobieństwa S_i ze skalami c_i (dla $1 \leq i \leq m$) spełniają warunek otwartego zbioru. Wówczas, jeśli F jest zbiorem niezmienniczym ze względu na S_i (tzn. spełniającym $F = \cup_{i=1}^m S_i(F)$), to wymiar Hausdorffa $\dim_H F$ jest skończony i zadany rozwiązaniem równania $\sum_{i=1}^m c_i^t = 1$ ze względu na parametr t .*

*Warunek otwartego zbioru zapewnia, że obrazy podobieństw S_i nie pokrywają się zanadto. Dokładnie mówi on, że istnieje taki niepusty ograniczony zbiór otwarty V , że $V \supset \cup_{i=1}^m S_i(V)$, przy czym suma ta jest rozłączna. U nas jako V wystarczy wziąć wewnątrz dużego kwadratu. Obrazy podobieństw zbioru początkowego leżą wówczas we wnętrzach małych kwadratów, które są rozłączne i zawierają się we wnętrzu dużego kwadratu.

Fraktale w Mathematicie

Mając już zaplecze teoretyczne, przejdźmy do Mathematici. Na rysunku 2 widzimy trzy przykładowe okna końcowego wyniku programu, który napisałem w Mathematicie.



Rys. 2. Interaktywne okna programu

Mamy tutaj okno z interaktywnym interfejsem oraz parametrami (po lewej) i wizualizacją (po prawej). Z rozwijanej listy *preset* możemy wybrać domyślny zbiór początkowy, taki jak *sierpinski triangle*, lub wybrać *custom* i wpisać własny. Robimy to, ustalając parametr *division* (rozdzielczość kwadratu) i wpisując współrzędne i wielkości kwadratów w listę w obszarze *initial set*. Kolejne iteracje zbioru możemy potem generować, zwiększając parametr *iteration*. Za pomocą przycisku *grid* możemy wyświetlić siatkę, a za pomocą *zoomed square* i *zoom value* uruchomić animację przybliżania wybranego fragmentu fraktala. Poniżej znajduje się przycisk *inverse* do inwersji kolorów i suwaki kolorów: *fractal* i *background*. Dalej mamy pokazane parametry fraktala: długość danych wejściowych *input length* i limit iteracji *iterations* (obliczany za pomocą prostej funkcji ze względu na wydajnościowych). Wreszcie, na samym dole mamy wyświetlony wymiar Hausdorffa: dokładny – *exact* (o ile analityczne wyznaczenie jest możliwe) oraz przybliżony – *approx*.

Widać, że oprócz obszaru wyświetlania mamy tu kontrole najróżniejszych typów: listy rozwijane, pola wyboru, pola tekstowe, suwaki i palety kolorów. W Mathematicie taki interfejs można łatwo stworzyć za pomocą funkcji *Manipulate*, która opisuje dynamiczne środowisko do obliczeń. Pierwszym argumentem funkcji jest wyrażenie, które ma być dynamicznie aktualizowane. W naszym przypadku są to wszystkie niezbędne obliczenia i rekurencyjna formuła generująca grafikę. Drugim argumentem jest lista kontrolowalnych parametrów i ich ustawienia. Oprócz tego możemy też podać opcje, które pomogą nam dostosować zachowanie i wygląd środowiska. Wszystkie te trzy elementy występują na schemacie 1.

```
Manipulate[ [... ]
setNorm = normalize[set, div];
size = 540;
len = Max[1, Length[setNorm]];
zoomAt = If[zoomAt > len, 1, zoomAt];
lim = iterations[len];
iter = If[iter > lim, 1, iter];
haus = dimension[setNorm];
nhaus = ndimension[setNorm];
Graphics[{{[...], fractal[setNorm, iter]}, [...]],
[...],
{{div, 2, "division"}, 2, 12, 1},
{{iter, 1, "iterations"},
Thread[Range[lim] -> Range[lim]]},
{{set, "", "initial set"}},
[...]]
ControlType -> {Automatic, PopupMenu, Setter,
Setter, InputField, Automatic, Automatic, Setter,
Automatic, Automatic, Automatic, ColorSlider,
ColorSlider, Automatic},
ControlPlacement -> Left]
```

Schemat 1. Fragment głównej funkcji programu.

Omówimy teraz funkcję obliczającą współrzędne kwadratów do wyświetlenia przedstawioną na schemacie 2. Funkcja ta podzielona jest na cztery mniejsze funkcje. Pierwsza z nich, nazwana *shift*,

bierze listę kwadratów i numer jednego z nich. Za pomocą obliczeń algebraicznych zwraca listę kwadratów o współrzędnych zaczepionych w danym kwadracie. Następna funkcja to *scor*, która zwraca współrzędne wszystkich kwadratów w następnej iteracji, a więc zwraca długą listę kwadratów potraktowanych funkcją *shift*. Korzystamy tutaj ze wbudowanej instrukcji *Table* tworzącej listę oraz wbudowanej funkcji *Flatten*, która listę list spłaszcza do jednej długiej listy. Ostatnia z naszych funkcji to *fscor*, która zagnieżdża funkcję *scor* aż do limitu iteracji. Zagnieżdżanie funkcji robimy za pomocą wbudowanej funkcji *Nest*. Otrzymujemy więc bardzo długą listę współrzędnych małych kwadratów. Na koniec zamieniamy ją na obiekty graficzne typu *Rectangle* za pomocą funkcji *square*. Ostatecznie przykładamy funkcję *square* do wszystkich elementów listy, za pomocą operatora */@*. Na wyjściu mamy więc listę kwadratów, które wyświetlamy potem w głównej funkcji wewnątrz środowiska *Graphics*.

```
fractal[setNorm_, iter_] :=
Module[{inputSet = setNorm},
shift[s_, i_] := Table[{
s[[i, 1]] + inputSet[[k, 1]]*s[[i, 3]],
s[[i, 2]] + inputSet[[k, 2]]*s[[i, 3]],
s[[i, 3]]*inputSet[[k, 3]]},
{k, 1, Length[inputSet]}];
scor[list_] :=
Flatten[Table[shift[list, i],
{i, 1, Length[list]}], 1];
fcor[list_, it_] := Nest[scor, list, it - 1];
square[{x_, y_, r_}] :=
Rectangle[{x, y}, {x + r, y + r}]
square /@ fcor[inputSet, iter]
```

Schemat 2. Funkcja licząca współrzędne kwadratów.

Mamy już wizualizację, omówmy zatem funkcje obliczające wymiar Hausdorffa przedstawione na schemacie 3. Są to funkcje *dimension* oraz *ndimension*, które obliczają odpowiednio dokładny i przybliżony wymiar. Pierwsza z nich korzysta ze wbudowanej funkcji *Solve*, która w analityczny sposób próbuje rozwiązać układ równań. Funkcja ta nie zawsze prowadzi do rozwiązania. W takim przypadku za pomocą instrukcji *If* powodujemy, aby zwróciła odpowiedni napis. Druga funkcja używa bardzo podobnej wbudowanej funkcji *NSolve*. Różnica jest taka, że wynik wyznaczony jest numerycznie z odpowiednią precyzją. Zawsze otrzymamy wynik jako przybliżoną liczbę wymierną w zapisie dziesiętnym. W Mathematice występuje wiele funkcji z dodaną w nazwie literą *N*. W szczególności sama funkcja *N* zwraca zaokrągloną wartość w systemie dziesiętnym. Takie funkcje są szczególnie przydatne, gdy nie mamy pewności, że rozwiązanie analityczne nie istnieje, tak jak w naszym przypadku.

```
dimension[s_] := Module[{s1 = s},
a[t_] := Sum[s1[[j, 3]]^t, {j, 1, Length[s1]}];
b = (t /. Solve[a[t] == 1, t, Reals]][[1]];
If[MatchQ[b, Root[_]] == True,
Text[t : Simplify[a[t] == 1]], b];
ndimension[s_] := (t /. NSolve[Sum[s[[j, 3]]^t,
{j, 1, Length[s]}] == 1, t, Reals]][[1]]
```

Schemat 3. Funkcje liczące wymiar Hausdorffa.

W programie mamy także kilka funkcji sprawdzających poprawność danych wprowadzonych przez użytkownika (aby zapobiec nieprzewidzianym zachowaniom programu). Jedną z nich jest funkcja *checkPattern*, która sprawdza, czy wejście spełnia podstawowe założenia, tzn. jest listą trójek złożonych z liczb całkowitych. W funkcji tej wykorzystywane są tzw. wzorce, czyli zapytania dotyczące liczby i rodzaju argumentów. Przykładowo wzorec *List[___]* oznacza listę z dowolną liczbą argumentów, a *List[_Integer, _Integer, _Integer]* oznacza listę złożoną z trzech liczb całkowitych. Wzorce są sprawdzane za pomocą wbudowanej funkcji *MatchQ*. U nas sprawdzamy najpierw, czy na wejściu otrzymaliśmy listę (jeśli nie, to zwracamy domyślny zbiór). Następnie, za pomocą pętli *For*, przechodzimy po całej liście, sprawdzając, czy są to trójki liczb całkowitych. Elementy niepasujące do tego wzorca są usuwane za pomocą wbudowanej funkcji *Delete*.

```
checkPattern[s_] := Module[{s1 = s},
s1 = If[MatchQ[s1, List[___]], s1, point];
For[i = 1, i <= Length[s1], i++,
If[MatchQ[s1[[i]],
List[_Integer, _Integer, _Integer]] == False,
s1 = Delete[s1, i]; i--, Nothing]
]; s1]
```

Schemat 4. Jedna z funkcji sprawdzająca poprawność danych wejściowych.

Program składa się jeszcze z kilku elementów, których nie pokazaliśmy. Przedstawione tu funkcje pokazują jednak główną ideę działania programu w Mathematice. Wykorzystaliśmy wbudowane funkcjonalności Mathematici, takie jak środowisko *Dynamic* (funkcja *Manipulate*), funkcje operujące na listach (*Flatten*, *Table*, operatory), zagnieżdżanie funkcji (funkcja *Nest*), analityczne i numeryczne obliczanie równań (funkcje *Solve* i *NSolve*) oraz różne funkcje operujące na wzorcach. Użyliśmy także konstrukcji typowych dla języków programowania, takich jak *If* czy *For*. Za pomocą kilku średniej długości funkcji stworzyliśmy rozbudowane narzędzie do wizualizacji fraktali i obliczenia wymiaru Hausdorffa, co jest przecież zadaniem dość nietrywialnym.

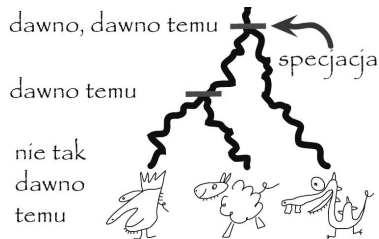
Literatura

- [1] <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [2] Falconer K., Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons Ltd., Chichester 1990
- [3] Kudrewicz J., Fraktale i chaos, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996
- [4] Tempczyk M., Teoria chaosu dla odważnych, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2002

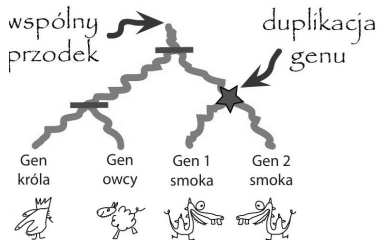
O uzgadnianiu drzew

Paweł GÓRECKI*

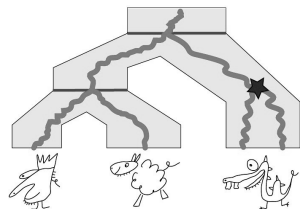
*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



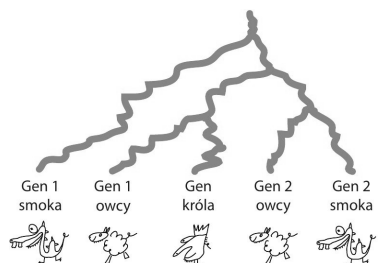
Drzewo gatunków dla króla Kraka, owcy domowej i smoka wawelskiego. Poziome kreski to specjacje.



Drzewo łatwej rodziny genów, gdzie smok ma dwie kopie genu. Szybko zauważamy, że wystarczy jedna duplikacja genu, by uzgodnić to drzewo genów do drzewa gatunków smoka i jego ewolucyjnych kuzynów. Poziome kreski oznaczają węzły pasujące do specjacji z drzewa gatunków.



Uzgadnianie: wbudowanie drzewa łatwej rodziny genów w drzewo gatunków. Drzewo genów jest „rozciągane” tak by umieścić je wewnątrz drzewa gatunków.



Drzewo trudnej rodziny genów, gdzie jeden gen pochodzi od króla, a po 2 od smoka i owcy. Dopasowanie tego drzewa genów do drzewa gatunków jest trudniejsze niż w poprzednim przypadku. Ile potrzeba duplikacji i gdzie je umieścić? Czy potrzebujemy innych zdarzeń (np. strat genów)?

Dawno, dawno temu żył sobie w Polsce smok. Chciałbym dopisać – pod Wawelem – jak donosił Jan Długosz, ale my wiemy od kilku lat, że smokiem wawelskim zostały nazwane drapieżne dinozaury żyjące około 200 milionów lat temu. W tych czasach żyły też małe prassaki, więc nawiązując do legendy, można z pewnością powiedzieć, że smoki wawelskie czasem polykały (pra)barana, a właściwie wspólnego przodka króla Kraka i owcy, którą szewczyk nafaszerował siarką. Z upływem czasu smok wawelski zmieniał się, a za te zmiany były odpowiedzialne niewidzialne cegiełki nazywane *genami*, które przekazywał swoim potomkom. Geny zmieniały się – niektóre były powielane, a niektóre stawały się bezużyteczne i były tracone. W tych czasach Ziemia miała tylko jeden kontynent, który z czasem uległ rozpadowi, dzieląc organizmy na nim żyjące. Część z organizmów wyginęła, a pozostałe powoli ewoluowały, dostosowując się do warunków panujących na nowych kontynentach. Te drobne zmiany, kumulowane przez tysiące rozdzielonych pokoleń, spowodowały, że gatunki niegdyś mające tych samych przodków stawały się zupełnie odmienne na różnych kontynentach. To zjawisko wykształcania się nowych gatunków nazywamy *specjacją*.

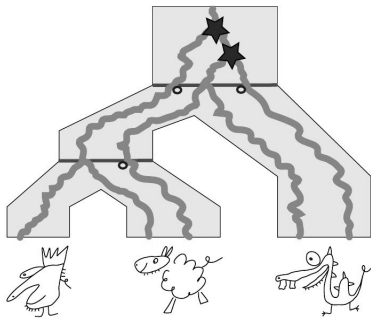
W tej historii mamy *gatunek* i *gen*, które związane są relacją *gatunek ma geny*, oraz kilka zjawisk takich jak *duplikacja genu*, *strata genu* oraz *specjacja* gatunku. Ich własności przedstawimy dokładniej na kilku przykładach.

Związki między gatunkami przedstawia się za pomocą ukorzonego drzewa, nazywanego *drzewem gatunków*, którego węzły wewnętrzne są specjacjami, a liście to gatunki. Zilustrujemy to na przykładzie. Naszym drzewem gatunków będzie drzewo z reprezentantami trzech gatunków: królem Krakim, owcą i smokiem wawelskim. Król i owca, jako bliżej spokrewnione, będą w naszym drzewie gatunków umieszczone obok siebie. Inaczej można powiedzieć, że ich rozdzielenie (specjacja) nastąpiło później niż rozdzielenie np. smoka i owcy.

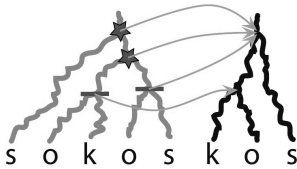
Podobnie można reprezentować relacje między genami. Klasycznym przykładem są białka nazywane *globinami*, które m.in. wchodzi w skład cząsteczki hemoglobiny odpowiedzialnej za transport tlenu w naszych organizmach. Globiny występują w wielu organizmach, a ich sekwencje są zapisane w genach zazwyczaj występujących w kilku wariantach. Zakłada się, że globiny pochodzą od wspólnego przodka (genu). To założenie pozwala zgrupować geny globin w rodzinę i wizualizować relacje między nimi za pomocą *drzewa genów*, które można obliczyć z sekwencji za pomocą programów komputerowych. Dla ustalonego zbioru gatunków liczba różnych rodzin genów mających wspólnego przodka może wynosić nawet kilkanaście tysięcy.

Zjawiska ewolucyjne takie jak duplikacje genów, straty i specjacje (a także kilka innych, o których tutaj nie będziemy opowiadać), powodują, że drzewa rodzin genów i drzewa ich gatunków mogą się różnić. Niektóre przypadki są dość proste, tak jak łatwa rodzina genów z naszego przykładu. Tutaj wystarczy użyć jednej duplikacji genu i drzewo genów zostanie *uzgodnione* z drzewem gatunków. Można powiedzieć, że uzgadnianie drzew polega na narysowaniu drzewa genów wewnątrz drzewa gatunków, tak by zachować poprawność biologiczną i tak by minimalizować liczbę duplikacji genów.

W trudnej rodzinie genów podobnie obserwujemy różnice w ilości kopii genów występujących w gatunkach. Można je wyjaśnić duplikacjami, ale to drzewo genów ma tak wymieszane etykiety, że uzgadnianie nie jest tak oczywiste jak w poprzednim przypadku. Stosując zasadę wbudowywania drzewa genów w drzewo gatunków, najpierw dla każdego węzła z drzewa genów określimy, gdzie ma być umieszczony w drzewie gatunków. Oczywiście, liście (geny) z drzewa genów muszą być umieszczone w odpowiednich liściach drzewa



Uzgodnianie: wbudowanie drzewa trudnej rodziny genów w drzewo gatunków. Miejsca duplikacji genów są oznaczone gwiazdką. Dodatkowo można wyznaczyć liczbę strat genów (tutaj 3), które są konieczne do uzgodnienia drzew.



Mapowanie najniższego wspólnego przodka (lca) pomiędzy drzewem trudnej rodziny genów i drzewem gatunków (dla czytelności narysowane tylko dla węzłów wewnętrznych). Tutaj *k* to król, *o* to owca, a *s* to smok. W drzewie genów mamy dwa węzły duplikacyjne, które wyznaczamy za pomocą lca-mapowania zgodnie z zasadą: węzeł jest duplikacją jeśli jego mapowanie jest równe mapowaniu jego syna.

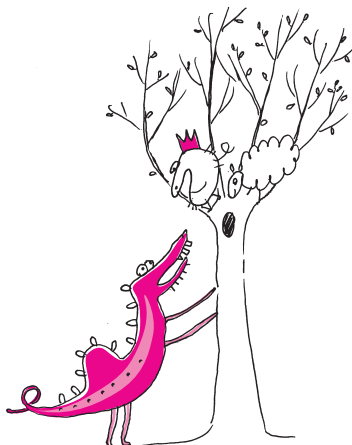
gatunków. Następnie mamy 4 węzły wewnętrzne: *korzeń*, *prawy syn korzenia* i dwóch wnuczków korzenia, czyli *środkowy wnuczek* (ojciec genu pierwszej owcy i genu króla) oraz *prawy wnuczek* (ojciec genów drugiej owcy i smoka). Z korzenia drzewa genów widoczne są wszystkie trzy gatunki, dlatego powinien on być umieszczony w korzeniu drzewa gatunków. To samo możemy powiedzieć o jego prawym synu. Środkowy wnuczek jest ojcem genów owcy i króla, dlatego umieścimy go na specjacji owcy i króla w drzewie gatunków. Ostatni węzeł, czyli prawy wnuczek korzenia, jest ojcem genów owcy i smoka. Z tego powodu nie możemy go umieścić w specjacji owcy i króla, bo brakuje tam smoka. Ostatecznym wyborem dla niego jest korzeń drzewa gatunków. Widzimy, że trzy węzły drzewa genów: korzeń, prawy syn i prawy wnuczek muszą być umieszczone w tym samym miejscu. To jednak nie jest możliwe, bo istnieje między nimi zależność czasowa: ojciec jest starszy od syna i w drzewie musi być umieszczony powyżej syna. Ten konflikt jest rozwiązywany przez „rozciągnięcie” tego fragmentu drzewa genów. W konsekwencji tylko prawy wnuczek zostanie umieszczony na węzle specjacji (korzeń drzewa gatunków), a jego ojciec i dziadek jako węzły duplikacji znajdą się nad nim, czyli nad specjacją. W tym przykładzie jest to jedyna konfliktowa sytuacja, dlatego wnioskujemy, że do uzgodnienia potrzeba dwóch duplikacji. Obrazek z uzgodnieniem tej trudnej rodziny genów drzew jest umieszczony obok.

Z powyższego przykładu widzimy, że węzły duplikacji można wyznaczyć za pomocą *mapowań najniższego wspólnego przodka* (lca). Formalnie, lca-mapowanie to funkcja, która każdemu węzłowi *g* z drzewa genów przyporządkowuje najniższy węzeł *s* z drzewa gatunków, tak by zbiór gatunków widoczny z *g* był widoczny z *s*. Zwróćmy uwagę, że jest to zgodne z postępowaniem, które zastosowaliśmy w poprzednim przykładzie. Teraz możemy powiedzieć, że węzeł z drzewa genów jest duplikacją, jeśli jego mapowanie jest równe mapowaniu jednego z jego synów. Przykład lca-mapowania dla trudnej rodziny genów wraz z oznaczeniem duplikacji jest zilustrowany na obrazku.

Oprócz duplikacji można także policzyć straty genów. W uzgadnianiu straty genów występują, gdy po specjacji jeden z gatunków traci gen. Łatwo je wyznaczymy, jeśli narysujemy wbudowanie drzewa genów w drzewo gatunków. W takim przypadku strata genu występuje, gdy krawędź drzewa genów przecina specjację. Zauważmy, że łatwa rodzina genów nie generuje strat, bo na specjacjach we wbudowaniu znajdują się wyłącznie węzły wewnętrzne drzewa genów. W przypadku trudnej rodziny mamy 3 straty genów.

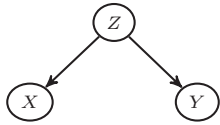
Interesującym zastosowaniem uzgadniania może być zagadnienie obliczenia Drzewa Życia, czyli drzewa wszystkich żyjących gatunków na Ziemi. Ten problem jest instancją problemu superdrzewa, który w kontekście uzgadniania definiujemy tak: dla kolekcji drzew genów znajdź drzewo gatunków minimalizujące całkowitą liczbę duplikacji. Zatem, by obliczyć Drzewo Życia, należy najpierw obliczyć drzewa rodzin genów pokrywające możliwie dużą liczbę gatunków. To samo w sobie jest dość skomplikowanym zadaniem, bo obecnie nie wszystkie gatunki są całkowicie zsekwencjonowane. Co więcej, w przeciwieństwie do uzgadniania, które można wykonać w czasie liniowym, problem superdrzewa jest złożony obliczeniowo (wersja decyzyjna jest w klasie NPC). Z tego powodu programy komputerowe rozwiązujące ten problem zwykle używają przybliżonych metod, które nie gwarantują znalezienia optymalnego drzewa. Mimo tych wad uzgadnianie, jako model biologicznie dobrze umotywowany, jest często stosowane m.in. do obliczania drzewa gatunków, w tym również Drzewa Życia.

Ćwiczenie dla Czytelników. Drzewa rodzin, które analizowaliśmy, możemy zapisać w notacji nawiasowej jako $G_1 = ((k, o), (s, s))$ i $G_2 = (s, ((o, k), (o, k)))$. Dodajmy do tego zestawu drzewo $G_3 = (((o, s), (o, s)), k)$. Znajdź drzewo gatunków S , które minimalizuje całkowitą liczbę duplikacji między G_1 , G_2 i G_3 a S .

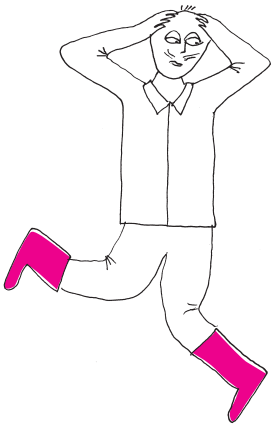


W sieci Bayesa

Łukasz RAJKOWSKI



Rys. 1



Rozpocniemy od żartobliwej, acz pouczającej historyjki: podczas rozmowy dwóch stałych bywalców lokalnego baru jeden z nich mówi do drugiego „Noszenie kaloszy jest bardzo niezdrowe; ilekroć budzę się rano i mam je na nogach, boli mnie głowa”. Łatwo wskazać lukę w przedstawionym rozumowaniu (psując odrobinę dowcip, ale czegoż nie robi się dla dobra nauki): choć niewątpliwie spędzenie nocy w kaloszach i poranny ból głowy często występowały wspólnie, nie można na tej podstawie powiedzieć, że to pierwsze jest przyczyną drugiego. Oba mają po prostu wspólną praprzyczynę, jaką jest niechlubne zamiłowanie autora uwagi do wysokoprocentowych trunków. Zależność tę można przedstawić graficznie, tak jak na rysunku 1, na którym X , Y i Z związane są odpowiednio z kaloszami na nogach, porannym bólem głowy i przesadną konsumpcją poprzedniego wieczora. Zwróćmy uwagę, że (1) nie każdy wieczór spędzony jest w barze (na szczęście), (2) nie każdy wieczór spędzony w barze skutkuje bolącą głową (kaloszami na nogach) następnego ranka i (3) nie zawsze boląca głowa (kalosze) są dowodem na wieczór spędzony w barze. Sugeruje to, aby na X, Y, Z patrzeć jak na *zmiennie losowe*, które określone wartości (powiedzmy 0 i 1) przyjmują z określonym prawdopodobieństwem. Jest zatem sensowne pytanie na przykład o prawdopodobieństwo obudzenia się z kaloszami na nogach bez bólu głowy oraz gdy nie byliśmy poprzedniego dnia w barze, czyli

$$p_{X,Y,Z}(1, 0, 0) := \mathbb{P}(X = 1, Y = 0, Z = 0).$$

Funkcja $p_{X,Y,Z}$ ma kilka funkcji „pochodnych”, można z niej, na przykład, odczytać prawdopodobieństwo obudzenia się z kaloszami

$$p_X(1) := p_{X,Y,Z}(1, 0, 0) + p_{X,Y,Z}(1, 0, 1) + p_{X,Y,Z}(1, 1, 0) + p_{X,Y,Z}(1, 1, 1).$$

Podobnie możemy zdefiniować p_Y, p_Z , a także $p_{X,Y}, p_{Y,Z}$ i $p_{X,Z}$ – za każdym razem sumujemy $p_{X,Y,Z}$ dla wszystkich możliwych wartości zmiennych, które nie występują w dolnym indeksie (otrzymujemy w ten sposób *rozkłady brzegowe*). Jesteśmy też w stanie obliczyć prawdopodobieństwo obudzenia się bez kaloszy pod warunkiem spędzenia wieczoru w barze, czyli

$$p_{X|Z}(1|1) = p_{X,Z}(1, 1)/p_Z(1).$$

Analogicznie możemy określić funkcje $p_{A|B}, p_{A,B|C}$ czy $p_{A|B,C}$, gdzie pod A, B, C można dowolnie wstawić X, Y, Z ; otrzymamy w ten sposób *rozkłady warunkowe*. Zwróćmy uwagę na oczywistą algebraicznie równość

$$(*) \quad p_{X,Y,Z} = p_Z \cdot p_{Y|Z} \cdot p_{X|Y,Z}.$$

Wspomniany na początku bywalec baru zaobserwował zależność między kaloszami i bólem głowy, możemy jednak podejrzewać, że zjawiska te są *niezależne pod warunkiem* pobytu w barze. Oznacza to, że jeśli dysponujemy informacją o sposobie spędzenia poprzedniego wieczoru, to wiedza o kaloszach na nogach o poranku nie wpłynie na naszą ocenę szansy na ból głowy.

Wykorzystując wprowadzone przez nas oznaczenia, możemy to zapisać na trzy algebraicznie równoważne sposoby

$$p_{Y|X,Z} = p_{Y|Z}, \quad p_{X|Y,Z} = p_{X|Z}, \quad p_{X,Y|Z} = p_{X|Z}p_{Y|Z}$$

(wszystkie te równości można szybko sprowadzić do $p_{X,Y,Z}p_Z = p_{X,Z}p_{Y,Z}$).

Równość (*) możemy wówczas zapisać jako

$$(**) \quad p_{X,Y,Z} = p_Z \cdot p_{Y|Z} \cdot p_{X|Z}.$$

W takiej sytuacji mówimy, że funkcja $p_{X,Y,Z}$ *faktoryzuje się* względem grafu przedstawionego na rysunku 1 – przedstawia się bowiem jako iloczyn, w którym każdy czynnik jest postaci $p_{zmienna|rodzice}$ w grafie. Jeśli w każdym z czynników ze zmiennych, po których warunkujemy, nie da się niczego uszczknąć (tak, jak przechodząc z zawsze prawdziwego (*) do szczególnego (**)), to mówimy, że dany graf jest *siecią bayesowską* dla funkcji $p_{X,Y,Z}$. Jeśli graf z rysunku 1 jest

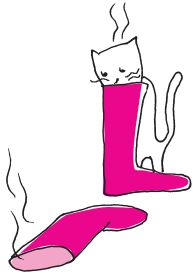


Rozwiązanie zadania F 954.

Długofalowa granica zjawiska fotoelektrycznego określa pracę wyjścia W elektronu, charakterystyczną dla metalu, z którego zrobiona jest fotokatoda: $W = h\nu_{pr}$, gdzie h to stała Plancka. W rozpatrywanym przypadku $\nu_{pr} = 6 \cdot 10^{14}$ Hz. Skoro siatka, mająca potencjał $U = 3$ V zatrzymuje wszystkie fotoelektrony, to ich energia kinetyczna $mv^2/2 \leq eU$, gdzie m i e to masa i ładunek elektronu, a v – jego prędkość, przy czym znak równości odpowiada elektronom o maksymalnej prędkości v_{max} . Energia, potrzebna do wykonania pracy wyjścia i nadania elektronowi prędkości, pochodzi od fotonu o częstotliwości ν , więc zgodnie z prawem zachowania energii mamy

$$h\nu = W + \frac{mv_{max}^2}{2}$$

(równanie Einsteina). Stąd, korzystając z otrzymanych zależności, mamy $h\nu = h\nu_{pr} + eU$ i ostatecznie $\nu = (h\nu_{pr} + eU)/h$, a po podstawieniu danych liczbowych $\nu = 13,2 \cdot 10^{14}$ Hz.



siecią bayesowską dla naszych zmiennych, to połączenie (*) (zawsze prawdziwe!) i (**) (założenie o faktoryzacji) daje nam $p_{X|Y,Z} = p_{X|Z}$, czyli warunkową niezależność X i Y (oznaczaną jako $X \perp Y|Z$). Z drugiej strony mamy

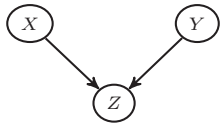
$$p_{X,Y}(x,y) = p_Z(0)p_{Y|Z}(y|0)p_{X|Z}(x|0) + p_Z(1)p_{Y|Z}(y|1)p_{X|Z}(x|1),$$

czego bez dodatkowych założeń nie moglibyśmy zapisać jako iloczynu dwóch funkcji, z których jedna jest zależna tylko od x , a druga tylko od y . W ogólności nie występuje zatem niezależność X od Y , co zostało zaobserwowane przez bywalca baru.



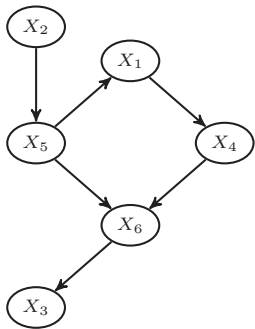
Rys. 2

Zastanówmy się, jakie jeszcze dwukrawędziowe sieci bayesowskie mogą rządzić zachowaniem trzech zmiennych. Gdyby $p_{X,Y,Z}$ faktoryzowało się wedle grafu na rysunku 2, mielibyśmy $p_{X,Y,Z} = p_X p_{Z|X} p_{Y|Z}$. Odpowiadałoby to sytuacji, w której X jest oceną ze sprawdzianu z trygonometrii, Z oceną roczną z matematyki, a Y – średnią na świadectwie. Wówczas X i Y są zależne (choć delikatnie), przestaje to jednak mieć miejsce, jeśli rozpatrzmy sytuację pod warunkiem oceny z matematyki (nie mylić z warunkiem z matematyki). Odpowiada to prostej do sprawdzenia (wykorzystując $p_{X,Y,Z} = p_X p_{Z|X} p_{Y|X,Z}$) równości $p_{Y|Z} = p_{Y|X,Z}$.



Rys. 3

Ostatnia możliwość jest przedstawiona na rysunku 3. Wówczas ma miejsce zależność $p_{X,Y,Z} = p_X p_Y p_{Z|X,Y}$. Zmienne X, Y są niezależne (zachodzi bowiem $p_Y = p_{Y|X}$), zależność ta nie występuje jednak w ogólności po „zwarunkowaniu” po Z . Ta sieć znajduje odzwierciedlenie w sytuacji, gdy Z oznacza uruchomienie się alarmu przeciwpożarowego, X – ćwiczenia ewakuacji, a Y – faktyczny pożar. Nie ma powodów, aby sądzić, że szansa na wystąpienie pożaru budynku była zależna od planu przeprowadzania w nim ćwiczeń przeciwpożarowych, jeśli jednak słyszymy alarm i wiemy, że na dany dzień nie były zapowiadane ćwiczenia, powinniśmy jak najszybciej (ale bez paniki!) wziąć nogi za pas.



Rys. 4

Grafy przedstawione na rysunkach 1, 2, 3 zwykle się nazywać w specjalistycznym żargonie odpowiednio „widelcem” (*fork*), „łańcuchem” (*chain*) i „zderzaczem” (*collider*).

Z powyższych rozważań wynika, że znajomość sieci bayesowskiej odpowiadającej funkcji $p_{X,Y,Z}$ pozwala na sformułowanie wniosków o (warunkowej) niezależności. Oczywiście, rozpatrywaliśmy trywialny przypadek trzech zmiennych – co się dzieje, kiedy jest ich więcej? Kandydat na sieć bayesowską dla zmiennych X_1, \dots, X_n musi być grafem skierowanym, i to nie byle jakim: wymagamy od niego, aby nie miał żadnych cykli (*Directed Acyclic Graph*, czyli DAG). Dla przykładu, DAG przedstawiony na rysunku 4 jest siecią bayesowską dla funkcji prawdopodobieństwa $p_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6}$, jeśli zachodzi

$$p_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6} = p_{X_2} \cdot p_{X_5|X_2} \cdot p_{X_1|X_5} \cdot p_{X_4|X_1} \cdot p_{X_6|X_5, X_4} \cdot p_{X_3|X_6}$$

i nie można usunąć z powyższego napisu żadnej ze zmiennych „warunkowych”. Jakie (warunkowe) niezależności spełniają wówczas zmienne X_1, \dots, X_6 ? Okazuje się (i jest to jedno z podstawowych twierdzeń teorii sieci bayesowskich; jego dowód jest bardziej skomplikowany, niż może się na pierwszy rzut oka wydawać), że (warunkowa) niezależność wynika wówczas z występujących w sieci bayesowskiej *d-rozdzielności*. Mówimy, że wierzchołki X i Y w grafie G są *d-połączone* przez zbiór wierzchołków Z , jeśli istnieje pomiędzy nimi ścieżka $X = W_0 - W_1 - \dots - W_k - W_{k+1} = Y$ (nie bierzemy pod uwagę kierunku krawędzi) taka, że dla dowolnego $1 \leq i \leq k$ zachodzi

- jeśli $W_{i-1} \rightarrow W_i \leftarrow W_{i+1}$, to W_i lub któryś z jego potomków (dzieci, wnuków, prawnuków...) należy do Z
- w przeciwnym przypadku W_i nie należy do Z .

Jeśli X, Y nie są *d-połączone* przez Z , to mówimy, że są przez Z *d-rozdzielone*. W sieci przedstawionej na rysunku 4 wierzchołki X_2 i X_4 są *d-rozdzielone* przez X_1 , nie są jednak *d-rozdzielone* przez $\{X_1, X_3\}$. Zgodnie ze wspomnianym



Rozwiązanie zadania F 953.

Ponieważ $\sigma_{Ag} = e n_{Ag} \mu_{Ag}$,
a $\sigma_{Cu} = e n_{Cu} \mu_{Cu}$ to

$$\frac{\sigma_{Ag}}{\sigma_{Cu}} = \frac{n_{Ag} \mu_{Ag}}{n_{Cu} \mu_{Cu}}$$

Korzystając z tego, że $n = \rho N/M$,
gdzie ρ to gęstość, M – ciężar atomowy,
a N – liczba Avogadro, otrzymujemy:

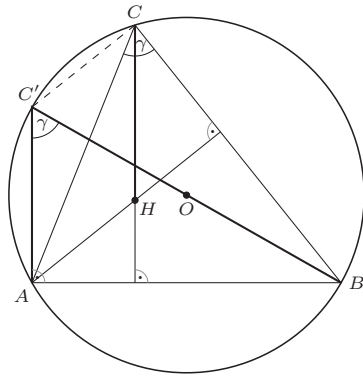
$$\frac{\sigma_{Ag}}{\sigma_{Cu}} = \frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Cu}} \frac{M_{Cu}}{M_{Ag}} \frac{\mu_{Cu}}{\mu_{Ag}}$$

a stąd

$$\frac{\mu_{Ag}}{\mu_{Cu}} = \frac{\sigma_{Ag}}{\sigma_{Cu}} \frac{M_{Ag}}{M_{Cu}} \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Ag}}$$

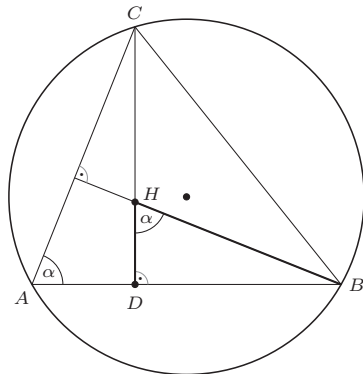
Podstawiając tablicowe wartości gęstości i ciężarów atomowych, dostajemy $\mu_{Ag}/\mu_{Cu} \approx 1,5$.

Podpowiedź do rysunku 2 z *Malej Delty*



Czworokąt $AHCC'$ jest równoległobokiem $|HC| = |AC'|$, $|\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$, bo są to kąty oparte na tym samym łuku.

Podpowiedź do rysunku 4 z *Malej Delty*



Z $\triangle HDB$: $\frac{|HD|}{\cos \beta} = \cos \alpha$.

twierdzeniem oznacza to, że w tej sytuacji, jeśli znamy wartość X_1 , to wiedza o X_2 nie dostarcza nam informacji o X_4 ; byłoby jednak inaczej, gdybyśmy na początku poznali jeszcze X_3 . Odpowiada to „przepływowi informacji” w sieci: między X_2 a X_4 są dwie ścieżki: $S_1 = X_2 \rightarrow X_5 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4$ oraz $S_2 = X_2 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6 \leftarrow X_4$. Informacja nie przepływa przez S_2 , przepływa jednak przez S_1 . Zmieni się to, kiedy dowiemy się czegoś o X_1 – wówczas obie ścieżki są zablokowane. Gdy jednak uzyskamy również informację na temat X_3 , to dowiemy się czegoś o X_6 , przez co „odblokujemy” ścieżkę S_2 (na tej samej zasadzie, jak w przykładzie o alarmie przeciwpożarowym).

Należy podkreślić, że choć z sieci bayesowskiej możemy odczytać występujące między zmiennymi warunkowe niezależności, nie możemy na jej podstawie wnioskować o ich braku. Przykładem może być sytuacja, w której X, Y to wyniki dwóch niezależnych rzutów symetryczną monetą (gdzie orzeł kodowany jest przez 0, a reszka przez 1), natomiast Z to odpowiedź na pytanie o równość X i Y (0 – fałsz, 1 – prawda). Sieć bayesowska odpowiadająca tym zmiennym była przedstawiona na rysunku 3. Pomimo tego, że wierzchołki X i Z są d -połączone, są one niezależne. Wedle tej zasady działa każdy godny szacunku kryminal: pojedyncza wskazówka nic nie mówi o przestępcy, ale uwzględnienie ich wszystkich pozwala na doprowadzenie go przed oblicze sprawiedliwości.

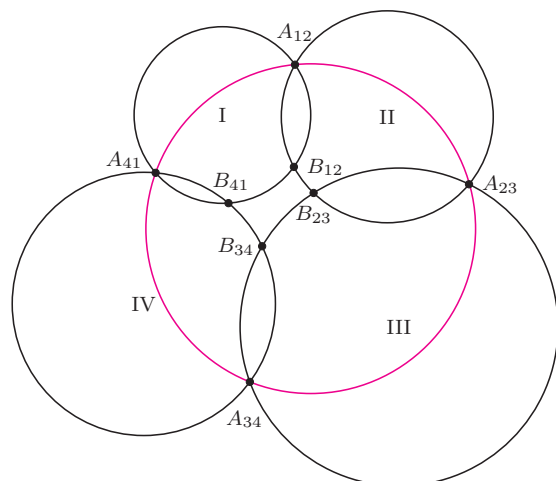
Czytelnik Pragmatyczny zapewne zaczął się już niecierpliwie – wprowadziliśmy mnóstwo nowych pojęć, a sformułowaliśmy tylko jedno twierdzenie, którego nawet nie udowodniliśmy; po co więc cały ten ambaras? Otóż sieci bayesowskie są bardzo poręcznym matematycznym wynalazkiem, pozwalającym w czytelny sposób przedstawiać zależności między zmiennymi losowymi. Są one użyteczne zwłaszcza wtedy, gdy chcemy zilustrować bezpośrednie związki między nimi. Działa to również w drugą stronę – choć na podstawie samych obserwacji nigdy nie jesteśmy w stanie zidentyfikować związków przyczynowo-skutkowych (jest to zasada, którą każda osoba przeprowadzająca analizę statystyczną powinna mieć na uwadze), zidentyfikowanie najprostszej sieci bayesowskiej można traktować jako krok w dobrym kierunku. Zauważmy bowiem, na przykład, że jeśli wśród zmiennych X, Y, Z zaobserwujemy niezależność X od Y , jednak zmienne te są zależne pod warunkiem Z , to wiemy, że mamy wówczas do czynienia ze „zderzaczem”. Stanowi to pewną mglistą przesłankę (nie zawsze słuszną), że X i Y „składają się” na Z ; wiemy jednak z całą pewnością, że Z nie może być przyczyną ani X , ani Y (wówczas bowiem mielibyśmy do czynienia z inną strukturą niezależności). Sprawy często komplikują tutaj tak zwane „ukryte zmienne” – jak, na przykład, wizyta w barze ostatniej nocy, która nie została uwzględniona podczas analizy...

Jeśli...

Drogi Czytelniku, narysuj takie cztery okręgi, że I przecina się z II, II z III, III z IV i IV z I. Powstanie osiem punktów – wspólne punkty I i II nazwij A_{12} i B_{12} i podobnie pozostałe. Jeśli trafi Ci się tak, że – jak na rysunku – punkty $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ leżą na jednym okręgu, to wówczas punkty $B_{12}, B_{23}, B_{34}, B_{41}$ też będą leżały na jednym okręgu (jak tutaj) lub na jednej prostej. Udowodnij to!

Podobnie gdyby punkty $A_{12}, B_{12}, A_{34}, B_{34}$ leżały na jednej prostej lub jednym okręgu, to wówczas pozostałe punkty też leżałyby na jednej prostej lub na jednym okręgu.

A czy te prawidłowości będą miały miejsce, gdy niektóre punkty A_{ij} zamienisz z punktami B_{ij} ?



M. K.

Internet Rzeczy

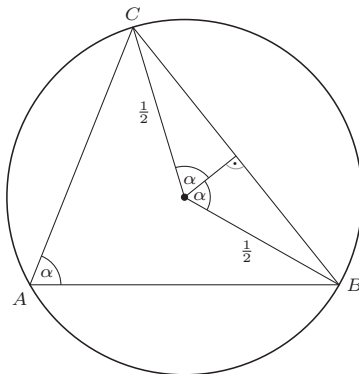
Konrad IWANICKI*

*Instytut Informatyki, Wydział
Matematyki Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

W latach czterdziestych ubiegłego wieku rząd w Londynie doszedł do wniosku, że do zaspokojenia potrzeb obliczeniowych całego Zjednoczonego Królestwa wystarczą jedynie dwa lub trzy komputery. Nieco ponad trzy dekady później, po niespełna pięciu latach oficjalnej działalności, firma z jabłuszkiem w logo zanotowała sprzedaż dwustutysięcznego komputera osobistego, co stanowiło jedynie kilkanaście procent ówczesnego rynku. Innymi słowy, postęp technologiczny sprawił, że w relatywnie krótkim czasie komputery zajmujące całe hale i ważące kilkadziesiąt ton uległy miniaturyzacji do skali pudełka na buty, przy jednoczesnym spadku ich ceny o kilka rzędów wielkości i wzroście mocy obliczeniowej. Tym samym urządzenia obliczeniowe zaczęły szturmem wdzierać się w różne aspekty naszego życia.

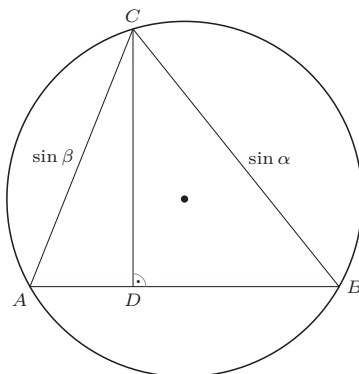
Ich rozprzestrzenianie stało się także jednym z katalizatorów stworzenia globalnej platformy wymiany informacji. Technologie sieciowe opracowywane w ramach projektu badawczego ARPANET, finansowanego od końca lat sześćdziesiątych z budżetu obronnego Stanów Zjednoczonych, zostały w latach siedemdziesiątych częściowo ujawnione, a instytucje akademickie dostały „zielone światło” na podłączenie się do prototypowej sieci. Między innymi w wyniku efektownych, aczkolwiek niekoniecznie przykładowych działań nowych użytkowników, na początku lat osiemdziesiątych cywilna część sieci ARPANET została oddzielona od części wojskowej. Tak powstał załączek globalnej sieci – Internetu.

Podpowiedź do rysunku 1 z *Malej Delty*



Sukcesywne podłączanie nowych użytkowników, dalszy rozwój technologiczny i decyzja o zezwoleniu na wykorzystywanie sieci do działalności komercyjnej doprowadziły do prawdziwej eksplozji Internetu w latach dziewięćdziesiątych. Rzesza firm zauważyła ogromny potencjał globalnej łączności do zwiększenia sprzedaży swoich produktów i usług, niejednokrotnie na niespotykaną wcześniej skalę. Nie tylko wpłynęło to na kompletną transformację istniejących modeli biznesowych, lecz także dało początek spółkom oferującym zupełnie nowe usługi. Internet stał się tym samym fundamentem rodzącej się cyfrowej gospodarki, rządzącej się jednak podobnymi prawami co tradycyjna, czego boleśnie doświadczyło wiele firm próbujących poprzez globalną sieć „rewolucjonizować” różne gałęzie handlu.

Podpowiedź do rysunku 5 z *Malej Delty*



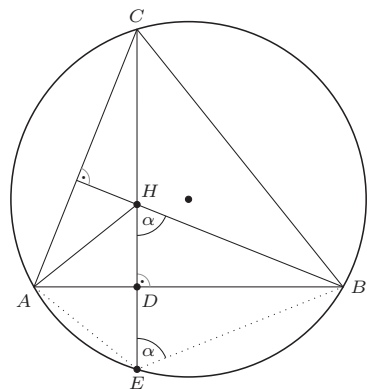
Dalsza miniaturyzacja urządzeń obliczeniowych i rozwój technologii komunikacji bezprzewodowej doprowadziły w pierwszej dekadzie XXI wieku do powstania i upowszechnienia się smartfonów, dających właścicielom dostęp do zasobów Internetu praktycznie w dowolnym miejscu na Ziemi. Jednocześnie ogromną popularność zyskały serwisy społecznościowe pozwalające w prosty sposób dzielić się informacjami z zainteresowanymi ludźmi. Możliwość natychmiastowego pochwalenia się każdą „złotą myślą”, wyglądem aktualnie spożywanego posiłku, czy też zdjęciem z miejsca, w którym się znaleźliśmy oraz obserwowania, co w tym samym czasie robią nasi znajomi, zmieniła komunikację międzyludzką, przenosząc znaczną jej część ze świata rzeczywistego do cyfrowego świata Internetu. O tym, jak ważny stał się ten cyfrowy świat, świadczy choćby uchwała Organizacji Narodów Zjednoczonych z początku lipca 2016 r., którą można interpretować jako uznanie dostępu do Internetu podstawowego prawa człowieka.

Obecnie wielu z nas wykorzystuje Internet przez znaczną część doby, zarówno prywatnie, jak i w ramach obowiązków zawodowych. Podobnie wiele firm i instytucji nie mogłoby prowadzić swojej działalności bez globalnej sieci. Potwierdzeniem tych faktów jest choćby liczba użytkowników Internetu, która pod koniec czerwca ubiegłego roku szacowana była na niemal cztery miliardy, a zatem ponad połowę ziemskiej populacji. Wydawać by się więc mogło, że istotnie większy sukces może być trudny do osiągnięcia.

$$\frac{|DB|}{\sin \alpha} = \cos \beta,$$
$$\frac{|AD|}{\sin \beta} = \cos \alpha,$$
$$\sin \gamma = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta).$$

Podpowiedź do rysunku 6 z *Malej Delty*
 $|HC| = \cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) =$
 $= -\cos(\alpha + \beta).$

Podpowiedź do rysunku 7 z *Malej Delty*



$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CEB| = \alpha$, bo są to kąty oparte na tym samym łuku, zatem
 $|DH| = |DE|$. Wówczas:
 $|\sphericalangle EBC| = \beta + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)$,
 $|EC| = \sin \sphericalangle EBC = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)) =$
 $= \cos(\alpha - \beta).$

Jeśli jednak oderwiemy na chwilę wzrok od tego tekstu i rozejrzemy się dookoła, zauważymy, że cyfrowy świat Internetu jeszcze nie w pełni przenika otaczający nas świat fizyczny. O ile globalna sieć łączy ludzi, firmy i inne instytucje, o tyle, na przykład, przedmioty codziennego użytku nie są jej częścią. Kubek stojący na biurku, doniczka z kwiatkiem na parapecie czy choćby lodówka z jedzeniem nie są prawdopodobnie podłączone do Internetu (aczkolwiek, zwłaszcza w ostatnim przypadku, może to już nie być prawda). Wizja, w której takie i podobne, otaczające nas obiekty fizyczne, są pełnoprawnymi członkami globalnej sieci, to właśnie **Internet Rzeczy**.

Technologie, które sprawiły, iż realizacja tej wizji w ogóle stała się możliwa, to niskomocowa komunikacja bezprzewodowa, energooszczędne mikroprocesory oraz rozmaite miniaturowe czujniki i aktywatory. Technologie te pozwalają dziś budować **mikrouządzenia** o wielkości monety lub nawet milimetrowego sześciangu, które, pracując autonomicznie latami, czy to na bateriach, czy też dzięki energii pobieranej z otoczenia, są w stanie wykonywać obliczenia o podobnej złożoności, co pierwsze komputery osobiste, i komunikować się z innymi urządzeniami w Internecie. Dzięki tym właściwościom oraz odpowiednim czujnikom i aktywatorom mikrouządzenia mogą być wbudowywane nawet w niewielkie obiekty fizyczne, co pozwala im obserwować te obiekty lub przestrzeń wokół, analizować obserwacje, wymieniać wyniki analiz z innymi urządzeniami w globalnej sieci i na tej podstawie wyzwać różne funkcje obiektów fizycznych, własnych bądź kontrolowanych przez inne (mikro)urządzenia podłączone do Internetu. Innymi słowy, wbudowywanie w otaczające nas rzeczy „inteligentnych” mikrouządzeń ma umożliwić obserwację i wpływanie na otaczający nas świat fizyczny poprzez cyfrowy świat globalnej sieci – potencjalnie bez żadnego bezpośredniego udziału człowieka.

Naturalnie nasuwającą się wątpliwością związaną z tą wizją jest cel podłączania rzeczy do Internetu – po co naszemu przykładowemu kubkowi, doniczce czy lodówce „inteligencja” i dostęp do globalnej sieci? Jak w przypadku znacznej części wynalazków, czynnikami napędzającymi rozwój Internetu Rzeczy są, między innymi, wygoda, zdrowie i szeroko rozumiane bezpieczeństwo, w tym ekologia. I tak, na przykład, monitorując napoje, które spożywamy, „inteligentny” kubek mógłby sugerować zmiany przyzwyczajęń, rekomendować nowe smaki, czy też, we współpracy z różnymi gadżetami sportowymi właściciela, pomagać utrzymać zdrowie i idealną sylwetkę; mierząc temperaturę otoczenia, wilgotność gleby i nasłonecznienie oraz mając informację, jaka roślina się w niej znajduje, „inteligentna” doniczka mogłaby powiadamiać nas, kiedy i ile wody należy użyć do podlewania lub nawet automatycznie przeprowadzić takie podlewanie; wreszcie, monitorując, jakie produkty są w niej przechowywane, kiedy upływa termin ich przydatności do spożycia oraz jak często poszczególne produkty są przez nas wybierane, „inteligentna” lodówka mogłaby uczyć się naszych przyzwyczajęń, ostrzegać o bliskich terminach ważności czy też automatycznie uzupełniać zapasy w internetowych sklepach spożywczych, z jednej strony wykorzystując rozmaite promocje, ale jednocześnie unikając marnowania jedzenia. O ile powyższe przykłady można potraktować z lekkim przymrużeniem oka, o tyle zastosowania wizji Internetu Rzeczy w przemyśle, rolnictwie, medycynie, transporcie oraz zarządzaniu infrastrukturą są tak liczne, iż czołowy światowy dostawca technologii sieciowych szacuje, że ponad 99% otaczających nas rzeczy nie jest jeszcze częścią globalnej sieci, choć ich podłączenie mogłoby być uzasadnione ekonomicznie.

Jednym z powodów takiej sytuacji jest fakt, iż pomimo znacznego postępu technologicznego realizacja wizji Internetu Rzeczy wymaga, póki co, uprzedniego rozwiązania szeregu otwartych problemów badawczych. Jeśli chodzi o problemy czysto informatyczne, to wiele z nich jest spowodowanych brakiem algorytmów odpowiednich dla tej wizji, w szczególności algorytmów sieciowych, które z jednej strony wymagają niewielkiej ilości zasobów obliczeniowych, a z drugiej strony są w stanie obsłużyć ogromną liczbę mikrouządzeń – takie algorytmy dotychczas po prostu nie były potrzebne. Dobrym przykładem jest tu efektywne



Patrz, na przykład, artykuł Marcina Peczarskiego *Sieć*, Δ_{16}^{01} .

Projekt HENI finansowany przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju (NCBR) w ramach programu LIDER VI (www.mimuw.edu.pl/~iwanicki/projects/heni).

i skalowane wyznaczanie tras dla pakietów, który to problem jest centralnym problemem Internetu, a więc także tematem dziesiątek książek oraz tysięcy artykułów naukowych, i z którym to problemem – w nowym wariantcie, to jest dla bezprzewodowych sieci mikrouządzeń – walczy, między innymi, moja grupa badawcza. Jednakże, obok podobnych problemów natury informatycznej, nie mniej istotne są także kwestie w innych dyscyplinach naukowych: chemii (np. pojemne baterie pozwalające wydłużyć okres autonomicznej pracy mikrouządzeń), fizyce (np. bezprzewodowa komunikacja niskomocowa o jak największym zasięgu i przepustowości), socjologii (np. wpływ technologii na rynek pracy) czy prawie (np. prywatność wobec wszechobecnych czujników).

Niezależnie od powyższych problemów, biorąc pod uwagę dotychczasowy sukces globalnej sieci oraz możliwą jej ekspansję do bilionów otaczających nas obiektów fizycznych, potencjał wizji Internetu Rzeczy wydaje się ogromny. Nie jest więc zaskakujące, iż technologie wpisujące się w tę wizję są w centrum zainteresowania wielu firm, instytucji publicznych oraz inwestorów. Podobnie nie dziwi fakt, że na rynku pojawiają się już produkty i systemy w mniejszym lub większym stopniu wpisujące się w tę wizję – w końcu dzisiejszy Internet także rozpoczynał się jedynie od kilku komputerów. Być może Ty również – Czytelniku – korzystasz z takich nowatorskich rozwiązań na co dzień, a jeśli nie, to zapewne wkrótce zaczniesz, być może nawet nieświadomie...

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1567. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n \geq 2$ wyznaczyć taki wielomian $W_n(x)$ o współczynnikach wymiernych, że

$$W_n(\sqrt[n]{2}) = \frac{1}{1 + \sqrt[n]{2}}.$$

Rozwiązanie na str. 15

W kolejnych dwóch zadaniach rozważmy zbiór $S = \{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{Q}^+\}$, gdzie \mathbb{Q}^+ to zbiór dodatnich liczb wymiernych.

M 1568. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że n jest sumą dwóch elementów zbioru S wtedy i tylko wtedy, gdy n jest iloczynem dwóch elementów zbioru S .

Rozwiązanie na str. 15

M 1569. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można zapisać w postaci sumy dwóch elementów zbioru S oraz nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, które można zapisać w takiej postaci.

Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Michał NAWROCKI

F 953. Przewodnictwo elektryczne metalu można zapisać wzorem $\sigma = en\mu$, gdzie n to koncentracja elektronów swobodnych, e – ładunek elektronu a μ – ruchliwość, będąca współczynnikiem proporcjonalności między zewnętrznym polem elektrycznym i dodatkową prędkością uzyskiwaną przez elektrony, zależnym od rozpraszania elektronów na domieszkach i drganiach sieci krystalicznej.

Stosunek przewodnictwa elektrycznego srebra do przewodnictwa elektrycznego miedzi wynosi 1,06. Obliczyć stosunek ruchliwości elektronów w tych metalach, przyjmując, że każdy atom dostarcza jeden elektron przewodnictwa.

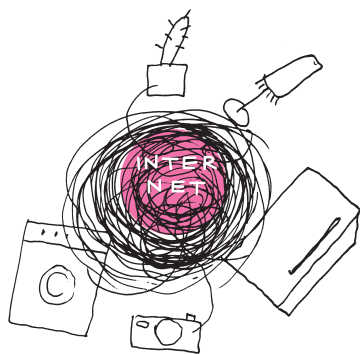
Rozwiązanie na str. 7

F 954. Dla pewnego metalu zjawisko fotoelektryczne występuje, gdy częstość światła padającego wynosi co najmniej $6 \cdot 10^{14}$ Hz. Znaleźć częstość światła padającego na wykonaną z tego metalu fotokatodę, jeżeli emitowane z jej powierzchni fotoelektrony można całkowicie zatrzymać, umieszczając przed nią siatkę, mającą w stosunku do niej potencjał $U = 3$ V.

Rozwiązanie na str. 6



Zadania



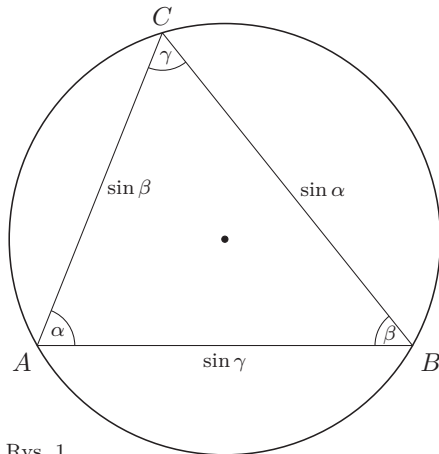


mała delta

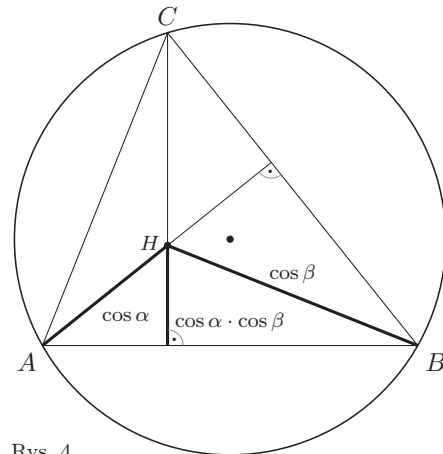
O mierzeniu trójkątów

„Nie będziemy gadać niepotrzebnych rzeczy.”
St.I. Witkiewicz, *Szewcy*, 1934

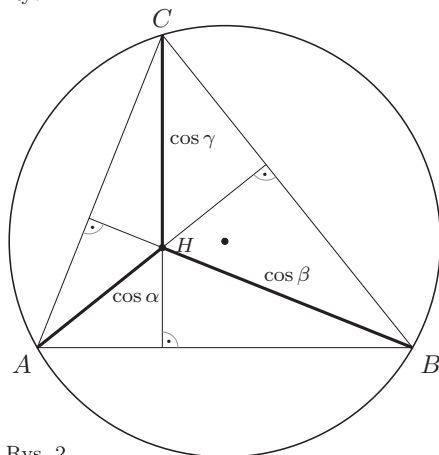
Oznaczenia na rysunkach są standardowe, a średnica okręgu $d = 1$.



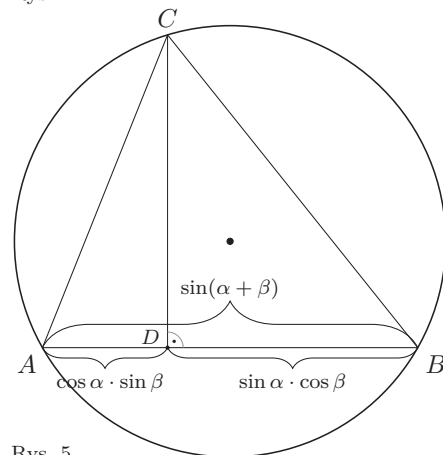
Rys. 1



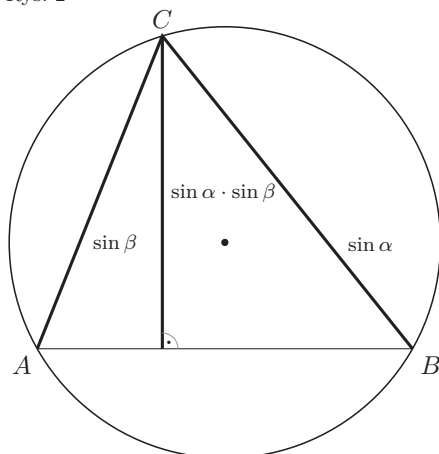
Rys. 4



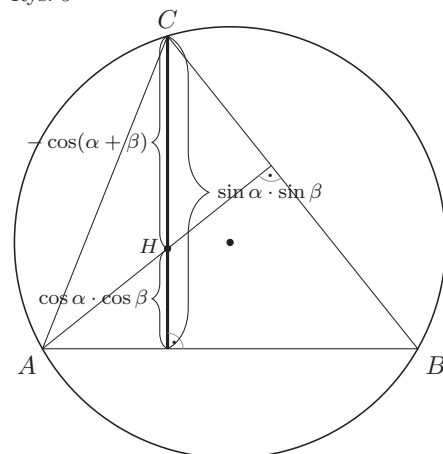
Rys. 2



Rys. 5



Rys. 3



Rys. 6. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

Przez eter do teorii względności

Michał TARNOWSKI*

*student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Znany matematyk i filozof angielski, Lord Bertrand Russell, jest autorem książeczki *ABC teorii względności*. Napisał w niej jak to bardzo wielu ludzi wie, że Einstein zrobił coś wielkiego – a jednocześnie mało kto wie, co to konkretnie jest. To samo można powiedzieć o teoriach eteru i o doświadczeniu Michelsona–Morleya – historycznie poprzedzających szczególną teorię względności. Bardzo wielu ludzi zainteresowanych fizyką o nich słyszało, ale zwykle nie poświęca się im tyle uwagi, ile potrzeba, aby zrozumieć historyczne korzenie szczególnej teorii względności (STW) i co zdecydowało o jej sukcesie.

Historia poprzedzająca sformułowanie STW jest długa i dotyczy optyki, astronomii, mechaniki i elektrodynamiki. Ma kilka niuansów, które mogą prowadzić – i, niestety, często prowadzą – do kilku poważnych nieporozumień. Być może ten artykuł pomoże je wyjaśnić. Forma kalendarium może wydawać się sucha, ale jest przejrzysta. Skończymy je tam, gdzie zaczyna się wiele historycznych wstępów do STW – na doświadczeniu Michelsona–Morleya z końca XIX wieku. Wyjaśnienie, co się stało między nim a opublikowaniem STW w 1905 r., wymagałoby osobnego artykułu.

1676 – duński astronom Ole Rømer publikuje astronomiczne dowody, że prędkość światła w próżni (od XX w. oznaczana przez c) jest ograniczona. Wbrew powszechnemu przekonaniu Rømer nie podał liczbowej wartości c , a jedynie czas przelotu światła przez orbitę ziemską. Pierwsze znane szacunki c należą do Christiaana Huygensa. Wbrew innemu przekonaniu – Rømer znał promień orbity ziemskiej (tzw. jednostkę astronomiczną), ale nie uważał liczbowej wartości c za szczególnie istotną.

Rømer pracował nad wyznaczeniem długości geograficznej. To miało wielkie znaczenie dla floty, a Francja ściagała się wtedy z Wielką Brytanią o kolonie i o dominację na morzu. Wyznaczenie długości geograficznej wymagało użycia zegara, a dostępne wtedy czasomierze słoneczne, klepsydry i zegar wahadłowy Huygensa były za mało dokładne dla żeglugi. Galileusz zaproponował wykorzystanie swojego odkrycia: księżyców Jowisza, a konkretniej ich zaćmień przez tego gazowego olbrzyma. Okres obiegu Io wokół Jowisza to niecałe dwa dni, dlatego z obserwacjami nie trzeba czekać na wyjątkowy czas w roku. Metoda okazała się nie do zrealizowania na morzu – statki były za mało stabilne do obserwacji astronomicznych. Mimo to była użyteczna na lądzie.

Rømer uczestniczył w wyznaczeniu różnicy długości geograficznej między Paryżem a Uraniborgiem pod Kopenhagą, gdzie mieściło się dawne obserwatorium Tycho Brahego. Przy dokładnych obserwacjach zauważył efekt podobny do efektu Dopplera przewidzianego i odkrytego w XIX wieku. Kiedy Jowisz zbliżał się do Ziemi, okres kolejnych odsłoneń lub zniknięć Io był krótszy niż przy oddalaniu się tych dwóch planet. Światło odbijane przez Io miało między kolejnymi zaćmieniami skracaną lub wydłużaną drogę do Ziemi dzięki wzajemnemu ruchowi. Znając prędkość orbitalną Ziemi i elementarną algebrę, można stąd wyznaczyć c lub czas przelotu światła przez daną odległość.

Wyniki Rømera i Huygensa były ciepło przyjęte przez Newtona. Od II wydania *Principiów* pisze w nich, że Słońce jest oddalone od Ziemi o około 8 minut świetlnych. Mimo to znaleźli się krytycy: Robert Hooke oraz współpracownicy Rømera z paryskiego obserwatorium królewskiego, jak Cassini i Picard. Wskazywali np. na brak podobnych efektów dla innych księżyców. Alternatywne wyjaśnienia obserwacji Rømera zostały wykluczone dopiero w XVIII wieku przez Laplace'a.

1728 – James Bradley obserwuje aberrację gwiazdową i wyjaśnia ją przez ograniczoną prędkość światła. Skończona wartość c zostaje powszechnie przyjęta. Jego obserwacje dowodzą też ruchu Ziemi względem gwiazd stałych – to pierwszy bezpośredni dowód heliocentryzmu Kopernika. Geocentryzm jest do uratowania tylko przez groteskowe założenie, że wszystkie gwiazdy krążą wokół Słońca.



Rozwiązanie zadania M 1569.

Udowodnimy, że jeżeli n jest liczbą podzielną przez 8, to n nie można zapisać w postaci sumy dwóch elementów zbioru S albo – w myśl tezy poprzedniego zadania – w postaci iloczynu dwóch elementów zbioru S . Przypuścimy, że

$$n = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) = \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{abcd},$$

gdzie $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(c, d) = 1$. Skoro $8|n$, to co najmniej jeden z czynników w liczniku powyższego ułamka jest podzielny przez 4; bez straty ogólności założymy, że $4|a^2 + b^2$. Stąd wynika, że liczby a i b są tej samej parzystości, skąd wobec $\text{NWD}(a, b) = 1$ – obie są nieparzyste. Jednak wówczas $a^2 + b^2$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4 – sprzeczność.

Aby wskazać nieskończenie wiele liczb naturalnych będących iloczynami dwóch elementów zbioru S , rozważymy ciąg Fibonacciego

$F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, dla $n \geq 1$ i wykorzystamy tożsamość

$$F_{2n+1}^2 + 1 = F_{2n-1} F_{2n+3}.$$

Dla $(x, y) = (F_{2n+1}, F_{2n+3})$ mamy więc

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) = \frac{x^2 + 1}{y} \cdot \frac{y^2 + 1}{x} = \frac{F_{2n+3}^2 + 1}{F_{2n+1}} \cdot \frac{F_{2n+1}^2 + 1}{F_{2n+3}} = F_{2n+5} F_{2n-1},$$

co jest liczbą całkowitą dla każdego $n \geq 1$. To kończy dowód, gdyż dla różnych n otrzymujemy różne liczby.

Największe różnice w położeniu gwiazd są między równonocami wiosennymi a jesiennymi, a to dlatego, że wtedy prędkość orbitalna Ziemi jest największa. To odwrotnie niż przy paralaksie rocznej. Wywołuje ona skrajnie różne położenia ciał na niebie między przesileniami (lato i zima), bo odległość między tymi punktami orbity jest największa, zgodnie z I prawem Keplera. Po stuleciach nieudanych prób paralaksę roczną wreszcie zaobserwował Bessel w XIX w. Była jeszcze jednym koronnym dowodem heliocentryzmu.



Rozwiązanie zadania M 1567.

Podstawiając $a = -\sqrt[3]{2}$ oraz $k = 2n$ do tożsamości

$$\frac{1 - a^k}{1 - a} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i,$$

uzyskujemy

$$-\frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}} = \sum_{i=0}^{2n-1} (-\sqrt[3]{2})^i,$$

czyli

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} (\sqrt[3]{2})^i.$$

Wobec tego wystarczy przyjąć

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{3} x^i.$$



Rozwiązanie zadania M 1568.

Zauważmy, że jeżeli $n = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Q}^+$, to

$$n = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

przy czym $xy, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^+$. To dowodzi, że jeżeli n jest iloczynem dwóch elementów zbioru S , to jest również sumą dwóch elementów zbioru S .

Przypuśćmy, że $n = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Q}^+$ oraz niech $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ będą zapisami liczb x, y w postaci ułamków nieskracalnych, czyli $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(c, d) = 1$. Wówczas

$$n = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{abcd}.$$

Ponieważ n jest liczbą całkowitą, więc ab musi być dzielnikiem licznika powyższego ułamka. Stąd wniosek, że ab dzieli $(a^2 + b^2)cd$, skąd wobec $\text{NWD}(a, b) = 1$ mamy, że ab dzieli cd . Analogicznie uzasadniamy, że cd dzieli ab . Zatem $ab = cd$, czyli $d = \frac{ab}{c}$ i w konsekwencji

$$\begin{aligned} n &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} = \\ &= \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \\ &= \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right). \end{aligned}$$

Skoro $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}^+$, to n jest iloczynem dwóch elementów zbioru S .

Aberracja gwiazdowa to przesuwanie się w ciągu roku gwiazd na niebie o kąt około 20'' (sekund). (Równoważnie: to 1/3 minuty kątowej albo 1/180 stopnia.) Pierwszy raz była zaobserwowana przez Cassiniego i Picarda, a Hooke błędnie interpretował ją jako paralaksę. Bradley wyjaśnił ją poprawnie przez złożenie prostopadłych prędkości światła oraz Ziemi względem gwiazd. To zjawisko bywa porównywane do spadającego pionowo deszczu: kiedy obserwator się porusza poziomo względem powierzchni Ziemi i chmur, tj. prostopadle do deszczu, krople spadają na niego z ukosa. Jeśli porusza się w przeciwnym kierunku, kąt opadów zmienia kierunek. Najwyraźniej widać to na szybach pojazdów. Znając kąt przesunięcia, można obliczyć stosunek dwóch prędkości.

1810 – François Arago, tak jak większość ówczesnych fizyków, wierzy w newtonowskie cząstki światła. Szuka różnicy w prędkościach promieni pochodzących z różnych gwiazd. Spodziewane różnice w aberracji gwiazdowej byłyby za małe. Dlatego próbuje znaleźć różnice w prędkości przez dyspersję – różne kąty załamania dla promieni o różnej prędkości. Obserwuje gwiazdy przez teleskop i pryzmat, ale nie znajduje żadnych różnic w prędkości światła, mimo ruchu obiegowego Ziemi. Konkluduje, że widocznie każda gwiazda wysyła promienie o różnych prędkościach, ale tylko jedna prędkość jest widoczna dla ludzkiego oka. Pozostałe miałyby być np. niedawno odkrytymi promieniami cieplnymi Herschela (podczerwienią) i promieniami chemicznymi Rittera (nadfioletem).

1818 – Augustin Fresnel wyjaśnia doświadczenie Arago przez falową teorię światła oraz hipotezę częściowego wleczenia eteru. Arago wykazuje się wielką uczciwością intelektualną i zostaje przekonany. Hipoteza ma wiele słabych punktów. Stopień wleczenia eteru ma zależeć od współczynnika załamania. Biorąc pod uwagę dyspersję – eter powinien być wleczony w różnym stopniu przez różne długości fal albo każda długość powinna mieć swój własny eter. Podobny problem dotyczył dwójłomności.

Podłużne fale świetlne nie potrafiły wyjaśnić doświadczenia Malusa z polaryzacją przez odbicie. Za to fale poprzeczne mogą się rozchodzić tylko w ciele stałym. Dlatego eter był traktowany przez Fresnela jako ciało stałe, a nie jako płyn. Płyn z definicji nie wytrzymują tzw. momentów ścinających, czyli przesuwanie się równoległych płaszczyzn w przeciwnych kierunkach. Jeśli sąsiednie obszary fali, np. po różnych stronach grzbietu, przesuwałyby się poprzecznie w różne strony, to nie wróciłyby do wyjściowego stanu i ich ruch nie byłby okresowy. Dzięki badaniu podłużnych i poprzecznych fal sejsmicznych wiadomo, jaka część wnętrza Ziemi jest stała, a jaka – płynna.

1845 – George Stokes proponuje bardziej spójną teorię całkowitego wleczenia eteru. Jak się potem okaże – również ona jest szyta bardzo grubymi nićmi.

1851 – Hippolyte Fizeau mierzy prędkość światła w płynącej wodzie. Jego wyniki wydają się potwierdzać fresnelowską hipotezę częściowego wleczenia. Podobne doświadczenie wykonuje w Holandii Martinus Van Hoek w 1868.

1871 – George Airy sprawdza hipotezy Fresnela i Stokesa, obserwując aberrację gwiazdową przez teleskop wypełniony wodą. Wbrew przewidywaniom Stokesa – nie ma żadnych odstępstw od aberracji obserwowanej przez zwykły teleskop.

1881 – Albert Michelson w Poczdamie pod Berlinem, przy współpracy z laboratorium Helmholtza, używa swojego interferometru do szukania wiatru eteru. Otrzymuje negatywny wynik. Uważa to za potwierdzenie teorii Stokesa i obalenie teorii Fresnela. Inni naukowcy wytykają mu błędy.

Doświadczenie polegało na szukaniu różnicy faz dla prostopadłych wiązek światła, pokonujących taką samą odległość. Ta poruszająca się wzdłuż eteru razem z Ziemią miałyby krótszy czas przelotu niż ta poprzeczna. Po obrocie interferometru i zamianie ramion można by się spodziewać innej różnicy faz i przez to przesunięcia prążków interferencyjnych na ekranie. To było

Polecana literatura

- Andrzej Kajetan Wróblewski, *Historia fizyki*, PWN, Warszawa 2006
Tenże, *De Mora Luminis: A spectacle in two acts with a prologue and an epilogue*, American Journal of Physics, 1985
Michel Janssen, John Stachel, *Optics and electrodynamics of moving bodies in the 19th century*, Max Planck Institute for the History of Science, 2004
What a drag: Arago's Experiment (1810), 2008 skullsinthestars.com/2008/07/05/what-a-drag-aragos-experiment-1810
Wojciech Kopczyński, Andrzej Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja*, PWN, Warszawa 1981

pierwsze doświadczenie drugiego rzędu, tzn. w którym oczekiwany efekt był proporcjonalny do kwadratu v/c (tzw. stałej aberracji), a nie tylko wprost do tego stosunku.

1886 – Michelson i Edward Morley powtarzają doświadczenie Fizeau z większą dokładnością. Wynik wydaje się potwierdzać teorię Fresnela, a wcześniejsze doświadczenie Michelsona okazuje się niedokładne.

1887, wiosna – Woldemar Voigt w Getyndze publikuje pracę matematyczną o efekcie Dopplera i o własnościach równania falowego. Znajduje transformacje współrzędnych, względem których to równanie jest niezmiennicze. Voigt nie odnosi się wcale do doświadczeń związanych z eterem. Jego praca jest osobnym wątkiem, związanym z STW w inny sposób.

1887, lato – Michelson i Morley w Cleveland w stanie Ohio wykonują swoje słynne doświadczenie, znane po prostu jako doświadczenie Michelsona–Morleya. Było powtórzeniem doświadczenia Michelsona z 1881 z większą dokładnością. Długości ramion powiększono przez wielokrotne odbicia wiązek. Ewentualne drgania, np. przy obrocie, miały być niwelowane przez rtęć, na której pływało urządzenie. Mimo to nie znajdują żadnego wiatru eteru. Wyniki zdają się znowu potwierdzać całkowite wleczenie i negować wyniki sprzed roku.

Jak wspomniano na wstępie, łatwo o kilka nieporozumień na temat tych jedenastu wydarzeń. Niektóre z nich są dużo poważniejsze niż te dotyczące obserwacji Rømera.

1. Wprowadzenie eteru rzekomo przez teorię elektromagnetyczną Maxwella. Eter miał długą historię, sięgającą korzeniami starożytności. Został powszechnie uznany razem z falową teorią światła na początku XIX w. Całe dekady później powstała teoria Maxwella, która pomogła eter wyeliminować. Pole elektromagnetyczne nie potrzebuje ośrodka, tak jak nie potrzebuje go pole grawitacyjne.

Dla jasności trzeba przyznać, że owszem, równania Maxwella sugerują pewien wyróżniony układ odniesienia. W swojej pełnej postaci, z tzw. prądem przesunięcia w prawie Ampere'a, te równania nie mają symetrii Galileusza. Wyróżniony układ utożsamiano z eterem, ale to nie jest logiczna konieczność. Przykładowo Emil Cohn uważał, że równania elektrodynamiki są spełnione w idealnie inercjalnym układzie gwiazd stałych. Jak się jednak okazało, teoria Maxwella zamiast symetrii Galileusza ma symetrię Lorentza. Ta ostatnia jest w pełni fizyczna i nie ma wyróżnionego układu odniesienia.

Tak więc teoria Maxwella początkowo utrzymała starą wiarę w eter, ale potem przyczyniła się do jej odrzucenia. Czasami rozróżnia się eter w silniejszym sensie, fizyczny – ośrodek fal światła – oraz eter w słabszym sensie, geometryczny – wyróżniony układ odniesienia. Równania Maxwella zabiły ten pierwszy i początkowo sugerowały drugi, który również upadł.

2. Obalenie eteru rzekomo przez doświadczenie Michelsona–Morleya. Michelson i Morley uważali swój wynik za dowód jednego wariantu tej teorii – mianowicie hipotezy Stokesa (o całkowitym wleczeniu eteru). Jej niesłuszność była wskazana przez inne doświadczenia,

np. Fizeau. Morley i jego współpracownicy, np. Dayton C. Miller, szukali wleczenia eteru jeszcze w latach 20.

W odpowiedzi na doświadczenie M–M zaproponowano bardzo wyrafinowane teorie eteru. Ich epigoni, czyli ostatni obrońcy, byli aktywni jeszcze w latach 30., a nawet zdarzają się do dziś. Nic dziwnego, że na początku XX w. Bertrand Russell w swojej książce *Problemy filozofii* pisze o eterze bez zawahania. Do teorii eteru Lorentza odwoływał się jeszcze Ernest Rutherford w latach 20.

3. Rzekome udowodnienie przez doświadczenie M–M, że prędkość światła c w próżni jest nieprzekraczalna.

Jak wspomniano – to doświadczenie można wyjaśnić przez teorię całkowitego wleczenia. Nie daje ono żadnych ograniczeń na prędkość ciał względem eteru. Innym wyjaśnieniem jest teoria emisyjna Walthera Ritz z 1908 roku, w której prędkość światła względem źródła jest stała i wynosi c , eter nie istnieje (albo każde źródło ma własny eter), a prędkości transformują się galileuszowsko. W szczególności: prędkość światła i źródła w tej teorii mogły się dodawać. Obydwa wyjaśnienia – całkowite wleczenie i teorie emisyjne – okazały się fałszywe, ale rozstrzygnęły o tym inne doświadczenia niż to M–M.

To kalendarium kończy się w momencie, kiedy optyka i fizyka eteru cierpiały na rozdwojenie jaźni. Doświadczenia typu Fizeau wydawały się potwierdzać hipotezę Fresnela częściowego wleczenia eteru. Za to doświadczenie Michelsona–Morleya zdawało się potwierdzać hipotezę Stokesa wleczenia całkowitego. Potrzebny był geniusz, który potrafił wyjaśnić oba rodzaje doświadczeń. Znalazł się już po kilku latach – był nim Hendrik Antoon Lorentz, a jego prace nawet przerosły potrzeby optyki. Mimo to i one miały słabe punkty. Musiały ustąpić miejsca dziełu Einsteina – ale to temat na oddzielną opowieść.

Dobble

Wielu Czytelników z pewnością zna grę Dobble. Zestaw do gry składa się z wielu okrągłych kart, na każdej z nich jest 8 różnych rysunków. Każde dwie karty zawierają dokładnie jeden wspólny symbol. Gra, w skrócie, polega na tym, żeby jak najszybciej dostrzec ten wspólny symbol.

Ostatnio znajomy zapytał mnie, jak wywnioskować, ile jest kart w grze z dwóch następujących własności: 1) każda karta ma 8 symboli, 2) każde dwie karty mają dokładnie jeden wspólny symbol. Spróbujmy na nie odpowiedzieć. Zauważmy najpierw, że jeśli zgubimy którąś z kart, to nadal będziemy mogli grać, czyli nadal spełnione będą dwa powyższe warunki. W związku z tym nie możemy dokładnie określić, ile musi być kart, bo zawsze może być ich mniej. Ciekawe natomiast jest pytanie, ile może być maksymalnie kart w talii.

Na tak sformułowane pytanie możemy odpowiedzieć w sposób wykrętny. Mianowicie możemy wybrać pewien symbol, powiedzmy *słonia*, i na każdej karcie narysować słonia, a oprócz tego umieścić na różnych kartach różne symbole, które nigdy się nie powtarzają. Nietrudno zauważyć, że możemy stworzyć dowolnie wiele kart, używając tego schematu. W takiej talii kart rzeczywiście każde dwie karty będą miały jeden wspólny symbol, ale zawsze będzie to słoń, gra nie będzie zbyt ciekawa. Dodajmy więc dodatkowe założenie, które spowoduje, że gra będzie nieco bardziej grywalna: 3) nie istnieje symbol, który występuje na wszystkich kartach. Zadajmy więc ponownie pytanie: ile kart może być maksymalnie w takiej talii?

Pokażemy, że taka talia ma co najwyżej 57 kart. Wybierzmy pewną kartę, nazwijmy ją *wyróżnioną*. Powiedzmy, że narysowane są na niej różne psy, będziemy je nazywać: pies numer 1, pies numer 2, ..., pies numer 8. Każda z pozostałych kart zawiera jakiegoś psa, i to dokładnie jednego, bo musi mieć dokładnie jeden wspólny symbol z kartą wyróżnioną. Udowodnimy teraz, że dla każdego $i \in \{1, \dots, 8\}$ poza kartą wyróżnioną jest co najwyżej 7 kart, które zawierają psa numer i . Załóżmy bez straty ogólności, że $i = 1$, dla innych i dowód jest analogiczny. Ponieważ żaden symbol nie występuje na wszystkich kartach, więc musi istnieć karta, która nie zawiera psa numer 1, nazwijmy ją *specjalną*. Musi ona jednak zawierać jakiegoś psa, gdyż musi mieć wspólny symbol z kartą wyróżnioną. Załóżmy bez straty ogólności, że karta specjalna zawiera psa numer 2, a oprócz tego 7 kotów: kota numer 1, ..., kota numer 7. Zauważmy teraz, że każda karta, która zawiera psa numer 1, musi mieć wspólny symbol z kartą specjalną. Nie zawiera psa numer 2, a więc musi zawierać jakiegoś kota. Z drugiej strony żadne dwie karty, zawierające psa numer 1, nie mogą mieć tego samego kota, bo zawierałyby wtedy dwa wspólne rysunki. Kotów na karcie specjalnej jest 7, a to oznacza, że oprócz karty wyróżnionej jest co najwyżej 7 kart zawierających psa numer 1. W ten sam sposób pokazujemy, że dla dowolnego $i \in \{1, \dots, 8\}$ oprócz karty wyróżnionej jest co najwyżej 7 kart zawierających psa numer i . A więc w sumie kart w talii jest co najwyżej 7 razy 8 plus 1 wyróżniona, czyli co najwyżej 57.



Na powyższe rozważania można również spojrzeć, używając nieco bardziej zaawansowanych narzędzi geometrii i algebry. Rysunki utożsamiamy wtedy z punktami, a karty będą prostymi, tyle że w przestrzeni rzutowej. Jeśli przestrzeń ta będzie miała wymiar 2 (czyli będzie płaszczyzną) i będzie nad ciałem skończonym wielkości 7, to spełnione będą warunki 1) każda prosta ma 8 punktów oraz 2) każde dwie proste przecinają się w jednym punkcie. Dodatkowo spełniony będzie warunek nawet ogólniejszy niż 3), czyli dla każdego punktu istnieją dwie proste, które przecinają się w tym dokładnie punkcie. Można nietrudno wykazać, że prostych tych będzie $7^2 + 7 + 1 = 57$, co pokazuje, że ograniczenie 57 istotnie da się osiągnąć! Co ciekawe, w grze Dobble jest tylko 55 kart, nie wiadomo zupełnie, dlaczego producenci zdecydowali się usunąć 2 karty.

Podobną konstrukcję kart, zawierających k symboli każda, można wykonać dla dowolnego k takiego, że $k - 1$ jest potęgą liczby pierwszej. Wynika to z faktu, że istnieje ciało skończone o mocy $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest potęgą liczby pierwszej. Więcej o grze Dobble, skończonych ciałach i płaszczyznach rzutowych można przeczytać w artykule *Naprawdę ciekawa gra w Δ_{14}^{94}* .

Wojciech CZERWIŃSKI

Ufać? Być „anty”?

Od dłuższego czasu nęka mnie problem stosunku społeczeństwa do szczepień ochronnych, częśćka problemu dużo bardziej obszernego – zmniejszania się społecznego zaufania do nauki i jej osiągnięć. Zdaję sobie sprawę, że temat jest niefelietonowy. Niemniej jednak zacznę od tych szczepionek, odkładając na bok podobne debaty i „debaty” ostatnich lat, odnoszące się do GMO, energii jądrowej czy też zmian klimatycznych, na których się nie znam. O co chodzi w sprawie szczepionek – rozumiem. Z zadziwieniem, ale i uznaniem przeczytałam informację o lekarzu pediatrze z Tychów: Dawid Ciemięga postanowił pozwać do sądu antyszczepionkowców, którzy byli szczególnie aktywnymi hejterami w stosunku do jego oświadczeń o skuteczności szczepionek; doktor Ciemięga chce w trakcie procesu sądowego, zachowując jego zasady, pokazać absurdalność walki z procedurami immunologicznymi. *Nie do wiary* – mówi reporterowi „Newsweeka” – że w XXI wieku można organizować „konferencje”, na których ludzie z tytułami opowiadają, jak to szczepionki wprowadzają metal do neuronów, przez co dzieci stają się cyborgami, którymi można zdalnie sterować. Można mieć nadzieję, że takimi procesami zainteresują się media. . . .

Niedowierzanie w stosunku do szczepionek i podobnych procedur nie pojawiło się w XXI wieku. Pierwsze tego typu zjawiska miały miejsce ponad 200 lat temu i przebiegały w następującym cyklu.



1. Zostaje wytworzona szczepionka uodporniająca na groźną, śmiertelną chorobę. Pierwszy zabieg, któremu można nadać taką nazwę, to procedura Edwarda Jennera, polegająca na wcieraniu w zadrapanie człowieka wydzielin krowiej ospy (1796), skutkujące uodpornieniem na ludzką czarną ospę. Podobnie odważnym i pionierskim postępowaniem był pomysł Ludwika Pasteura w stosunku do śmiertelnego zakażenia wścieklizną. O wstępie do przygotowania szczepionki pisano w piśmie „Biesiada Literacka” w sierpniu 1884 r.: *Psu przytwierdzonemu do stołu w laboratorium i uspijonemu chloroformem nacina się skórę na czole, potem go się trepanuje, za pomocą szprycki szklanej z zakrzywionym końcem zapuszcza mu się w mózg kroplę jadu wziętego ze zwierzęcia zdechłego*. A dwa lata później szczegółowo o tej procedurze pisano w piśmie „Prawda” z 1886 r. (szczepienia.wybudzeni.com/2017/09/29/metoda-pasteura-leczenia-wscieklizny/).

2. W miarę spadku liczby zachorowań w wyniku zaszczepień w społeczeństwie maleje świadomość zagrożenia.

3. Różnorodne środki masowego przekazu (przeglądarki internetowe odegrały tu w ostatnich latach zasadniczą rolę) dodatkowo i przystępnie kwestionują celowość szczepień. Liczba szczepień spada.

4. Wraz z obniżeniem liczby szczepionych, a więc wzrostem wrażliwości na daną chorobę, w populacji pojawia się od nowa zagrożenie epidemią. W przypadku chorób dzieci epidemia grozi przy spadku liczby zaszczepionych poniżej 95% populacji.

Problemem ruchów antyszczepionkowych można, jak to stwierdzają dokumenty w nowomowie biurokratycznej, *zarządzać*. I przede wszystkim nie uznawać z góry, że wyznawcy tych poglądów są bezmyślnymi, złośliwymi ignorantami. Taki apel dotyczy w pierwszym rzędzie przedstawicieli ochrony zdrowia, zarówno ludzi nauki, jak urzędników. Ponieważ w Polsce już stajemy wobec takiego wyzwania, a jak stwierdziłam uprzednio, problem nie może być wyczerpany w felietonie, proponuję zainteresowanym na początek zapoznanie się z dającym do myślenia numerem 12/2018 „Tygodnika Powszechnego” (*Racje przegrywają z emocjami i Raport przed epidemią*), a także ważnym i dającym nadzieję opracowaniem Joanny Grabowskiej dla Biura Analiz Senatu RP z marca 2018 „Kontrowersje wokół szczepień obowiązkowych” (www.senat.gov.pl/gfx/senat/pl/senatopracowania/158/plik/ot-660_do_internetu-1.pdf).

Według badań CBOS w 2017 r. 73% Polaków uznawało, że szczepienia są bezpieczne. Liczba odmawiających szczepień dziecka wynosiła 4 tys. w latach 2006–2010, 6 tys. w latach 2011–2015, a tylko w 2016 roku 23 tys.

Magdalena FIKUS

Informatyczny kącik olimpijski (116): Ciągi i łańcuchy

Tym razem omówimy dwa zadania z IX International Autumn Tournament in Informatics, który odbył się w listopadzie 2017 roku w Szumem w Bułgarii.

Zadanie Ciągi: Dane są trzy dodatnie liczby całkowite n , m i k . Należy obliczyć liczbę niemalejących ciągów długości n o wartościach będących liczbami całkowitymi z przedziału $[1; m]$, w których żadna wartość nie występuje więcej niż k razy. Przykład: dla $n = 4$, $m = 3$ i $k = 2$ poprawną odpowiedzią jest 6. Poprawnymi ciągami są: $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 1, 3, 3)$, $(1, 2, 2, 3)$, $(1, 2, 3, 3)$ oraz $(2, 2, 3, 3)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot m \cdot \min(n, k))$

W rozwiązaniu skorzystamy z techniki programowania dynamicznego. Niech $DP[i][j]$ oznacza liczbę niemalejących ciągów długości i , złożonych z liczb całkowitych z przedziału $[1; j]$, w których żadna wartość nie występuje więcej niż k razy. Łatwo zauważyć, że:

- $DP[0][j] = 1$ dla $j \in [1; m]$, jest tylko jeden pusty ciąg;
- $DP[i][1] = 1$ dla $i \in [1; k]$;
- $DP[i][1] = 0$ dla $i \in [k+1; n]$.

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć wartość $DP[i][j]$ dla pozostałych par i, j . W ciągach niemalejących elementy o tych samych wartościach tworzą spójny przedział. W szczególności wartości j tworzą spójny przedział długości $l \in [0, \min(i, k)]$. Zatem, otrzymujemy ogólny wzór:

$$DP[i][j] = \sum_{l=0}^{\min(i, k)} DP[i-l][j-1].$$

Odpowiedzią w zadaniu jest wartość $DP[n][m]$. Rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot m \cdot \min(n, k))$.

Rozwiązanie $O(n \cdot m)$

Powyższy wzór możemy zapisać równoważnie jako:

- dla $i \leq k$,
$$DP[i][j] = \sum_{l=0}^i DP[i-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + \sum_{l=1}^i DP[i-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + \sum_{l=0}^{i-1} DP[i-1-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + DP[i-1][j]$$
- dla $i > k$,
$$DP[i][j] = \sum_{l=0}^k DP[i-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + \sum_{l=1}^k DP[i-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + \sum_{l=0}^{k-1} DP[i-1-l][j-1] =$$
$$= DP[i][j-1] + DP[i-1][j] - DP[i-1-k][j-1]$$

Zauważmy, że obliczenie wartości $D[i][j]$ dla dowolnych i, j zajmuje czas stały. Zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot m)$.

Zadanie Łańcuchy: Dany jest ciąg liczb całkowitych $a = a_1, a_2, \dots, a_n$. Łańcuch rozpoczynający się na k -tej pozycji powstaje w niżej opisany sposób. Znajdujemy pierwszy większy element na prawo od a_k i oznaczamy go przez a_{k_1} . Następnie znajdujemy pierwszy większy element na prawo od a_{k_1} i oznaczmy go przez a_{k_2} , itd. W ten sposób, dla ustalonego k otrzymujemy łańcuch $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$. W zadaniu należy dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ znaleźć długość łańcucha rozpoczynającego się na k -tej pozycji. Przykład: dla $a = 3, 5, 4, 5, 6$ wynikiem jest $(2, 1, 2, 1, 0)$.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Najprostsze rozwiązanie polega na wygenerowaniu dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ łańcucha rozpoczynającego się na k -tej pozycji (zgodnie z opisem w treści zadania) i wypisaniu jego długości. Wyznaczenie łańcucha dla każdej pozycji zajmuje $O(n)$ operacji (musimy przeiterować się po całym ciągu). Zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^2)$.

Rozwiązanie $O(n)$

Niech $F[k]$ oznacza długość łańcucha rozpoczynającego się na k -tej pozycji. W tym rozwiązaniu będziemy wyznaczali $F[k]$ dla kolejnych k od n do 1 (od prawej do lewej). Załóżmy, że obliczyliśmy już $F[k+1], F[k+2], \dots, F[n]$ i chcemy obliczyć $F[k]$. Jeśli pierwszym większym elementem na prawo od a_k jest a_l , wtedy $F[k] = F[l] + 1$ (korzystamy z wcześniej obliczonego wyniku dla l). Jeśli zaś wszystkie elementy na prawo są nie większe niż a_k , wtedy $F[k] = 0$.

Zastanówmy się teraz, jak dla każdego a_k wyznaczyć pierwszy większy element na prawo od niego. Oczywiście, możemy to zrobić naiwnie (przeglądając kolejne elementy). Wówczas jednak otrzymamy rozwiązanie $O(n^2)$.

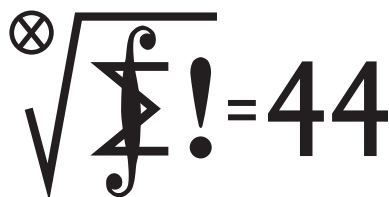
Zauważmy, że dla pary indeksów $1 \leq l < m \leq n$, jeśli $a_l \geq a_m$, to a_m nie będzie kolejnym elementem w łańcuchu dla żadnego elementu na pozycji $[1; l]$ (możemy myśleć o tym w ten sposób, że a_l przysłania a_m). Zatem kandydaci na kolejny element w łańcuchu tworzą ciąg rosnący. Przeglądając ciąg a od prawej do lewej, przechowujemy kandydatów na stosie. Na szczycie stosu znajduje się najmniejszy element, na dole zaś największy. Kiedy chcemy znaleźć kolejny element w łańcuchu dla a_k , wówczas tak długo zdejmujemy elementy ze stosu, aż na szczycie stosu pojawi się element większy niż a_k . Jeśli taki element nie pojawi się, oznacza to, że taki element nie istnieje. Po wyznaczeniu kolejnego elementu w łańcuchu odkładamy a_k na szczyt stosu.

Powyższy algorytm działa w zamortyzowanym czasie liniowym. Wynika to bezpośrednio z własności stosu (każdy z n elementów został dokładnie raz odłożony na stos i raz z niego zdjęty). Powyższe rozwiązanie działa w czasie $O(n)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018

Zadania z matematyki nr 763, 764

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 749 ($WT = 3,05$) i 750 ($WT = 1,49$) z numeru 11/2017

Roksana Słowik	Knurów	44,30
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	34,83
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Niewiele Pań bierze udział w naszej Lidze – co zauważamy z nieukrywanym żalem. Od startu Ligi tylko pięć uczestniczek przekroczyło próg 44 p. Pani Roksana Słowik jest jedyną, która tę barierę pokonała dwukrotnie!

Redaguje Marcin E. KUCZMA

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geq 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n , spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geq 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^n x_k$$

generuje ciąg x_1, x_2, x_3, \dots , którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

Zadanie 764 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

Przypominamy treść zadań:

755. Niech $P(x)$ będzie takim wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) + P''(x) \geq 2P'(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Dowieść, że $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wykazać, że dla każdego układu dodatnich liczb całkowitych a_1, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\text{NWD}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{NWW}(a_1, \dots, a_n) \leq a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Scharakteryzować (dla ustalonego n) te układy a_1, \dots, a_n (dodatnich liczb całkowitych), dla których napisana nierówność staje się równością.

755. Gdy $P(x)$ jest funkcją stałą, implikacja jest oczywista. Dalej przyjmijmy, że P jest wielomianem stopnia dodatniego. Wielomian $P - 2P' + P''$ ma taki sam stopień, a przy tym przyjmuje – zgodnie z założeniem – wyłącznie wartości nieujemne. Jest to więc wielomian stopnia parzystego. Ten sam stopień ma zarówno wielomian P , jak i wielomian $Q(x) = P(x) - P'(x)$. Każdy z tych wielomianów, jako funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej, mająca granicę ∞ przy $|x| \rightarrow \infty$, przyjmuje w pewnym punkcie osi liczbowej swoją wartość minimalną. Niech więc

$$\min_{x \in \mathbb{R}} P(x) = P(a), \quad \min_{x \in \mathbb{R}} Q(x) = Q(b); \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

W punkcie, realizującym minimum, pochodna jest równa zeru: $P'(a) = 0$, $Q'(b) = 0$. Zauważmy, że, w myśl założenia zadania,

$$Q(x) - Q'(x) = (P(x) - P'(x)) - (P'(x) - P''(x)) \geq 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $x = b$ dostajemy $Q(b) \geq 0$. Jest to wartość minimalna wielomianu Q , zatem

$$Q(x) = P(x) - P'(x) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiamy $x = a$ i mamy $P(a) \geq 0$. To wartość minimalna wielomianu P . Zatem $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Przyjmijmy oznaczenia: $m = \text{NWD}(a_1, \dots, a_n)$, $M = \text{NWW}(a_1, \dots, a_n)$, $P = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Wystarczy

wykazać, że każda liczba pierwsza, która dzieli iloczyn mM , wchodzi do iloczynu P w co najmniej takiej samej potęgze. Niech więc p będzie liczbą pierwszą i niech (dla $i = 1, \dots, n$) k_i będzie takim wykładnikiem, że $p^{k_i} \parallel a_i$ (ten napis oznacza, że a_i dzieli się przez p^{k_i} , ale nie przez p^{k_i+1}). Wówczas $p^\alpha \parallel m$, $p^\beta \parallel M$, gdzie $\alpha = \min\{k_1, \dots, k_n\}$, $\beta = \max\{k_1, \dots, k_n\}$, i wobec tego $p^{\alpha+\beta} \parallel mM$. Oczywiście $p^{k_1+\dots+k_n} \parallel P$.

Porównanie wykładników nie pozostawia wątpliwości:

$$(1) \quad \min\{k_1, \dots, k_n\} + \max\{k_1, \dots, k_n\} \leq k_1 + \dots + k_n.$$

Wobec dowolności wyboru p , uzasadnia to zadana nierówność $mM \leq P$.

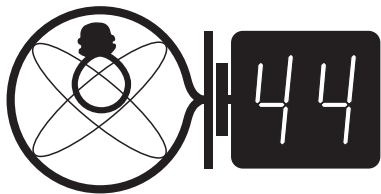
Kiedy zachodzi równość $mM = P$? Wtedy, gdy każda liczba pierwsza dzieli mM w dokładnie tej samej potęgze, w jakiej dzieli P . Czyli gdy dla każdej liczby pierwszej p nierówność (1) (z wykładnikami k_i , wyznaczonymi przez p) staje się równością.

Dla $n = 2$ jest tak zawsze; dostajemy znaną tożsamość: $\text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b) = ab$.

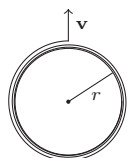
Dla $n \geq 3$ równość w relacji (1) oznacza, że gdy po jej prawej stronie usuniemy jeden największy i jeden najmniejszy składnik, pozostaną jakieś nieskreślone składniki, o zerowej sumie – czyli wszystkie równe zeru. Składnik najmniejszy automatycznie także jest zerem. Tylko jeden składnik po prawej stronie (1) może być dodatni. To znaczy, że tylko jedna z liczb a_1, \dots, a_n może dzielić się przez p . Wobec dowolności p , znaczy to, że liczby a_1, \dots, a_n są parami względnie pierwsze.

I na odwrót, gdy tak jest, wówczas dla każdej liczby pierwszej p mamy w ciągu (k_1, \dots, k_n) co najwyżej jeden wyraz niezerowy; nierówność (1) przechodzi w równość, i w konsekwencji $mM = P$.

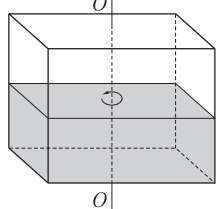
Podsumowując: dla $n \geq 3$, równość $mM = P$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a_1, \dots, a_n są parami względnie pierwsze; dla $n = 2$, ta równość jest tożsamością.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 660, 661

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

660. Soczewka płaskowypukła wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,6$. Promień powierzchni wypukłej wynosi $R = 10$ cm, grubość soczewki $d = 0,2$ cm. Na powierzchnię płaską soczewki pada równoległe do jej osi optycznej wiązka światła. Gdy odsłonięta jest tylko niewielka część soczewki wokół osi optycznej, promienie ogniskują się na ekranie. Znaleźć średnicę plamki na ekranie po odsłonięciu całej soczewki.

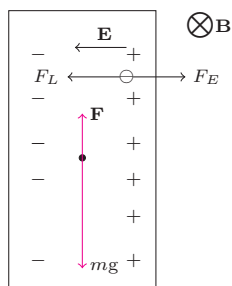
661. Podstawa walca przytwierdzona jest do gładkiej powierzchni poziomej. Nitkę przymocowano jednym końcem do powierzchni bocznej walca przy jego podstawie o promieniu r i owinięto wokół walca k razy (k jest liczbą całkowitą). Do swobodnego końca nitki przyczepiono kulkę i nadano jej prędkość v skierowaną wzdłuż promienia walca (rys. 1). Po jakim czasie cała nitka ponownie nawinie się na walec?

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

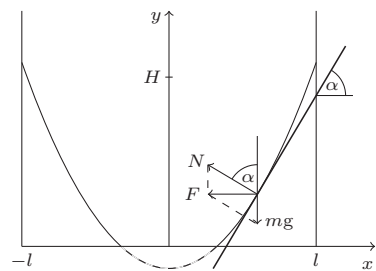
Przypominamy treść zadań:

652. Znaleźć przyspieszenie, z jakim spada pionowo w dół okrągła metalowa płytka o masie m w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , równoległym do powierzchni Ziemi. Płaszczyzna płytki jest równoległa do linii pola magnetycznego i prostopadła do powierzchni Ziemi. Grubość płytki d jest dużo mniejsza od jej promienia R , przyspieszenie ziemskie ma wartość g .

653. Do wąskiego, prostopadłościennego naczynia nalano pewną ilość cieczy (rys. 2). Następnie naczynie zaczęto obracać wokół pionowej osi symetrii. Przy pewnej prędkości kątowej odsłonięta została k -ta część powierzchni dna. Jak zmieniła się w wyniku tego siła parcia na dno i wąskie ścianki boczne (w porównaniu z przypadkiem nieruchomego naczynia)? Ciecz nie wylewa się z naczynia. Napięcie powierzchniowe można zaniedbać.



Rys. 3



Rys. 4

652. Na początku rozważmy przypadek, gdy płytka porusza się pionowo w dół ze stałą prędkością v . Na swobodne elektrony w płytce działa w polu magnetycznym siła Lorentza (rys. 3) $F_L = evB$, gdzie e jest wartością bezwzględna ładunku elektronu. W wyniku tego elektrony przemieszczają się na lewą stronę płytki. Powoduje to powstanie pola elektrycznego E skierowanego jak na rysunku. Elektrony przestają się przemieszczać, gdy siła Lorentza zostaje zrównoważona przez siłę elektryczną $F_E = eE$, czyli zachodzi związek $E = vB$. Ponieważ grubość płytki jest dużo mniejsza od jej promienia, możemy ją traktować jako kondensator płaski, w którym napięcie między powierzchniami wynosi $U = Ed$, a ładunek na powierzchniach $Q = CU = Bv\varepsilon_0 S$, gdzie $S = \pi R^2$ jest powierzchnią płytki. Gdy prędkość płytki rośnie, zmieniają się ładunki na jej powierzchniach, czyli przez płytkę płynie prąd o natężeniu $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varepsilon_0 \frac{SB\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_0 SBa$, gdzie a jest przyspieszeniem płytki. Na przewodnik z prądem w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna, która w naszym przypadku ma zwrot pionowo w górę

i wartość $F = IdB$. Równanie ruchu płytki ma postać $ma = mg - \varepsilon_0 SB^2 da$. Stąd szukane przyspieszenie jest równe $a = \frac{mg}{m + \varepsilon_0 \pi R^2 B^2 d}$.

653. Oznaczmy wysokość słupa cieczy w nieruchomym naczyniu przez h , a rozmiary podstawy naczynia przez $2l$ i a . Zgodnie z treścią zadania $a \ll 2l$, możemy więc przyjąć, że powierzchnia cieczy w obracającym się naczyniu ma kształt jak na rysunku 4.

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest oczywista. Siła parcia na dno równa jest ciężarowi cieczy niezależnie od tego, czy naczynie obraca się, czy pozostaje w spoczynku.

Rozważmy mały element cieczy o masie m na jej powierzchni w obracającym się naczyniu. Działa na niego siła ciężkości mg i siła reakcji N ze strony pozostałej cieczy, prostopadła do jej powierzchni (rys. 4). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą dośrodkową o wartości $F = m\omega^2 x$, gdzie ω jest prędkością kątową, a x odległością elementu cieczy od osi obrotu. Styczna do powierzchni cieczy w badanym punkcie nachylona jest do poziomu pod kątem α i spełnione są związki: $\tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g} = y'(x)$, gdzie funkcja $y(x)$ opisuje kształt powierzchni cieczy. Stąd $y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + c$, a stałą c możemy wyznaczyć z warunków brzegowych. Gdy $y = 0$, $x = kl$, $0 \leq k < 1$, zatem $c = -\frac{\omega^2 k^2 l^2}{2g}$. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa i jej objętość stała, możemy wyznaczyć prędkość kątową obracającego się naczynia, przyrównując objętość cieczy w połowie naczynia spoczywającego i obracającego się:

$$alh = a \int_{kl}^l y(x) dx = \frac{a\omega^2 l^3}{6g} (1 - 3k^2 + 2k^3),$$

stąd

$$\omega^2 = \frac{6gh}{l^2(1-3k^2+2k^3)}.$$

Wysokość cienkiego słupka cieczy stykającego się z wąską ścianką naczynia wynosi $H = y(l) = \omega^2 l^2 \frac{(1-k^2)}{2g} = \frac{3(1-k^2)h}{1-3k^2+2k^3}$. Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie cieczy na wąską ściankę boczną zmienia się liniowo z wysokością, a jego wartość średnia wynosi $p_r = \frac{\rho g H}{2}$, gdzie ρ jest gęstością cieczy. Szukany stosunek parć na ściankę boczną w obracającym się i nieruchomym naczyniu równy jest $n = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \left(\frac{3(1-k^2)}{1-3k^2+2k^3}\right)^2$. Wynik nie zależy od rodzaju i objętości cieczy, rozmiarów naczynia oraz przyspieszenia grawitacyjnego. Gdy $k = 0$, otrzymujemy $n = 9$.

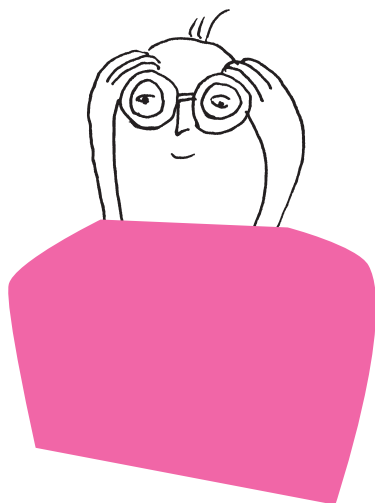
Prosto z nieba: WTF, KIC 8462852?

Dwa lata temu społeczność profesjonalnych astronomów, a także różnego rodzaju tropicielei tajemnic, zelektryzowała wiadomość o obserwacjach bardzo dziwnie zachowującej się gwiazdy. Odkrycia obiektu KIC 8462852 dokonał projekt Planet Hunters, skupiający wolontariuszy przeglądających i katalogujących dane satelity Kepler. Zespół kierowany przez dr Tabetę Boyajian, opisał gwiazdę typu F, około dwukrotnie większą od Słońca, gorętszą o 10 000 K i znajdującą się na niebie w gwiazdozbiorze Łabędzia w odległości 1000 lat świetlnych od Ziemi. Jej jasność nie jest stała – wręcz przeciwnie, zmienia się, i to w sposób, jaki nigdy wcześniej nie był obserwowany. Chaotyczne i nieprzewidywalne zachowanie się krzywej blasku nie daje się pogodzić ze standardowymi modelami pulsacji gwiazd, obecnością plam na powierzchni itd. Wśród wielu proponowanych alternatywnych wyjaśnień nie mogło oczywiście zabraknąć udziału Obcych – nieregularne zaćmienia blasku miałyby być wywoływane przez orbitującą wokół gwiazdy, zaprojektowaną w niewiadomym celu, mega-strukturę.

Gwiazda, a przede wszystkim dr Boyajian, zyskały status celebrytek. Zamiast nieciekawego numeru katalogowego KIC 8462852, najczęściej mówi się o gwiazdzie Tabby lub gwiazdzie WTF (od tytułu pracy „Planet Hunters IX. KIC 8462852 – Where’s The Flux?”).

W minionym roku w kierunku gwiazdy Tabby skierowano wiele naziemnych teleskopów, w tym dziesięciometrowy Gran Telescopio Canarias (GTC), Mercator Telescope i Nordic Optical Telescope (NOT) z obserwatorium w La Palma na Kanarach, a także sieć teleskopów z obserwatorium Las Cumbres w Chile. Dane opracowało wiele grup, w tym zespół dr Boyajian i dr Hansa Degga. Regularne i częste obserwacje zaowocowały rejestracjami pojaśnień i pociemnień światła gwiazdy, następujących w skali czasowej paru dni. Zjawiska zbadano również spektroskopowo. Pomiary światła w różnych długościach fali (różnych kolorach) wskazują na to, że stopień zmiany jasności jest związany z kolorem światła. Najprawdopodobniej zatem przyczyną niestandardowego zachowania się gwiazdy nie są wytwory obcych cywilizacji, a otaczający gwiazdę obłok pyłu, który oddziałuje z fotonami w sposób zależny od ich energii (ciała całkowicie nieprzejrzyste, np. planety, nie wykazują tego efektu). Planowana na 2018 rok kolejna kampania obserwacyjna, w trakcie której badane będą przyćmienia o różnych głębokościach, powinna ostatecznie rozwiązać wszelkie wątpliwości.

Michał BEJGER



Niebo w czerwcu

21 czerwca Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki i tym samym rozpocznie się astronomiczne lato. Jednocześnie zacznie się półroczny proces skracania się dnia i wydłużania nocy. Czerwiec to środek sezonu występowania białych nocy astronomicznych. Zjawisko szczególnie dobrze widoczne jest nad morzem, ale w całej północnej części kraju nawet podczas najciemniejszej pory nocy północny widnokrąg jest wyraźnie rozświetlony. Miesiąc ten jest również środkiem sezonu na obserwacje zjawiska łuku okołohoryzontalnego, czyli rzadko u nas widocznej na zasnutym cienkimi chmurami niebie małej, lecz intensywnej tęczy kilkanaście stopni nad horyzontem oraz obłoków srebrzystych, czyli wysoko zawieszonych w atmosferze cienkich chmur, oświetlanych Słońcem, znajdującym się pod horyzontem.

Czerwiec to kolejny miesiąc dobrej widoczności wszystkich znanych od starożytności planet Układu Słonecznego poza Merkurem. Pierwsza planeta od Słońca 12 lipca osiągnie maksymalną elongację wschodnią, a do końca czerwca oddali się od niego na ponad 23°, ale latem nachylenie ekliptyki do wieczornego horyzontu zmienia się na niekorzystne. I choć Merkury zacznie przebiegać się przez zorzę wieczorną w trzeciej dekadzie miesiąca, to jego dostrzeżenie jest

Więcej o zjawisku łuku okołohoryzontalnego na angielskojęzycznej stronie: www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm

trudne, gdyż planeta godzinę po zmierzchu zajmie pozycję na wysokości zaledwie 2° nad północno-zachodnim widnokregiem. W tym czasie jej jasność spadnie z $-0,7$ do 0^m , faza – z 80 do 60%, przy tarczy wielkości $6''$.

Bardzo dobrą wskazówką do odszukania Merkurego jest Wenus oraz dwie najjaśniejsze gwiazdy Bliźniąt – Kastor i Polluks, które o tej samej porze znajdują się na wysokości około 10° , a Merkury – kilka stopni pod nimi. 24 czerwca Merkury minie Polluksa w odległości niecałych 5° . Do końca miesiąca planeta zbliży się do Wenus na około 17° , ustawiając się na godzinie 4. względem niej. Wenus cały czas oddala się od Słońca (pod koniec czerwca na ponad 40°), dążąc do maksymalnej elongacji wschodniej w połowie sierpnia. Jednak tutaj da się we znaki pogarszające się nachylenie ekliptyki do widnokregu i mimo wzrastającej elongacji planeta będzie widoczna coraz gorzej. W trakcie miesiąca, godzinę po zachodzie Słońca, Wenus zbliży się do horyzontu na 9° . W tym samym czasie jej jasność utrzyma się na poziomie -4^m , faza spadnie z 80 do 70%, zacznie za to wreszcie wyraźniej rosnać jej tarcza (z 13 do $16''$).

Widoczność Wenus zmienia się w 8-letnich cyklach (8 lat ziemskich jest równe niemal dokładnie pięciu okresom synodycznym Wenus). Co tyle lat koniunkcje i maksymalne elongacje planety powtarzają się prawie w tych samych dniach, z niewielkim dryfem wstecz. Akurat w tym roku wieczorna widoczność planety jest najgorsza w całym 8-letnim cyklu i w połowie sierpnia planeta – mimo elongacji prawie 46° – zniknie z nieboskłonu niewiele po Słońcu. Stąd trudno ją wtedy będzie dostrzec. Tak samo źle, jak w tym roku, Wenus będzie widoczna w latach 2026 i 2034.

W czerwcu bardzo dobrze widoczne są trzy najbliższe zewnętrzne sąsiadki Ziemi, czyli planety Mars, Jowisz i Saturn, a także najjaśniejsza planetoida na naszym niebie (4) Westa. Jowisz jest już po opozycji i świeci na niebie wieczornym. Do końca czerwca jego blask spadnie do $-2,3^m$, tarcza zaś zmniejszy się do $41''$. Na początku miesiąca planeta przejdzie niecały 1° od gwiazdy Zuben Elgenubi, ale do lipca oddali się od niej na 2° . Planetoida (4) Westa 20 czerwca przejdzie przez opozycję do Słońca, planeta Saturn zaś uczyni to tydzień później. Stąd oba ciała Układu Słonecznego kreślą pętlę niedaleko od siebie w północno-zachodniej części gwiazdozbioru Strzelca. Do końca czerwca Westa zwiększy dystans do Saturna do 10° . Przez cały miesiąc Westę da się dostrzec gołym okiem, choć na pewno w jej obserwacjach przyda się lornetka. W opozycji jej jasność urośnie do $+5,3^m$. Saturn osiągnie blask 0^m , a jego tarcza urośnie do $18''$.

Westa z Saturnem wędrują przez Drogę Mleczną, niedaleko jej centrum, zatem blisko nich znajduje się wiele jasnych mgławic i gromad gwiazd ze słynnego katalogu Messiera. Saturn w trakcie miesiąca zwiększy dystans od gromady kulistej M22 z 2 do $3,5$ stopnia,

a w połowie czerwca przejdzie 3° na północ od gwiazdy Kaus Borealis (λ Sgr, jasność $+2,8^m$). Westa zacznie miesiąc jakieś $1,5$ stopnia na zachód od mgławicy M24, w jego połowie zaś minie gromadę otwartą M23 w odległości mniejszej niż $0,5$ stopnia. Jednocześnie planetoida zbliży się do pary znanych mgławic M8 i M20 na mniej niż 4° .

Planeta Mars również zbliża się do opozycji, przez którą przejdzie pod koniec lipca. W czerwcu Mars zmieni kierunek swojego ruchu na wsteczny, rozpoczynając trwający dwa miesiące okres najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Do końca czerwca blask Marsa zwiększy się z $-1,2$ do $-2,1^m$, a jego tarcza urośnie z 15 do $21''$. Planeta przez cały miesiąc kreśli pętlę w południowo-zachodniej części Koziorożca.

W drugiej części czerwca nieśmiało z zorzy porannej zaczyna wyłaniać się planeta Neptun. Około godziny 1 planeta wznosi się już na 12° ponad widnokrąg południowo-wschodni. 19 czerwca planeta zmieni kierunek swojego ruchu na wsteczny, stąd w tym miesiącu pozostanie prawie nieruchoma względem gwiazd tła. Obecnie lepszą wskazówką na odszukanie Neptuna jest słabsza o $0,5^m$ od λ Aqr gwiazda ϕ Aqr. Planeta zbliży się do niej na niecały stopień. W czerwcu Neptun świeci blaskiem $+7,9^m$.

Księżyc zacznie czerwiec po pełni spotkaniem z Saturnem i Westą. 1 czerwca o świcie tarcza Księżyca w fazie 94% znajdzie się mniej niż 1° od planety i jednocześnie 6° od Westy. 3 i 4 czerwca Srebrny Glob w fazie odpowiednio 83 i 76% minie Marsa. 2 dni później przejdzie przez ostatnią kwadrę, a następnie znajdzie się niecałe 5° od Neptuna. 13 czerwca Księżyc przejdzie przez now i potem na niebo wieczorne, gdzie 15 i 16 czerwca minie Wenus. Najpierw Księżyc w fazie 6% znajdzie się 10° od Wenus na godzinie 5, dobę później – w fazie 13% – zbliży się do Wenus na 5° . 20 czerwca Srebrny Glob przejdzie przez I kwadrę, a 23 czerwca, w fazie 83%, będzie 3° na północ od Jowisza. 27 czerwca Księżyc w pełni przejdzie między Westą a Saturnem, zbliżając się na niecałe 2° do planety, a 1 lipca minie Marsa w odległości o 1° większej. W tym miesiącu z zakryć jaśniejszych gwiazd w Polsce da się obserwować zakrycie gwiazdy 4. wielkości o Sgr 28 czerwca. Zakrycie zacznie się kilka minut po 23, skończy – około godzinę później. Niestety, obserwacji nie ułatwi pełnia Księżyca.

Czerwiec też ma swój coroczny rój meteorów. Są nim Bootydy Czerwcowe, promieniujące od 22 czerwca do 2 lipca, z maksimum 27 czerwca. Radiant roju znajduje się w północnej części Wolarza i w dniu maksimum około 1 w nocy wznosi się na około 55° nad zachodni widnokrąg. Bootydy wyróżniają się bardzo małą prędkością zderzenia z atmosferą: zaledwie 18 km/s, stąd przelot każdego meteoru trwa kilka sekund. W maksimum można liczyć nawet na ponad 100 zjawisk na godzinę. Niestety, w tym roku w obserwacjach roju przeszkodzi Księżyc w pełni.

Ariel MAJCHER

Zagadka tonących bąbelków

Wśród Czytelników *Delty* jest niewątpliwie wielu nieletnich, którzy, siłą rzeczy, nie mieli okazji kosztować napojów wysokowych, toteż musieli ograniczać się do ich obserwacji. Przyglądanie się trunkom takim jak wino lub wódka pozwala na zgłębianie zjawiska Marangoniego. Podglądacze piwa stawiali sobie zaś do niedawna pytanie, dlaczego bąbelki widoczne w kufle wypełnionym jasnym piwem poruszają się zgodnie z intuicją, czyli w górę, a w przypadku piw ciemnych, takich jak *Guinness*, przy ściankach zawierających je naczyń obserwuje się ruch bąbelków w dół. To ostatnie może się wydać dziwne, bo ostatecznie bąbelki są lżejsze od otaczającej je cieczy. Co zatem „ściąga” bąbelki w dół?

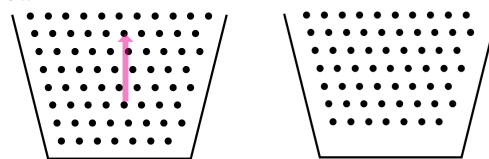
Choć może to się wydać zaskakujące, naukowcy do niedawna nie znali pełnej odpowiedzi na to pytanie. Dopiero niedawna praca brytyjsko-irlandzkiego zespołu badaczy pozwoliła zrozumieć fizyczną istotę nieoczywistego ruchu bąbelków. W opublikowanym w kwietniu tego roku w *American Journal of Physics*, W.T. Lee ze współpracownikami sformułował model matematyczny, który pozwolił połączyć odwieczne obserwacje piwoszy z wynikami symulacji numerycznych.

Ciemne piwa różnią się od jasnych składem chemicznym rozpuszczonych w nich gazów. Te pierwsze zawierają znacznie więcej azotu i mniej dwutlenku węgla, co nadaje im charakterystyczny, mało kwaśny smak. Ponieważ jednak azot jest znacznie słabiej rozpuszczalny w wodzie od dwutlenku węgla, więc, choć ciśnienie rozpuszczonych gazów jest wyższe w ciemnych piwach, to ich masa molowa jest istotnie mniejsza. Mała ilość rozpuszczonych gazów przekłada się na rozmiar bąbelków, który wynosi typowo około dziesiątej części milimetra – o rząd wielkości mniej niż w przypadku piw jasnych.

Mały rozmiar bąbelków wpływa na ich ruch. Siła wyporu jest proporcjonalna do objętości bąbelków, a zatem do sześciastu promienia. Natomiast siły oporu hydrodynamicznego są proporcjonalne do przekroju bąbelków, czyli do kwadratu promienia. Oznacza to, że dla odpowiednio małych bąbelków decydujący wpływ na ich ruch będzie miał ruch cieczy, w której się one znajdują. Jeśli zatem w pobliżu ścianek kufła piwo będzie płynąć w dół, to w tę samą stronę będą poruszać się zawieszony w nim bąbelki. Skąd jednak miałyby się brać taki przepływ?

Okazuje się, że nie bez znaczenia jest kształt naczynia, w którym znajduje się rozważane piwo. Typowy kufel do *Guinnessa* rozszerza się ku górze. Jeżeli zatem w świeżo wlanym do kufła piwie bąbelki będą rozmieszczone jednorodnie, wszystkie one, wskutek działania sił wyporu, zaczną się równocześnie poruszać ku górze, pociągając za sobą płyn. Stanowiąca zasadniczą część piwa woda jest wszakże z dobrym przybliżeniem cieczą nieściśliwą, więc w zamkniętym od dołu naczyniu nie może cała poruszać się razem z bąbelkami w górę. Jednak w typowym kufle do *Guinnessa* ruch bąbelka

ku górze powoduje jego oddalanie się od ścianek kufła. W rezultacie już po chwili ruchu bąbelków przy ściankach kufła powinna pojawić się cienka warstwa bez bąbelków.



Tym samym rozkład cieczy w kufle nie byłby już jednorodny – w centralnej części kufła występowałyby mieszanina bąbelków i piwa unoszona ku górze siłami wyporu. Natomiast przy ściankach kufła, gdzie nie byłoby bąbelków, taka siła działająca na ciecz nie występowałaby. Tym samym piwo wyniesione ku górze w centralnej części kufła wracałoby na dół przy ściankach, pociągając za sobą część bąbelków. Jeżeli prędkość tego ruchu przekraczałaby prędkość wypływania bąbelków, obserwowalibyśmy właśnie wypadkowy ruch bąbelków w dół. Mała przezroczystość ciemnych piw powoduje bowiem, że obserwacje przepływów w kufle ograniczają się w zasadzie do obszaru przyściankowego.

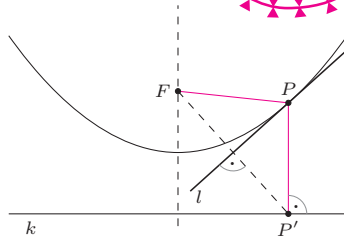
Zaproponowany model przewiduje, że w przypadku kufli zwężających się ku górze powinno występować zjawisko odwrotne – zwiększona koncentracja bąbelków przy ściankach naczynia powoduje unoszenie bąbelków w górę przy ściankach, piwo zaś wraca do dolnej części kufła w centralnej części naczynia. Doświadczenia, zarówno codzienne, jak i przeprowadzane w kontrolowanych, laboratoryjnych warunkach, potwierdzają te przewidywania.

Można zapytać, czy zrozumienie ruchu bąbelków w piwie jest w jakikolwiek sposób porównywalne z wielkimi odkryciami fizyki ostatnich lat, takimi jak detekcja cząstki Higgsa czy zaobserwowanie fal grawitacyjnych. Piszący te słowa uważa, że odpowiedź jest twierdząca. Po pierwsze, zagadnienie genezy bąbelków w cieczy i ruchu cieczy z bąbelkami jest ważne z uwagi na jego przemysłowe zastosowania. Po drugie, fakt, że potrafimy opisać wczesny Wszechświat czy oddziaływania fundamentalne przy niespotykanych na co dzień skalach energii, a rozkładamy ręce w przypadku wielu zjawisk, jakie możemy zaobserwować w kuchni (lub w pubie), jest zwyczajnie denerwujący.

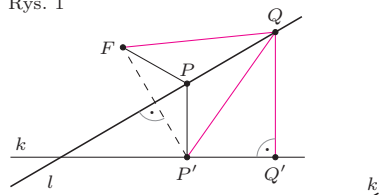
Jeżeli wśród Czytelników tego tekstu znajdują się studenci dzielący tę ostatnią opinię, zachęcam do spróbowania swoich sił w Międzynarodowym Turnieju Fizyków, gdzie drużynowo rozwiązuje się pozornie proste, „kuchenne” problemy fizyczne. To nie tylko wielka przygoda, ale i satysfakcja płynąca z możliwości lepszego poznania oraz zrozumienia otaczającego nas świata. Więcej informacji na <https://iptnet.info>.

Krzysztof TURZYŃSKI

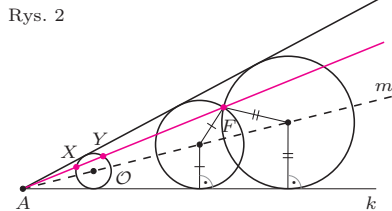
W. T. Lee, S. Kaar, S. B. G. O'Brien, *Sinking bubbles in stout beers*, *Am. J. Phys.* **86** (2018) 250
E. S. Benilov, C. P. Cummins, W. T. Lee, *Why do bubbles in Guinness sink?*, arXiv:1205.5233



Rys. 1

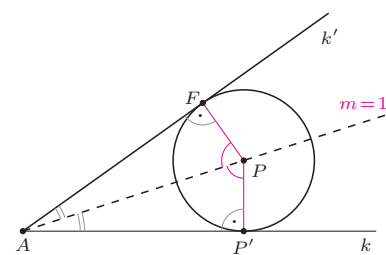


Rys. 2

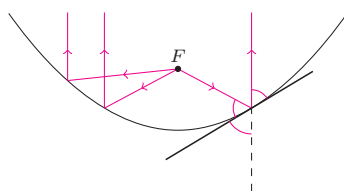


Rys. 3. \mathcal{O} – dowolnie wybrany okrąg

Dla $m \perp k$ na mocy faktu istnieją punkty paraboli po obu stronach m , więc m nie jest styczną. Dla $m \parallel k$ i P nie na osi symetrii istnieje drugi punkt paraboli na m , czyli m też nie jest styczną. Dla $m \parallel k$ i P na osi symetrii dowód jest analogiczny do opisanego ($m = l$).



Rys. 4



Rys. 5

Parabola to zbiór punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonego punktu F , zwanego *ogniskiem*, i od ustalonej nieprzechodzącej przez F prostej k , zwanej *kierownicą* (rys. 1). Z definicji tej wynika, że parabola ma oś symetrii przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do kierownicy oraz że wszystkie punkty paraboli leżą w tej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez kierownicę, do której należy ognisko.

Styczna do paraboli to taka prosta, która ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, a wszystkie inne punkty paraboli znajdują się po jednej stronie tej prostej.

Fakt. Każdy punkt P' z kierownicy jest rzutem dokładnie jednego punktu P paraboli (należącego do symetralnej odcinka FP' , wówczas $PF = PP'$).

Rozważmy dowolny punkt P paraboli, jego rzut P' na kierownicę k oraz prostą l zawierającą dwusieczną kąta FPP' (rys. 1). Z definicji paraboli $PF = PP'$, więc prosta l jest też symetralną odcinka FP' . Wykażemy, że l jest styczną.

Twierdzenie 1. Prosta l nie ma z parabola punktów wspólnych innych niż P .

Dowód. Przypuśćmy, że do prostej l należy jeszcze jakiś punkt paraboli $Q \neq P$, niech Q' będzie jego rzutem na k (rys. 2). Wówczas $QF = QQ'$, bo Q leży na symetralnej l odcinka FP' , a także $QF = QQ'$, bo Q należy do paraboli. Zatem $QP' = QQ'$, czyli $P' = Q'$, sprzecznie z faktem powyżej. \square

Twierdzenie 2. Punkty paraboli inne niż P leżą po tej stronie l , co ognisko F .

Dowód. Przypuśćmy, że jakiś punkt Q paraboli leży po przeciwnej stronie l niż F , niech Q' będzie jego rzutem na k . Wówczas, kolejno z własności symetralnej i rzutu, uzyskujemy $QF > QQ' \geq Q'Q$, sprzecznie z definicją paraboli. \square

Twierdzenie 3. Prosta l jest *jedyną* styczną do paraboli w punkcie P .

Dowód. Rozważmy prostą m przez P dla $m \not\perp k$ oraz $m \not\parallel k$. Niech k' – obraz k w symetrii względem m . Oznaczmy przez α ten z kątów utworzonych przez k i k' , który zawiera P (m jest jego dwusieczną), wierzchołek α nazwijmy A .

Wtedy P leży na dwusiecznej α i $PF = PP'$, więc F nie może leżeć na zewnątrz α .

Jeśli F leży wewnątrz α , to półprosta $AF \rightarrow$ przecina okrąg \mathcal{O} wpisany w kąt α w dwóch punktach X i Y (rys. 3). Jednokładności o środku A przekształcające X na F i Y na F przeprowadzają \mathcal{O} na dwa różne okręgi wpisane w α i przechodzące przez F . Ich środki leżą na m i są tak samo odległe od F jak od k , więc leżą też na paraboli. Wobec tego m nie jest do niej styczna.

Jeśli F leży na k' , to istnieje jedyny okrąg wpisany w α , przechodzący przez F , więc jego środek P to jedyny punkt m należący do paraboli. Wówczas m zawiera dwusieczną kąta FPP' (rys. 4), czyli $m = l$, co kończy dowód. \square

Wniosek. Z równości kątów przy dwusiecznej l (rys. 5) wynika, iż promienie światła wychodzące z ogniska i odbijające się od lustrzanej paraboli wedle reguły *kąt padania równy jest kątowi odbicia* wędrują dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii. Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii po odbiciu skupia się w ognisku. Tak samo jest dla trójwymiarowej *paraboloidy* otrzymanej przez obrócenie paraboli wokół jej osi symetrii.

Korzystając z opisanego własności rozpala się ogień olimpijski (ilustracja 3 na tylnej okładce), gotuje (9) i topi metale w temperaturze 3500°C (2). Kształt wycinka paraboloidy mają anteny satelitarne, mogą one być ustawiane pionowo, a ognisko nie musi być nad środkiem talerza (4). Są też teleskopy z płynnym lustrem z rtęci, przybierającym kształt paraboloidy wskutek kręcenia się ze stałą prędkością wokół swej osi – te z kolei mogą być tylko skierowane w górę (5). Własności paraboloid stosuje się w mikrofonach szpiegowskich i ornitologicznych (1), konstrukcje o zbliżonym kształcie służyły też w Anglii w czasie I Wojny Światowej do nasłuchiwania, czy nadlatują niemieckie sterowce z bombami (7). Dwa paraboloidalne talerze ustawione naprzeciw siebie umożliwiają szeptanie na odległość (6). Na podobnej zasadzie powstaje iluzja monety leżącej na górze „ufo” (10) – w rzeczywistości moneta ta leży na dnie paraboloidalnej lustrzanej miseczki (8).

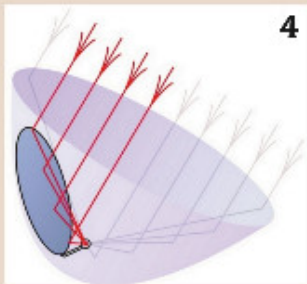
Dziękuję Jerzemu Bednarczukowi za pomoc w przygotowaniu tego artykułu.



Piec słoneczny w Odeillo (Francja), wym. 54x48 m. moc 1 MW. Lustra na zboczu sąsiedniego wzgórza kierują do niego promienie słoneczne.



Stadion w Olimpij (Grecja).



4



NASA Orbital Debris Observatory w Cloudcroft (Nowy Meksyk, USA).

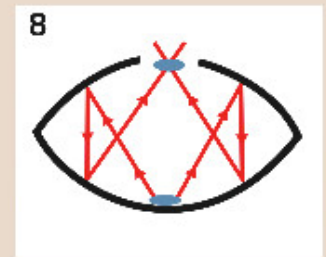


6

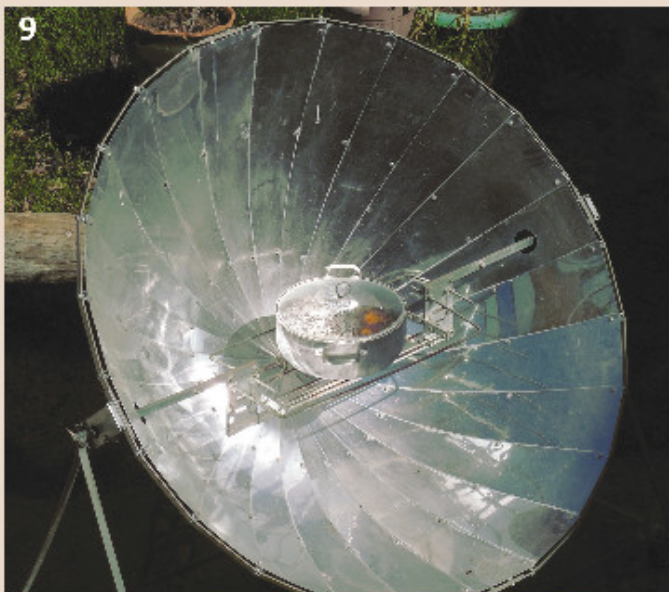


7

Okolice Kilnsea (Wielka Brytania).



8



9



10

opisy
obrazków
na str. 25