

Nakład: 3500 egz.

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \quad \nu=3,141592 \dots$$

NR 10 (533) 2018

CENA 4 ZŁ VAT 5%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35350 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

**Twierdzenie
o naszyjniku**
str. 4



SPIS TREŚCI NUMERU 10 (533)

A jednak się da (I), czyli saga kryptologiczna w odcinkach. Tym razem: o kryptografii klucza publicznego i podpisie cyfrowym.

Tomasz Kazana

str. 1

Twierdzenie o naszym jniku
Lukasz Rajkowski

str. 4

Kiedy ukształtowały się galaktyki?

Małgorzata Siudek

str. 6

Nieuchwytny punkt stały
Jarosław Górnicki

str. 7

Anomalie kul i kostek
Karol Gryszka

str. 9

Czwarty wymiar – zobaczymy

Kamila Łyczek

str. 12

Problem przesunięcia sofy
Bartłomiej Pawlik

str. 14

Było lato 2018
Magdalena Fikus

str. 15

Twierdzenia Fermata różnej wielkości

Mariusz Skalba

str. 16

Zadania

str. 18

Informatyczny kącik olimpijski (120):
Piramidy

str. 19

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba:
Niebiańskie diamenty

str. 22

Niebo w październiku

str. 22

Aktualności

Ciemna materia

– coraz mniej jasności

str. 24

Z drugiej strony...
Joanna Jaszewska

str. 25



Nie mówi się „dziura” w przyzwoitym towarzystwie.

(Bertold Brecht, *Opera za trzy grosze*)

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Lukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2019 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

A jednak się da (I),

czyli saga kryptologiczna w odcinkach.

Tym razem: o kryptografii klucza publicznego i podpisie cyfrowym.

Tomasz KAZANA

Problem szyfrowania przesyłanych wiadomości sięga jeszcze czasów starożytnych, więc naszego nowego deltowego cyklu artykułów o kryptologii nie możemy nie zacząć od przypomnienia najstarszego znanego systemu szyfrowania, mianowicie szyfru Cezara. Szyfr ten nie jest specjalnie wyrafinowany. Po prostu umawiamy się, że (na przykład) zamiast litery A będziemy pisać G; zamiast B – literę H; zamiast C – literę I i tak dalej, to znaczy: zamiast n -tej litery alfabetu będziemy pisać $(n + 6)$ -tą literę. (Tak naprawdę $((n + 5) \bmod 26) + 1$ -tą literę, gdyż pod koniec musimy alfabet cyklicznie zawinąć do początku.) Równie dobrze moglibyśmy alfabet przesuwać nie o 6 pozycji, a o 3 pozycje, o 17 pozycji, czy ogólnie: o K_{Cezar} pozycji.

Przyjmujemy, że alfabet ma 26 liter.

Nieco bardziej skomplikowany jest szyfr permutacyjny. Tutaj dwie strony ustalają zawczasu permutację literek

$$K_{\text{perm}} : \{A, B, \dots, Z\} \rightarrow \{A, B, \dots, Z\},$$

a następnie – aby zaszyfrować tekst – przykładają tę permutację do kolejnych literek wiadomości, uzyskując *szyfrogram*, czyli tekst zaszyfrowany. Odszyfrowanie wygląda podobnie, tylko przykładamy kolejno permutację odwrotną do K_{perm} .



Rozwiązanie zadania M 1581.

(a) *Odpowiedź:* Nie.

Przypuśćmy, że taki zbiór S istnieje. Aby liczby 0 oraz 1 miały przedstawienia w postaci odpowiednich sum, musimy mieć $0, 1 \in S$. Gdyby $2 \in S$, to mielibyśmy dwa przedstawienia tej liczby jako sumy elementów S :
 $2 = 1 + 1 = 0 + 2$, a zatem $2 \notin S$.
Podobne rozważania prowadzą kolejno do wniosków, że $3 \in S$, $4 \notin S$, $5 \in S$. Ale
 $6 = 3 + 3 = 5 + 1$, sprzeczność.

(b) *Odpowiedź:* Tak.

Niech $S = 2\mathbb{N}_0 \cup \{1\} = \{0, 1, 2, 4, 6, \dots\}$.
Wówczas każda liczba nieparzysta większa od 1 (czyli każdy element zbioru $\mathbb{N}_0 \setminus S$) postaci $2n + 1$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci sumy dwóch elementów S , mianowicie $2n$ oraz 1.

Więcej o samej zasadzie Kerckhoffs'a oraz motywacji jej przyjęcia pisaliśmy w *Migawce* w Δ_{18}^I .

Oba powyższe przykłady wpisują się w pewien bardzo ogólny schemat szyfrowania. Mianowicie, na początku, jeszcze przed jakimkolwiek szyfrowaniem, dwie strony (ochrzcijmy je imionami Aldona i Bogumił) muszą się spotkać i ustalić coś sekretne, czyli tak zwany klucz kryptograficzny K , w naszym przykładach, odpowiednio: K_{Cezar} oraz K_{perm} . Następnie, gdy Aldona chce przekazać Bogumiłowi wiadomość m , musi ona najpierw obliczyć wartość $c = \text{Enc}(K, m)$ (gdzie Enc jest specyficznym opisem wybranego szyfru) i wysłać właśnie ją do Bogumiła. Bogumił otrzymawszy szyfrogram c , dokonuje obliczenia $m' = \text{Dec}(K, c)$, gdzie Dec oznacza funkcję deszyfrującą. Oczywiście, żeby wszystko miało ręce i nogi, musi zawsze (dla każdego wyboru K) zachodzić $m' = m$ oraz – ze względów bezpieczeństwa – podsłuchanie szyfrogramu c przez niecną Helgę nie może ujawnić właściwego komunikatu, czyli m . Ten ostatni wymóg nie jest wcale banalny do sformalizowania, ale my pozostaniemy przy nieformalnym określeniu – chcemy po prostu, aby dla Helgi było *bardzo trudno* wywnioskować cokolwiek na temat m z wartości c . Dodatkowo w środowisku kryptologicznym przyjmuje się, że Helga zawsze wie, jakiego systemu używają Aldona z Bogumiłem – innymi słowy zna definicję Enc , a jedyne czego nie zna, to klucz K (to założenie to treść tak zwanej zasady Kerckhoffs'a).

Przez setki lat rozwój kryptologii przebiegał dokładnie według powyższego schematu. Wymyślano przeróżne szyfry, po czym próbowano się upewnić, czy aby na pewno znajomość $\text{Enc}(K, m)$ (oraz definicji Enc) nic nie mówi o m . Okazało się dość szybko, że zarówno szyfr Cezara, jak i permutacyjny, nie są bezpiecznymi szyframi, ale za to inne współczesne szyfry, np. AES czy Triple-DES, uchodzą za bezpieczne i są stosowane powszechnie do dziś.

Wszystko pięknie, ale widać, gdzie znajduje się spora niewygodność. Żeby szyfrować, trzeba bezpiecznie ustalić wspólny tajny klucz. Zadanie to wcale nie wydaje się banalne (szczególnie, gdy Aldona i Bogumił mieszkają na różnych kontynentach, trwa wojna etc.), więc można by sformułować następujące naiwne marzycielskie pytanie:



Rozwiązanie zadania F 961.

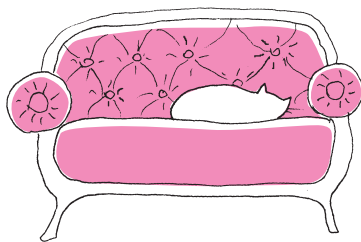
W wyniku zjawiska fotoelektrycznego na kulce zbiera się ładunek dodatni, a pochodzące od niego pole hamuje fotoelektrony. Wielkość ładunku zależy od pojemności kulki i jej potencjału $\phi : q = 4\pi\epsilon_0 r \phi$. Maksymalny potencjał kulki ϕ_{\max} zależy od początkowej energii kinetycznej fotoelektronów. Ponieważ przyrost energii kinetycznej elektronów jest równy pracy sił pola kulki, więc przyjmując, że potencjał pola kulki i prędkość elektronów w nieskończoności wynoszą zero, dostajemy:

$\Delta W_{\text{KIN}} = -e\phi_{\max}$ (gdzie e ładunek elektronu). Stąd $mv_{\max}^2/2 = -e\phi_{\max}$ (gdzie v_{\max} maksymalna energia fotoelektronu) a $\phi_{\max} = mv_{\max}^2/2e$. Zgodnie ze wzorem Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego $mv_{\max}^2/2 = h\nu - A$ (gdzie ν częstota światła). Ostatecznie

$$\phi_{\max} = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{(hc/\lambda) - A}{e} = 4,4 \text{ V.}$$

Wspomniany Czytelnik Logiczny proszony jest o poszukanie na marginesach tego numeru trójkąta o trzech kątach prostych.

Samo wyliczanie funkcji **Enc** musi być szybkie, żeby szyfrowanie było efektywne.



Co ciekawe, wciąż pozostaje pytanie otwarte, czy założenie o trudności problemu faktoryzacji wystarcza, aby udowodnić ściśle bezpieczeństwo RSA. Teoretycznie mogłoby się zdarzyć, że ktoś złamie RSA, ale w jakiś bardzo dziwny sposób, niewymagający po drodze rozkładu n na czynniki.

Czy da się skonstruować szyfr taki, który nie wymaga ustalania wspólnego tajnego klucza, to znaczy, aby po prostu $c = \text{Enc}(m)$?

Łatwo wykazać, że postulat powyższy nie jest możliwy do zrealizowania.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, a więc, że takie **Enc** istnieje. Wówczas:

1. Oczywiście Bogumił musi być w stanie deszyfrować przychodzące do niego szyfrogramy, a więc:
2. Istnieje taka funkcja **Dec**, że $\text{Dec}(\text{Enc}(m)) = m$; oznacza to, że:
3. **Dec** jest funkcją odwrotną do **Enc**; pamiętajmy, że:
4. Helga zna definicję **Enc** (zasada Kerckhoffs'a).
5. Wystarczy więc, że Helga obliczy funkcję odwrotną do (znanej jej!) funkcji **Enc** i już jest w stanie robić to, co Bogumił, czyli deszyfrować.
6. Niestety, oznacza to, że szyfrowanie **Enc** **nie** jest bezpieczne, co kończy dowód.

Pomimo znajomości powyższego rozumowania w roku 1976 dwóch dżentelmenów – Whitfield Diffie oraz Martin Hellman – postanowiło (w pracy *New Directions in Cryptography*) beczelnie zapytać: a może jednak się da? Więcej, już rok później panowie Ron Rivest, Adi Shamir oraz Leonard Adleman (korzystając ze wskazówek z pracy D–H) wykazali, że faktycznie: da się! Czytelnik Logiczny powinien w tym momencie poczuć co najmniej niesmak. Akapit wyżej pokazaliśmy *dowód*, że czegoś się nie da, a dalej coś tam jeszcze dywagujemy? Haczyk – jak zwykle w matematyce – tkwi w założeniach. Diffie i Hellman nie wykazali, że powyższy dowód jest błędny. Zaproponowali tylko pewne *dodatkowe* założenie, przy którym ten dowód *przestaje* być poprawny! Konkretnie chodzi o punkt 5. tego dowodu. Jeśli założymy (jak proponują D–H), że Helga ma ograniczoną moc obliczeniową, to wcale nie jest jasne, że będzie potrafiła szybko odwrócić znaną sobie funkcję **Enc**. Tym tropem poszli Rivest, Shamir i Adleman, proponując swój szyfr, znany dziś jako szyfrowanie RSA.

Zanim przejdziemy do szczegółów, spróbujmy naświetlić samą esencję pomysłu. Idea opiera się na spostrzeżeniu, że (generalnie) mnożenie jest szybkie, ale już jego odwracanie (czyli rozkład na czynniki pierwsze) – bardzo trudne. Innymi słowy, chodzi o znalezienie takich funkcji **Enc** oraz **Dec**, aby do wyliczania **Enc** wystarczała znajomość $p \cdot q$, ale już do szybkiego obliczania **Dec** – konieczne były zarówno p , jak i q . Wówczas Bogumił może wszystkim (i Aldonie, i Heldze, i Kamili, i Markowi, i Szymonowi i każdemu, kto tylko będzie chciał) bez skrupowania ujawniać opis **Enc**, ALE zachowując dla siebie czynniki p oraz q (czyli w istocie opis **Dec**). Naprawdę jest to troszkę bardziej skomplikowane i wygląda tak.

Rzeczywiście Bogumił wybiera dwie duże (rzędu setek cyfr) liczby pierwsze p i q oraz oblicza ich iloczyn $n = p \cdot q$. Następnie oblicza $\phi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ oraz losuje dowolną liczbę e względnie pierwszą z $\phi(n)$. Teraz znajduje taką liczbę d , że

$$(*) \quad e \cdot d = 1 \pmod{\phi(n)}.$$

Okazuje się, że powyższa operacja (wyznaczenie d) da się wykonać bardzo szybko (np. za pomocą rozszerzonego algorytmu Euklidesa), gdy znamy p , q oraz e , natomiast wierzymy, że jest bardzo trudna, gdy znamy tylko n oraz e . Pozostaje opisać funkcję szyfrującą i deszyfrującą ($m, c \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$):

$$\text{Enc}(m) := m^e \pmod{n}$$

$$\text{Dec}(c) := c^d \pmod{n}.$$

Aby uznać szyfrowanie RSA za poprawne i bezpieczne, należy sprawdzić, że:

- (a) $\text{Dec}(\text{Enc}(m)) = m$, czyli, że $m^{ed} = m^1 \pmod{n}$. Dowód tego faktu pominiemy, pozostawiając tylko uwagę, że – korzystając z kilku faktów z teorii liczb – da się go wyprowadzić wprost z równania (*).

(b) Znajomość opisu Enc (czyli liczb n i e) nie pomoże odtworzyć funkcji Dec , gdyż – jak już wspomnieliśmy – wierzymy, że z n i e nie da się łatwo obliczyć d , które jest niezbędnym elementem opisu Dec .

Jak to wygląda w praktyce?

RSA jest przykładem szyfru z kluczem publicznym

Szyfrowanie RSA jest niezwykle popularne i wygodne. Aby z niego korzystać, należy postąpić dokładnie tak, jak Bogumił w opisie wyżej. Następnie parę (n, e) (tak zwany klucz publiczny) należy rozgłaszać wszem i wobec, ponieważ jej znajomość umożliwi światu bezpieczne wysyłanie komunikatów przeznaczonych tylko dla nas. Z drugiej strony – liczbę d (osobisty klucz prywatny) oraz rozkład p i q należy trzymać w wielkiej tajemnicy i nigdy nikomu nie zdradzać.

Jaki to ma związek z podpisem cyfrowym?

Podpis cyfrowy Bogumiła to taka para funkcji $(\text{Sign}, \text{Check})$, że:

- tylko Bogumił potrafi obliczać wartości $s = \text{Sign}(m)$ (czyli podpisywać m);
- każdy potrafi obliczać wartości $\text{Check}(m, s) \in \{T, F\}$ (czyli sprawdzać autentyczność podpisu s pod dokumentem m);
- funkcja Check zachowuje się dobrze, to znaczy $\text{Check}(m, \text{Sign}(m)) = T$ oraz $\text{Check}(m, x) = F$, jeśli tylko $x \neq \text{Sign}(m)$.

Dziś chyba każdy wie, że T to *true*, a F to *false*.

Powyższa definicja wydaje się zupełnie intuicyjna i nie wymaga szerszego komentarza. Wyzwaniem jest jednak znaleźć odpowiednie Sign oraz Check . Okazuje się, że znajomość RSA bardzo nam pomoże. Przyjmijmy bowiem:

$$\text{Sign}(m) = m^d \bmod n$$

$$\text{Check}(m, s) = T \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } s^e = m \bmod n,$$

gdzie n , e oraz d są takie same jak w RSA (w szczególności: n i e są publiczne, a d – znane tylko Bogumiłowi).

Innymi słowy: podpis Sign zachowuje się jak Dec , a weryfikacja podpisu s dokumentu m sprowadza się do sprawdzenia, czy $\text{Enc}(s) = m$.

Teraz widać, że bezpieczeństwo takiego podpisu jest takie samo, jak bezpieczeństwo RSA. Jeśli bowiem (w RSA) tylko Bogumił mógł deszyfrować, to u nas tylko on może podpisywać. Skoro wcześniej każdy mógł szyfrować (Enc jest publiczna), to teraz każdy może obliczać funkcję Check . Wreszcie – funkcja Check zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami, co wynika wprost z faktu, że Dec jest odwrotna do Enc .

Postscriptum

Na zakończenie jeszcze mała obserwacja, która na razie pewnie wyda się mało użyteczna (choć zaryzykujemy stwierdzenie, że jest elegancka i zaskakująca), ale będziemy jej potrzebować w kolejnych częściach cyklu *A jednak się da*. Otóż chcemy zdefiniować protokół tak zwanego *ślepego podpisu*. To znaczy: chcielibyśmy, aby Bogumił mógł (jeśli tylko ma taką fantazję) pozwolić Aldonie na podpisanie czegoś, czego sam nigdy nie zobaczy na oczy. Możemy zrobić to tak:

1. Aldona wybiera dokument do podpisu m oraz losową liczbę $x \in \{1, 2, \dots, n\}$;
2. Aldona wysyła do Bogumiła liczbę $c = m \cdot x^e \bmod n$;
3. Bogumił oblicza $a = c^d \bmod n$ i odsyła wynik Aldonie;
4. Aldona oblicza $s = a/x \bmod n$.

Jako ćwiczenie pozostawiamy sprawdzenie, że w protokole powyżej:

- (1) Bogumił nie jest w stanie odtworzyć dokumentu m
- oraz (2) liczba s jest poprawnym podpisem Bogumiła pod dokumentem m .



Rozwiązanie zadania F 962.

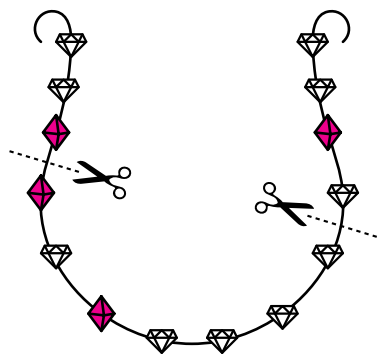
Energia fotonu wyraża się wzorem $E = h\nu$, a jego pęd $p = h\nu/c$. Jeżeli na powierzchnię folii w ciągu sekundy pada N fotonów, to moc światła padającego wynosi $W = Nh\nu$. Ciśnienie wytwarzane przez padające fotony wynosi $P = N\Delta p$, gdzie Δp – zmiana pędu fotonu przy odbiciu. Stąd

$$P = N2p = 2Nh \frac{\nu}{c} = \frac{2W}{c}.$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki $Pt = mu$, gdzie u – prędkość uzyskana przez folię. Stąd $u = 2Wt/mc = 5 \cdot 10^{-3}$ m/s.

Twierdzenie o naszyjniku

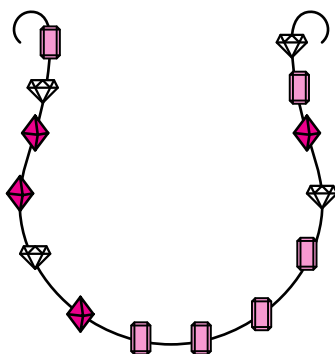
Łukasz RAJKOWSKI



Rys. 1

Uczciwi złodzieje powinni umieć się dzielić. Oczywiście, dzielić się łupami z innymi uczciwymi złodziejami, którzy pomagali w dokonaniu kradzieży. Można sobie wyobrazić, że taka uczciwość powoduje czasem pewne trudności, gdyż niektóre precjoza mogą być nieskore do podziału. Dla przykładu wyobraźmy sobie, że dwoje uczciwych złodziei (powiedzmy, Bonnie i Clyde) skradło naszyjnik wysadzany diamentami i rubinami i chcą między sobą po równo rozdzielić zawarte w nim szlachetne kamienie. Oczywiście, aby to było możliwe, liczba diamentów oraz liczba rubinów na naszyjniku muszą być parzyste. Załóżmy dodatkowo, że złodzieje – ceniący sztukę i misterną konstrukcję naszyjnika – chcą go przeciąć w jak najmniejszej liczbie miejsc, tak aby powstałe w ten sposób fragmenty mogli między siebie rozdzielić w sposób sprawiedliwy względem liczby diamentów oraz rubinów (zapięcie naszyjnika nie musi być zamknięte). Rysunek 1 pokazuje sposób podziału naszyjnika z 10 diamentami i 4 rubinami przy użyciu dwóch cięć w taki sposób, by każdy złodziej otrzymał 5 diamentów i 2 rubiny. Oczywiście, mniejsza liczba cięć nie jest możliwa. Może jednak istnieje inny diamentowo-rubinowy naszyjnik, którego nie da się sprawiedliwie podzielić przy użyciu dwóch cięć? Okazuje się, że nie, co nietrudno jest udowodnić.

Rozważmy naszyjnik z $2k$ diamentami i $2l$ rubinami. Dla $i \leq k + l + 1$ rozważmy podział Π_i , w którym kamienie o numerach $i, i + 1, \dots, i + k + l - 1$ przygarnia Bonnie, a pozostałe Clyde. Oczywiście, każdy taki podział jest możliwy do zrealizowania przy użyciu dwóch cięć. Załóżmy, że przy podziale Π_1 Bonnie dostał d diamentów i bez straty ogólności przyjmijmy $d \leq k$. Wówczas Clyde musi mieć $2k - d$ diamentów, zatem tyle samo ma Bonnie przy podziale Π_{k+l+1} . Ponadto, gdy zmieniamy podział z Π_i na Π_{i+1} , liczba diamentów przyznanych Bonnie zmienia się o co najwyżej 1. W tej sytuacji, zmieniając się od $d \leq k$ (przy Π_1) do $2k - d \geq k$ (przy Π_{k+l+1}), liczba diamentów w posiadaniu Bonnie przy pewnym podziale będzie musiała wynosić k . Oczywiście, wówczas będzie on mieć l rubinów (gdyż zawsze otrzymuje $k + l$ kamieni), a zatem uzasadniliśmy istnienie sprawiedliwego podziału uzyskiwanego przy użyciu dwóch cięć.



Rys. 2. Zachęcam Czytelnika do próby samodzielnego znalezienia sprawiedliwego podziału na 4 części, a także uzasadnienia, że 3 części to za mało.

Powstaje naturalne pytanie: co mogą zrobić złodzieje, jeśli rodzajów kamieni jest więcej? Rysunek 2 przedstawia naszyjnik wysadzany diamentami, rubinami i szmaragdami, którego nie da się sprawiedliwie podzielić, używając dwóch cięć, choć jest to możliwe przy użyciu trzech cięć. Czy zatem w przypadku 3 rodzajów kamieni zawsze wystarczą 3 cięcia? A jeśli tak, to czy przy naszyjniku z n różnymi rodzajami kamieni zawsze możemy wykonać tylko n cięć, aby uzyskać sprawiedliwy podział? Twierdzącej odpowiedzi na to pytanie udzielił Noga Alon i Douglas West (*The Borsuk–Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1986). Przedstawione przez nich rozumowanie jest niezwykle piękne, między innymi dlatego, że opiera się na twierdzeniu Borsuka–Ulama, kojarzonym z topologią, a nie z problemami natury tak dyskretnej, jak podział łupów. Twierdzenie to brzmi następująco.

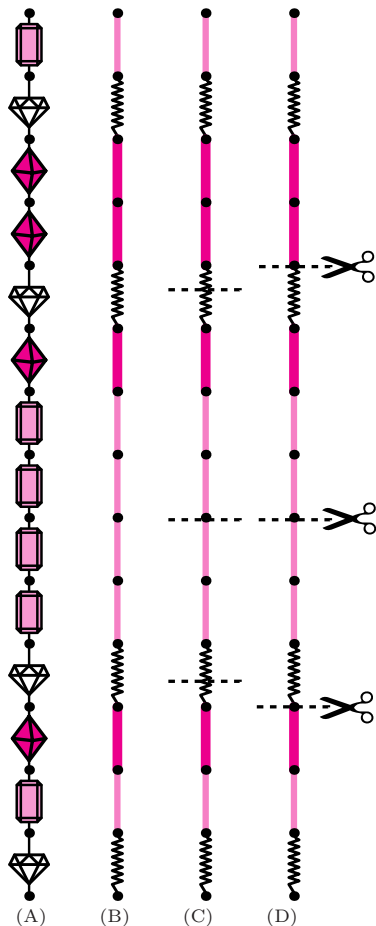
Twierdzenie. Niech S^n będzie n -wymiarową sferą jednostkową, tzn.

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

i niech $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną funkcją ciągłą. Wówczas istnieje punkt $\mathbf{x} \in S^n$, dla którego $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Przyjrzyjmy się, jak przedstawiony wynik „pracuje” w rozważanym zagadnieniu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że mamy do czynienia z trzema rodzajami kamieni, dowód w ogólnym przypadku jest w pełni analogiczny. Rozważmy naszyjnik z $2k$ diamentami, $2l$ rubinami i $2m$ szmaragdami. Załóżmy, że naszyjnik ma długość $2(k + l + m)$, a po jego rozprostowaniu

Więcej o twierdzeniu Borsuka–Ulama można przeczytać w artykule Michała Miśkiewicza w *Delcie* 09/2018.



(A) rozłożony naszyjnik,
 (B) „rozsmarowanie” kamieni,
 (C) podział naszyjnika wynikający
 z twierdzenia Borsuka–Ułama,
 (D) poprawka poprzedniego podziału, aby
 cięcia wypadły w zaznaczonych punktach

i -ty kamień znajduje się w odległości $(2i - 1)/2$ od górnego zapięcia. Dla ułatwienia opisu niech A_i będzie punktem na naszyjniku w odległości i od górnego zapięcia (tzn. i -ty kamień znajduje się w środku odcinka $A_{i-1}A_i$).

Wyobraźmy sobie, że dla każdego $i \leq 2(k + l + m)$ „rozsmarowujemy” i -ty kamień równomiernie po całym odcinku $A_{i-1}A_i$. Dopuszczamy w ten sposób niecałkowitoliczbowe podziały naszych skarbów (tzn. można, na przykład, przeciąć diamentowy odcinek w połowie). Zastanówmy się, w jaki sposób można matematycznie opisać podział tego naszyjnika na cztery części, rozdzielone między dwóch złodziei. Po pierwsze, musimy określić punkty cięcia. Są one jednoznacznie wyznaczone przez długości kolejnych fragmentów naszyjnika, czyli cztery dodatnie liczby rzeczywiste, sumujące się do $2(k + l + m)$. Dla wygody podzielmy je przez $2(k + l + m)$, otrzymując dodatnie liczby d_1, d_2, d_3, d_4 , sumujące się do 1. Następnie musimy rozdzielić tak otrzymane części między złodziei. W tym celu każdej części możemy przyporządkować liczbę ± 1 , w zależności od tego, któremu rabusiowi chcemy ją wręczyć (powiedzmy, 1 dla Bonniego i -1 dla Clyde). Niech σ_i będzie znakiem przynależności i -tej części. Wówczas czwórka $(\sigma_1\sqrt{d_1}, \sigma_2\sqrt{d_2}, \sigma_3\sqrt{d_3}, \sigma_4\sqrt{d_4})$ jest punktem na sferze S^3 . Z drugiej strony, każdy punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ definiuje podział naszyjnika poprzez wzięcie $d_i = x_i^2$ oraz $\sigma_i = \text{sgn}(x_i)$.

Widzimy już, że twierdzenie Borsuka–Ułama ma coraz większą szansę okazać się pomocne. Aby z niego skorzystać, musimy jeszcze określić funkcję ciągłą z S^3 w \mathbb{R}^3 , w jakiś sposób związaną z naszym podziałem łupów. Naturalnym kandydatem jest funkcja $F: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określona „wzorem”

$F(\mathbf{x}) =$ suma długości (diamentowych, rubinowych, szmaragdowych)
 fragmentów naszyjnika, przypadłych Bonnieemu przy podziale
 zdefiniowanym przez \mathbf{x} .

Rozważana funkcja jest ciągła dzięki temu, że „rozsmarowaliśmy” wcześniej nasze kamienie. Na mocy twierdzenia Borsuka–Ułama istnieje zatem $\mathbf{x} \in S^3$, dla którego $F(\mathbf{x}) = F(-\mathbf{x})$. Zauważmy jednak, że $F(-\mathbf{x})$ określa sumy odpowiednich fragmentów przynależnych Clyde przy podziale zdefiniowanym przez \mathbf{x} . Istnieje zatem podział naszyjnika przy użyciu trzech cięć w taki sposób, że każde ze złodziei otrzyma taką samą sumaryczną długość fragmentów poszczególnych rodzajów.

Pozostaje nam teraz wrócić z „uciągłej” wersji problemu do twardej rzeczywistości diamentów twardych jak diamenty, niemożliwych do „rozsmarowywania” na naszyjniku. Aby zakończyć dowód, wystarczy uzasadnić, że otrzymane w poprzednim akapicie punkty cięcia możemy przesunąć (nie zmieniając sprawiedliwości podziału) tak, aby wypadły w punktach A_i . Nie jest to jednak trudne. Rozważmy wszystkie punkty cięcia, które wypadły wewnątrz pewnego diamentowego odcinka o końcach w kolejnych punktach A_i . Jeśli fragmenty po obu stronach cięcia należą do jednego złodzieja, to, oczywiście, bez uszczerbku sprawiedliwości możemy przesunąć cięcie do najbliższego punktu A_i . Wszystkie pozostałe spośród rozważanych punktów cięcia przesuniemy „na korzyść” Bonniego. Wówczas Bonnie zyska „diamentową” długość będącą pewną liczbą całkowitą a (gdyż suma „ułamkowych” diamentowych fragmentów Clyde musiała być całkowita). Wystarczy zatem, że Bonnie odda teraz a diamentów poprzez odpowiednie przesunięcie o 1 pewnych a punktów cięcia. To samo można zrobić dla pozostałych rodzajów kamieni, otrzymując w ten sposób „dyskretny”, sprawiedliwy podział naszyjnika.

Kolejnym rozszerzeniem naszyjnikowej zagwozдки jest wzięcie pod uwagę większej liczby złodziei. Jaka jest zatem najmniejsza możliwa liczba cięć potrzebnych do podziału naszyjnika z n rodzajami kamieni między m złodziei (zakładając, że jest to możliwe)? Odpowiedź jest znana, zachęcam jednak Czytelnika do próby samodzielnego sformułowania hipotezy na ten temat.

Artykuł powstał na podstawie świetnego filmiku *Who (else) cares about topology? Stolen necklaces and Borsuk–Ulam* autorstwa użytkownika 3Blue1Brown, dostępnego na stronie [youtube.com](https://www.youtube.com).

Kiedy ukształtowały się galaktyki?

Małgorzata SIUDEK*

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Na początku XX wieku obserwacje przeprowadzone przez E.P. Hubble'a doprowadziły do odkrycia, że Droga Mleczna jest tylko jedną z miliardów galaktyk. Niektóre, jak nasza rodzima Galaktyka, przypominają kształtem płaski dysk ze spiralnymi ramionami, inne zaś są niemal kuliste. Jednak galaktyki obok wielu różnic wykazują również istotne podobieństwa, które stają się podstawą systemów klasyfikacji. Powszechnie przyjętym i stosowanym systemem jest klasyfikacja oparta na różnicach morfologicznych, zaprezentowana przez E.P. Hubble'a w 1936 roku i wyróżniająca galaktyki (1) eliptyczne, (2) spiralne i (3) nieregularne, czyli te, które nie pasują do żadnej z pierwszych dwóch grup. Galaktyki eliptyczne to obiekty niemal kulistego kształtu wypełnione niewielką ilością pyłu i gazu, zawierające stare gwiazdy, które nadają im czerwoną barwę. Ich przeciwieństwem są galaktyki spiralne zbudowane z dysku i ramion wypełnionych młodymi, gorącymi, a zatem niebieskimi gwiazdami. Choć o galaktykach wiemy już całkiem dużo, historia ich powstawania nadal skrywa wiele tajemnic. Astronomowie wciąż poszukują szczegółowego i wyczerpującego wyjaśnienia mechanizmu prowadzącego do formowania się galaktyk spiralnych i eliptycznych wśród radykalnie różnych ścieżek ewolucyjnych. Jednym z głównych czynników uniemożliwiającym opisanie tego procesu są niezwykle złożone mechanizmy fizyczne regulujące ten cykl.

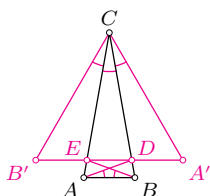


Rozwiązanie zadania M 1579.

Odpowiedź: $\sphericalangle ACB = 20^\circ$.

Niech A' i B' będą punktami symetrycznymi do punktów A i B odpowiednio względem prostych BC i AC . Z danych w treści zadania równości kątów wynika, że punkty A' , D , E , B' leżą na jednej prostej, a zatem

$$\begin{aligned} A'B' &= A'D + DE + EB' = \\ &= AD + DE + EB = AC. \end{aligned}$$



W połączeniu z $AC = A'C = B'C$ oznacza to, że trójkąt $A'B'C$ jest równoboczny. W konsekwencji, wobec równości kątów

$\sphericalangle A'CB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB'$, uzyskujemy

$$\sphericalangle ACB = \frac{\sphericalangle A'CB'}{3} = 20^\circ.$$



Rozwiązanie zadania M 1580.

Odpowiedź: -23 .

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^5 + x^2 + 1 &= \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5). \end{aligned}$$

W szczególności dla $x = \sqrt{2}$ oraz $x = -\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3) \cdot \\ &\quad \cdot (\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5) = 3 + 4\sqrt{2}, \\ &(-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5) = 3 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wymnażając stronami powyższe dwie równości, uzyskujemy po lewej stronie żądany iloczyn, a po prawej liczbę

$$(3 + 4\sqrt{2})(3 - 4\sqrt{2}) = 9 - 32 = -23.$$

Podstawową ideą narodzin galaktyk są niewielkie fluktuacje gęstości materii wypełniającej wczesny Wszechświat. Na skutek grawitacyjnej niestabilności lokalne fluktuacje wzrastały, doprowadzając do powstawania gęstych obłoków (protogalaktyk), w których zaczęły się tworzyć gwiazdy. W protogalaktykach eliptycznych potencjał grawitacyjny był na tyle silny, że bardzo szybko ściągnął większość materii, z której powstały gwiazdy. Niemalże cały gaz został zużyty w tym procesie, a jego resztki były wymiatane przez silne wiatry galaktyczne, blokując dalszą aktywność gwiazdotwórczą. W protogalaktykach spiralnych o dużym momencie pędu siła odśrodkowa przeciwdziałała przyciąganiu grawitacyjnemu i materia skupiała się wolniej. Gwiazdy początkowo powstawały tylko w centralnej części obłoku, pozostawiając zapasy gazu do produkcji kolejnych pokoleń gwiazd, a na skutek wirowania materia skupiała się w jednej płaszczyźnie, tworząc dysk. Jednak ten scenariusz nie uwzględnia oddziaływań między galaktykami. Tak jak u ludzi inteligencja zostaje ukształtowana nie tylko przez geny, ale i przez otoczenie, tak i na proces formowania się galaktyk prócz opisanego w scenariuszu ma również wpływ środowisko, w jakim się znajdują. Galaktyki mogą występować na tyle blisko, że ich siły grawitacyjne zaburzają wzajemnie swoje struktury, prowadząc nawet do zderzeń i powstania jednej, większej galaktyki. Obserwacje galaktyk eliptycznych głównie w centralnych obszarach gromad, zaś galaktyk spiralnych na zewnątrz, potwierdzają, że otoczenie mogło mieć znaczący wpływ na powstawanie galaktyk.

Prawdopodobnie oba mechanizmy miały wpływ na ukształtowanie się galaktyk (jak również inne czynniki, tj. aktywne jądra galaktyk), jednak do tej pory nie powstał pełny obraz ich formowania się. Jedną z możliwości poznania tego procesu jest porównanie właściwości galaktyk starszych z młodszyimi. Dorastanie galaktyk, czyli ich zmiany ewolucyjne, trwają miliardy lat, więc musimy spojrzeć daleko w przeszłość, by uzyskać odpowiednie informacje. Niedawno zakończony przegląd VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS, vipers.inaf.it), który dostarczył astronomii unikalną mapę Wszechświata z czasów, gdy był on dwa razy młodszy, zmienił odrobinę tę sytuację. Dzięki niemu wiemy, że kilka miliardów lat temu galaktyki eliptyczne były już ukształtowane i występowały, podobnie jak te obserwowane w lokalnym Wszechświecie, głównie w gromadach galaktyk. Unikatowe obserwacje VIPERS-a udowodniły, że podział na galaktyki eliptyczne i spiralne ukształtował się znacznie wcześniej niż 7-8 miliardów lat temu. Miejmy nadzieję, że kolejne, jeszcze głębsze przeglądy, pozwolą zaobserwować ich przemianę i opisać proces ich powstania.

Nieuchwytny punkt stały

Jarosław GÓRNICKI*

Jeżeli $I = [a, b]$ jest domkniętym, ograniczonym przedziałem prostej euklidesowej \mathbb{R} , to każde przekształcenie ciągle $f : I \rightarrow I$ ma punkt stały, tj. taki punkt $p \in I$, że $f(p) = p$.

Istotnie, rozważmy funkcję $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $g(x) = f(x) - x$ dla każdego $x \in I$. Ponieważ $g(a) \geq 0$ i $g(b) \leq 0$, więc z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich istnieje punkt $p \in I$, dla którego $g(p) = 0$, czyli $f(p) = p$.

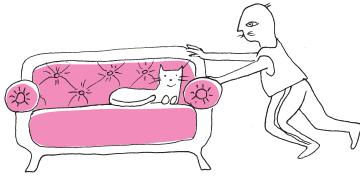
Można też rozumować inaczej: niech $f : I \rightarrow I$ będzie przekształceniem ciągłym,

$$A = \{x \in I : x \leq f(x)\} \text{ i } B = \{x \in I : x \geq f(x)\}.$$

Oczywiście, $I = A \cup B$, A, B są zbiorami domkniętymi w I , $a \in A, b \in B$.

Ponieważ I jest zbiorem spójnym, więc istnieje punkt $p \in A \cap B$. Wtedy $f(p) = p$.

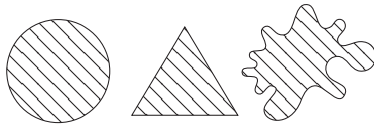
Świetnie, ale gdzie (jak) tego punktu p szukać? To jest problem!



W 1912 roku Luitzen Brouwer opublikował niezwykle zaskakujący wynik: na płaszczyźnie euklidesowej \mathbb{R}^2 każde przekształcenie ciągle koła domkniętego $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ w siebie ma punkt stały. Uzasadnienie tego rezultatu nie jest łatwe, intuicja nam w tym nie pomaga. Weźmy papierową kopię koła B , zgniećmy ją dowolnie (ale jej nie rozerwijmy), to, co otrzymaliśmy, zdepczmy tak, by stało się częścią koła B . Wtedy co najmniej jeden punkt kopii będzie leżał dokładnie nad swoim pierwowzorem. Zdziwiająca!

I w tym przypadku nie mamy żadnych precyzyjnych informacji o ilości punktów stałych i ich lokalizacji (aprosymacji).

Odkryta przez Brouwera własność koła pozostaje prawdziwa dla szerszej klasy zbiorów. Mówimy, że dwa zbiory X i Y są *homeomorficzne*, jeśli istnieje takie wzajemnie jednoznaczne przekształcenie h zbioru X na zbiór Y , że przekształcenia h i h^{-1} , do niego odwrotne, są ciągłe. Takie przekształcenie h nazywamy *homeomorfizmem*. Zbiór homeomorficzny z kołem B nazywamy *dyskiem topologicznym* (rys. 1).



Rys. 1. Zbiory homeomorficzne, dyski topologiczne

Mówimy, że zbiór X ma *własność punktu stałego*, gdy każde przekształcenie ciągle $f : X \rightarrow X$ ma punkt stały.

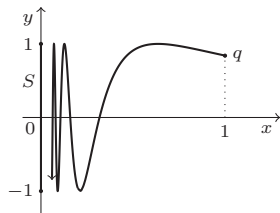
Twierdzenie 1. Niech X i Y będą zbiorami homeomorficznymi. Jeżeli zbiór X ma własność punktu stałego, to zbiór Y też ma własność punktu stałego.

Istotnie, niech $g : Y \rightarrow Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Określamy przekształcenie ciągle $f = h^{-1} \circ g \circ h : X \rightarrow X$, czyli $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$ dla każdego $x \in X$. Ponieważ zbiór X ma własność punktu stałego, więc istnieje $p \in X$, że $f(p) = p$. Wtedy $h^{-1}(g(h(p))) = p$, więc $g(h(p)) = h(p)$. Oznacza to, że $h(p) \in Y$ jest punktem stałym przekształcenia g . Zbiór Y ma więc własność punktu stałego.

Twierdzenie Brouwera zapewnia więc, że na płaszczyźnie euklidesowej dysk topologiczny ma własność punktu stałego. Dyski topologiczne należą do szerszej klasy zbiorów, tzw. *continuuów*. Continuum to zbiór zwarty i spójny.

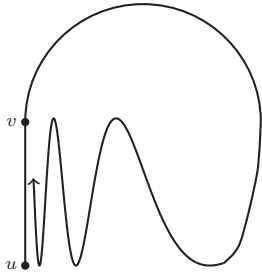
Nie wszystkie continua (na płaszczyźnie euklidesowej) mają własność punktu stałego. Dla okręgu, czy pierścienia niewielki obrót lub przekształcenie antypodyczne rusza wszystkie punkty figury. Z drugiej strony wiele continuum ma własność punktu stałego.

Przykład 1. Łuk $\sin \frac{1}{x}$, czyli wykres funkcji $\sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, w sumie z odcinkiem $S = \{(x, y) : x = 0 \wedge |y| \leq 1\}$ (rys. 2) ma własność punktu stałego.



Rys. 2

Oznaczmy łuk $\sin \frac{1}{x}$ przez A . Niech $\xi(a)$ oznacza współrzędną x -ową punktu $a \in A$. Dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f : A \rightarrow A$ funkcja $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $g(a) = \xi(a) - \xi(f(a))$ jest ciągła i nieujemna w punkcie $q = (1, \sin 1)$. Na odcinku S funkcja g jest niedodatnia. Jeżeli funkcja g przyjmuje wartość zero



Rys. 3. Okrąg $\sin \frac{1}{x}$

w pewnym punkcie zbioru $A \setminus S$, to jest to punkt stały przekształcenia f . Jeśli $g(a) > 0$ we wszystkich punktach $a \in A \setminus S$, to $g(a) = 0$ na zbiorze S . Oznacza to jednak, że f przekształca zbiór S w S , a takie przekształcenie ma punkt stały w zbiorze S .

Przykład 2. Okrąg $\sin \frac{1}{x}$ (rys. 3) ma własność punktu stałego.

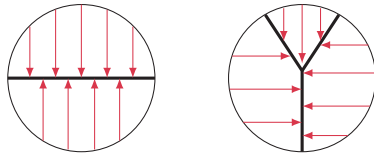
Oznaczmy okrąg $\sin \frac{1}{x}$ przez W . Niech $u = (0, -1)$ i dla każdego punktu $a \in W$ niech $\lambda(a)$ będzie długością łuku, wzdłuż okręgu W , od punktu u do punktu a (np. $\lambda(u) = 0$, $\lambda(v) = 2$). Dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f : W \rightarrow W$ funkcja $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $g(a) = \lambda(a) - \lambda(f(a))$ jest ciągła oraz $g(u) \leq 0$. Jeśli w zbiorze W jest punkt, dla którego funkcja g jest nieujemna, to w pewnym punkcie $p \in W$, $g(p) = 0$. Wtedy $f(p) = p$.

Warunek $g(a) < 0$ dla każdego punktu $a \in W$ oznacza, że punkt $f(a)$ znajduje się na wykresie funkcji $\sin \frac{1}{x}$ zawsze przed punktem a (w tym sensie, że a jest punktem łuku łączącego u i $f(a)$). Każdy punkt $q \in S$ jest granicą ciągu punktów q_1, q_2, \dots z wykresu funkcji $\sin \frac{1}{x}$. Ponieważ punkt $f(q_i)$ leży przed punktem q_i na wykresie funkcji $\sin \frac{1}{x}$, więc z ciągłości przekształcenia f , $f(q) \in S$. Oznacza to, że $f : S \rightarrow S$, w konsekwencji f ma punkt stały w zbiorze S .

W badaniu własności punktu stałego bardzo użyteczny jest następujący rezultat.

Twierdzenie 2. Niech X będzie zbiorem z własnością punktu stałego, Y jego podzbiorem i $r : X \rightarrow Y$ takim przekształceniem ciągłym, że $r(y) = y$ dla każdego $y \in Y$. Wtedy zbiór Y też ma własność punktu stałego.

Uzasadnienie jest proste. Niech $g : Y \rightarrow Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wtedy przekształcenie $f = g \circ r : X \rightarrow Y \subset X$ jest ciągłe. Ponieważ zbiór X ma własność punktu stałego, więc istnieje takie $p \in X$, że $f(p) = g(r(p)) = p$. Ponieważ $p \in Y$, więc z warunku $r(p) = p$ wynika, że $g(p) = p$.



Rys. 4

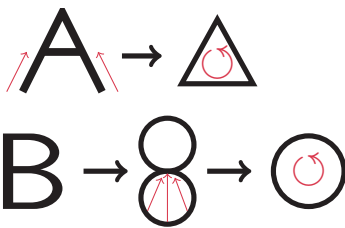
Zbiór $Y \subset X$, dla którego istnieje takie przekształcenie ciągłe $r : X \rightarrow Y$, że $r(y) = y$ dla każdego $y \in Y$, nazywamy *retraktem* zbioru X , a przekształcenie r nazywamy *retrakcją*. Pojęcia te wprowadził w 1931 roku Karol Borsuk.

Odcinek i litera Y są retraktem koła B , więc mają własność punktu stałego (rys. 4). Continua z rysunku 5 też są retraktem koła B i zgodnie z twierdzeniem 2 mają własność punktu stałego.



Rys. 5

Oczywiście, aby wykazać, że zbiór nie ma własności punktu stałego, wystarczy wskazać przykład jednego przekształcenia ciągłego, które rusza wszystkie punkty zbioru (lub jego reaktu). Sprawdź, które litery alfabetu łacińskiego mają własność punktu stałego (a innych alfabetów?). Dla przykładu rozpatrzmy pierwsze dwie litery (rys. 6), jak widać, obie nie mają własności punktu stałego.



Rys. 6

Drogi Czytelniku, w poniższych zadaniach, zanim przeczytasz rozwiązania, sam zmierz się z pytaniami.

Zadanie 1. Czy „bałwanek”, gdzie koła domknięte X i Y są styczne zewnętrznie, ma własność punktu stałego?

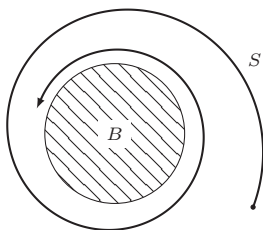
Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że „bałwanek” jest retraktem koła, które zgodnie z twierdzeniem Brouwera ma własność punktu stałego. Wniosek: „bałwanek” $X \cup Y$ ma własność punktu stałego.

A jak wygląda sytuacja, gdy zbiory X i Y są dyskami topologicznymi i mają więcej punktów wspólnych?

Zadanie 2. Czy koło domknięte B z nawijającą się asymptotycznie na jego brzeg spiralą $S = \{ \frac{t+1}{t}(\cos t, \sin t) : t \geq 1 \}$ (rys. 7) ma własność punktu stałego?

Rozwiązanie: Jeżeli $f : B \cup S \rightarrow B \cup S$ jest przekształceniem ciągłym, to albo $f(B) \subset B$, albo $f(B) \subset S$ (zbiór $B \cup S$ nie jest łukowo spójny, a jedynie jest sumą zbiorów łukowo spójnych). Analogicznie, $f(S) \subset B$ albo $f(S) \subset S$.

Jeżeli $f(B) \subset B$, to na podstawie twierdzenia Brouwera f ma punkt stały.



Rys. 7.

Jeżeli $f(B) \subset S$, to również $f(B \cup S) \subset S$ ($f(S)$ nie może wtedy zawierać się w zbiorze B , bo f jest ciągłe). Ponieważ zbiór $B \cup S$ jest zwarty, więc zbiór $f(B \cup S) \subset S$ jest punktem albo domkniętym łukiem skończonej długości $J \subset S$. Jeżeli $f(B \cup S)$ jest punktem, to jest to punkt stały przekształcenia f . W przeciwnym przypadku $f : J \rightarrow J$, a to przekształcenie ma punkt stały. Zatem continuum $B \cup S$ ma własność punktu stałego.

Opisane zagadnienia prowadzą do wielu otwartych pytań. Jedno z najważniejszych, postawione około 1930 r., jest następujące:

Problem. Czy każde continuum, które nie rozcina płaszczyzny, ma własność punktu stałego?

Niestety, nie znamy na nie odpowiedzi. Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest niezwykle bogaty i różnorodny ogród anomalii jaki stanowią continua. Przykładem niech będzie pytanie: czy na płaszczyźnie istnieją linie będące wspólnym brzegiem trzech (lub więcej) obszarów? Odpowiedź podał Brouwer w 1910 roku, budując na płaszczyźnie dla każdego naturalnego $n \geq 3$ wspólne brzegi n obszarów. Spróbuj i Ty!

O egzotycznych kontinuuach pisał w Δ_{81}^3 Jerzy Mioduszewski: *Z geometrii głębokiego interioru: kontinua nierozkładalne.*

Anomalie kul i kostek

Karol GRYSZKA*

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kwadrat i koło mają swoje naturalne odpowiedniki trójwymiarowe (sześcian i kula), czterowymiarowe, pięciowymiarowe i dowolnie wymiarowe. Pisząc „dowolny wymiar”, mamy na myśli więcej osi układu, czyli też współrzędnych opisujących obiekt. Wyobraźmy sobie mianowicie przestrzeń trójwymiarową (co nie jest specjalnie trudne). Każdy punkt takiej przestrzeni można opisać za pomocą zestawu trzech współrzędnych (x, y, z) . Gdy opisujemy położenie punktu na płaszczyźnie, myślimy zwykle o układzie kartezjańskim i parze współrzędnych (x, y) . Opisując punkt na prostej, używamy tylko jednej liczby. Gdy zaś chcemy opisać przestrzeń czterowymiarową, lub ogólniej n -wymiarową, używamy zestawu n liczb (x_1, \dots, x_n) .

Potrzeba używania więcej niż trzech współrzędnych nie jest specjalnie wydumana. Wyobraźmy sobie, że chcemy opisać temperaturę w pomieszczeniu. Chcąc być absolutnie precyzyjnym, powinniśmy wskazać, jaka temperatura panuje w każdym jego punkcie (inna będzie nad kaloryferem, a inna w rogu pokoju). Czyli mamy (x_1, x_2, x_3, T) , gdzie pierwsze trzy liczby to współrzędne punktu, a czwarta to temperatura. Chcąc opisać temperaturę w pomieszczeniu w ciągu np. tygodnia, posłużymy się pięcioma współrzędnymi (x_1, x_2, x_3, T, t) , gdzie ostatnia wskazuje czas dokonywania pomiaru temperatury.

I choć opis takich wielowymiarowych przestrzeni nie sprawia żadnej trudności od strony formalnej, to nie można „zobaczyć” przestrzeni czterowymiarowej (i żadnej wyżej wymiarowej), gdyż nie mają one naturalnego odpowiednika.

Wróćmy na chwilę do niższych wymiarów – drugiego i trzeciego. Wspomniane na początku koło i kula są właściwie tym samym, tylko w różnych przestrzeniach: są to zbiory wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od ustalonego środka jest nie większa od promienia R . Takie pojęcie możemy przenieść na dowolny wymiar. *Kulą n -wymiarową o środku w punkcie $a = (a_1, \dots, a_n)$ i promieniu R nazywamy zbiór*

$$B^n(a, R) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid d(x, a) \leq R\},$$

gdzie $d(x, a)$ to odległość od a do x . Z kulą wiążemy w sposób naturalny *sferę*, która jest zbiorem punktów odległych od danego punktu dokładnie o R

$$S^{n-1}(a, R) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid d(x, a) = R\}.$$

Zwróćmy uwagę na wskaźnik $n - 1$; mimo iż sfera jest opisana w przestrzeni n -wymiarowej, jest obiektem $n - 1$ wymiarowym – jedna ze współrzędnych zawsze daje się wyrazić jako funkcja promienia i pozostałych $n - 1$ współrzędnych.

Stosunkowo łatwo jest skonstruować odpowiednie rzuty obiektów czterowymiarowych w przestrzeń trójwymiarową. Analogią takiej idei jest rysowanie rzutu sześcianu na płaskiej kartce papieru.

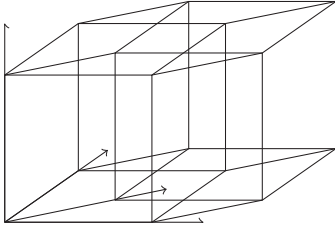
Odległość punktu $x = (x_1, \dots, x_n)$ od $y = (y_1, \dots, y_n)$ w przestrzeni n -wymiarowej to liczba

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

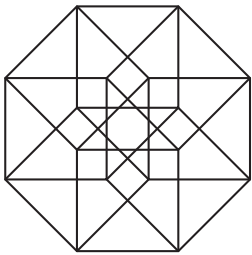
Wzór ten jest konsekwencją twierdzenia Pitagorasa.

Jeśli okrąg opisany jest równaniem $x^2 + y^2 = 1$, to znając x , wiemy, że $y = \sqrt{1 - x^2}$ lub $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Można zastanowić się przez chwilę, ilu współrzędnych używamy do opisu położenia na Ziemi – oczywiście, wystarczą dwie: długość i szerokość geograficzna. I to mimo że powierzchnia naszej planety jest umieszczona w przestrzeni trójwymiarowej, więc naturalne jest myślenie o niej jak o obiekcie trójwymiarowym.



Tesseract inaczej nazywany jest hipersześcianem. Na rysunku poniżej przedstawiony tak, aby zobrazować jego idealną symetrię.



Polem sześcianu (obiekt trójwymiarowy) jest objętość brzegu sześcianu, czyli objętość sześciu kwadratów. Kwadrat jest obiektem dwuwymiarowym, więc objętość w tym przypadku interpretujemy jako klasycznie rozumiane pole. Dla kwadratu jego „polem” nie jest R^2 (klasyczne pole), lecz objętość brzegu tego kwadratu, a więc w tym przypadku długość czterech odcinków brzegowych (klasyczny obwód).

Krótkiego wyjaśnienia wymaga $V_0(R) = 1$ oraz $S_0(R) = 2$. Pierwszy zbiór składa się z jednego punktu, drugi zaś z dwóch. Objętość w przestrzeni „zerowymiarowej” zlicza punkty należące do danego zbioru.

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \\ n \cdot (n-2)!!, & n \geq 2. \end{cases}$$

Można wykazać, że

$$V_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{2}}.$$

Asymptotyka ta wynika ze wzoru Stirlinga

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Długość d_n można obliczyć tak:

$$d_n = d(\mathbf{0}, \mathbf{1}),$$

gdzie $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ oraz $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ mają po n identycznych współrzędnych.

Poniżej przedstawiamy jedną z wielu możliwości zdefiniowania kwadratu czy kostki w dowolnym wymiarze. *Kostką n -wymiarową* o boku długości 1 nazywamy zbiór

$$C^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in [0, 1] \text{ dla } k = 1, \dots, n\}.$$

Powyższe opisuje kostkę, która ma wszystkie „ściany” równoległe do osi układu współrzędnych i której jeden z „rogów” znajduje się w jego środku. Chcąc opisać przesunięcie takiej kostki o ustalony wektor, trzeba by, oczywiście, lekko zmodyfikować wzór. Trochę trudniej jest opisać kostkę obróconą, ale tego na szczęście nie będziemy w dalszej części potrzebowali.

Oczywiście, C^2 to klasyczny kwadrat, a C^3 to sześcian. Kostkę C^4 nazywamy *tesseractem* – jest to czterowymiarowy odpowiednik sześcianu (więcej o nim w *Małej Delcie*).

Zastanówmy się teraz, jak interpretować pole i objętość w dowolnym wymiarze. Posłużymy się w tym celu analogią do kostek, które dobrze znamy. Objętością obiektu jednowymiarowego jest jego długość. Dwuwymiarowego – pole, a trójwymiarowego – klasyczna objętość. Tym samym objętość kostki 1-wymiarowej o boku długości R jest równa R , 2-wymiarowej to R^2 , 3-wymiarowej to R^3 i przez analogię n -wymiarowej R^n .

Powierzchni boczna n -wymiarowej bryły daje się przedstawić w przestrzeni o wymiar niższej niż sama bryła. W końcu siatkę 3-wymiarowej kostki możemy przedstawić na płaszczyźnie, a „siatkę” 2-wymiarowej kostki na prostej (będą to cztery odcinki). Ponownie przez analogię pole powierzchni bocznej n -wymiarowej bryły można interpretować jako objętość jej brzegu ($n-1$ -wymiarowego).

Przyjrzyjmy się teraz wielkości pola i objętości kostek i kul jednostkowych (o boku lub promieniu R)

	objętość	pole
kostka n -wymiarowa C^n	R^n	$2nR^{n-1}$
kula n -wymiarowa B^n	$V_n(R)$	$S_{n-1}(R)$

gdzie wzory dla kuli są zdefiniowane rekurencyjnie (wszystko przez analogię do kul jedno-, dwu- i trójwymiarowych),

$$V_0(R) = 1, \quad V_{n+1}(R) = \frac{S_n(R) \cdot R}{n+1}, \quad S_0(R) = 2, \quad S_{n+1}(R) = 2\pi V_n(R) \cdot R.$$

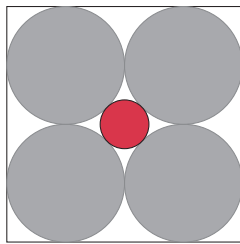
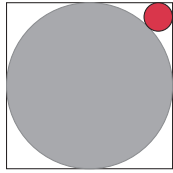
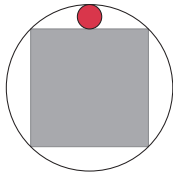
Korzystając z powyższych wzorów, można podać wzory jawne dla pól i objętości kuli n -wymiarowej. Poniżej podajemy te dla $V_n(R)$, Czytelnikowi pozostawiając wyprowadzenie odpowiednich wzorów dla sfer

$$V_{2k}(R) = \frac{\pi^k \cdot R^{2k}}{k!}, \quad V_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1} \pi^k \cdot R^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Anomalie

1. W kostkę C^n o boku długości 1 wpisujemy kulę B^n . Jak będzie się zmieniał stosunek objętości kuli do kostki, gdy wymiar n będzie rosnąć? Otóż odpowiednia proporcja dąży do... zera! Podobne zjawisko ma miejsce, gdy w kulę wpisujemy kostkę (patrz punkt 4). W obu przypadkach można to rozumieć w ten sposób, że wpisywane bryły coraz „gorzej” wypełniają to, w co są wpisywane.

2. Obliczmy długość przekątnej d_n n -wymiarowej kostki C^n o boku długości 1. Znamy dobrze przypadek $d_2 = \sqrt{2}$ oraz $d_3 = \sqrt{3}$. Nietrudno przekonać się, że $d_n = \sqrt{n}$. Tym samym przekątna kostki o boku 1 może przyjmować dowolnie dużą



wartość (!) – tj. rośnie nieograniczenie wraz ze wzrostem wymiaru. Ponadto, promień kuli opisanej na tej kostce, równy połowie długości przekątnej, również rośnie bez ograniczenia. I wreszcie – maksymalna luka między powierzchnią kuli opisanej na kostce i tą kostką, wynosi $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$, i również może przyjąć dowolnie dużą wartość. Tym samym można w lukę między kostką i powierzchnią kuli wpisać kulę o średnicy $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$. W wymiarze $n = 10201$ odpowiednia kula będzie miała średnicę 50 razy większą od długości boku kostki.

3. Punkty 1. oraz 2. wskazują, że wraz ze wzrostem wymiaru rośnie ilość przestrzeni między bryłami. Rozważmy tym razem sytuację analogiczną do przedstawionej na rysunku obok, tyle że n -wymiarową. Niech r będzie szukanym promieniem małej kuli. Wtedy

$$r = \frac{\sqrt{n} - 1}{2 + 2\sqrt{n}}.$$

Granica powyższego wyrażenia jest $\frac{1}{2}$. Oznacza to, że średnica opisanej przed chwilą kuli będzie coraz lepiej wypełniała przestrzeń w jednej z 2^n identycznych kostek, na jakie wyjściową kostkę daje się podzielić (średnica będzie coraz bliższa długości boku takiej kostki).

4. Coś prostszego: z punktu 2. wynika, że kostka jest coraz mniejsza w stosunku do kuli, w którą jest wpisana. Istotnie, jeżeli kula n -wymiarowa o promieniu 1 jest opisana na kostce, to bok takiej kostki ma długość $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Tym samym objętość takiej kostki maleje wraz ze wzrostem wymiaru i może być dowolnie bliska zeru.

5. Jeśli w n -wymiarową kostkę o boku 1 wpisujemy 2^n kul o średnicach $\frac{1}{2}$, to kula styczna do wszystkich kul będzie miała promień równy $\frac{\sqrt{n}-1}{4}$. I tak, na przykład, w wymiarze $n = 9$ kula będzie jednocześnie kulą wpisaną w kostkę i styczną do 512 narożnych kul (!), a w wymiarach od 10 wzwyż taka kula będzie „wystawała” poza kostkę (wszystkie rogi kostki są zawsze na zewnątrz kuli)! Ponadto, jej promień może być dowolnie duży (wystarczy dobrać odpowiednie n), ale jest jednocześnie od góry ograniczona przez połowę długości przekątnej kostki $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Tym samym powierzchnia takiej kuli nigdy nie „wyjdzie” całkowicie poza kostkę! A w takim razie to ta część „wystająca” poza kostkę ma objętość rosnącą do $+\infty$. Czy ktoś potrafi to sobie wyobrazić?

Anomalia dla bardziej zaawansowanych

6. Na koniec rzecz niezwykła. Gdy spojrzymy na pole koła i potraktujemy to wyrażenie jako funkcję zmiennej R , to

$$\frac{d}{dR} (\pi R^2) = 2\pi R,$$

a więc pochodną pola koła jest obwód okręgu (długość brzegu koła). Podobne zjawisko ma miejsce dla objętości kuli i pola sfery (pola brzegu kuli)

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi R^2.$$

Czy to przypadek, czy reguła? Otóż jest to zależność prawdziwa w dowolnym wymiarze! Liczby V_n oraz S_n łączą następujący związek

$$\frac{d}{dR} V_{n+1}(R) = S_n(R).$$

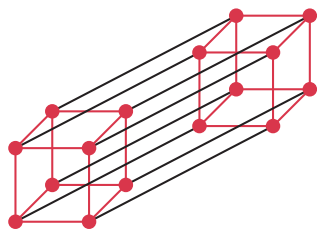
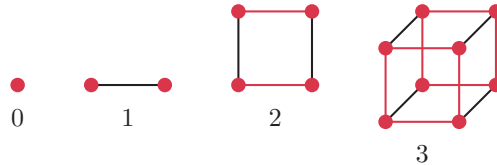
Nie jesteśmy w stanie wyobrazić sobie większości (lub wszystkich) z powyższych punktów. Intuicja wielowymiarowa całkowicie nas zawodzi i nie jest możliwe racjonalne przekonanie kogoś, że kula opisana w punkcie 5. może „wystawać” poza sześcian. Przeczy to całkowicie zdrowemu rozsądkowi, ale... Pamiętajmy, że w matematyce nie wszystko jest intuicyjne i zgodne z oczekiwaniami. Powyższe przykłady pokazują, jak ostrożnym należy być. Czytelników wiernych zasadzie „nie uwierzę, póki nie zobaczę” prosimy o wybaczenie. I o więcej ufności w rozumowania czysto analityczne.



mała delta

Czwarty wymiar – zobaczmy

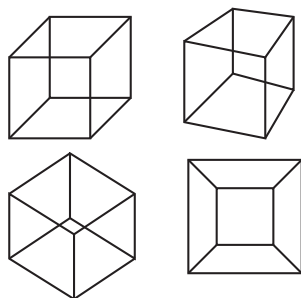
Spójrzmy na poniższe obrazki i nie zastanawiając się, co właściwie przedstawiają, spróbujmy zgadnąć, jak powinien wyglądać kolejny.



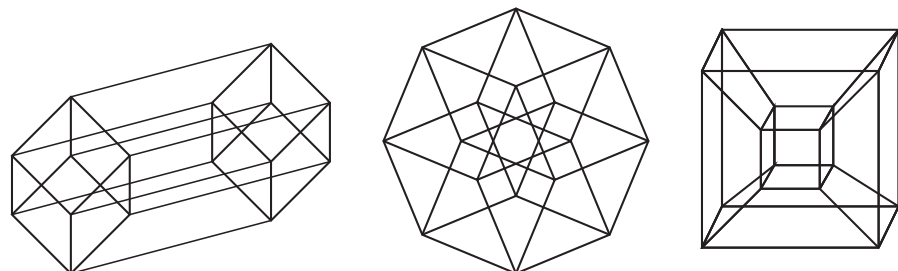
Obrazek 1 to dwa obrazki 0 połączone krawędzią. Obrazek 2 to dwie kopie 1 odpowiednio połączone krawędziami. Obrazek 3 to dwie kopie 2 również z dodanymi krawędziami. Czyli obrazek 4 powinien wyglądać tak jak obok. A teraz zastanówmy się, co to właściwie jest: 0 to zerowymiarowa kostka (punkt, nie ma wysokości, szerokości, żadnego wymiaru), 1 to jednowymiarowa kostka (odcinek – ma długość), 2 to dwuwymiarowa kostka (kwadrat – szerokość i wysokość), 3 to trójwymiarowa kostka (sześcian). Rysunek z lewej strony to kostka czterowymiarowa – *tesseract*.

Co można powiedzieć o liczbie wierzchołków tesseractu? Na rysunkach widzimy najpierw 1, potem 2, 4, 8, ... To sugeruje, że na kolejnym powinno być 16 wierzchołków (uff... zgadza się). Ile krawędzi powinno spotkać się w jednym wierzchołku? 0 w kostce 0-wymiarowej, 1 w kostce 1-wymiarowej, 2 w kostce 2-wymiarowej, 3 w kostce 3-wymiarowej... W tesseractie są 4 krawędzie w każdym wierzchołku (też się zgadza). A ile kostek 3-wymiarowych powinniśmy znaleźć w kostce 4-wymiarowej? Kostka jednowymiarowa ma na końcach dwie kostki zerowymiarowe, brzeg kwadratu składa się z czterech kostek jednowymiarowych (odcinków), sześcian ma sześć kwadratowych ścian (2-wymiarowe kostki) – 2, 4, 6, ... Czyżby w czterowymiarowej kostce miało być 8 sześcianów? Fakt, że tam są, spróbujemy pokazać w dalszej części.

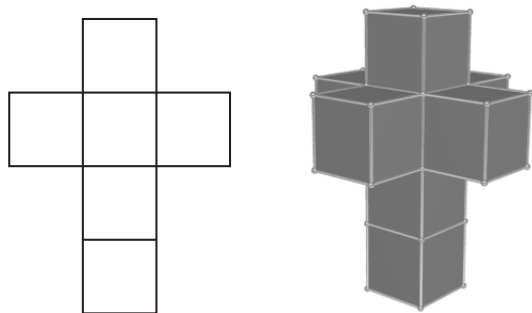
Widok z różnych stron. Spójrzmy na trójwymiarowe kostki znajdujące się obok, o których, oczywiście, wiemy, że ich ściany są kwadratowe. Czy nie traktujemy tych rysunków zbyt pobłaźliwie? Przecież wcale nie widzimy sześciu, rzekomo kwadratowych ścian! Mimo najszczerzych chęci nie ma możliwości przedstawienia kostki trójwymiarowej w dwóch wymiarach bez zniekształceń. Z wymagania, żeby krawędzie ścian miały takie same długości, ograniczyliśmy się jedynie do tego, żeby każda ze ścian miała tych krawędzi 4. Kątów prostych również się już nie spodziewamy. Nic więc dziwnego, że przedstawienie czterowymiarowej kostki w dwóch wymiarach też nastęrcza problemów!



Skoro na rysunku sześcianu wcale nie było sześciu „prostych” kwadratów, to w tesseractie poszukajmy 8 „krzywych” sześcianów. Tak samo jak kostkę trójwymiarową można przedstawić z różnej perspektywy, tak samo 4-wymiarową. Być może w którejś z nich 8 sześcianów będzie łatwiejszych do zauważenia.

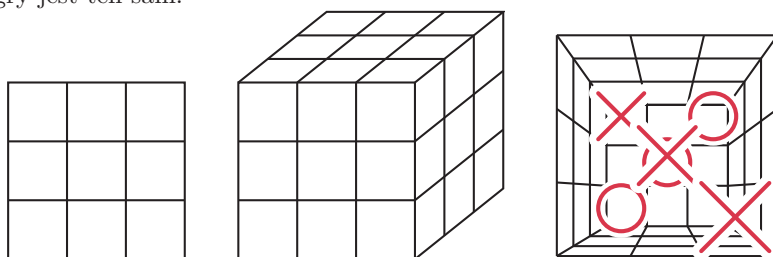


Na rysunku z prawej strony: duży sześcian jest na zewnątrz, mały w środku, a brakujących sześć jest dookoła niego.

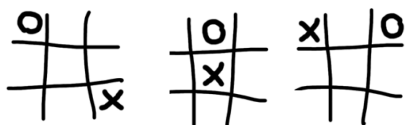


Siatka. Mimo że kostki trójwymiarowej nie przedstawimy wiernie w dwóch wymiarach, to możemy bez żadnych zniekształceń przedstawić jej siatkę! Obok jedna z jedenastu możliwych siatek sześcianu. Podobnie siatkę 4-wymiarowej kostki można przedstawić, bez żadnych zniekształceń, w trzech wymiarach. Oto ona (jedna z wielu siatek tesseractu)! Sklejać należy już nie krawędzie (kostki 1-wymiarowe), a kwadraty (kostki 2-wymiarowe). Na naszej stronie www.deltami.edu.pl znajduje się film przedstawiający takie sklejanie.

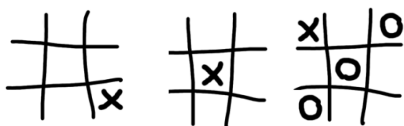
Czterowymiarowe kółko i krzyżyk. A teraz zajmiemy się grą, którą wszyscy dobrze znają: kółko i krzyżyk. O standardowej (czyli płaskiej) grze wszystko wiadomo: dzielimy kwadrat na 9 jednakowych kwadracików i w nich na przemian wstawiamy kółka i krzyżyki. Ten, kto ustawi trzy w jednej linii, wygrywa. W trzech wymiarach postępujemy podobnie: dzielimy sześcian na 27 jednakowych sześcianików i w nich umieszczamy na przemian kółka i krzyżyki a cel gry jest ten sam.



Obrazek z prawej strony przedstawia trójwymiarową rozgrywkę. Zauważmy, że rozmieszczenie kółek i krzyżyków w sześcianikach możemy zanotować, rysując sytuację na każdym poziomie. Patrząc z dołu, widzimy kolejno



patrząc z przodu, widzimy

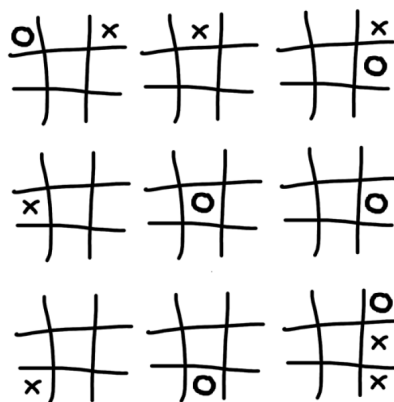


patrząc z prawej, widzimy zaś



Czytelnik Spostrzegawczy zauważy, że z jednego z tych rysunków da się odtworzyć pozostałe. A Czytelnik Marudny, że w naszym przykładzie obaj gracze wygrali, co jest przecież niemożliwe. Ale z tego wynika, jak grać w czterech wymiarach. „Po prostu” dzielimy tesseract na 81 jednakowych tesseractyków, gdzie na każdym poziomie sytuacja jest trójwymiarowa. Przed chwilą ustaliliśmy, jak to zanotować za pomocą trzech sytuacji dwuwymiarowych. A poziomów są trzy. Możemy więc do gry kółko i krzyżyk użyć $3 \cdot 3 = 9$ plansz dwuwymiarowych. Wszystko jasne?

Wobec tego zadanie: na planszy poniżej kółka mogą wygrać w kolejnym ruchu. Spróbuj znaleźć ten wygrywający ruch (jest więcej niż jeden).



Gdyby jednak wątpliwe było, jak taką planszę rozumieć: każdy wiersz i każda kolumna to trójwymiarowa gra – jest ich 6. Dodatkowo plansze ustawione po skosie to również gry trójwymiarowe. W takim razie mamy 8 trójwymiarowych plansz. W każdym ruchu należy wziąć pod uwagę, czy powstała jakaś wygrywająca linia na którejś z tych 8 plansz trójwymiarowych.

Po paru rozgrywkach Czytelnik pewnie sam się zorientuje, że tak przedstawiona czterowymiarowa gra nie ma większego sensu – to znaczy zakładając racjonalność graczy, pierwszy zawsze wygra. Można jednak nieco zmodyfikować planszę, żeby wyrównać szanse graczy. Wystarczy zamiast planszy 3×3 rozważyć 4×4 i wziąć 16 takich plansz (4 wiersze z 4 planszami). Udanej gry!

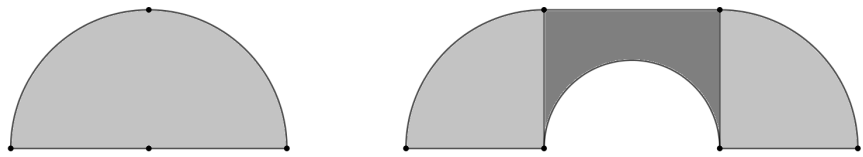
Kamila ŁYCZEK

Problem przesunięcia sofy

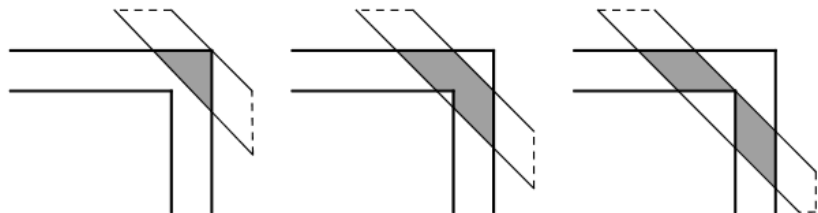
*Bartłomiej PAWLIK**

Jakie jest maksymalne pole sofy, którą można przesunąć przez korytarz w kształcie litery L o jednostkowej szerokości? – taki problem sformułował ponad 50 lat temu austriacko-kanadyjski matematyk Leo Moser.

Sytuację analizujemy z lotu ptaka, czyli szukamy pola powierzchni figury płaskiej. Pierwszym nasuwającym się rozwiązaniem jest sofa w kształcie półkola o promieniu 1 ($\pi/2 \approx 1,570796$). W 1968 roku John Hammersley przedstawił rozwiązanie dużo lepsze. Pomysł polegał na wydłużeniu półkola o prostokąt o wymiarach $1 \times 4/\pi$ z wyciętym mniejszym półkolem o promieniu $2/\pi$ (rysunek poniżej z prawej). Tym samym otrzymał rozwiązanie $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx 2,207416$.



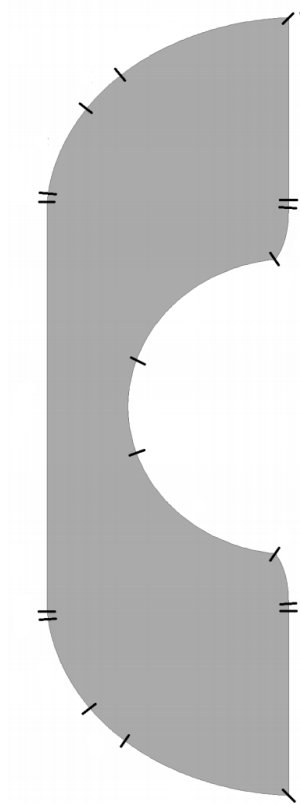
Dodatkowo prostym argumentem uzasadnił, że szukane pole nie może być większe niż $2\sqrt{2} \approx 2,828427$. Jeden z wymiarów sofy musi mieć, oczywiście, szerokość co najwyżej korytarza (jednostkową). Określając, jakie jest największe pole przecięcia pasa o szerokości 1 z korytarzem, gdy pas jest nachylony do korytarza pod kątem 45° (odpowiada to sytuacji, w której sofa znajduje się w „połowie zakrętu”), znajdziemy górne ograniczenie. Największe możliwe przecięcie znajduje się na ostatnim rysunku z prawej i wynosi właśnie $2\sqrt{2}$.



W 1992 roku Joseph Gerver skonstruował sofę o polu $\approx 2,219532$ i postawił hipotezę, że jest to najlepsze możliwe rozwiązanie. Kontur sofy Hammersleya składa się z trzech odcinków i trzech łuków okręgów, natomiast kontur sofy Gervera – z trzech odcinków i piętnastu łuków. 12 lat później Phillip Gibbs rozwiązał dyskretną wersję problemu – zakładał, że kontur sofy ma być zamkniętą łamaną i wykonał kolejne komputerowe iteracje – i otrzymał pole zgodne z rezultatem Gervera do szóstego miejsca po przecinku.

Najnowszy wynik, z 2017 roku, to poprawienie ograniczenia górnego do $2,37$. Autorami są Yoav Kallus i Dan Romia i jest to pierwszy rezultat dotyczący ograniczenia górnego od czasów wyniku Hammersleya. Autorzy za pomocą metod numerycznych opracowali algorytm, który dał powyższe oszacowanie po trzech tygodniach pracy komputera (w swoim artykule zaznaczają, że dużo słabsze oszacowanie 2,7 można uzyskać w czasie mniejszym niż jedna minuta).

Pytanie, czy pole sofy Gervera jest rzeczywiście największe z możliwych, wciąż pozostaje otwarte.



sofa Gervera

Było lato 2018

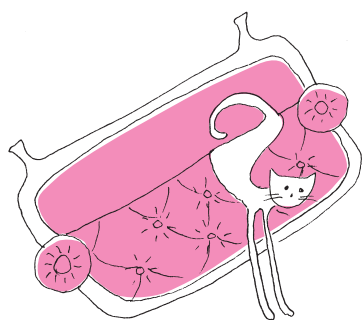
Sytuacja jak co roku, typowa: czytać to będziecie jesienią, pisać w lecie. Będzie więc trochę o nauce, ale i trochę o zabawach i rozrywkach. Główna „zabawa” tegorocznego lata to mundial. Nawet wyniki polskiej drużyny, nadmuchanej przy wyjeździe, przykro skopanej po powrocie, nie zmniejszyły popularności przekazów radiowych i telewizyjnych. Ja też – na co dzień obojętna dla piłki kopanej – oglądałam. Moją uwagę skupiły dwa nazwiska: Guillermo Ochoa, bramkarz drużyny meksykańskiej, i Luka Modrić, kapitan Chorwatów. Znam te nazwiska. Severo Ochoa, Hiszpan z urodzenia, obywatel amerykański, był w roku 1959 laureatem Nagrody Nobla. Otrzymał ją wraz z Arturem Kornbergiem za prace w zakresie wyjaśnienia mechanizmów syntezy kwasów nukleinowych, RNA i DNA. Jedna z pierwszych z długiego ciągu Nagród Nobla przyznawanych w drugiej połowie XX wieku w zakresie badań molekularnych podstaw procesów dziedziczenia. Severo Ochoa zapisał się w mojej pamięci anegdotą opowiadaną przez kolegę z pracowni, Włodka Szera, o zdarzeniach mających miejsce w czasie Światowego Kongresu Biochemii w Moskwie w 1962 roku. Ochoa wysłuchał komunikatu swojego amerykańskiego kolegi, Matthaei, o badaniach systemu namnażania pewnego małego wirusa. Zrozumiawszy, do czego mogą doprowadzić te badania, wstał i udał się do telefonu. Może nie od razu kojarzymy, że nie było wówczas ani Internetu, ani Googla, ani telefonów komórkowych, a sytuacja rozgrywała się w Moskwie, stolicy dość szczelnie zamkniętego na cudzoziemców kraju. Podobno Ochoa rozmawiał ponad godzinę ze swoimi współpracownikami w Nowym Jorku (historia milczy o wysokości rachunku), sugerując przerwanie własnych badań i podjęcie doświadczeń przybliżających zrozumienie reguł kodu genetycznego. Finał anegdoty odbył się w 1966 roku na Kongresie Europejskich Towarzystw Biochemicznych, na którym Har G. Khorana ten kod całemu światu ogłosił (Nagroda Nobla dla Khorana, Nirenberga, Matthaei i Holleya, 1968).

Modrića, o imieniu Paul, poznałam w czasie stypendialnego pobytu w Zakładzie Biochemii Uniwersytetu Stanforda. On wtedy też był stypendystą, w grupie (też noblisty) Artura Kornberga. Modrića pamiętam jako szczupłego, niewysokiego i bardzo chętnie udzielającego zawodowych rad młodzieńca. Może tak wyglądają Chorwaci o nazwisku Modrić? Tę hipotezę obalają zdjęcia, które pojawiły się w mediach w 2016 roku, po ogłoszeniu laureatów Nagród Nobla. Paul Modrić trochę utył i posiwał od lat 70. ubiegłego wieku. Nagrodę razem z Tomaszem Lindahlem i Azizem Sancarzem dostał za bardzo istotne badania o sposobach, którymi komórki (wszystkich organizmów, od bakterii do człowieka) naprawiają uszkodzenia DNA powstałe w wyniku działania różnorodnych czynników środowiska o naturze chemicznej i fizycznej. Gdyby komórki, wykorzystując kilkanaście układów enzymatycznych, takich uszkodzeń nie naprawiały, życie w obecnej formie nie byłoby możliwe.

Tak to dwóch sławnych piłkarzy nosi nazwiska bardzo sławnych uczonych. Jak sądzę, zbieżność nazwisk przypadkowa, wywołała jedynie skojarzenia w mojej pamięci.

Powracający z festiwalu muzycznego „Open'er” w Gdyni musieli czekać na jeden z pociągów 75 minut. Na stacji tłumaczono, że pociąg się spóźni 15, 30, 45, 60 minut, bez podania powodu. Jechałam tym pociągiem z Letnich Spotkań z Nauką „w lesie” nad Wdzydzami. W tym samym pociągu spotkali się zatem uczestnicy różnych imprez – zabawowej i naukowej. Pociąg spóźnił się 75 minut. Nie działał bufet z daniami gorącymi. Obsługa niechętnie wspominała o awarii prądu. Nie sprawdzano biletów. W domu zaczęłam czytać od dawna leżący w stercie książek „do czytania” naukowy esej historyka i dziennikarza Adama Leszczyńskiego „No dno po prostu jest Polska”. To bardzo interesujące, również przygnębiające zestawienie opinii, biegnące przez kilka wieków, które sami Polacy, także wielcy pisarze i politycy, wygłaszali o współziomkach. Wszystkie okrzyki i narzekania, którymi brzmiał pociąg z Gdyni, można by i w tej książce zacytować. Żeby zachować trochę wrodzonego optymizmu, myślę, że trzeba wychowywać wiele pokoleń w umiejętności obiektywnego spojrzenia na swój kraj i jego obywateli, żeby nie wygłaszali z każdego możliwego powodu zdań „no dno, to właśnie jest Polska”.

Magdalena FIKUS



Twierdzenia Fermata różnej wielkości

Mariusz SKAŁBA*

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LVI Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyzacja*, Wola Ducha, sierpień 2017.

Redakcja

Nie jest to całkiem pewne, a na pewno nie jest do końca udokumentowane.

Pierre de Fermat był Francuzem i żył w pierwszej połowie XVII wieku (1601–1665). Jako radca prawny praktykował w sądzie w Tuluzie na południu Francji. Naukami ścisłymi, a w szczególności matematyką, interesował się jako amator, ale wniósł potężny wkład do ich rozwoju. Szczególnie spektakularne są jego osiągnięcia w teorii liczb i o nich traktuje niniejszy artykuł. Wszyscy wiedzą, że jest **Wielkie Twierdzenie Fermata** (WTwF), **Małe Twierdzenie Fermata** (MTwF) i jeszcze inne twierdzenia Fermata dotyczące teorii liczb – ale które z nich jest największe?

Liczy fascynowały *człowieka* na długo przed Fermatem, a właściwie to już od *jego* zejścia z drzewa. Z tego długiego okresu uwzględnimy tylko Diofantosa, tworzącego (a zatem żyjącego) w starożytnej Grecji, gdyż jest on jednym z bohaterów opowiadanej historii. Najważniejszymi aktorami są jednak tytułowe twierdzenia. Oto one.

Małe Twierdzenie Fermata. *Jeśli n jest liczbą pierwszą oraz a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez n , to*

$$(1) \quad a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

W obecnej erze komputerów małe twierdzenie Fermata bywa stosowane do sprawdzania, czy dana (duża) liczba naturalna n jest pierwsza. Zilustrujemy to na przykładzie. Niech

$$n = 2^{64} + 3 = 18446744073709551619.$$

Jak sprawdzić, czy liczba n jest pierwsza? Można, oczywiście, dzielić ją przez kolejne liczby naturalne d i czekać na przypadek, że dzielenie da się wykonać bez reszty. Wtedy $n = d \cdot n/d$ i liczba n jest, oczywiście, złożona. Wystarczy używać $d \leq \sqrt{n}$. W naszym przypadku $\sqrt{n} > 4 \cdot 10^9$, a zatem grozi nam wiele dzieleni z resztą, chyba że n ma mały dzielnik $d > 1$. Obok przedstawiono istotny fragment tabeli, w której przedstawiono reszty liczb 2^{2^k} przy dzieleniu przez n dla $k = 1, 2, 3, \dots, 62, 63, 64$.

k	$2^{2^k} \pmod{n}$
1	4
2	16
3	256
...	...
62	4533606947906510852
63	14661455517267343339
64	12163041602066973456

Mamy zatem

$$2^{n-1} = 2^{2^{64}} \cdot 2^2 \equiv 4 \cdot 12163041602066973456 \equiv 11758678260848790586 \not\equiv 1 \pmod{n}$$

i to na mocy małego twierdzenia Fermata kończy dowód, że n nie jest liczbą pierwszą. Proszę zauważyć, że przeprowadzone rachunki nie dają żadnego nietrywialnego dzielnika d liczby n . Używając innych metod, można pokazać, że

$$n = 467443687 \cdot 39463029637$$

jest rozkładem n na czynniki pierwsze. Niestety, są liczby złożone n , które bardzo sprytnie podszywają się pod liczby pierwsze – to tak zwane liczby Carmichaela. Liczbę złożoną n nazywamy liczbą Carmichaela, gdy dla każdej liczby całkowitej a względnie pierwszej z n zachodzi kongruencja (1). Najmniejszą taką liczbą jest $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ i wiadomo, że jest ich nieskończenie wiele.

O MTwF można by mówić w nieskończoność – należy więc przejść do omówienia Wielkiego Twierdzenia Fermata. Na marginesie czytanej książki Diofantosa Fermat zanotował zdanie równoważne następującemu

Wielkie Twierdzenie Fermata. *Jeśli liczby całkowite dodatnie x, y, z, n spełniają warunek $n > 2$, to na pewno*

$$x^n + y^n \neq z^n.$$

Nieudane próby udowodnienia (lub obalenia) tej hipotezy były podejmowane do 1993 roku, kiedy to wreszcie pełny dowód podał Andrew Wiles z Cambridge. Wielokrotnie i wyczerpująco opisywano, jak te wysiłki przyczyniły się do rozwoju współczesnej matematyki, przynajmniej w jej części algebraicznej i geometrycznej. My ograniczymy się do zaprezentowania jednego podejścia, które dość szybko okazuje się zupełnie nieskuteczne, ale co zaskakujące, również ono wpłynęło na rozwój matematyki! Oprócz równania rozważymy także kongruencję

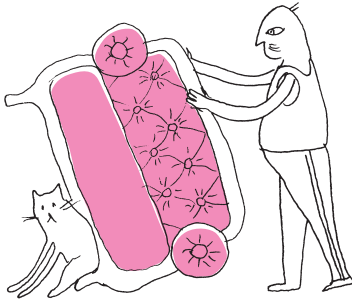
$$(2) \quad x^n + y^n \equiv z^n \pmod{q}.$$

Wówczas WTwF dla wykładnika $n \geq 3$ wynika łatwo z następującego lematu.

Lemat. *Jeśli $n \geq 3$, to dla nieskończenie wielu liczb pierwszych q wszystkie rozwiązania kongruencji (2) spełniają $xyz \equiv 0 \pmod{q}$.*

Dzieło Diofantosa istnieje ponad wszelką wątpliwość.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rzeczywiście, rozważmy hipotetyczne rozwiązanie równania $x^n + y^n = z^n$ w liczbach całkowitych dodatnich i liczbę pierwszą $q > \max(x, y, z)$. Wówczas kongruencja (2) ma, oczywiście, rozwiązanie, w którym żadna z liczb x, y, z nie jest podzielna przez q – ta konstatacja jest jednak sprzeczna z tezą Lematu.

Niestety, taki atak na WTWF nie może się udać! Pokażemy teraz na dwa sposoby, że powyższy Lemat nie jest prawdziwy.

Pierwszy sposób oparty jest na słynnym twierdzeniu Schura.

Twierdzenie Schura. *Założmy, że liczby $1, 2, \dots, \lfloor n! \cdot e \rfloor$ podzielono na n (rozłącznych) klas. Wówczas przynajmniej jedna z tych klas zawiera dwie liczby c, b oraz ich różnicę $c - b$.*

Stosując twierdzenie Schura, wykażemy przykładowo, że Lemat nie jest prawdziwy dla $n = 7$ (dla dowolnego n rozumowanie jest analogiczne). Rozróżnimy dwa przypadki:

1. $q \not\equiv 1 \pmod{7}$. Wówczas funkcja $\varphi : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q$ dana wzorem $\varphi(t) = t^7 \pmod{q}$ jest różnowartościowa (a więc i „na”). Istotnie, założmy przeciwnie, że dla pewnych $x \neq y$ mamy $x^7 \equiv y^7 \pmod{q}$, czyli $(x \cdot y^{-1})^7 \equiv 1 \pmod{q}$. To jednak jest niemożliwe, bo $x \cdot y^{-1} \neq 1$, a 7 nie dzieli $q - 1$. Oznacza to, że każda reszta modulo q jest siódmą potęgą, a zatem kongruencja (2) ma mnóstwo nietrywialnych rozwiązań. Oznacza to, że każda reszta mod q jest siódmą potęgą, a zatem kongruencja (2) ma mnóstwo nietrywialnych rozwiązań.
2. $q \equiv 1 \pmod{7}$. Tutaj założmy, że $q > 7! \cdot e \approx 13700, 1$. Liczby $c, b \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$ zaliczamy do tej samej klasy, gdy (z definicji) kongruencja $c \equiv bs^7 \pmod{q}$ ma rozwiązanie. Jest 7 klas (abstrakcji) i na mocy twierdzenia Schura $bs^7 - b \equiv bt^7 \pmod{q}$ dla pewnych b, s, t . Mamy więc $t^7 + 1^7 \equiv s^7 \pmod{q}$ i, oczywiście, $q \nmid t \cdot 1 \cdot s$.

A oto kolejny dowód na to, że rzekoma teza Lematu nie jest prawdziwa. Tym razem rozumowanie korzysta ze słynnego oszacowania na liczbę rozwiązań kongruencji. Ogólna wersja tego oszacowania dla dowolnych gładkich rozmaitości nad ciałem skończonym, znana w ramach hipotez Weila jako hipoteza Riemanna dla rozmaitości, opierała się wysiłkom matematyków przez wiele lat. W końcu udowodnił ją w całej okazałości Pierre Deligne w 1973 roku i zastosował w tym dowodzie cały arsenał nowoczesnej geometrii algebraicznej.

Twierdzenie (oszacowanie Hasse–Weila dla krzywej Fermata). *Dla każdej liczby pierwszej q niech $N(q)$ oznacza liczbę rozwiązań $\neq (0, 0, 0)$ kongruencji (2), przy czym dwa rozwiązania $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ utożsamiamy, gdy istnieje takie $t \in \mathbb{Z}$, że*

$$x_2 \equiv tx_1, \quad y_2 \equiv ty_1, \quad z_2 \equiv tz_1 \pmod{q}.$$

Wówczas mamy oszacowanie

$$|N(q) - q - 1| \leq (n - 1)(n - 2)\sqrt{q}.$$

Wynika stąd natychmiast, że dla ustalonego n i dla dostatecznie dużej liczby pierwszej $q \geq q(n)$ istnieją rozwiązania kongruencji (2) spełniające $xyz \not\equiv 0 \pmod{q}$.

Po dwakroć zatem porzućmy wszelkie nadzieje na to, że WTWF można udowodnić poprzez rozważanie kongruencji. Z drugiej strony zarówno twierdzenie Schura, jak i powyższy szczególny przypadek hipotez Weila dla krzywych nad ciałami skończonymi, wywarły duży wpływ na rozwój kombinatoryki i geometrii algebraicznej. Tak więc pomysły, które całkowicie zawodzą w potencjalnie słynnym zastosowaniu, okazują swoją użyteczność jako załączki nowych interesujących teorii.

I wreszcie, *last but not least*, omówimy twierdzenie Fermata bezprzymiotnikowe. Dotyczy ono przedstawialności liczb pierwszych w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Twierdzenie (Fermat). *Liczba pierwsza p jest postaci*

$$(3) \quad p = x^2 + y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{N},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$ lub $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Jedyna i istotna trudność w dowodzie tego twierdzenia to pokazanie, że każda liczba pierwsza p postaci $4k + 1$ jest postaci (3). Czasem dopowiada się, że przedstawienie (3) jest tylko jedno, ale to jest łatwe. Powyższe wspaniałe twierdzenie Fermata jest zaczynem algebraicznej teorii liczb, jednego z ważnych działów matematyki współczesnej głównego nurtu.

Otrzymał za to medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w 1978 roku.

Czy to sprawiedliwe, że na marginesie zepchnąłem informację o tym, że pierwszy dowód tego twierdzenia Fermata podał Euler po ponad stu latach? Po prostu tytuł zobowiązuje!



Mianowicie, twierdzenie to można sformułować tak:

- jeśli liczba pierwsza p jest postaci $4k + 3$, to p jest elementem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$,
- jeśli liczba pierwsza p nie jest postaci $4k + 3$, to jest elementem rozkładalnym w $\mathbb{Z}[i]$, tzn.

$$(4) \quad (a + bi)(c + di) = p, \quad \text{gdzie } a + bi, c + di \notin \{1, -1, i, -i\}.$$

Rzeczywiście, z (4) wynika, że

$$(a - bi)(c - di) = p,$$

skąd po pomnożeniu obu ostatnich wzorów stronami otrzymujemy

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = p^2.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc musi być

$$a^2 + b^2 = p = c^2 + d^2.$$

Odwrotnie, jeśli $p = a^2 + b^2$, to liczba p jest rozkładalna w $\mathbb{Z}[i]$, gdyż

$$p = (a + bi)(a - bi).$$

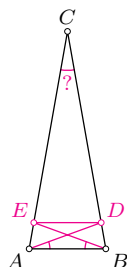
Prawa rozkładu liczb pierwszych w innych pierścieniach typu $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ wiążą się w subtelny sposób z próbami przeniesienia powyższego twierdzenia Fermata na przedstawienia typu

$$p = x^2 + dy^2.$$

Z powyżej napisanego nie wynika w żaden sposób, które z omówionych teoriolicznych twierdzeń Fermata jest *największe*. Wierzę jednak, że każde z nich potrafi zainfekować Czytelnika teorią liczb równie mocno, a o to tylko tu chodzi.



Zadania



Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1579. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC , przy czym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad AD + DE + EB = AC.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

Rozwiązanie na str. 6

M 1580. Niech x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 będą różnymi pierwiastkami wielomianu $x^5 + x^2 + 1$. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$(x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2).$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1581. Niech \mathbb{N}_0 oznacza zbiór nieujemnych liczb całkowitych.

(a) Czy istnieje $S \subset \mathbb{N}_0$ o tej własności, że każdy element zbioru \mathbb{N}_0 ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) elementów S ?

(b) Czy istnieje $S \subset \mathbb{N}_0$ o tej własności, że każdy element niepustego zbioru $\mathbb{N}_0 \setminus S$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) elementów S ?

Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Michał NAWROCKI

F 961. Znaleźć maksymalny potencjał ϕ , do jakiego może naładować się oddalona od innych ciał kulka miedziana oświetlona światłem o długości fali $\lambda = 0,14 \mu\text{m}$. Praca wyjścia dla miedzi wynosi $A = 4,47 \text{ eV}$.

Rozwiązanie na str. 2

F 962. Znajdujący się w próżni mały kawałek folii o masie $m = 1 \text{ mg}$ oświetlono impulsem światła laserowego o mocy $P = 15 \text{ W}$ i czasie trwania $t = 0,05 \text{ s}$. Światło pada na folię prostopadle do jej powierzchni i całkowicie się od niej odbija. Jaką prędkość uzyska folia w wyniku oświetlenia impulsem? Siłę ciężkości zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 3

Informatyczny kącik olimpijski (120): Piramidy

Tym razem omówimy zadanie z XII OIG.

Dana jest prostokątna plansza A o wymiarach $n \times m$. Wiersze zostały ponumerowane od 1 do n , zaś kolumny od 1 do m . Pole $(1, 1)$ znajduje się w lewym górnym rogu planszy. Niektóre pola mają przypisaną wartość 1, pozostałe wartość 0 ($A[x][y]$ oznacza wartość pola (x, y)). Zerowym kwadratem nazywamy kwadrat, który pokrywa tylko zera. Dla każdej liczby całkowitej r z przedziału $[1; \min(n, m)]$ należy policzyć, ile jest zerowych kwadratów o boku r .

Wstęp

Naszym zadaniem jest obliczenie wartości $w_1, w_2, \dots, w_{\min(n, m)}$, gdzie w_i oznacza liczbę zerowych kwadratów o boku i . Załóżmy przez chwilę, że dla każdego pola (x, y) mamy obliczoną wartość $D[x][y]$ – rozmiar największego zerowego kwadratu, którego prawym dolnym rogiem jest pole (x, y) . Zauważmy, że pole (x, y) jest również prawym dolnym rogiem zerowych kwadratów o boku: $1, 2, \dots, D[x][y]$. Rozważmy teraz ciąg $w'_1, w'_2, \dots, w'_{\min(n, m)}$, gdzie w'_i oznacza liczbę wystąpień wartości i w tablicy D .

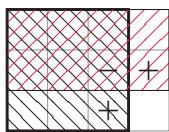
Wówczas $w_i = w'_i + w'_{i+1} + \dots + w'_{\min(n, m)}$.

Sumy prefiksowe

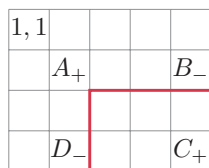
Niech $S[x][y]$ oznacza sumę wartości w prostokącie, którego lewe górne pole ma współrzędne $(1, 1)$, zaś prawe dolne (x, y) . Formalnie: $S[x][y] = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y A[i][j]$. Obliczenie tablicy sum prefiksowych można zrealizować w czasie liniowym względem rozmiaru prostokąta, korzystając z poniższych zależności:

- $S[1][1] = A[1][1]$;
- $S[x][1] = S[x-1][1] + A[x][1]$ dla $x > 1$;
- $S[1][y] = S[1][y-1] + A[1][y]$ dla $y > 1$;
- $S[x][y] = A[x][y] + S[x-1][y] + S[x][y-1] - S[x-1][y-1]$;

$S[x][y]$ jest sumą: wartości pola (x, y) , prostokąta bez ostatniego wiersza, prostokąta bez ostatniej kolumny, pomniejszoną o sumę prostokąta bez ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, który został dodany dwa razy.



Zastanówmy się teraz, jak za pomocą tablicy sum prefiksowych obliczyć sumę wartości w prostokącie w czasie stałym. Niech A, B, C, D będą prostokątami, których lewe górne pole ma współrzędne $(1, 1)$, zaś prawe dolne pole zostało wskazane na poniższym rysunku.



Założmy, że chcemy obliczyć sumę wartości w kolorowym prostokącie. Jest to $S(C) - S(B) - S(D) + S(A)$, gdzie $S(X)$ oznacza sumę wartości w prostokącie X .

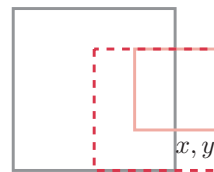
Rozwiązanie $O(nm \cdot \log(\min(n, m)))$

W tym podejściu wyznaczmy wartości tablicy D przy wykorzystaniu metody wyszukiwania binarnego po wyniku. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość $D[x][y]$ dla ustalonych x, y . Jeśli $A[x][y] = 1$, wtedy $D[x][y] = 0$. W przeciwnym przypadku $D[x][y]$ jest liczbą całkowitą z przedziału $[1; \min(x, y)]$. Tę wartość możemy wyszukać binarnie po wyniku, korzystając z faktu: *Jeśli (x, y) jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku r , to jest również prawym dolnym rogiem każdego mniejszego zerowego kwadratu.* Sprawdzenie, czy (x, y) jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku r , można wykonać za pomocą sum prefiksowych w czasie $O(1)$. Algorytm wyszukiwania binarnego wykona $O(\log(\min(n, m)))$ takich faz. Wszystkich pól jest nm , zatem wyznaczenie tablicy D działa w czasie $O(nm \cdot \log(\min(n, m)))$.

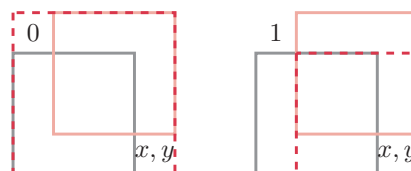
Rozwiązanie dynamiczne $O(nm)$

W tym podejściu wyznaczmy wartości tablicy D przy wykorzystaniu metody programowania dynamicznego. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość $D[x][y]$ dla ustalonych x, y . Jeśli $A[x][y] = 1$, wtedy $D[x][y] = 0$. W przeciwnym przypadku rozpatrujemy następujące możliwości.

- Jeśli $x = 1$ lub $y = 1$, wtedy $D[x][y] = 1$. Dla wszystkich pól w pierwszym wierszu oraz w pierwszej kolumnie największy kwadrat ma rozmiar 1.
- Jeśli $x, y > 1$ oraz $D[x-1][y] \neq D[x][y-1]$, wtedy $D[x][y] = 1 + \min(D[x-1][y], D[x][y-1])$.



- Jeśli $x, y > 1$ oraz $D[x-1][y] = D[x][y-1]$, wtedy $D[x][y] = k + l$, gdzie $k = D[x-1][y]$, zaś $l = 1$, jeśli $A[i-k][j-k] = 0$ i $l = 0$ w przeciwnym przypadku.

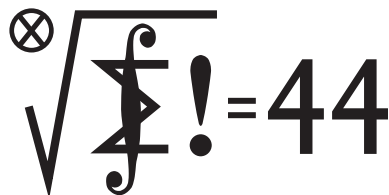


Obliczenie wartości $D[x][y]$ dla ustalonego (x, y) odbywa się w czasie $O(1)$. Plansza ma nm pól, zatem wyznaczenie tablicy D działa w czasie $O(nm)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2018

Zadania z matematyki nr 767, 768

Redaguje Marcin E. KUCZMA

767. Kwadrat o boku długości n , będącej liczbą naturalną, został podzielony prostymi poziomymi i pionowymi na n^2 kwadracików jednostkowych.

Powstała siatka, utworzona z $2n(n + 1)$ odcinków jednostkowych (boków tych kwadracików). Używając czterech barw, należy te odcinki pokolorować (każdy odcinek jednym kolorem) tak, żeby każdy kwadracik jednostkowy miał boki różnych kolorów oraz by każdy bok dużego kwadratu uzyskał jednolity kolor – ale każdy inny. Dla jakich liczb naturalnych $n \geq 1$ jest to wykonalne?

768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geq 1$, spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k = (1 + x)^m.$$

Zadanie 768 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2018

Przypominamy treść zadań:

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geq 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n , spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geq 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^n x_k$$

generuje ciąg x_1, x_2, x_3, \dots , którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

763. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Przypuśćmy, że dla ustalonej liczby $n \geq 1$ istnieją dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n , spełniające podane równanie. Oznaczmy ich współczynniki wiodące przez A_1, A_2 (więc $Q_i(x) = A_i x^n + \dots$); $A_1, A_2 \neq 0$. Przyrównując współczynniki wiodące po obu stronach równania $P(Q_i(x)) = Q_i(P(x))$, widzimy, że $aA_i^2 = A_i a^n$ (dla $i = 1, 2$). Zatem $A_1 = a^{n-1} = A_2$. Stąd wynika, że różnica $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ jest niezerowym wielomianem stopnia $m < n$.

Odejmujemy stronami równania $Q_i(P(x)) = P(Q_i(x))$ (dla $i = 1, 2$) i przekształcamy uzyskaną równość:

$$Q_1(P(x)) - Q_2(P(x)) = a(Q_1(x)^2 - Q_2(x)^2) + b(Q_1(x) - Q_2(x));$$

$$R(P(x)) = R(x) \cdot (aQ_1(x) + aQ_2(x) + b).$$

Poczyn po prawej stronie jest wielomianem stopnia $m + n$; wielomian po lewej stronie ma stopień $2m$. To już sprzeczność, skoro $m < n$; dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n o podanej własności istnieć nie mogą.

764. Liczby a, b , o jakie pyta zadanie, istnieją; można znaleźć wiele takich par. Przykład Autora (W. Bednarek): $a = 21$, $b = 4$. Wówczas $x_1 = 21$, $x_2 = 25$, i dalej (dla każdego n):

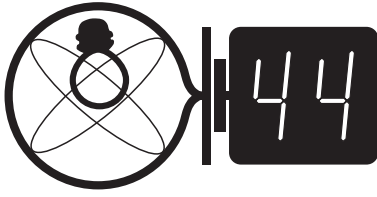
$$x_{n+1} = 4 + x_1 \cdot \dots \cdot x_n,$$

$$x_{n+2} = 4 + x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 4 + (x_{n+1} - 4)x_{n+1} = (x_{n+1} - 2)^2$$

– jest to liczba złożona (różnica w ostatnim nawiasie przekracza 1, bo ciąg jest rosnący).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
757 ($WT = 1,90$) i 758 ($WT = 3,40$)
z numeru 3/2018

Tomasz Choczewski	Szczecin	40,78
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,19
Janusz Olszewski	Warszawa	37,45
Michał Miodek	Warszawa	36,24
Piotr Kumor	Olsztyn	35,09
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,29
Paweł Kubit	Kraków	32,77

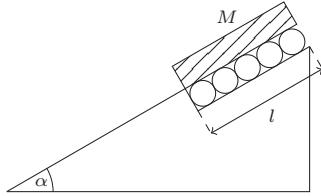


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2018

Zadania z fizyki nr 664, 665

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

664. Jednorodny klocek o masie M i długości l zaczyna poruszać się w dół po nachylonej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt α . Początkowy odcinek o długości l nachylonej płaszczyzny wypełniają blisko siebie położone rurki o masach m i promieniach $r \ll l$, które mogą obracać się bez tarcia (rys. 1). Znaleźć zależność przyspieszenia klocka od jego przesunięcia wzdłuż płaszczyzny. Klocek nie ślizga się po rurkach.

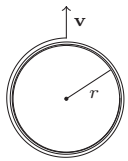


Rys. 1

665. Równomiernie naładowaną na powierzchni, cienką płytkę z dielektryka w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego, złożono na pół. Wykonana została przy tym praca W przeciw siłom pola elektrycznego. Jaka pracę trzeba wykonać, żeby ponownie złożyć na pół otrzymany trójkąt?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2018

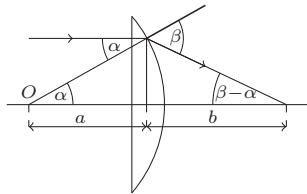
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

660. Soczewka płaskowypukła wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,6$. Promień powierzchni wypukłej wynosi $R = 10$ cm, grubość soczewki $d = 0,2$ cm. Na powierzchnię płaską soczewki pada równoległe do jej osi optycznej wiązka światła. Gdy odsłonięta jest tylko niewielka część soczewki wokół osi optycznej, promienie ogniskują się na ekranie. Znaleźć średnicę plamki na ekranie po odsłonięciu całej soczewki.

661. Podstawa walca przytwierdzona jest do gładkiej powierzchni poziomej. Nitkę przymocowano jednym końcem do powierzchni bocznej walca przy jego podstawie o promieniu r i owinięto wokół walca k razy (k jest liczbą całkowitą). Do swobodnego końca nitki przyczepiono kulkę i nadano jej prędkość v skierowaną wzdłuż promienia walca (rys. 2). Po jakim czasie cała nitka ponownie nawinie się na walec?



Rys. 3

660. Rozważmy promień równoległy do osi optycznej, który po przejściu przez soczewkę pada na powierzchnię sferyczną pod kątem α i załamuje się pod kątem β (rys. 3). Odległość środka krzywizny O od punktu przecięcia promienia załamanego z osią optyczną soczewki wynosi $l = a + b$, gdzie $a = R \cos \alpha$, $b = R \sin \alpha / \tan(\beta - \alpha)$, $\sin \beta = n \sin \alpha$. Podstawiając, otrzymujemy

$$(*) \quad l(\alpha) = \frac{R}{\cos \alpha - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2 \alpha}}$$

Funkcja $l(\alpha)$ maleje ze wzrostem kąta α . Gdy promień pada na koniec soczewki, kąt α jest maksymalny i spełnia równanie $\cos \alpha_{max} = 1 - d/R$. Dla podanych danych liczbowych maksymalny kąt α jest większy od kąta granicznego, zatem wszystkie promienie wiązki padające na soczewkę załamują się na jej powierzchni sferycznej (rys. 4). Skrajne promienie wiązki przecinają oś optyczną w odległości $\Delta l = l(0) - l(\alpha_{max})$ od ekranu. Zgodnie z (*),

$$l(0) = \frac{Rn}{n-1} = R + f,$$

gdzie $f = R/(n-1)$ jest ogniskową cieniwej soczewki płaskowypukłej. Szukana średnica plamki na ekranie dana jest wzorem

$$D_p = \frac{D_s \Delta l}{f + d - \Delta l} = 0,27 \text{ cm},$$

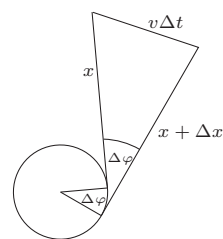
gdzie $D_s = 2\sqrt{d(2R-d)}$ jest średnicą soczewki.

661. Nitka działa na kulkę siłą prostopadłą do prędkości kulki, zatem wartość prędkości kulki podczas ruchu jest stała i wynosi v . Rozważmy krótki przedział czasu Δt podczas odwijania się nitki (rys. 5). Niech x oznacza długość odwiniętej części nitki w chwili t . Po czasie Δt nitka odwinie się o dodatkowe $\Delta x = r\Delta\varphi$, a kulka przebędzie drogę $v\Delta t$. Zachodzi związek

$$rv\Delta t = x\Delta x = \frac{\Delta(x^2)}{2}.$$

Dodając wszystkie przedziały czasowe, otrzymujemy czas odwijania się nitki z walca $t_1 = l^2/(2rv)$, gdzie $l = 2\pi rk$ jest długością nitki. Zanim nitka zacznie ponownie nawijać się na walec, kulka musi przebyć drogę πl w czasie $t_2 = \pi l/v$. Czas nawijania równy jest czasowi odwijania, szukany czas całkowity to

$$t = 2t_1 + t_2 = 2\pi^2 kr \frac{2k+1}{v}.$$



Rys. 5

Prosto z nieba: Niebiańskie diamenty

Układ Słoneczny składa się z ośmiu planet (nie licząc zdegradowanego Plutona) oraz wielu mniejszych ciał, asteroid i planetek. Czy to możliwe, że w przeszłości wokół Słońca krążyło więcej planet, które później zostały zniszczone podczas zderzeń lub łączenia się w większe obiekty?

Modele formowania się układów planetarnych wskazują, że skaliste planety typu ziemskiego powstają stopniowo podczas zderzeń dziesiątek „planetarnych zarodków” wielkości porównywalnej do Księżyca lub Marsa. Pozostałości takich dużych proto-planet byłyby nie lada gratką dla planetologów. Naturalną metodą badania historii Układu Słonecznego jest studiowanie składu chemicznego i krystalograficznego meteorytów. Jedną z ciekawszych, rzadkich grup meteorytów są *ureility*, nazwane od miejscowości Nowy Urej w Republice Mordowii (Federacja Rosyjska). Ureility to achondryty, to znaczy takie meteoryty, które nie zawierają chondrul: okrągłych skupień krystalicznych składających się z oliwinów i piroksenów. W porównaniu do większości innych meteorytów ureility mają zazwyczaj wysoki procent węgla (średnio 3% masy) w postaci grafitu i *nanodiamentów*.

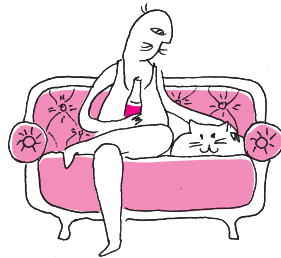
Chondrule powstały w przestrzeni kosmicznej w wysokich temperaturach, po czym zostały zaakreowane przez większe meteoryty. Achondryty nie zawierają chondrul, ponieważ ich materia została podgrzana i przetopiona, np. podczas zderzeń we wczesnych etapach powstawania Układu Słonecznego.

Niedawno szwajcarsko-francusko-niemieckiego zespół zbadał [1] meteoryt Almahata Sitta z Nahr an Nil na pustyni nubijskiej w Sudanie (nazwa meteorytu Almahata Sitta tłumaczy się na Stacja Szósta, od pobliskiej stacji kolejowej), używając mikroskopu elektronowego. Duże wytrącenia krystaliczne osadzone w nanodiamentach, a zwłaszcza ich skład i morfologię można wytłumaczyć, przyjmując, że podczas ich powstawania ciśnienie było wyższe niż 20 GPa. Takie ciśnienia sugerują, że macierzyste ciało, w którego wnętrzu powstawały ureility, było zarodkiem planetarnym wielkości Merkurego.

[1] *A large planetary body inferred from diamond inclusions in a ureilite meteorite*, F. Nabiei i in., *Nature Communications*, 9, 1327 (2018)

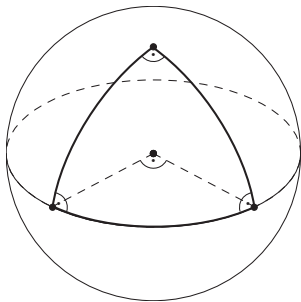
Naukowcy od dawna sądzili, że we wczesnym Układzie Słonecznym znajdowało się kiedyś o wiele więcej „planetarnych zarodków” (czyli gigantycznych kropeł płynnej magmy) niż obecnie obserwowanych planet. Według jednej z hipotez proto-planeta o nazwie Theia zderzyła się z młodą Ziemią, tworząc Księżyc.

Michał BEJGER



Niebo w październiku

Dziesiąty miesiąc roku oznacza, że mamy pełnię jesieni i dni są coraz krótsze. W trakcie miesiąca wysokość Słońca w południe zmniejszy się o ponad 11° , do 24° , a czas jego przebywania na nieboskłonie skróci się o kolejne 2 godziny, do poniżej 10 godzin. Słońce cały miesiąc spędzi w gwiazdozbiorze Panny, do którego weszło 16 września. Dopiero ostatniego dnia miesiąca, tuż przed zmierzchem naszego czasu, Słońce przejdzie do gwiazdozbioru Wagi. Jak łatwo obliczyć, w Pannie Słońce spędza ponad 40 dni i przez ten gwiazdozbiór Słońce wędruje najdłużej. Dzieje się tak, gdyż Panna jest drugim co do wielkości gwiazdozbiorem na niebie, wielkością ustępuje tylko sąsiedniej Hydrze, a ponadto Słońce przechodzi prawie przez jej środek.



Suma kątów każdego trójkąta wynosi 180° . To zdanie jest prawdziwe, gdy trójkąty rysujemy na płaszczyźnie. Jak widać – na sferze da się narysować trójkąt o trzech kątach prostych! Gdy zmieniamy założenia, nawet oczywiste fakty mogą przestać być prawdziwe!

Bezksiężycowe noce w październiku zdarzą się pod koniec pierwszej połowy miesiąca, gdyż Srebrny Glob zacznie miesiąc od ostatniej kwadry w Bliźniętach 2 października, 9 października przejdzie przez now w Pannie, 16 października nastąpi I kwadra w Strzelcu, 24 – pełnia w Wielorybie, zaś ostatniego dnia miesiąca – ponownie ostatnia kwadra, tym razem w Raku. W październiku nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokręgu jest niekorzystne, a do porannego – wręcz przeciwnie, zatem na początku miesiąca Srebrny Glob

da się obserwować prawie do samego nowiu. 8 października 45 minut przed świtem (około 6:10) Księżyc pokaże się w fazie zaledwie 1%, na wysokości około 5° nad wschodnim widnokregiem, niecałe 23 godziny przed nowiem! Warto wstać tego ranka wcześniej i zapolować na jego bardzo cienki sierp. Niestety, tego samego nie można powiedzieć o wieczornej widoczności Księżyca. Po nowiu Srebrny Glob początkowo zajdzie niewiele po Słońcu i na jego lepsze warunki obserwacyjne trzeba poczekać prawie do I kwadry. Sytuację ratuje fakt, że Księżyc z naszej perspektywy znajdzie się wtedy nad ekliptyką, stąd wyłoni się z zorzy wieczornej już 2 dni po nowiu, ale bardzo nisko nad horyzontem.

W październiku widoczne są bardzo dobrze przez całą noc tylko ostatnie dwie planety zewnętrzne. Neptun przeszedł przez opozycję we wrześniu, zaś Uran uczyni to 24 października. Obie planety przesuwały się po niebie ruchem wstecznym i są bliskie swoich maksymalnych jasności. Neptun w tym sezonie obserwacyjnym swoją pętlę po niebie kreśli między świecą blaskiem +4,2^m gwiazdą φ Aqr a o 0,5^m jaśniejszą gwiazdą λ Aqr. Prawie dokładnie w połowie drogi między nimi znajduje się trójkąt gwiazd 5. i 6. wielkości: 81, 82 i 83 Aqr. W tym miesiącu Neptun przetnie wewnątrz trójkąta, a 19 października minie w odległości 15' najbardziej na zachód wysuniętą jego gwiazdę 81 Aqr. Jasność Neptuna wynosi +7,8^m. Planeta Uran swoją pętlę kreśli w gwiazdozbiornie Barana, niedaleko granicy z Rybami. Do końca miesiąca planeta zbliży się do gwiazdy czwartej wielkości ρ Psc na 2,5°. Uran świeci blaskiem +5,7^m. Księżyc spotka się z Neptunem 20 października, mając fazę 85%. Zbliży się wtedy do niego na 3,5°. Spotkanie z Uranem czeka Księżyc 4 dni później, gdy świecąc pełnym blaskiem, zbliży się do planety na 5,5°.

Z pozostałych planet tylko Mars jest jeszcze w miarę daleko od Słońca, lecz jego blask i średnica tarczy od lipcowej opozycji wyraźnie zmały. Na szczęście kolejna opozycja, pod koniec października 2020 r., będzie niewiele gorsza od tegorocznej, a z punktu widzenia mieszkańców wysokich północnych szerokości geograficznych nawet lepsza, gdyż Mars znajdzie się jakieś 25° wyżej nad widnokregiem, a jasność i tarcza będą niewiele mniejsze, niż miało to miejsce w tym roku. W październiku Mars wędruje na północny wschód przez gwiazdozbiór Koziorożca. W trakcie miesiąca pokona w ten sposób 15°, zbliżając się na niewiele ponad 1° do Nashiry, oznaczanej na mapach nieba grecką literą γ . Jednocześnie blask Marsa osłabnie do -0,6^m, a jego tarcza zmniejszy średnicę do 12" i fazę do 86%. 18 października o zmierzchu Księżyc w fazie 68% znajdzie się 2° na północny wschód od Marsa.

Warunki obserwacyjne Jowisza są bardzo słabe, choć spotkanie ze Słońcem planeta ma zaplanowane dopiero pod koniec listopada. Tutaj kłania się małe nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu. Na początku miesiąca planeta godzinę po zmierzchu zajmuje pozycję na wysokości zaledwie 3° i jeszcze przed jego

końcem, o tej samej porze, znikną za widnokregiem. Zatem w październiku nie można liczyć na nic ponad identyfikację planety gołym okiem. W tym miesiącu blask Jowisza spadnie do -1,8^m, a średnica tarczy – do 32".

Lepiej widoczny jest Saturn, znajdujący się prawie 40° na wschód od Jowisza, na tle gwiazdozbioru Strzelca. Lepiej nie znaczy dobrze, gdyż planeta z pierścieniami na początku nocy astronomicznej znajduje się na wysokości zaledwie 10°. Saturn w trakcie miesiąca oddali się od pary mgławic M8-M20 na 4°, zmniejszając jednocześnie jasność do +0,6^m i tarczę do 16". W odległości 3° na południe od Saturna wędruje planetoida (4) Westa, która w ciągu miesiąca pokona ponad 11°, zmniejszając przy tym blask do +7,8^m. Westa przejdzie 20' na południe od gwiazdy Kaus Borealis 7 października, a 23 października – 40' na północ od Nunki. Księżyc spotka się z Saturnem w dniach 14–15 października. Pierwszego dnia w fazie 31% znajdzie się 5° na prawo od Saturna, dobę później (w fazie 40%) 7° na lewo od planety i jednocześnie 4° na północ od Westy.

Planeta Wenus 26 października przejdzie 6° na południe od Słońca i będzie niewidoczna, ale potem pojawi się na niebie porannym, gdzie ekliptyka jest wysoko i już od początku listopada rozświetli nieboskłon. Warto ją obserwować szczególnie na początku listopada, gdy będzie blisko Ziemi. Wtedy jej tarcza osiągnie rozmiar prawie 1' i fazę cienkiego sierpa, widocznego nawet w małych lornetkach. Natomiast Merkury 6 listopada osiągnie maksymalną elongację wschodnią, lecz niskie położenie ekliptyki sprawi, że planeta zginie w zorzy wieczornej.

W październiku promieniują trzy ciekawe roje meteorów. Pierwsze są Drakonidy, pojawiające się od 6 do 10 października, z maksimum 9 października. Są to wolne meteory, ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi 21 km/s, zaś radiant znajduje się tuż na zachód od charakterystycznego trapezu, tworzącego głowę Smoka. Około godziny 20 radiant wznosi się na wysokości ponad 60°. W tym roku, w związku z Księżycem w nowiu, warunki obserwacyjne Drakonidów są bardzo dobre. Dodatkowo miesiąc temu macierzysta kometa roju, 21P/Giacobini-Zinner, przeszła blisko Ziemi i jednocześnie przez peryhelium, stąd można liczyć na zwiększoną aktywność tego roju. Kolejnym rojem są Taurydy, promieniujące od 10 września do 19 listopada, z maksimum 10 października. Rój ten nie jest obfity, można spodziewać się zaledwie kilku meteorów na godzinę i tylko trochę szybszy od Drakonidów, ale za to obfituje w bolidy, czyli bardzo jasne meteory, rozjaśniające cały nieboskłon. Trzecim październikowym rojem są Orionidy, promieniujące od 2 października do 7 listopada z maksimum 21 października. Te meteory z kolei są bardzo szybkie, wpadają w atmosferę z prędkością 66 km/s. Niestety, tym razem ich obserwacje zakłóci Księżyc bliski pełni.

Ariel MAJCHER

Ciemna materia – coraz mniej jasności

Kosmologowie uważają, że około ćwierci gęstości energii wypełniającej wszechświat stanowi tzw. ciemna materia – substancja nieoddziałująca lub bardzo słabo oddziałująca ze znaną materią, a w szczególności zupełnie przezroczysta dla światła. Są liczne i ważne powody, by pogląd ten podzielać. Po pierwsze, gwiazdy na krańcach galaktyk poruszają się ze zbyt dużymi prędkościami, by mogły być utrzymane w galaktykach tylko dzięki przyciąganiu materii świecącej. Po drugie, analogiczny argument dotyczy galaktyk skupionych w gromady galaktyk. Po trzecie, jak każda materia, także i ta ciemna ma zdolność soczewkowania grawitacyjnego, tzn. uginania biegnących w jej pobliżu promieni świetlnych; jeśli efekt ten jest niewielki i prowadzi do delikatnego pojaśnienia obiektów astronomicznych, mówimy o mikrosoczewkowaniu grawitacyjnym. Obserwacje nieba pozwalają dziś na odtworzenie rozkładu ciemnej materii w galaktykach. Po czwarte, symulacje komputerowe tworzenia się galaktyk i gromad galaktyk z drobnych początkowo zgęszczeń materii wskazują na konieczność uwzględnienia w tym procesie także i ciemnej materii. Wreszcie, po piąte, obserwowane niejednorodności mikrofalowego promieniowania tła wskazują na istnienie źródła grawitacji o własnościach odpowiadających ciemnej materii.

Wymienione wyżej pięć argumentów uzasadnia istnienie ciemnej materii w sposób pośredni. Nikt jeszcze nigdy „nie złapał” jej w laboratorium, nawet nie w sensie zamknięcia w szczelnym naczyniu, ale przynajmniej „złapania na gorącym uczynku”, tzn. zaobserwowania procesu fizycznego, w którym uczestniczyłaby cząstka ciemnej materii. Dlatego w fizyce ciągle jest miejsce na alternatywne wyjaśnienia zjawisk pośrednio uzasadniających istnienie ciemnej materii.

Jedna z takich propozycji została sformułowana 35 lat temu przez Mordehaia Milgroma. Zakłada ona modyfikację ogólnej teorii względności w taki sposób, że dla bardzo małych przyspieszeń (rzędu od bilionowej do miliardowej części przyspieszenia ziemskiego), jakie wykazuje wiele obiektów astronomicznych, należy zmodyfikować teorię grawitacji, czyli ogólną teorię względności Einsteina. Dla większych przyspieszeń, adekwatnych do opisu dynamiki zjawisk zachodzących na Ziemi czy w Układzie Słonecznym, grawitacja miałaby zaś pozostać taka, jaką ją znamy. Propozycja Milgroma nosi nazwę zmodyfikowanej dynamiki Newtonowskiej i znana jest najbardziej pod swym angielskim akronimem MOND. W ciągu dekad, jakie upłynęły od oryginalnej publikacji, naukowcom udało się zbudować coraz lepsze teorie MOND, łącząc je w szczególności w zgrabny i naturalny sposób z ogólną teorią względności.

Należy jednak pamiętać, że fizyka jest nauką, której fundamentem są eksperymenty i obserwacje, decydujące o tym, jakie teorie można, przynajmniej tymczasowo, przyjąć jako właściwy opis świata, a jakie należy odrzucić. W szczególności można zadać pytanie, jak z ilościowym opisem danych dotyczących prędkości gwiazd

w galaktykach radzą sobie koncepcje ciemnej materii i MOND.

Stacy McGaugh ze współpracownikami wykorzystali w tym celu dane z przeglądu nieba z użyciem m.in. kosmicznego Teleskopu Spitzera, wśród których wyodrębnili obserwacje ponad setki galaktyk pozwalające na bardzo dokładne odtworzenie mapy prędkości oraz rozkładu materii. Badacze zauważyli, że rozkład ten dla znanej materii jest niezwykle podobny do rozmieszczenia ciemnej materii, co można wytłumaczyć na jeden z dwóch sposobów. Albo znana materia „wie”, gdzie znajduje się ciemna materia (ale przecież miały one praktycznie nie oddziaływać), albo należy zmodyfikować prawa fizyki w taki sposób, aby dla dostatecznie małych przyspieszeń znana materia zachowywała się w taki sposób jak MOND. McGaugh ze współpracownikami postanowili wyznaczyć skalę tego granicznego przyspieszenia. Co ciekawe, pomimo znacznej liczby analizowanych galaktyk wartość, jaką uzyskiwali dla każdej z nich, wydawała się w dużej mierze uniwersalna, na poziomie jednej stumiliardowej przyspieszenia ziemskiego. Wyniki te zostały opublikowane w prestiżowym czasopiśmie *Physical Review Letters*.

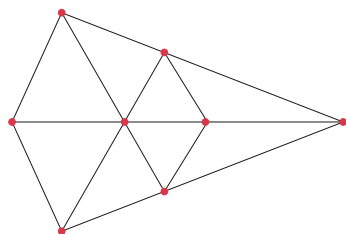
Te same dane wzięli na warsztat Davi Rodrigues i jego współpracownicy. Przeanalizowawszy je, doszli do wniosku, że nie ma żadnej uniwersalnej skali przyspieszenia wyznaczonej przez poprzedników. Pracę swoją opublikowali w czasopiśmie *Nature Astronomy*, co, przynajmniej w naszym kraju, wywołałoby zachwyt decydentów, ale w międzynarodowym środowisku astronomicznym nie jest uważane za olbrzymi sukces.

Jak to rozumieć? Kluczowa jest tu analiza niepewności obserwacyjnych i ich odpowiednie modelowanie. Opisujący zestaw danych został przygotowany (na podstawie wieloletnich pomiarów) przez McGaugha i współpracowników, którzy w związku z tym znali je na wylot i mieli podstawy do zakładania prawdopodobieństwa odstępstwa od wartości zmierzonej opisywanego rozkładem Gaussa. Tymczasem Rodrigues i współpracownicy zastosowali znacznie bardziej toporną analizę, zakładając równomierne prawdopodobieństwo odstępstwa od wartości zmierzonej niezależnie od wielkości odchylenia.

A morał? Wyniki Rodriguesa i kolegów plasowały się w głównym nurcie badań, faworyzującym koncepcję ciemnej materii. Choć miały dodatkowo wzmocnić tę koncepcję, wydaje się, że przede wszystkim zwróciły uwagę na alternatywne i mniej popularne koncepcje. A jak jest naprawdę? W tej chwili nie ma pewności. Autor niniejszego tekstu, który opublikował nieco prac o ciemnej materii, kibicuje tej ostatniej. Może jednak nowe pokolenie badaczy (to do Ciebie, Czytelniczko i Czytelniku!) wykaże, że nie ma racji...

- [1] S.S. McGaugh, F. Lelli, J.M. Schombert, The Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies, *Phys. Rev. Lett.* 117 (2016) 201101
- [2] D.C. Rodrigues, V. Marra, A. del Popolo, Z. Davari, Absence of fundamental acceleration scale in the galaxies, *Nature Astronomy* 2 (2018) 668

Krzysztof TURZYŃSKI

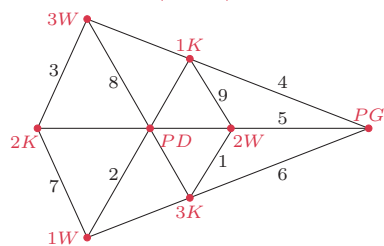


Rys. 1. Za pojedynczą drogę uważamy całą prostą, np. droga pozioma łączy cztery miasta.



Rys. 2. Warto wymyślić rozwiązanie, a następnie sprawdzić, używając monet.

2	7	6
9	5	1
4	3	8



Rys. 3. Numeracja pól planszy do gry w „kółko i krzyżyk” oraz odpowiadające im drogi w grze *Jam*. Nazwy miast 1K, 2W itd. oznaczają 1 kolumnę, 2 wiersz itd. planszy, PG to przekątna w prawo w górę, PD – w prawo w dół.

Dwie inne zakamuflowane gry w „kółko i krzyżyk” opisano w *deltoïdach* 7/2010 i 8/2012.

Na wiele problemów matematycznych warto spojrzeć z innej strony (lub z dwóch stron jednocześnie), przeanalizować dualną sytuację, dostrzec alternatywną wersję tego samego zagadnienia. . .

1. Planszą do gry w *Jam* jest mapa pewnego kraju, w którym jest 8 miast i 9 prostych dróg przez nie, jak na rysunku 1. Dwaj gracze na przemian malują, każdy swoim kolorem, po jednej całej drodze. Wygrywa ten, kto pierwszy pomaluje swoim kolorem wszystkie drogi przez któreś miasto. Jak grać, żeby wygrać?
2. Jak wygrać (lub zremisować) w szachy z arcymistrzem, nawet nie umiejąc grać?
3. Znajdź dowolną trójkę dodatnich liczb całkowitych x, y, z spełniających równanie $\frac{29x + 30y + 31z}{3} = 122$.
4. Czy istnieją takie liczby niewymierne a, b , dla których liczba a^b jest wymierna?
5. Przyklejamy do stołu monetę 1 zł i kładziemy nad nią, styczną do niej, drugą monetę 1 zł, z orłem ustawionym jak na rysunku 2. Następnie tę drugą monetę toczymy wokół przyklejonej. Jak ustawiony będzie orzeł, gdy toczona moneta znajdzie się na dole monety nieruchomej?
6. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększyć o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

Rozwiązania

R1. Tak samo, jak w „kółko i krzyżyk”. Miasta odpowiadają kolumnom, wierszom i przekątnym planszy, drogi zaś – jej dziewięciu polom (rys. 3). □

R2. Zagrajmy jednocześnie z dwoma arcymistrzami: A i B . Pierwszą partię niech zaczyna A , grając białymi. Po jego pierwszym ruchu przerwijmy na chwilę grę z nim i rozpocznijmy drugą partię, z B , dokładnie tym samym ruchem, który A wykonał w pierwszej grze. Gracz B jakoś na ten ruch odpowie czarnymi. Wtedy wróćmy do przerwanej rozgrywki z A i powtórzmy w niej ten właśnie ruch czarnymi. I tak dalej, ruchy białymi gracza A z pierwszej gry kopiujemy w grze drugiej, a ruchy B czarnymi z drugiej gry kopiujemy w grze pierwszej. W ten sposób dokładnie jedną z tych dwóch gier wygramy, czyli pokonamy arcymistrza szachowego (ewentualnie z obydwoma arcymistrzami zremisujemy – to też sukces!). □

R3. Równanie spełniają np. $x = 1, y = 4, z = 7$, bo w roku przestępnym jest jeden miesiąc 29-dniowy, cztery 30-dniowe i siedem 31-dniowych – łącznie 366 dni. □

R4. Tak, istnieją. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Jeśli jest ona wymierna, to żądana własność zachodzi dla liczb $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$.

W przeciwnym przypadku warunki zadania spełniają liczby niewymierne

$$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}, \text{ wtedy bowiem } a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2. \quad \square$$

Zainteresowanym ujawniamy, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna, a nawet przestępna.

R5. Monety są identyczne, zatem gdy ich punkt styczności pokona połowę obwodu monety przyklejonej i będzie na dole, to pokona również połowę obwodu monety toczonej i będzie przy głowie orła. Orzeł na dole będzie więc znów – tak jak na początku – ustawiony głową do góry. □

R6. Rozważmy prostokąt o wymiarach 4×5 . Jeśli jego szerokość 4 powiększyć o 50%, uzyskamy prostokąt o bokach 6×5 , a więc o szerokości 5, czyli o 25% większej niż początkowa. Jeśli zaś długość 5 wyjściowego prostokąta zmniejszyć o 50%, otrzymamy prostokąt rozmiaru $4 \times 2,5$, a więc o długości 4, czyli o 20% mniejszej niż pierwotna.

Z założeń zadania wynika, że szerokość rozważanego prostokąta powiększona o 25% równa jest jego pierwotnej długości. Stąd prostokąt ten ma proporcje $4 : 5$, zatem uzyskana powyżej odpowiedź 20% jest jedyną możliwą. □

Spotkanie Banacha i Nikodyma ze Steinhausem w Krakowie

W 1916 roku w Krakowie miało miejsce wydarzenie niezwykle ważne dla polskiej nauki i światowej matematyki. Przebywał tam wówczas dr Hugo Steinhaus, niespełna trzydziestoletni matematyk. Pewnego wieczora udał się na spacer wzdłuż Plant. Pisał potem we wspomnieniach:

...usłyszałem rozmowę, a raczej tylko kilka słów; wyrazy „całka Lebesgue'a” były tak nieoczekiwane, że zbliżyłem się do ławki i zapoznałem z dyskutantami: to Stefan Banach i Otto Nikodym rozmawiali o matematyce. Powiedzieli mi, że mają jeszcze trzeciego kompana, Wilkosza, którego bardzo chwalili.

Banach w tym czasie zajmował się matematyką amatorsko, Nikodym był nauczycielem gimnazjalnym. Wieczorami, zwykle w trójkę, spacerowali po Krakowie i rozmawiali o matematyce. Dziś całka Lebesgue'a jest podstawowym pojęciem wyższej matematyki, ale wtedy było to odkrycie ostatnich lat, znane wyłącznie specjalistom. Nic dziwnego, że zasłyszane słowa zaintrygowały Steinhaus. Włączył się do dyskusji i podczas rozmowy powiedział im o problemie, nad którym od dłuższego czasu pracował. Kilka dni później Banach przyszedł do niego i przedstawił rozwiązanie. Steinhaus dostrzegł wtedy niezwykle matematyczny talent Banacha. Mawiał potem, że jego największym odkryciem był Stefan Banach. Kariera naukowa Nikodyma rozwinęła się później; matematyczne wyniki ich obu są dziś sławne.

Dwa lata temu, sto lat po tym spotkaniu (14 X 2016 roku) postawiono na Plantach w Krakowie ławkę z figurami Banacha (z prawej) i Nikodyma, upamiętniającą owo wydarzenie. Ławkę wykonał słynny krakowski rzeźbiarz, profesor Politechniki Krakowskiej, Stefan Dousa, a ufundowała firma ASTOR (akronim Automatyka, Sterowanie, Transmisja, Oprogramowanie, Robotyka). Na ławce są też wygrawerowane symbole matematyczne. Pochodzą one ze wspólnej pracy Banacha i Steinhaus, opublikowanej w *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie* i zawierającej rozwiązanie problemu, o którym Steinhaus powiedział Banachowi podczas ich pierwszego spotkania.

KC

