



deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

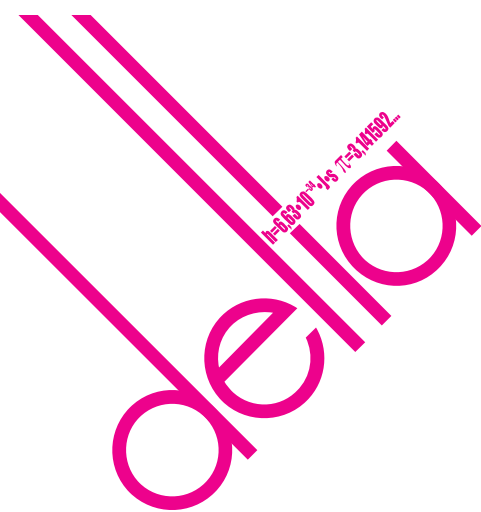
$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $J \cdot s$ $\pi=3,141592...$

NR 6 (541) 2019
CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl



Nakład: 3500 egz.

**GAZOWA
NADCIEKŁOŚĆ**
str. 1



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (541)


Gazowa nadciekłość
Krzysztof Pawłowski

 Zadania


A jednak się da (VII):
nie wiem, ale powiem
Łukasz Rajkowski

Kto ma rację?
Jarosław Górnicki

Dowody „just-do-it” w zadaniach
o przeliczalności
Robert Crumplin

 Nadchodzą...
Magdalena Fikus

Pół szklanki mocnego kodu. Alchemia
Piotr Krzyżanowski

 Nieskończoność: 4. Nie każda jest taka
sama!
Michał Korch

Salamandry buszują w JOWach
Andrzej Dąbrowski

Miara
Łukasz Rajkowski


Informatyczny kącik olimpijski (128):
Trzej znajomi

Klub 44

Prosto z nieba: nie świeci, a grzeje...

Niebo w czerwcu

Aktualności
Fizyczne potyczki

 Jak przechrzyć stereometrię
Bartłomiej Bzdega

10 kwietnia 2019 roku
zmarł

Krzysztof Rejmer
fizyk
redaktor i autor *Delty*

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej,
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący,
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks,
dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak,
dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga,
prof. dr hab. Andrzej Majhofer,
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur,
dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś,
prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,
prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak,
Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek,
Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł

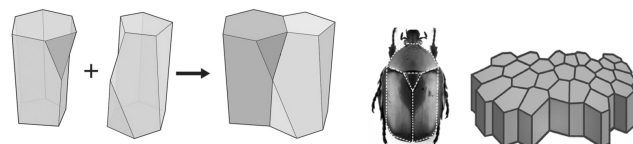


Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

W następnym numerze skutoid



str. 25

Gazowa nadciekłość

Krzysztof PAWŁOWSKI*

Bohaterowie filmu „Incepcja” potrafią wkraczać w swoje sny. Aby odróżnić sen od jawy, używają totemów – znanych tylko sobie przedmiotów, które we śnie zachowują się w nietypowy sposób. Główny bohater bawi się małą zabawką, bączkiem. W rzeczywistości taki bąk chwilę kręci się wokół swojej osi, ale po pewnym czasie na skutek tarcia zwalnia, ostatecznie przewraca się. Natomiast w snach głównego bohatera bąk kręci się bez przerwy, wskazując mu, że jest we śnie. Czy naprawdę układ bez tarcia jest nierealny?

Przytoczmy eksperyment myślowy Lwa Landaua, który prowadzi do warunku, jaki należy spełnić, aby działy się rzeczy tak niezwykłe, jak brak tarć i oporów. Załóżmy, że mamy pojemnik z płynem, do którego wrzucamy małą kulkę, masę punktową m , poruszającą się z prędkością v . Zastanawiamy się, czy kulka musi być spowalniana przez ciecz. Wiemy, że obiekty poruszające się w wodzie czy w powietrzu ze względu na lepkość hamują. Lepkość powietrza jest mała, jednak to ona powoduje, że skoczek spadochronowy bezpiecznie ląduje na ziemi. Nawet przed otwarciem spadochronu prędkość skoczka nie rośnie dowolnie, ale stabilizuje się na około 200 km/h, w wyniku równowagi między oporami powietrza a siłą grawitacji. Lepkość wody jest znaczna, o czym przekonujemy się, pływając w niej. Na czym właściwie polega to spowalnianie przez lepkość? Zasada zachowania pędu oznacza, że skoro ciało hamuje w płynie, to coś obok powinno przyspieszać. Tym czymś muszą być cząstki płynu. Za lepkością stoi więc mechanizm, w wyniku którego ciało poruszające się w płynie przekazuje jego cząstkom część pędu. Z kolei poruszające się masy niosą ze sobą energię – energię kinetyczną wynikającą z ich ruchu, być może również energię wynikającą z oddziaływań między cząstkami. Nie wchodząc w szczegóły, nazwijmy tę energię dostarczoną do płynu E_u , gdzie u niech będzie prędkością, o jaką zwolniła masa punktową. Tym samym początkowa energia kinetyczna masy to $mv^2/2$, a końcowa $m(v-u)^2/2$. Zasada zachowania energii ma postać:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v-u)^2}{2} + E_u.$$

Po przekształceniach dostajemy $vu = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{m}E_u$, co prowadzi do następującego warunku:

$$(1) \quad v \geq \frac{vu}{u} = \frac{1}{2u}u^2 + \frac{1}{mu}E_u.$$

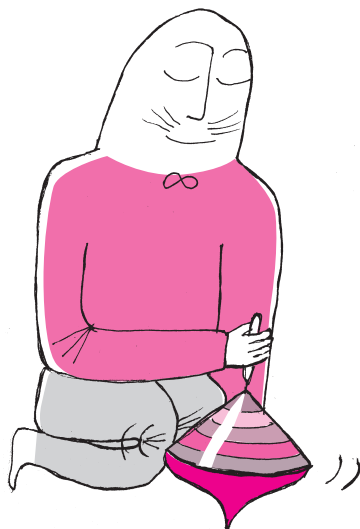
Naiwnie moglibyśmy oczekiwać, że iloraz $E_u/(mu)$ może być dowolnie mały. Jeśli np. wzbudzeniem jest cząstka albo grupa cząstek, poruszających się z prędkością u , wtedy ich energia kinetyczna wynosi: (masa cząstek) $\cdot u^2/2$, a iloraz $\frac{1}{mu}E_u$ pozostanie proporcjonalny do u . Wtedy dla prędkości u dążącej do 0 również cały iloraz $E_u/(mu)$ znika. Co by się natomiast stało, gdyby te najmniej energetyczne wzbudzenia płynu nie zależały od prędkości jak u^2 , ale były do tej prędkości proporcjonalne? Rozważmy hipotetyczną sytuację, w której energia płynu wraz z dostarczaniem pędem mu rośnie proporcjonalnie do tego pędu, czyli $E_u = cmu$. Wtedy nierówność (1) prowadzi do warunku:

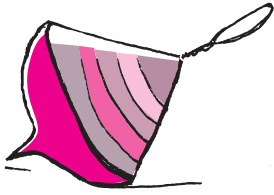
$$(2) \quad v > c.$$

Warunek oznacza, że jeśli masa wrzucona w płyn z taką niezwykłą zależnością energii od prędkości byłaby wolna, wolniejsza niż krytyczna wartość c , to niemożliwym byłoby spełnienie zasady zachowania energii i pędu, zakładając, że płyn zyskał pęd. Innymi słowy, wolne cząstki poruszałyby się w tym płynie tak, jakby tego płynu w ogóle nie było! Tak, jakby wokół była próżnia! Natomiast szybsze cząstki, poruszające się z prędkościami przekraczającymi c , mogłyby oddawać energię płynowi, a tym samym zwalniać.

Czy takie płyny z nietypową zależnością energii od prędkości istnieją? Okazuje się, że tak! Płyny takie nazywamy nadciekłymi, a badane są od dekad.

Pierwsze doświadczenia, dotyczące nadciekłego helu, przeprowadzone zostały w 1937 roku przez Piotra Kapicę, który za te badania został uhonorowany Nagrodą Nobla (ponad 40 lat później). Odkrycie Kapicy wzbudziło olbrzymie





Nazwa kondensatu Bosego–Einsteina pochodzi od hinduskiego fizyka Satyendra Nath Bosego, który zaproponował nowe, statystyczne własności fotonów (wprowadził nierozróżnialność cząstek), oraz Alberta Einsteina, który zrozumiał głębię rozważań Bosego i zastosował jego ideę do atomów. O tym, co to jest kondensat Bosego–Einsteina, pisał również Kazimierz Rzążewski w Δ_{16}^3 .

Pomysł, by gaz utworzył kondensat Bosego–Einsteina, pojawił się już w 1924 roku, jednak na doświadczalną realizację należało czekać aż do roku 1995. Obecnie układ ten jest badany przez setki laboratoriów. W Polsce kondensat osiągnięto wysiłkiem szerokiej społeczności, kilku uczelni i instytutów PAN, które doprowadziły do powstania Krajowego Laboratorium FAMO w Toruniu.

Za teoretyczne prace nad nadciekłością Anthony Leggett został wyróżniony w 2003 roku Nagrodą Nobla. Co ciekawe, Leggett dość długo rozważał studia inżynierskie. Ostatecznie wybrał karierę uniwersytecką, co w jego przypadku okazało się dobrym wyborem.

zainteresowanie ówczesnych fizyków teoretycznych, którzy próbowali na różne sposoby zrozumieć to zjawisko. Okazuje się, że ścisły opis jest dość skomplikowany. Wprawdzie wczesne fenomenologiczne modele László Tiszy i Lwa Landaua dawały zgodność jakościową z doświadczeniem, ale na mikroskopijne wyjaśnienia, tzw. *ab initio*, należało czekać dekady. Nawet kiedy już poznano mechanizmy rządzące nadciekłością, poprawne ilościowe wyniki zaczęto obliczać dopiero w latach 90-tych, kiedy pojawiły się dostatecznie mocne komputery i pogłębiło się zrozumienie teorii układów wielu ciał. Okazuje się, że w bardzo schłodzonych gazach i cieczach, dla dość typowych oddziaływań między cząstkami, energia rośnie proporcjonalnie do prędkości. Rozumowanie z początku tego artykułu prowadzi więc do warunku (2), w którym pojawia się krytyczna prędkość c , będąca przy okazji prędkością rozchodzenia się dźwięku w tych układach. W doświadczeniach nadciekłość jest zjawiskiem bardzo stabilnym – doświadczenia z nadciekłym helem dotyczą litrów płynu, a efekty są tak wyraźne i zaskakujące jak sztuczki magiczne Davida Copperfielda (odsyłacze do nagrań na końcu artykułu).

W trakcie dekad badań pojęcie nadciekłości uległo pewnemu „rozmyciu”. Funkcjonują liczne, nierównoważne kryteria nadciekłości. Poniżej omówiono różne ujęcia nadciekłości w kontekście nadciekłych gazów. Samo sformułowanie może wydawać się dziwne – jak gaz ma być nadciekły, skoro nawet nie jest ciekły? Z powyższych rozważań wynika, że nadciekłość dotyczy nie tylko płynów, również gazów, a ma przejawiać się brakiem lepkości lub sił oporu. Nadciekły gaz tak naprawdę był już prezentowany w *Delcie* – jest to gaz schłodzony do temperatur miliardy razy niższych niż temperatura pokojowa, który przechodzi w tzw. kondensat Bosego–Einsteina. W typowym gazie cząstki poruszają się chaotycznie w losowych kierunkach z losową szybkością. W gazie schłodzonym do kondensatu Bosego–Einsteina wszystkie cząstki mają taką samą, prawie zerową prędkość, do tego na bodźce reagują kolektywnie. Zachowują się tak samo jak żołnierze w trakcie marszu (cytuując noblistę Wolfganga Ketterlego). W tym kontekście nie jest to może dziwne, że faza ta jest nadciekła – intuicyjnie wynika ona z regularności ruchu wszystkich atomów. Cząstkom tworzącym kondensat Bosego–Einsteina praktycznie zawsze towarzyszy reszta cząstek, tworząca „zwykłą” chmurę termiczną, złożoną z cząstek o losowych prędkościach, zachowujących się niezależnie. Układ zawiera jakby dwa gazy na raz – nadciekły kondensat oraz fazę normalną. Pierwszy eksperyment demonstrujący nadciekłość gazów wykonała w 2004 roku grupa noblisty Wolfganga Ketterlego, pracującego w Massachusetts Institute of Technology. Kondensat Bosego–Einsteina oświetlono silną wąską wiązką laserową, której położenie i prędkość były precyzyjnie sterowane. Gdy wiązka była przesuwana po kondensacie z prędkością mniejszą niż krytyczna prędkość c , która w kondensacie jest rzędu 0,1 cm/s, wtedy nie obserwowano żadnych zmian w schłodzonym gazie. Dopiero gdy położenie wiązki zmieniano szybciej niż c , w gazie pojawiły się wiry i fale dźwiękowe. Tym samym zrealizowano wprost doświadczenie myślowe przeprowadzone przez Lwa Landaua, opierając się na warunku (2). Warto zwrócić uwagę na pewną subtelność, gdyż możliwe jest zmniejszanie, a nawet wyłączenie, oddziaływań między cząstkami. Kondensat Bosego–Einsteina gazu doskonałego (złożonego z cząstek nieoddziałujących) nie jest nadciekły – przynajmniej nie w sensie kryterium Landaua.

Są inne kryteria nadciekłości, które omówimy na przykładzie płynów umieszczonych w pojemniku w kształcie pierścienia. Jeden z nich dotyczy zachowania płynu, gdy pojemnik, w którym się znajduje, zaczyna się powoli obracać. Płyn przejawia nadciekłość pierwszego rodzaju, gdy nie zaczyna się obracać, mimo że obraca się naczynie, które go utrzymuje. Tego typu nadciekłość ma miejsce nawet w przypadku gazu doskonałego i wynika wprost z ogólnych cech mechaniki kwantowej. Otóż w układzie zamkniętym energie są „skwantowane”, tzn. układ może przyjąć tylko pewne wartości energii. Załóżmy, że pojemnik utrzymujący gaz obraca się powoli, z małą prędkością kątową ω . Klasyczny płyn obracałby się wraz z pojemnikiem, a cząstki płynu miałyby prędkość proporcjonalną do ωr , gdzie r to promień pierścienia. Jeśli jednak odpowiadająca temu energia kinetyczna $mv^2/2$ jest znacznie

Nadciekłość jest podobna do nadprzewodnictwa. W przypadku nadprzewodnictwa cząstkami, które nie czują tarcia, są ładunki elektryczne.

Akceleratory szybkich cząstek bardzo się grzeją. Do ich chłodzenia używany jest ciekły hel o temperaturach około 4 K. To temperatura tylko trochę powyżej nadciekłości.

mniejsza niż minimalny kwant energii obliczony dla danego układu, to płyn po prostu pozostaje nieruchomy.

Innym kryterium nadciekłości jest istnienie trwałych wirów. Załóżmy, że pojemnik i znajdujący się w nim płyn już się obracają, z taką samą dużą prędkością kątową. Jak zachowa się ciecz, gdy pojemnik nagle przestanie się obracać? Zwykły, klasyczny obracający się płyn na skutek tarcia o ścianki naczynia i zderzeń między jego cząstkami po chwili zatrzyma się. Inaczej wygląda sprawa, gdy mówimy o płynie nadciekłym. Płyn nadciekły może obracać się niezwykle długo, nie zważając na zatrzymanie się pojemnika. Kondensat Bosego–Einsteina oddziałujących cząstek spełnia to drugie kryterium nadciekłości, co potwierdzono doświadczalnie w eksperymencie przeprowadzonym w grupie Gretchen K. Campbell (National Institute of Standards and Technology). W doświadczeniu kondensat Bosego–Einsteina umieszczono w pułapce o kształcie pierścienia. Z przyczyn technicznych pułapka była nieruchoma, natomiast możliwe było rozkręcenie kondensatu dodatkowym laserem odpychającym atomy. Wiązka lasera obracała się po obwodzie pierścienia, wprawiając atomy w ruch. Przy stopniowym wyłączeniu wiązki obserwowano, że skondensowany gaz porusza się długo po obwodzie pierścienia, analogicznie do nadciekłego helu.

Zainteresowanym Czytelnikom polecam obejrzenie na YouTube nagrań doświadczeń przeprowadzonych na schłodzonych cieczach, konkretnie ciekłym helu. Pierwszy film (youtu.be/2Z6UJbwxBZI) pokazuje doświadczenie, w którym widać, jak nadciekły hel wspina się po ściankach naczynia, pozornie wbrew grawitacji. W drugim filmie (youtu.be/YVMuI_sh1tE) widać tak zwaną fontannę helową.

W komentarzach pod filmami o nadciekłości pojawia się pytanie – czy w cieczy nadciekłej da się pływać? Z powyższych rozważań wynika, że jak najbardziej – wystarczy machać rękoma szybciej niż prędkość krytyczna nadciekłego płynu. A czy kręcący się bez końca bączek jest zawsze dowodem na to, że śnimy? Jak widać, niekoniecznie: obserwując kręcący się bączek zrobiony z nadciekłego helu, nie będziemy w stanie rozstrzygnąć, czy to jawa czy sen.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 977. Siła F_{op} potrzebna do pokonania oporów toczenia koła po płaskiej powierzchni jest proporcjonalna do siły N nacisku na oś koła: $F_{op} = f_T N$. Typowy wagon z węglem ma masę $m = 80$ ton. Ile takich wagonów może pociągnąć lokomotywa o masie $M = 120$ ton po poziomym torze? Jakie jest największe nachylenie toru, po którym ta lokomotywa może wciągnąć 40 wagonów z węglem? Współczynnik tarcia statycznego stal-stal $f = 0,7$, współczynnik tarcia tocznego kół o stalowe szyny $f_T = 0,002$.

Rozwiązanie na str. 9

F 978. Wagi laboratoryjnej używamy do mierzenia niewielkich mas z dokładnością do 1 miligramu. Podczas ważenia zabytkowej figurki szachowej wykonanej z hebanu suma równoważących ją mas mosiężnych odważników wynosi $m_M = 30$ g. Ile wynosi rzeczywista masa M figurki? Gęstość hebanu $\rho_H = 1,2$ g/cm³, gęstość mosiądzu $\rho_M = 8,5$ g/cm³, a powietrza $\rho_P = 1,2$ mg/cm³.

Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1603. W turnieju piłkarskim bierze udział $2n$ drużyn. Pierwszego dnia odbyło się n meczów, przy czym każda drużyna rozegrała dokładnie jeden mecz. Podobnie drugiego dnia każda drużyna rozegrała dokładnie jeden mecz, z inną drużyną niż pierwszego dnia. Wykazać, że po dwóch dniach rozgrywek można wskazać n drużyn o tej własności, że żadne dwie jeszcze ze sobą nie grały.

Rozwiązanie na str. 21

M 1604. W konferencji bierze udział $2n$ osób, przy czym każda z nich zna dokładnie trzech innych uczestników konferencji. Co więcej, wszystkich uczestników można tak posadzić przy okrągłym stole, aby każdy siedział pomiędzy dwoma spośród swoich znajomych. Wykazać, że wszystkich uczestników można na co najmniej trzy różne sposoby zakwaterować w n pokojach dwuosobowych tak, aby każdy był w pokoju ze swoim znajomym. Dwa sposoby zakwaterowania uznajemy za różne, jeśli co najmniej jedna osoba ma w nich innego współlokatora.

Rozwiązanie na str. 4

M 1605. W konferencji bierze udział $2n$ osób, przy czym każda z nich zna dokładnie trzech innych uczestników konferencji. Czy wynika z tego, że wszystkich uczestników można zakwaterować w n pokojach dwuosobowych tak, aby każdy był w pokoju ze swoim znajomym?

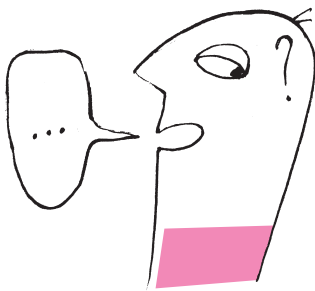
Rozwiązanie na str. 6

A jednak się da (VII), czyli saga kryptologiczna w odcinkach. Tym razem: nie wiem, ale powiem.

Łukasz RAJKOWSKI



Rozwiązanie zadania M 1604.
Rozważmy usadzenie przy okrągłym stole spełniające opisany w zadaniu warunek. Kolejne pary uczestników siedzących obok siebie przy stole połączmy na zmianę odcinkami czerwonymi i niebieskimi. Ponadto każdego połączmy zielonym odcinkiem z tym znajomym, obok którego nie siedzi. Wystarczy teraz zauważyć, że każdy z trzech użytych kolorów wyznacza inny sposób zakwaterowania.



Czytelnik może słusznie skojarzyć przedstawiony tu problem z protokołem transferu utajnionego, opisanym w Δ_{19}^2 . Tutaj jednak nie wymagamy, aby jedyną informacją uzyskaną przez Bogumiła była wartość x_i .

W całym artykule: sumowanie należy rozumieć „modulo 2”, czyli np. $1 + 1 + 0 + 1 = 1$.

Przykład

Jeśli $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$, $i = 3$ oraz $\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$, to $\mathbf{a}' = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$, i $x_{\mathbf{a}} = 1$, $x_{\mathbf{a}'} = 1$.
Koszt komunikacji to 20.

Wyobraźmy sobie następującą wakacyjną historię miłosną, która miała prawo się zdarzyć przed nastaniem ery wszechobecnych mediów społecznościowych.

Bogumił ma problem sercowy. Na dyskotecę z okazji ostatniego dnia kolonii poznał wspaniałą dziewczynę, Aldonę. Niestety, pechowym zbiegiem okoliczności, rodzice zabrali Aldonę do domu zanim Bogumił zdążył uzyskać od niej numer telefonu. Biedny Bogumił życia bez Aldony sobie nie wyobraża, więc kombinuje jak może, aby ów numer osiągnąć i bez końca do niej wydzwaniać z wyznaniem miłości. Szczęśliwie, Bogumił ma kolegów, którzy w sprawach sercowych są dużo bardziej biegli od niego. Podobno Dobromir podczas kolonii zapisał w zeszycie numery telefonów wszystkich dziewczyn z wyjazdu. Sęk w tym, że Dobromir to straszna papla, a Bogumiłowi nie uśmiecha się, by wszyscy jego koledzy z podwórka wiedzieli, co czuje do Aldony, bo głęby i tak tego nie rozumieją – Dobromir nie może zatem dowiedzieć się, że chodzi o Aldonę. Na domiar złego, Dobromir wyjechał do Szwajcarii, choć szczęśliwie akurat on zostawił Bogumiłowi swój numer telefonu (jednak połączenie sporo kosztuje). Co powinien zrobić Bogumił, aby odzyskać kontakt z Aldoną i zapłacić jak najmniejszy rachunek za połączenie z Dobromirem?

To, czego potrzeba Bogumiłowi do szczęścia, to protokół prywatnego uzyskiwania informacji (jest to próba tłumaczenia angielskiego terminu *private information retrieval*), czyli sposób na odpytywanie bazy danych (Dobromira) tak, aby baza danych nie wiedziała, o co ją pytamy, i mimo to dostarczyła odpowiedzi (tytułowe *nie wiem, ale powiem*). Oczywiście Bogumił mógłby poprosić o przesłanie całej bazy danych (czyli o przedyktowanie zawartości całego zeszytu), ale zależy mu na tym, by zminimalizować ilość przesyłanej informacji. Zaprawieni w lekturze kącika AJSD Czytelniczy nie powinni mieć trudności z przetłumaczeniem tego problemu na bardziej matematyczny język: Dobromir zna ciąg bitów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Bogumił chce poznać wartość x_i dla wybranego przez siebie $i \leq n$, jednak nie chce zdradzić Dobromirowi wartości i . Zakładamy, że każda informacja wysłana do i od Dobromira kosztuje, a Bogumił chce uczynić ten koszt jak najmniejszym. Wydaje się, że nie może on zrobić niczego istotnie lepszego od poproszenia Dobromira o cały ciąg \mathbf{x} . . . Cóż, a jednak się da!

Kolegów dwóch (lub więcej)

Na początku uprościmy sytuację i założymy, że Bogumił ma jeszcze jednego kolegę, Eustachego, który zna \mathbf{x} , ponadto nie zna się on z Dobromirem. Wówczas Bogumił mógłby zastosować następującą egzotyczną (i, jak się zaraz okaże, niezbyt mądrą) procedurę: losuje ciąg binarny $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ i prosi Dobromira o przesłanie $x_{\mathbf{a}} := \sum_{k=1}^n x_k a_k$, a Eustachego o $x_{\mathbf{a}'}$, gdzie $\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_n)$ to ciąg \mathbf{a} , w którym wartość i -tego bitu została zmieniona (tzn. $a_i + a'_i = 1$ oraz $a_k = a'_k$ dla $k \neq i$). Okazuje się, że wówczas $x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{a}'} = x_i$, gdyż

$$x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{a}'} = \sum_{k=1}^n x_k (a_k + a'_k) = \sum_{k \neq i} 2x_k a_k + x_i (a_i + a'_i) = x_i.$$

W tej sytuacji, znając $x_{\mathbf{a}}$ oraz $x_{\mathbf{a}'}$, Bogumił jest w stanie odtworzyć x_i . Z drugiej strony, ciąg \mathbf{a} jest losowy, więc nie dostarcza Dobromirowi żadnej informacji o i . Ponadto z punktu widzenia Eustachego ciąg \mathbf{a}' jest losowy (co wymaga być może krótkiej chwili zastanowienia), więc on też nie uzyskuje żadnej informacji o i . Zauważmy, że gdyby Dobromir i Eustachy połączyli siły, to mogliby łatwo odtworzyć i – jest to jedyny indeks, na którym różnią się ciągi \mathbf{a} i \mathbf{a}' . Zakładamy jednak, że nie komunikują się oni ze sobą, zatem Bogumił nie musi się przejmować taką ewentualnością.

Jak już wspomnieliśmy, powyższy sposób – choć wykorzystuje pewne chytre obserwacje – jest dla Bogumiła bezwartościowy. Przypomnijmy bowiem, że przesłanie informacji w obie strony jest kosztowne, a w zaprezentowanym protokole Bogumił wysyła dwa ciągi długości n , czyli aż $2n$ bitów. Już (dwa razy) lepiej byłoby poprosić Dobromira o przesłanie całego ciągu \mathbf{x} !

Rzecz jasna, nie zaprezentowaliśmy powyższej idei tylko po to, by stwierdzić jej bezużyteczność. Okazuje się, że można ją tak zmodyfikować, żeby jednak coś na niej zyskać. W tym celu potrzebujemy kolejnych dwóch kolegów z dostępem do \mathbf{x} , którzy się ze sobą nie komunikują. Umieścimy wartości \mathbf{x} w kwadratowej tablicy $\mathbf{X} = [\bar{x}_{k,l}]_{k,l \leq m}$ rozmiaru $m \times m$, gdzie $m = \lceil \sqrt{n} \rceil$. Powiedzmy, że $x_i = \bar{x}_{\alpha,\beta}$. Tym razem Bogumił losuje dwa binarne ciągi \mathbf{a} i \mathbf{b} długości m i wysyła je Dobromirowi. Dobromir oblicza $\bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} := \sum_{k,l \leq m} \bar{x}_{k,l} a_k b_l$. Podobnie jak poprzednio niech \mathbf{a}' powstaje z \mathbf{a} przez zmianę α -tego bitu, a \mathbf{b}' powstaje z \mathbf{b} przez zmianę β -tego bitu. Do kolejnych znajomych Bogumił wysyła pary ciągów bitów (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$ i $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, otrzymując od nich $\bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}}$, $\bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}'}$ oraz $\bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}$. Wówczas w sumie $\bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}} + \bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}'} + \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}$

Kontynuacja przykładu:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (\alpha, \beta) = (1, 3),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0, 0, 1), & \mathbf{b} &= (0, 1, 1), & \text{wówczas} \\ \mathbf{a}' &= (1, 0, 1), & \mathbf{b}' &= (0, 1, 0), & \text{oraz} \\ \bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} &= 1, & \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}} &= 0, & \bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}'} &= 0, \\ \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'} &= 1. \end{aligned}$$

Co prawda, koszt komunikacji to 28 (czyli zwiększył się), ale już dla $n \geq 25$ byłby on mniejszy niż przy wykorzystaniu dwóch baz danych.

- dla $k \neq \alpha, l \neq \beta$ składnik $\bar{x}_{k,l} a_k b_l$ liczony jest cztery razy (występuje w każdej składowej sumie), więc nie jest liczony wcale,
- dla $l \neq \beta$ składnik $\bar{x}_{\alpha,l} a_{\alpha} b_l$ liczony jest dwa razy, tak samo jak $\bar{x}_{\alpha,l} a'_{\alpha} b_l$; obu nie musimy zatem liczyć,
- dla $k \neq \alpha$ składniki $\bar{x}_{k,\beta} a_k b_{\beta}$ i $\bar{x}_{k,\beta} a'_k b_{\beta}$ liczone są dwa razy, więc podobnie jak w poprzednim punkcie nie wpływają na wynik,
- wśród liczb $a_{\alpha} b_{\beta}$, $a'_{\alpha} b_{\beta}$, $a_{\alpha} b'_{\beta}$, $a'_{\alpha} b'_{\beta}$ są trzy zera i jedynka, a zatem suma składników $\bar{x}_{\alpha,\beta} a_{\alpha} b_{\beta}$, $\bar{x}_{\alpha,\beta} a'_{\alpha} b_{\beta}$, $\bar{x}_{\alpha,\beta} a_{\alpha} b'_{\beta}$, $\bar{x}_{\alpha,\beta} a'_{\alpha} b'_{\beta}$ daje $\bar{x}_{\alpha,\beta}$.

Powyższe rozważania dowodzą, że $\bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}} + \bar{x}_{\mathbf{a},\mathbf{b}'} + \bar{x}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'} = x_{\alpha,\beta}$. Bogumił uzyskuje zatem szukaną wartość $\bar{x}_{\alpha,\beta} = x_i$, a jego koledzy nie dowiadują się niczego o α, β (co uzasadniamy tak jak poprzednio). Tym razem wykorzystujemy cztery bazy danych, ale za to rozmiar naszej komunikacji to $4(2\sqrt{n} + 1)$. W analogiczny sposób, poprzez zapisanie \mathbf{x} w d -wymiarowej tablicy i wykorzystanie 2^d baz danych, możemy dokonać prywatnego uzyskania informacji przy komunikacji rozmiaru $2^d(d\sqrt[d]{n} + 1)$. Widzimy zatem, że możemy w ten sposób uzyskać dowolnie mały wykładnik przy n , jednak kosztem wykładniczo rosnącej liczby potrzebnych, nieskomunikowanych baz danych.

... a może jednak wystarczy jeden?

Co, jeśli nie jesteśmy w tak wygodnej sytuacji i Bogumił jest skazany wyłącznie na Dobromira? Czy możemy istotnie zmniejszyć koszt transmisji, mając do czynienia tylko z jedną bazą danych? Cóż, gdyby było inaczej, temat niekoniecznie zasługiwałby na prezentację w naszym kąciku. Okazuje się, że nawet mając do dyspozycji jeden egzemplarz bazy danych, możemy dokonać „prywatnego zapytania” kosztem rzędu rozmiaru bazy danych podniesionego do dowolnie małej potęgi. Po raz pierwszy taki magiczny sposób zaproponowali Eyal Kushilewicz i Rafail Ostrowski w 1997 roku. Aby dokonać jego prezentacji, musimy przedstawić małe przypomnienie z teorii liczb (patrz również artykuł o *commicie* w Δ_{18}^{11}).

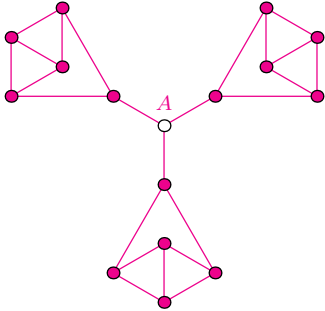
Niech n będzie liczbą naturalną. Kwadratem z dzielenia przez n nazwiemy taką liczbę naturalną r , że istnieje x , dla którego $r = x^2 \pmod{n}$. Dla przykładu, 23 jest kwadratem z dzielenia przez 7, gdyż $23 = 3^2 \pmod{7}$, ale 3 już nim nie jest. Oznaczmy przez \mathcal{Q}_n zbiór kwadratów z dzielenia przez n , które są względnie pierwsze z n . Dla $n = pq$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi, można nietrudno pokazać, że $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_p \cap \mathcal{Q}_q$. Niech \mathcal{O}_n będzie zbiorem liczb względnie pierwszych z n , które nie należą ani do \mathcal{Q}_p ani do \mathcal{Q}_q . Można pokazać, że \mathcal{Q}_n i \mathcal{O}_n „zachowują się” jak liczby dodatnie i ujemne, to znaczy: pomnożenie dwóch liczb z \mathcal{Q}_n lub dwóch liczb z \mathcal{O}_n daje liczbę z \mathcal{Q}_n , a pomnożenie liczby z \mathcal{Q}_n i liczby z \mathcal{O}_n daje liczbę z \mathcal{O}_n . Ponadto, dla dużych wartości p, q stwierdzenie, czy liczba z $\mathcal{Q}_n \cup \mathcal{O}_n$ należy do \mathcal{Q}_n , jest trudne obliczeniowo, jeśli znamy tylko wartość n (a bardzo łatwe, jeśli znamy p i q).





Rozwiązanie zadania M 1605.
Odpowiedź: Nie wynika.

Na poniższym obrazku zilustrowana jest przykładowa sieć znajomości (uczestnikom konferencji odpowiadają punkty, a znajomościom – odcinki), dla której stosowne zakwaterowanie nie istnieje.



Rzeczywiście, niezależnie od sposobu zakwaterowania osoby A, pozostali uczestnicy dzielą się na dwie grupy 5-osobowe i jedną 4-osobową o tej własności, że każdy ma niezakwaterowanych dotąd znajomych tylko w obrębie danej grupy. Żadnej z grup 5-osobowych nie da się zakwaterować w dwuosobowych pokojach.

Wykorzystując przedstawioną teorię, możemy zaproponować następujący protokół prywatnego uzyskiwania informacji dla jednej bazy danych (Dobromira):

- Bogumił i Dobromir umawiają się na reprezentację ciągu x w postaci tablicy $X = [\bar{x}_{k,l}]_{k \leq s, l \leq t}$. Załóżmy, że $x_i = \bar{x}_{\alpha, \beta}$;
- Bogumił wybiera duże liczby pierwsze p, q (których reprezentacja dwójkowa ma K bitów) i oblicza $n = pq$, po czym wybiera losowo $y_1, \dots, y_s \leq n$ w taki sposób, że $y_\alpha \in \mathcal{O}_n$ oraz $y_k \in \mathcal{Q}_n$ dla $k \neq \alpha$. Następnie przekazuje n oraz wszystkie liczby y_1, \dots, y_s Dobromirowi. Zauważmy, że zgodnie z naszą uwagą Dobromir (nieznający p, q) dla żadnego $k \leq s$ nie jest w stanie stwierdzić, czy $y_k \in \mathcal{Q}_n$, nie dowie się zatem niczego o α ;
- Dla każdego $r \leq t$ Dobromir oblicza $z_r = \prod_{k=1}^s y_k^{1+\bar{x}_{k,r}}$ modulo n . Jest to iloczyn wszystkich wysłanych liczb y_k , przy czym niektóre – te, którym w r -tej kolumnie odpowiada jedynka – mnożone są „w kwadracie”. Ponieważ tylko y_α nie jest kwadratem modulo n , więc z_r jest kwadratem tylko wtedy, gdy y_α jest mnożone „w kwadracie”, czyli gdy $x_{\alpha,r} = 1$;
- Bogumił sprawdza, czy z_β jest kwadratem (może to uczynić, gdyż zna p, q). Jeśli tak, to $x_{\alpha, \beta}$ wynosi 1, w przeciwnym przypadku 0.

Przedstawiona komunikacja zajmuje $Ks + Kt$ bitów, czyli w ten sposób, biorąc $s = t \approx \sqrt{n}$, możemy już osiągnąć komunikację rozmiaru $2K\sqrt{n}$. A można jeszcze lepiej! Zauważmy, że spośród skonstruowanych przez Dobromira liczb z_1, \dots, z_t Bogumiła interesuje tylko z_β , przy czym nie chce on, by Dobromir poznał β . Toż to brzmi dokładnie jak wyjściowy problem, więc rzecz pachnie rekurencją na kilometr! Bogumił może zastosować ten sam protokół dla ciągu z_1, \dots, z_t , aby poznać z_β . Wówczas rozmiar komunikacji jest rzędu $Ks + K \cdot 2K\sqrt{t}$; optymalizując ze względu na s, t , pod warunkiem $st = n$, dostajemy koszt $3K^{5/3} \sqrt[3]{n}$. W ten rekurencyjny sposób możemy dowolnie zbijać wykładnik przy n (odwrotnie proporcjonalnie do głębokości rekurencji); niestety, kosztem puchnącego (z grubsza liniowo wraz z głębokością rekurencji) wykładnika przy K . Cóż, odwołując się do klasyka, nie udało nam się przyrządzić zupełnie darmowego obiadu, mamy jednak nadzieję, że Czytelnicy i tak docenią (podobnie jak Bogumił) chytryść i elegancję przedstawionych protokołów.

Kto ma rację?

Jarosław GÓRNICKI*

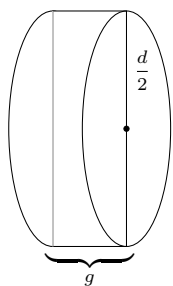
Skończył się mecz – najważniejsze wydarzenie tygodnia. Po burzliwej wymianie zdań na jego temat trzej przyjaciele: Długi, Gruby i Ludek wracali do domu. Nagle Ludek zapytał o zadanie z matematyki, które było na jutro. Długi i Gruby stanęli jak zaczarowani. Zapomnieli o zadaniu. W necie na chwilę się zagotowało! Nastąpiła cisza przerywana wiadomościami przychodzącymi na komórki. Nikt z klasy jeszcze zadania nie zrobił. Zadanie było krótkie:

Jak gruba powinna być moneta, aby szansa, że wyląduje ona na krawędzi, wyniosła $\frac{1}{3}$?

Wszyscy zgodzili się przyjąć uproszczenie, że moneta jest jednorodnym, symetrycznym walcem. Gruby, który początkowo zbladł i spocił się, nieśmiało zgłosił pomysł. Posmarujemy deskę miodem (by rzucana moneta nie odbijała się i nie toczyła), sklepiając pięciogroszówki stworzymy kilka wariantów „grubych” monet i na podstawie eksperymentu wybierzemy odpowiedź.

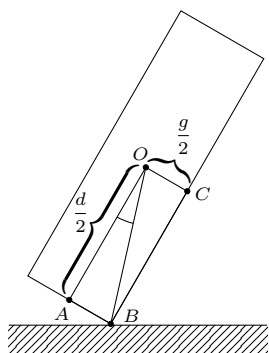
Długi uznał, że zadanie jest łatwe i szkoda miodu. To, na której „stronie” wyląduje moneta, jest proporcjonalne do pola powierzchni poszczególnych „stron”. Zatem warunki zadania będą spełnione, gdy pole powierzchni bocznej walca będzie równe polu podstawy. Obliczył (rys. 1):

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot g = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2, \quad \text{zatem} \quad 2g = \frac{d}{2}, \quad \text{skąd} \quad g = \frac{1}{4}d.$$



Rys. 1

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



Rys. 2

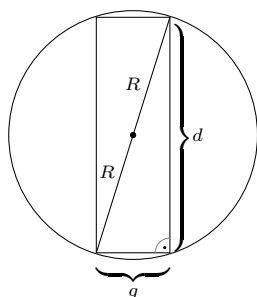
I triumfalnie oznajmił: grubość monety powinna stanowić 25% długości jej średnicy. Życie jest piękne, a my jesteśmy genialni! Jednak Ludek, który lubił fizykę, nad czymś rozmyślał. Po chwili powiedział, że widzi inne rozwiązanie. Poza przypadkiem, gdy moneta wylądowała od razu na swojej podstawie lub na krawędzi, musiała wylądować koślawie. Miodek chwytając koślawie padającą monetę, która pod wpływem siły ciężkości ostatecznie wylądowała na tej stronie, na której rzut jej środka ciężkości znajdzie się we wnętrzu powłoki wypukłej rzutu tej strony. To zaś zależy od kąta $\sphericalangle AOB$, i tu zrobił rysunek (rys. 2). Warunki zadania będą spełnione, gdy kąt $\sphericalangle AOB$ będzie równy $\frac{1}{3}$ kąta prostego $\sphericalangle AOC$. Przy oznaczeniach z rysunku

$$\frac{\frac{1}{2}g}{\frac{1}{2}d} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{skąd } g = \frac{\sqrt{3}}{3}d \approx 0,577 \cdot d.$$

Oznacza to, że grubość monety spełniającej warunki zadania powinna wynosić 57,7% długości jej średnicy. *No to mamy problem*, przyznali chłopcy, ale najważniejsze było dla nich, że na lekcję nie pójdą z niczym.

Gruby po powrocie do domu zaczął szukać czegoś na temat zadania w necie. Znalazł fascynującą historię. Pewnego razu, gdy John von Neumann wraz z uczonymi kolegami wysiadał z taksówki, taksówkarz zadał mu pytanie, które jest treścią naszego zadania. Ku niemałemu zdziwieniu kolegów, po jakichś 15–20 sekundach von Neumann ocenił, że grubość takiej monety powinna stanowić około 35% długości jej średnicy. Jak rozumował von Neumann, możemy się tylko domyślać.

Federick Mosteller widział to tak (*Fifty challenging problems in probability with solutions*, Dover Publ., N. York, 1965, Problem 38). Na monecie (= walcu) opisana jest sfera o promieniu R (rys. 3). Tę sferę tworzą wszystkie możliwe wektory momentu siły znormalizowane do długości R , zaczepione w środku ciężkości walca. Są to też wszystkie możliwe kierunki rzutu środka ciężkości walca. Aby spełnić warunki zadania, trzecia część powierzchni kuli powinna przypadać na sytuację, gdy rzut środka ciężkości pozwala na lądowanie monety na krawędzi. Ponieważ pole warstwy kulistej jest proporcjonalne do jej grubości ($= 2\pi Rg$), więc nasza moneta powinna mieć grubość równą $\frac{1}{3}$ średnicy sfery opisanej na monecie.



Rys. 3

Zatem

$$g = \frac{1}{3} \cdot 2R, \quad \text{czyli } 2R = 3g.$$

Pozostaje obliczyć grubość takiej monety w stosunku do jej średnicy. Tu wystarczy Pitagoras:

$$g^2 + d^2 = (2R)^2, \quad \text{skąd } g = \frac{1}{2\sqrt{2}}d \approx 0,353 \cdot d.$$

Kto ma rację?

Dowody „just-do-it” w zadaniach o przeliczalności

* student, Uniwersytet Cambridge

Robert CRUMPLIN*

We wrześniu 2018 roku miał miejsce kolejny, trzeci międzynarodowy obóz matematyczny *Maths Beyond Limits*, odbywający się corocznie w Milówce koło Żywca. W zeszłym roku wzięło w nim udział 60 licealistów z 12 europejskich państw. Rekrutacja uczestników na tegoroczny obóz jest już zakończona, natomiast potencjalni tuteżnicy mogą zgłaszać się do prowadzenia zajęć. Szczegóły dotyczące aplikacji oraz obozu dostępne są na stronie mathsbeyondlimits.eu

Przeliczalnie wiele, czyli tyle, że można je ponumerować liczbami naturalnymi.

W zeszłym roku (już po raz drugi!) miałem przyjemność pełnić funkcję tutora podczas obozu *Maths Beyond Limits*. Poprowadziłem dwie serie zajęć, z których jedna dotyczyła teorii mnogości. Starając się dać uczestnikom podstawy arytmetyki zbiorów nieskończonych w zajmujący i bezbolesny, mam nadzieję, sposób, pokazałem ciekawe zadania, wykorzystujące różne metody i pomysły. Jeden z nich jest szczególnie wart uwagi...

Zadając proste pytanie „Czy istnieje zbiór [...] spełniający warunki [...]?”, można wygenerować wiele zadań. Niektórzy nawet zaznaczają, że *przeliczalnie* wiele. Struktura zbiorów jest na tyle prosta, że jeśli rozwiązanie istnieje (i przypadkiem nie jest równoważne *hipotezie continuum*), prawdopodobnie znajdziemy je, korzystając z podstawowych własności funkcji działających

na zbiorach. Dodatkowo, czasem warto przeformułować problem, powiązać go z czymś dobrze znanym, pozwalającym lepiej go zwizualizować (np. myśleć o podzbiorach płaszczyzny zamiast o całej płaszczyźnie). Dobrym planem ataku może być więc nie próba znalezienia abstrakcyjnego dowodu, a konstrukcja przykładu metodą *just-do-it!* Jeżeli zbiór rzeczywiście istnieje, być może nie będzie trudno go znaleźć. Jeżeli zaś pomysły (bądź nerwy) wyczerpią się, można spróbować dowieść jego nieistnienia.

Metodę just-do-it dobrze promuje na swoim blogu Medalista Fieldsa, Tim Gowers, poprzez następujące zadanie:

Czy istnieje gęsty podzbiór płaszczyzny, który nie zawiera trzech współliniowych punktów?

Gęsty podzbiór płaszczyzny to taki, który ma przynajmniej jeden punkt wspólny z dowolnym podzbiorem otwartym płaszczyzny. Np. zbiór wszystkich punktów o współrzędnych niewymiernych $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest podzbiorem gęstym płaszczyzny. Jeżeli z tego zbioru wyrzucimy punkt o współrzędnych $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, to zbiór nadal będzie gęsty.

Istnienie takiego zbioru byłoby raczej zaskakujące, mając na uwadze, że zbiory gęste są w pewnym sensie duże (w odniesieniu do zbioru, w którym są gęste), natomiast brak trzech współliniowych punktów sugeruje, że zbiór powinien być mały. Wszelkie wątpliwości znikną jednak, gdy zastosujemy podejście just-do-it. Oczywiście zachęcam Czytelnika do próby samodzielnego rozwiązania przed przejściem do dalszej części tekstu.

Jeżeli A_2 jest gęsty w zbiorze A_1 , a A_3 jest gęsty w zbiorze A_2 , to z tego wynika, że A_3 jest gęsty w A_1 .

Kule otwarte na płaszczyźnie to nic innego niż koła bez brzegu.

Spróbujmy zatem ów zbiór skonstruować. Oznaczmy go przez A . Wiemy, że zbiór punktów o współrzędnych $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest gęsty na płaszczyźnie. Zauważmy, że wystarczy pokazać gęstość zbioru A względem zbioru $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zamiast analizować całą płaszczyznę na raz, rozważmy jej mniejsze kawałki: *kule otwarte* $\{B((p, q), \frac{1}{n}) \mid (p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ o środkach w punktach $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ i promieniach $\frac{1}{n}$. Czyli dla każdego punktu z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ rozważmy przeliczalnie wiele kul (mogą mieć dowolnie mały promień). Przeformułujmy zadanie następująco: „Dany jest przeliczalny zbiór kul otwartych D_1, D_2, \dots . Czy istnieje zbiór A (podzbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) taki, że $A \cap D_n$ jest niepusty dla każdego n i żadne trzy punkty z A nie leżą na jednej prostej?”. Zbiór A skonstruujemy indukcyjnie. Niech a_1 będzie dowolnym punktem z D_1 , natomiast a_2 dowolnym punktem z D_2 . Dalej, wybierzmy $a_3 \in D_3$ takie, że nie leży ono na prostej zawierającej a_1 i a_2 . Kuli otwartej nie da się pokryć skończoną liczbą prostych, zatem na pewno istnieje odpowiednio a_3 . Tę konstrukcję można kontynuować, co daje finalne rozwiązanie.

Jeszcze uzasadnienie, dlaczego faktycznie zbiór A jest gęstym podzbiorem płaszczyzny: w dowolnym zbiorze otwartym można umieścić któryś ze zbiorów D_i (dowolnie mała kula), a z nim zbiór A ma na pewno co najmniej jeden punkt wspólny.

Okazuje się zatem, że nasza konstrukcja sprowadza się do kilku pomysłów, które można uogólnić do całej klasy zadań tego typu. Po pierwsze, skorzystaliśmy z faktu, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma przeliczalny podzbiór gęsty (jest ośrodkowy). Pozwoliło nam to sprowadzić problem do podobnego, prawie że skończonego i umożliwiło konstrukcję krok po kroku. Jedyne, co pozostało, to zacisnąć zęby i dokończyć rozumowanie.

Podczas moich zajęć wiele zadań można było rozwiązać, korzystając z podobnego rozumowania. Na przykład:

Czy istnieje nieprzeliczalny zbiór parami rozłącznych bałwanek na płaszczyźnie?

Bałwankiem nazywamy tu niezdegenerowaną figurę w kształcie ósemki (np. dwa zewnętrznie styczne okręgi).

Nie można zapomnieć, że funkcje w pewnym sensie są także zbiorami, czyli że o $f : A \rightarrow B$ można myśleć jako o podzbiorze $A \times B$. Możemy zatem mieć nadzieję, że pytania o istnienie funkcji o określonych własnościach można rozwiązywać podobnie. Warto przyjrzeć się następującemu zadaniu:

Wykazać, że dla każdej funkcji $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x, \lambda x + \mu) \rightarrow g(\lambda, \mu)$ przy $x \rightarrow \infty$. W przypadku problemów, wystarczy przypomnieć sobie przytoczone rozumowanie i... **Just do it!**

Tłumaczyli **Anna ŁEŃ** (MISMaP UW) oraz **Paweł PIWEK** (Uniwersytet Cambridge)



Rozwiązanie zadania F 978.
Podczas dokładnego ważenia należy uwzględnić siły wyporu powietrza. Równowaga mas na szalkach wagi oznacza równowagę ciężarów z uwzględnieniem sił wyporu powietrza:

$$g \left(M - \rho_P \frac{M}{\rho_H} \right) = g \left(m_M - \rho_P \frac{m_M}{\rho_M} \right),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Otrzymujemy stąd:

$$M = \frac{m_M \left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_M} \right)}{1 - \frac{\rho_P}{\rho_H}} \approx m_M + m_M \rho_P \left(\frac{1}{\rho_H} - \frac{1}{\rho_M} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $M \approx 30,027$ g.



Rozwiązanie zadania F 977.
Wartość poziomej siły F , z jaką lokomotywa działa na tory, ograniczona jest przez tarcie statyczne kół o szyny, $F \leq Mgf$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Podczas jazdy ze stałą prędkością siła F pokonuje siłę F_{op} oporów toczenia kół lokomotywy i kół n wagonów. Mamy więc:

$$Mgf \geq (M + nm)gf_T.$$

Stąd wynika, że maksymalna liczba wagonów wynosi:

$$n \leq \left(\frac{f}{f_T} - 1 \right) \frac{M}{m} = 523.$$

Podczas wjazdu na zbrocze nachylone do poziomu pod kątem α maksymalna składowa siły wzdłuż toru wynosi $F = Mgf \cos \alpha$. Podczas jazdy siła ta musi pokonać opór toczenia oraz składową siłę ciężkości równoległą do toru:

$$Mgf \cos \alpha \geq (M + nm)g \sin \alpha + (M + nm)gf_T \cos \alpha.$$

Stąd:

$$\tan \alpha \leq \frac{Mf}{M + nm} - f_T.$$

co dla $n = 40$ daje ograniczenie $\alpha \leq 1,34^\circ$. Gdy konieczne jest pokonywanie odcinków bardziej stromych, wagonów musi być mniej lub należy doczepić drugą lokomotywę. Dla prędkości do 50 km/h opór powietrza jest kilkadziesiąt razy mniejszy od oporów toczenia.

Od redakcji: Paweł Sawicki jest laureatem Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego z 2018 roku, organizowanego przez Deltę oraz Polskie Towarzystwo Matematyczne. Pracę ucznia można znaleźć na stronie www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich/lista_laureatow/

Nadchodzą...

Justyna Dąbrowska, psycholożka, pisarka, kontynuuje cykl wywiadów z ludźmi starymi, w których jako wyróżnik przyjęła urodziny rozmówcy przed II Wojną Światową. Kolejny tom tych rozmów, „Miłość jest warta starania” (Wyd. Agora), ilustrowany jest pięknymi portretami z obiektywu Mikołaja Grynberga. Mówi się wciąż i wszędzie, że „społeczeństwa się starzeją”. Wiem coś na ten temat, znalazłam się w grupie osób, z którymi w tej ostatniej książce Justyna rozmawiała. Osobowość autorki, a także jej zawód sprawiają, że wie jak prowadzić ROZMOWĘ – rozmowę, która aktywizuje także Czytelnika.

Jest „nas”, długowiecznych, coraz więcej, bo: ... żyliśmy w trudnych czasach, które wymagały aktywności fizycznej i umysłowej, ... nasze odżywianie było blisko natury, ... życie w pewnym sensie wymuszało na nas aktywność społeczną, liczne kontakty i współpracę. Wreszcie, bo widocznie nosimy korzystny układ genów. Rozmówcy Justyny to ludzie wykształceni, czytający, działający w różnych dziedzinach. To, co mnie ujmuje, to różnorodność odpowiedzi na zadawane wszystkim pytanie o starość i śmierć, a także o stosunek do pytań metafizycznych, w szczególności do Boga.

Będąc jeszcze pod wrażeniem książki, udałam się na finał polskiej edycji 31. Konkursu Unii Europejskiej dla Młodych Naukowców (EUCYS). W Polsce opiekę nad konkursem sprawuje Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci. Mogą w nim brać udział uczniowie, prezentując wyniki swoich oryginalnych badań w zakresie nauk ścisłych i przyrodniczych. Od kilku lat do tradycyjnych nauk „szkolnych” dołączyły również nauki techniczne i informatyka. Trzech tegorocznych laureatów I Nagrody, pracujących w różnych dziedzinach, pojedzie na finał europejski (w tym roku do Bułgarii).

Grupa ponad 20 osób, finalistów polskiego konkursu, jest co roku bardzo różnorodna. Łączy ich jednak pewien zasób cech, tak jak tych „staruszków” z połowy XX wieku. Wszyscy są niebywale pracowici – większość z nich wyniki badań uzyskała w trakcie roku szkolnego, a także w czasie wakacji, które przeznaczali na pracę w lesie, na łące, w starych, zaniedbanych parkach, w gospodarstwach rolnych, pasiekach... Często pracując w laboratoriach, do których zaprosili ich naukowcy, także za granicą. Analizują fotografie nieba z obserwatoriów w odległej Ameryce Południowej. Konstruują różnorodne urządzenia... W tym roku zbudowali drona wynoszącego doświadczalne balony do stratosfery, oryginalny pojazd do natychmiastowej oceny stanu gleby, robota towarzyszącego strażakom w trakcie gaszenia pożarów (ten ostatni ulepszony w wyniku konsultacji z miejscowym posterunkiem strażyackim). Co roku EUCYS odkrywa młodych matematyków, którzy rozwiązują problemy mniej lub bardziej bliskie (choć tego nigdy nie jest się pewnym) życia codziennego. W tym roku jedną z nagród uzyskał Paweł Sawicki z Gdańska za pracę *Heksapawn wydłużony*. Brzmi tajemniczo, a oznacza projekt gry planszowej (w którą mogłaby też grać sztuczna inteligencja; jury w grę grało i z Pawłem przegrywało) i jej matematyczny opis. W pracach biologiczno-medycznych zaproponowano analizę wpływu różnych substancji i organizmów na procesy chemiczne i biochemiczne. Z Rybnika, jednego z najbardziej smogowych miast w Polsce, przyjechał Mateusz Kolek, który analizował rybnicze powietrze dzięki badaniom porostów. Matematycy wciągali w dyskusję wokół tajemniczych tematów, jak kolorowanie prostych lub ciągu Perrina.

W większości prac pomysł wyjściowy pojawił się w głowie tych młodziutkich badaczy. Potem opiekowali się nimi nauczyciele, a także pracownicy z pobliskich uczelni. Tam, gdzie to konieczne – przeprowadzili analizę statystyczną. Parę z tych prac czeka na publikację, niektóre na zatwierdzenie patentu, by można było je wdrażać. Wszystkie spełniają warunki oryginalności i naukowości.

Ze spotkań z finalistami wychodzę co roku pełna entuzjazmu i uznania, co towarzyszy zawsze poznawaniu ludzi myślących i ciekawych świata. Ci mają jeszcze jedną cechę – są młodzi i gotowi nas zastąpić. Witajcie w świecie dorosłych!

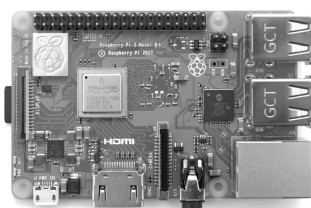
Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Alchemia

Piotr KRZYŻANOWSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

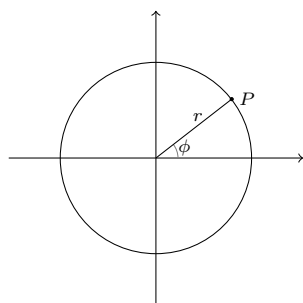
Przepis, mający mniej niż 40 lat:
Transmutacja bizmutu w (jakieś) złoto.
Po prostu weź folię z bizmutu i mocno uderzaj w nią bardzo rozpędzonymi jądrami węgla i neonu. Źródło: *Phys. Rev. C 23, 1044; 1 March 1981.*
Ewentualnie, można mocno zderzyć ze sobą dwie gwiazdy neutronowe, wtedy też powstanie trochę złota: pisaliśmy o tym w *Delcie 7/2018.*



Raspberry Pi 3+ w skali 1:2
Źródło: Wikipedia

Można też użyć Pythona i bogatego zestawu modułów obsługujących czujniki.

Więcej o tym, jak zacząć przygodę z Raspberry Pi, można przeczytać np. na stronie www.raspberrypi.org/documentation. Jest też kilka polskich serwisów poświęconych Malince.



P ma współrzędne biegunowe (r, ϕ)

Idea Gielisa była inspirująca. Na przykład gra komputerowa *No Man's Sky* generuje swoje sztuczne niezliczone światy w sposób proceduralny, opierając się na pomysły podobnym do superformuły Gielisa – co parę lat temu zdradził Sean Murray, jeden z twórców gry.

Witajcie, Młodzi Alchemicy! Na dzisiejszym spotkaniu nie będziemy się zajmować tak przebrzmiałym tematem, jak zamiana zwykłego metalu w złoto... (Kto jeszcze nie wie, jak to należy prawidłowo robić, może przeczytać przepis na marginesie niniejszych notatek.) Przed nami znacznie ciekawszy problem:

Jak z maliny wydobyć wolfram?

Okazuje się to całkiem proste, pod warunkiem, że wydobędziemy nie „zwykły” wolfram, tylko Wolfram Language. A i malina nie będzie zwykła: to popularny komputerek wielkości karty kredytowej, o apetycznej nazwie Raspberry Pi.

W rzeczywistości osiągniemy jeszcze więcej: mając ten komputerek, będziemy mogli uruchomić na nim pełną (no, *prawie* pełną) wersję najnowszej *Mathematiki*, potężnego systemu obliczeń symbolicznych. Na pozór nie wydaje się to szczególnym osiągnięciem, gdyż każdy może to samo zrobić na dowolnym laptopie – pod warunkiem wszakże, że wcześniej wyasygnuje okazałą sumkę na zakup licencji (uczciwie dodajmy, że jeśli jest uczniem lub studentem, wystarczy skromne £30 za półroczne użytkowanie). Jednak na Raspberry Pi możemy mieć ten software natychmiast, legalnie (do użytku niekomercyjnego) i... całkowicie za darmo!

Oczywiście, jest pewien haczyk: możliwości nawet najmocniejszego Raspberry Pi są daleko poniżej laptopa ze średniej półki, więc zestaw zadań, jakie można *wygodnie* rozwiązywać w *Mathematice* na Raspberry Pi jest tym samym mocno ograniczony. Z drugiej strony, ten mały komputerek pozwala na prosty i tani kontakt ze światem realnym (przez możliwość podłączenia rozmaitych czujników: światła, temperatury itp., a także mikrofonu i kamery). Co więcej, jego *Mathematica* – dokładniejszej Wolfram Language, w którym ją programujemy – ma rozszerzenia pozwalające w prosty sposób to wykorzystać. No i – *last but not least* – zabawa z Malinką jest przednia (moim zdaniem, dla początkujących lepsza niż z Arduino), działa też na nim *programowalny w paru językach, w tym: Pythonie i Mathematicie*... *Minecraft!* (W wersji *pocket edition*.)

Zaczynamy od instalacji systemu operacyjnego Raspbian (specjalna wersja Linuxa) na karcie microSD – która zastępuje dysk w Raspberry Pi – a potem całość uruchamiamy i aktualizujemy. Oprogramowanie Wolframa już tam będzie.

Mając w jednej garści i Malinkę, i Wolframa, aż korci, aby dokładając stosowne czujniki, szybko *transmutować* tę parę – np. w parapełową stację pogodową. Dziś jednak skupimy się tylko na zabawie z samym Wolframem (czyli *Mathematiką*) i dokonamy „alchemicznego” przekształcenia garści liczb w obiekty o naturalnym kształcie, takim jak kwiaty, nasiona, rozgwiazdy.

Wyberzemy sześć liczb: $a, b > 0$, $m, n_1, n_2, n_3 \geq 0$, a następnie zdefiniujemy na płaszczyźnie krzywą we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) , zadając promień wodzący wzorem

$$r = S(\phi),$$

gdzie

$$S(\phi) = \left(\left| a^{-1} \cos\left(\frac{\phi m}{4}\right) \right|^{n_2} + \left| b^{-1} \sin\left(\frac{\phi m}{4}\right) \right|^{n_3} \right)^{-1/n_1}.$$

Powyższy wzór podał w 1999 roku belgijski botanik Johan Gielis i – zachwycony tym, jak różnorodne kształty można z niego uzyskać – ochrzcił bez zbędnej skromności *superformułą*. A następnie, w co trudno uwierzyć, swój pomysł... opatentował, zob. patents.google.com/patent/EP1177529B1. My jednak zauważmy (Gielis oczywiście też to wiedział), że jest to uogólnienie wzoru na elipsę poprzez umożliwienie wyboru potęg: faktycznie, dla $m = 4$ i $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ dostajemy zwyczajne równanie elipsy. Gielis poszedł jeszcze dalej i w swój wzór radośnie wplótł możliwość dalszego skalowania promienia:

$$r = f(\phi) \cdot S(\phi),$$

gdzie f jest, hmm... , *dowolną* funkcją...

Jednak nawet gdy $f \equiv 1$, efekty wyboru 6 parametrów potrafią być intrygujące, co nie powinno nas dziwić: po prostu mamy całkiem dużo stopni swobody.

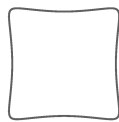


Czy potrafisz znaleźć parametry funkcji S , które generują kształty podobne do tych na ikonie Matematyki powyżej?

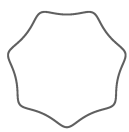
Wprowadzenie do Matematyki na Raspberry Pi:
projects.raspberrypi.org/en/projects/getting-started-with-mathematica/



Nuphar luteum
petiole (3, 4.5, 10)



Scrophularia nodosa
stem (4, 12, 15)



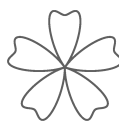
Equisetum
stem (7, 10, 6)



Starfish 1 (5, 2, 7)



Starfish 2 (5, 2, 13)



Modified Rose curve
(10, 1/1.3, 2.7),
 $r(\phi) = |\cos(2.5\phi)|$



Jedna z nieskończenie wielu form, których nie było w artykule Gielisa:
(40, 8, 8), $r(\phi) = |\cos(3.5\phi)|$

Jak trzeźwo zauważył Eric Weisstein, redaktor strony mathworld.wolfram.com/Superellipse.html, już John von Neumann miał sarkastycznie (choć może z pewną przesadą) powiedzieć:

Przy czterech parametrach [krzywej] dopasuję ją do [kształtu] słonia; przy pięciu, będzie machał trąbą.

No to do roboty! Wykorzystajmy Matematykę do rysowania krzywych zadanych superformułą. Dzięki możliwości wygodnego definiowania wykresów zależnych od parametrów, a także umiejętności rysowania krzywych zadanych wprost we współrzędnych biegunowych, całość zamknijemy w dwu liniach kodu, na który głównie składa się seria zagnieżdżonych wywołań funkcji:

```
1 S[t_, a_, b_, m_, n1_, n2_, n3.] := ( Abs[ Cos[(m*t)/4]/a ]^n2 + Abs[ Sin[(m*t)/4]/b ]^n3 )^(-1/n1);
2
3 Manipulate[ PolarPlot[ S[t, a, b, m, n1, n2, n3], {t, 0, 2*Pi}, PlotLabel -> {m, n1, n2, n3}, Axes -> False ], {{a, 1}, 0, 5}, {{b, 1}, 0, 5}, {{m, 4}, 0, 20, 1}, {{n1, 2}, 0, 20}, {{n2, 2}, 0, 20}, {{n3, 2}, 0, 20}]
```

Należy pamiętać o dziwnym zwyczaju zatwierdzania każdej instrukcji nie przez zwykły *Enter*, tylko przez kombinację klawiszy *Shift+Enter*.

Ten krótki kod daje nam przedsmak charakteru języka Matematyki, czyli Wolfram Language. Kilka rzeczy, które od razu rzucają się w oczy, to:

- argumenty funkcji otacza się nawiasami kwadratowymi,
- nazwy funkcji wbudowanych (np. sinus) pisze się wielką literą.

W pierwszej linii programu definiujemy funkcję S (dla uproszczenia, zmienną ϕ w kodzie zamieniamy na t ; ponieważ parametry S też traktujemy jako następne jej argumenty, w kodzie powyżej definiujemy w efekcie funkcję siedmiu argumentów). Definiując w Mathematicie własną funkcję, korzystamy z operatora „:=”, a argumenty *po lewej stronie definicji* funkcji musimy – co użytkownikom innych języków może wydawać się dziwaczne – wyróżniać przyrostkiem „_”. Dlatego funkcję, która wyznacza oba pierwiastki danego trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, zapisalibyśmy *Pierwiastki[a_, b_, c_] := Roots[a*x^2+b*x+c==0, x]* (wbudowana funkcja **Roots** rozwiązuje równania wielomianowe), a następnie użyli na przykład tak: *Pierwiastki[2, 0, -m]*. W linii numer 3 najważniejsza jest funkcja **PolarPlot**, rysująca wykres we współrzędnych biegunowych $[a, b] \ni t \mapsto (r(t), t)$, gdzie r jest długością promienia wodzącego, a t jest kątem, jaki tworzy z osią OX . Najprostsze jej wywołanie w tym kontekście miałyby postać *PolarPlot[r[t], {t, a, b}]*. W naszym kodzie dodatkowo zmieniamy pewne opcje tej funkcji, korzystając z operatora nadawania wartości „->”:

```
PolarPlot[ S[t, a, b, m, n1, n2, n3], {t, 0, 2*Pi}, PlotLabel -> {m, n1, n2, n3}, Axes -> False ]
```

powodując, że w tytule wykresu są wypisywane wartości parametrów m, n_1, n_2, n_3 , a osie współrzędnych nie będą rysowane.

Aby mieć możliwość interaktywnego zmieniania wartości argumentów funkcji S innych niż t , zanurzamy wywołanie **PolarPlot** w funkcji **Manipulate**, która automatycznie stworzy okno z suwakami odpowiadającymi wartościom podanym jako dalsze jej argumenty. Przykładowo, podając (zob. w trzecim wierszu trzeciej linii kodu) $\{\{a, 1\}, 0, 5\}$, instruujemy **Manipulate**, że parametr a może przyjmować wartości z przedziału $[0, 5]$, z domyślnie ustawioną wartością równą 1. Nieco bardziej złożony argument $\{\{m, 4\}, 0, 20, 1\}$ oznacza, że m będzie domyślnie równe 4, będzie miało wartości z zakresu od 0 do 20, ale zmiana m będzie odbywać się ze skokiem co 1 – dzięki czemu m będzie przyjmować tylko *całkowite* wartości.

Teraz możemy zacząć zabawę z suwakami i śledzić na bieżąco, jak zmiany parametrów wpływają na zmiany kształtu krzywej. Na marginesie powyżej pokazano te efekty działania superformuły, które są zbliżone do naturalnych kształtów i które tak zachwyciły Gielisa. Parametry w postaci $(m, n_1, n_2 = n_3)$, z „biologicznymi” interpretacjami, pochodzą z artykułu Gielisa w *American Journal of Botany* 90(3) z 2003 roku. Czy obrazki są ładne? Niewątpliwie. Ale czy jest w nich coś głębszego? Na to pytanie nie podam odpowiedzi: przecież alchemia to wiedza tajemna.



mała delta

Nieskończoność: 4. Nie każda jest taka sama!

W poprzednim odcinku sprawdziliśmy, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych (także zbiór liczb całkowitych jest równoliczny z każdym z nich). Inaczej mówiąc, można ustawić liczby wymierne w pary z liczbami naturalnymi w taki sposób, że każda liczba wymierna stoi w parze z dokładnie jedną liczbą naturalną i każda liczba naturalna stoi w parze z dokładnie jedną liczbą wymierną. Można też powiedzieć, że wszystkie liczby wymierne da się zakwaterować w hotelu Hilberta.

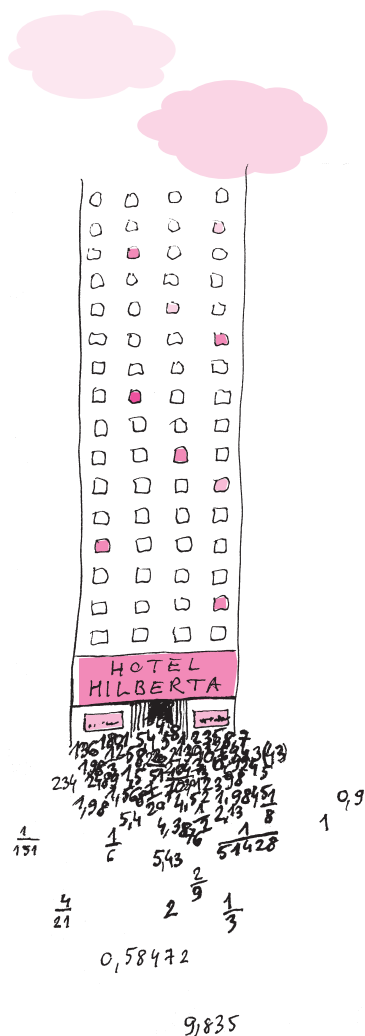
Wobec tego każde dwa rozważane do tej pory zbiory nieskończone okazywały się równoliczne. A może po prostu zawsze tak jest? Może każde dwa nieskończone zbiory są równoliczne? Może elementy dowolnych dwóch nieskończonych zbiorów da się ustawić w pary? Może każda nieskończoność jest pod tym względem taka sama?

Okazuje się, że nie! Udowodnimy mianowicie, że wszystkich liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. Jasne jest, że liczb rzeczywistych jest nie mniej niż liczb wymiernych – w takim sensie, że każdy z Czytelników prawdopodobnie jest w stanie wskazać liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna. Na przykład $\sqrt{2}$ albo takie słynne liczby, jak π czy e . Okazuje się jednak, że jest ich dużo więcej – jest ich więcej również w sensie rozważanego przez nas pojęcia równoliczności zbiorów.

Zanim jednak ten fakt udowodnimy, niezbędne jest ustalenie pewnej podstawowej własności liczb rzeczywistych. Wygodne w tym celu będzie wyobrażenie sobie liczb rzeczywistych jako wszystkich punktów na prostej, zwanej osią liczb rzeczywistych. Przy takim wyobrażeniu stanie się jasne, że jeśli rozpatrzę dowolny ciąg coraz krótszych domkniętych przedziałów $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, z których każdy kolejny zawiera się w poprzednim, to istnieje punkt na osi (czyli liczba rzeczywista), który należy do wszystkich tych przedziałów. Mam nadzieję, że wszyscy Czytelnicy zgodzą się z tą własnością, a zresztą definicja zbioru liczb rzeczywistych bezpośrednio właśnie na tej własności jest oparta.

Mając to w pamięci, przejdźmy do dowodu faktu, że liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. Właściwie spróbujemy zakwaterować tylko liczby z przedziału $[0, 1]$. Jeśli nawet ich nie uda się zakwaterować, to oczywiście tym bardziej nie da się tego zrobić ze wszystkimi liczbami rzeczywistymi. Załóżmy jednak, nie wprost, że jest to możliwe. Załóżmy, że udało się zakwaterować wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$ w hotelu Hilberta. Została zatem stworzona lista kwaterunkowa x_0, x_1, x_2, \dots wszystkich liczb z tego przedziału, gdzie liczba x_0 to liczba zakwaterowana do pokoju o numerze 0, liczba x_1 to liczba zakwaterowana do pokoju 1 itd. Co więcej, na tej liście są wszystkie liczby z rozważanego przedziału.

To założenie doprowadzi nas jednak do sprzeczności. Podzielmy bowiem rozważany przedział na trzy części $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ i $[2/3, 1]$. Zauważmy, że jeden z tych trzech przedziałów nie zawiera liczby x . W najgorszej sytuacji (gdy jest równa $1/3$ lub $2/3$) leży w dwóch z nich. A zatem wybierzmy z nich ten przedział, w którym nie leży x_0 . Niech to będzie przedział I_0 . Następnie podzielmy przedział I_0 na trzy równe domknięte odcinki (stykające się brzegowymi punktami). Zauważamy, że x_1 na pewno nie leży w jednym z nich. Oczywiście być może x_1 nie leży nawet w całym przedziale I_0 . Ale jeśli leży,



to co najwyżej w dwóch z tych trzech części jego podziału. Tak czy inaczej, jest jedna część, którą nazwiemy $I_1 \subseteq I_0$, w której x_1 na pewno nie leży. Dzielimy podobnie I_1 na trzy części i podobnie wybieramy tę z nich, w której nie ma x_2 , nazywając ją I_2 . I postępujemy tak dalej, konstruując nieskończony ciąg coraz mniejszych domkniętych przedziałów $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, z których każdy kolejny zawarty jest w poprzednim.

Ale, zgodnie z naszą obserwacją, istnieje liczba p , która leży we wszystkich tak wybranych przedziałach. Zauważmy jednak, że $p \neq x_0$, bowiem p leży w I_0 , w przeciwieństwie do x_0 . Podobnie $p \neq x_1$, bowiem p jest punktem na I_1 , a x_1 nie jest. Rozumując tak dalej, zauważamy, że wobec tego liczby p nie ma w ogóle na naszej liście kwaternkowej x_0, x_1, x_2, \dots , co jest sprzeczne z założeniem, że umieściliśmy na niej wszystkie liczby z przedziału $[0, 1]$.

A zatem liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta! Zbiór liczb rzeczywistych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Poszukajmy innych tego typu przykładów. Okazuje się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych też ma tę własność, że nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich jego elementów w hotelu Hilberta. Założmy przeciwnie, że to możliwe, i rozważmy listę kwaternkową, na której przyporządkowano wszystkie takie ciągi do pokoi. Lista ta będzie miała charakter tabelki o nieskończonej szerokości i wysokości, w której w kolejnych rzędach zapisano kolejne nieskończone ciągi zer i jedynek przyporządkowane do kolejnych pokoi hotelu Hilberta. Jej lewy górny róg mógłby wyglądać następująco:

0	0	1	1	0	1	...
1	1	1	0	1	1	...
2	0	0	0	0	1	...
3	1	1	0	1	1	...
4	0	1	1	1	1	...
...						

W poszukiwaniu sprzeczności spójrzmy na przekątną tej tabelki i rozważmy ciąg zer i jedynek, w którym wszystko jest zrobione „na złość”. Niech ten ciąg będzie skonstruowany następująco: jeśli początkowy (zerowy) wyraz ciągu z pokoju 0 to 0, to niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. Podobnie, jeśli kolejny (pierwszy) wyraz ciągu zakwaterowanego w pokoju 1 to 0, niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. I tak dalej, nasz ciąg na n -tym swoim miejscu niech ma tę z liczb 0 lub 1, która nie występuje na n -tym miejscu ciągu zakwaterowanego w n -tym pokoju. Gdyby lewy górny róg listy kwaternkowej wyglądał tak, jak przedstawiono wyżej, nasz ciąg zaczynałby się więc następująco: 1, 0, 1, 0, 0, ...

Ale tego znalezionego ciągu, wbrew założeniu, nie ma na liście kwaternkowej. Rzeczywiście, różni się od każdego ciągu na tej liście: od zerowego na zerowym miejscu, od pierwszego na pierwszym, i tak dalej, od n -tego

ciągu na n -tym swoim miejscu. Co stanowi sprzeczność i dowodzi, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zer i jedynek nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Aby znaleźć kolejny taki przykład, rozważmy pojęcie zbioru wszystkich podzbiorów danego zbioru. Jeśli zbiór A to trzyelementowy zbiór osób, do którego należą Alojzy, Bonifacy i Cezary, to zbiór jego podzbiorów ma 8 elementów. Są to: zbiór pusty, trzy zbiory jednoosobowe (zbiór, którego jedynym elementem jest Alojzy, zbiór, którego jedynym elementem jest Bonifacy, i taki sam zbiór, tyle że z Cezarym), trzy zbiory dwuosobowe o elementach odpowiednio: Alojzy z Bonifacym, Bonifacy z Cezarym i Alojzy z Cezarym, oraz w końcu cały trzyelementowy zbiór. Łatwo można wysnuć wniosek, że podzbiorów zbioru n -elementowego jest 2^n – zachęcamy Czytelników do zastanowienia się przez chwilę, dlaczego tak jest. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A będziemy oznaczać jako $\mathcal{P}(A)$.

Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jego elementy to wszystkie podzbiory zbioru liczb naturalnych, a więc na przykład zbiór liczb nieparzystych, zbiór liczb pierwszych, ale też zbiór pusty. Oczywiście $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest zbiorem nieskończonym. Okazuje się, że jest on na tyle duży, że także nie jest możliwe zakwaterowanie jego elementów w hotelu Hilberta. Aby tego dowieść, zauważmy, że każdy podzbiór liczb naturalnych można zakodować za pomocą nieskończonego ciągu zero-jedynkowego, w którym kolejne cyfry kodują obecność (oznaczaną jako 1) lub nieobecność (oznaczaną jako 0) kolejnych liczb naturalnych w rozpatrywanym podzbiore. Zatem kod zbioru liczb pierwszych zacznie się od 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ..., bowiem 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10 nie są pierwsze, więc na tych miejscach w ciągu widzimy zera, a 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi, co skutkuje jedynekami na odpowiednich miejscach ciągu.

Ale skoro każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych ma swój unikalny kod w postaci nieskończonego ciągu zer i jedynek (oraz każdy ciąg zer i jedynek odpowiada pewnemu podzbiorowi liczb naturalnych), to nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych w hotelu Hilberta, bowiem, jak już wiemy, nie da się tego zrobić dla zbioru wszystkich ciągów zero-jedynkowych. Zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N} . Możemy napisać, że $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Okazuje się, że zachodzi ogólniejszy fakt. Powyższa zależność jest prawdziwa dla dowolnego zbioru A (skończonego lub nieskończonego). Podzbiorów zbioru A nigdy nie da się ustawić w pary z jego elementami, co będziemy notować $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Zachęcam Czytelników do zastanowienia się, dlaczego tak jest. Wystarczy nieco zmodyfikować przedstawiony dowód, że $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$!

Twierdzenie to udowodnił już Georg Cantor. Nosi ono jego imię. Pora więc wrócić do jego rozważań i prześledzić historię zaskakującego problemu, którego Cantorowi nie udało się rozwiązać. Ale to już w następnym odcinku.

Michał KORCH

Salamandry buszują w JOWach

Andrzej DĄBROWSKI

W końcu 2016 roku sąd okręgowy stanu Wisconsin po raz pierwszy w historii wyborów do Kongresu USA zdecydował o zmianie dystryktów wyborczych. Uzasadnieniem było to, że jednomandatowe dystrykty wyborcze dawały niesprawiedliwą przewagę Republikanom. Zdaniem sądu partia ta, mając przewagę w kongresie stanowym, po spisie powszechnym 2010 roku wyznaczyła dogodny dla siebie układ dystryktów.

Spis powszechny, ogłaszany w USA co 10 lat (począwszy od 1930 zawsze 1 kwietnia), ustala aktualną liczbę ludności w USA. Na jego podstawie, zgodnie z Konstytucją, określa się liczbę kongresmanów reprezentujących każdy stan w Izbie Reprezentantów.

Rozdział drugi 14. poprawki Konstytucji USA stanowi: „Reprezentanci zostaną rozdzieleni między stany proporcjonalnie do ich liczności, ustalonej jako całkowita liczba mieszkańców każdego stanu, z wyłączeniem Indian niepodlegających opodatkowaniu”.

W każdym stanie ustala się jednomandatowe dystrykty wyborcze (tytułowe JOWy). Liczba dystryktów odpowiada aktualnej liczbie reprezentantów danego stanu. Z wyjątkiem stanów, które reprezentuje jeden członek Izby Reprezentantów (np. Alaska czy Vermont), dystrykty w każdym stanie powinny być tak wybrane, by miały zbliżoną liczbę ludności, a ich kształt winien być zwarty i spójny.

Pierwszy z tych problemów, polegający na podziale mandatów według zadanej proporcji ludności w stanach, nie ma jednoznacznego rozwiązania. Pisałem o tym już w *Delcie (Mandaty z urny, Δ_{11}^2)*. Drugi problem jest o wiele trudniejszy. Dystrykty powinny być tak wyznaczone, aby nie tylko spełniały wymagania co do równej liczby ludności, miały odpowiedni kształt, uwzględniały proporcje rasowe, nie dzieliły miast, ale i odzwierciedlały proporcjonalne poparcie partii politycznych w stanie.

Manipulowanie kształtem dystryktów w celu uzyskania nieproporcjonalnie korzystnego wyniku wyborów jednomandatowych nazwano **gerrymanderingiem**.

Dziwny kształt, przypominający salamandrę, nadał w 1812 roku jednemu z dystryktów gubernator Massachusetts Elbridge Gerry – stąd **gerry** – **salamander**. Dzięki takim manipulacjom Demokraci uzyskali przewagę mandatów w stanie.

Gerrymandering jest coraz bardziej agresywny. Można konstruować wygodne dla siebie mapy, mając dostęp do danych o preferencjach wyborczych oraz wyspecjalizowanych narzędzi informatycznych (np. program *Maptitude*). Nastąpiło odwrócenie relacji: to nie wyborcy wybierają polityków, a politycy – wyborców.

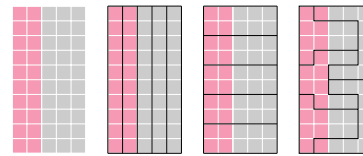
Udowodnienie, że mamy do czynienia z tendencyjnym podziałem stanu na dystrykty, jest niezwykle trudne. Sędzia Sądu Najwyższego USA Justice Stewart powiedziała: *Gerrymandering jest jak pornografia – łatwo zobaczyć, trudno zdefiniować*. Sąd Najwyższy w 2004 roku odrzucił wszystkie dowody na gerrymandering, nazywając go problemem nierozstrzygalnym.

W poszukiwaniu metod wykrywania symptomów gerrymanderingu zaangażowali się również matematycy. Próbuje się zdefiniować, co to znaczy odpowiedni kształt dystryktu. Na Tufts University powstała grupa badawcza *Metric Geometry and Gerrymandering Group*. Co roku organizowany jest otwarty konkurs na prace, które pozwolą wykryć występowanie gerrymanderingu.

Problem gerrymanderingu dotyczy nie tylko USA, ale i innych krajów, nie wykluczając Polski. Wszędzie tam, gdzie mandaty ustalane są w jednomandatowych okręgach wyborczych, zagrożenie gerrymanderingiem jest możliwe.

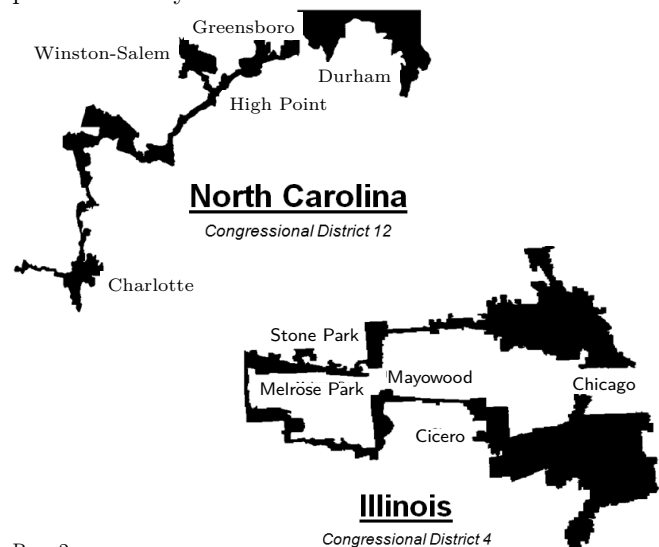
Gerrymandering

Oto przykład obszaru, składającego się z 50 obwodów wyborczych, w którym zieloni mają 40% poparcia, a szarzy – 60%. Obszar należy podzielić na 5 równolicznych dystryktów.



Rys. 1

Obszar można podzielić zgodnie z proporcją głosów zielonych do szarych w całym obszarze (2:3) (rys. 1a), dokładnie sprzecznie z tą proporcją (0:5 i 3:2) (rys. 1b i 1c). Podział z rysunku 1b charakteryzuje się regularnymi kształtami dystryktów, a podział z rysunku 1c – nieregularnymi. Ze względu na kształty podział 1c nazwano by gerrymanderingiem. Niestety podział 1b nie zwróciłby niczyjej uwagi. Dopiero po wyborach okazałoby się, że podziały z rysunków 1b i 1c są manipulacją wyborczą. W rzeczywistości mamy czasami bardzo dziwny podział na dystrykty – przykłady dystryktów o fantazyjnych kształtach pokazano na rysunku 2.



Rys. 2

Należy sobie odpowiedzieć na pytanie: czy jest to zmanipulowany podział, czy też stan ma takie ograniczenia ludnościowe lub geograficzne, że lepszych dystryktów nie da się wykreślić?

Rozwiązanie statystyczne

Naturalnym sposobem na stwierdzenie, czy przekroczone akceptowalny stopień gerrymanderingu, jest użycie testów statystycznych. Ich działanie podobne jest do matematycznego dowodu nie wprost. Bardzo upraszczając, dowód nie wprost polega na tym, że założenie, iż teza jest nieprawdziwa, prowadzi do fałszywego wniosku. W przypadku testów statystycznych uzasadnienie tezy, zwane w statystyce weryfikacją hipotezy roboczej (konkurencyjnej), polega na pokazaniu, że jej zaprzeczenie (hipoteza zerowa) prowadzi do mało prawdopodobnego, w świetle zebranych danych, wyniku.

Pierre Simon de Laplace na początku XIX wieku twierdził, że komety nie należą do Układu Słonecznego. Uzasadnienie tego stwierdzenia było statystyczne. Gdyby komety należały do Układu Słonecznego, to ich płaszczyzny orbitalne byłyby zbliżone do siebie, tak jak płaszczyzny orbitalne planet. Tymczasem obserwacje pokazywały, że płaszczyzny orbitalne komet były bardzo zróżnicowane. Jest więc mało prawdopodobnym, (Laplace nie wylicza tego prawdopodobieństwa), aby obiekty o tak zróżnicowanych orbitach należały do Układu Słonecznego.

W czasach Laplace'a pojęcie testu statystycznego nie istniało.

Testy statystyczne są uznanym sposobem weryfikacji hipotez. W ten sposób uznano za udowodnione istnienie cząsteczki Higgsa, skuteczność aspiryny w profilaktyce ataków serca czy nawet fakt, że rakiety V2 atakowały przypadkowe punkty Londynu.

Podstawowym problemem w testowaniu jest obliczenie prawdopodobieństwa wystąpienia nietypowych obserwacji (w „teście” Laplace'a: zróżnicowanych orbit komet), gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa (np. że komety pochodzą z Układu Słonecznego). Obliczenia te mogą nie być proste z wielu powodów. Z jednej strony, należy określić symptomy (testy) nietypowych obserwacji, a z drugiej – znaleźć rozkład prawdopodobieństwa tych symptomów przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa.

W większości praktycznych sytuacji trudno jest znaleźć odpowiedni rozkład teoretyczny. Stosuje się wtedy techniki intensywnie wykorzystujące moc obliczeniową komputerów. Do nich należą metody Monte Carlo oraz metoda MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*).

Symptomy gerrymanderingu

W praktyce prawniczej tylko niektóre z wielu proponowanych symptomów zyskały popularność.

Asymetria

Nietrudno zauważyć, że nawet mając mniejsze poparcie w obszarze, który będzie dzielony na dystrykty, można

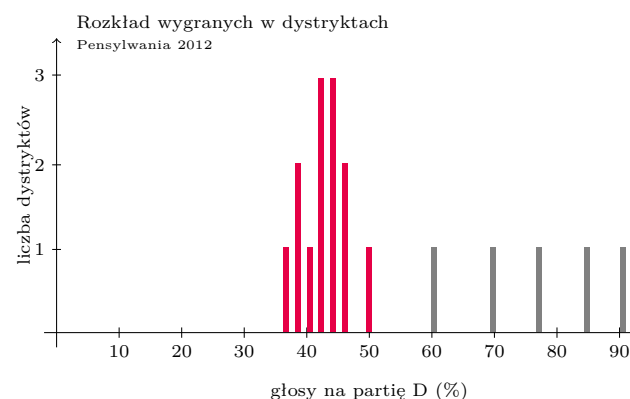
uzyskać przewagę mandatów na swoją korzyść. Metoda „dzielenie i pakowanie” polega na tym, że tworzy się dystrykty dla przeciwnika, wybierając do nich jak największą liczbę obwodów, w których ma on przewagę („pakowanie”). Pozostałe dystrykty tworzy się tak, aby uzyskać w nich minimalną przewagę, rozdzielając równomiernie obwody przeciwnika („dzielenie”).

Rozkład głosów na partię, której głosy zostały odpowiednio upakowane i podzielone w dystryktach, charakteryzuje się tym, że przeważają w nim wartości małe, a wartości duże i bardzo duże są rzadkie. Taki rozkład nazywany jest w statystyce dodatnio asymetrycznym (np. rozkład dochodów czy ciśnienia krwi u pacjentów).

W przykładowym podziale (rys. 1c) obwody szare upakowano do dwóch dystryktów, w każdym z nich 9 szarych i 1 zielony obwód. Pozostałych 12 szarych i 18 zielonych obwodów rozdzielono równo między trzy dystrykty. Powstały trzy dystrykty z 60-procentową wygraną zielonych i dwa z 90-procentową przewagą szarych. Wybory wygrywają zieloni w stosunku 3:2, mimo że w całym obszarze oddano na nich tylko 40% głosów. Rozkład wyników dla szarych 40, 40, 40, 90, 90 jest dodatnio asymetryczny.

W wyborach z 2012 roku w Pensylwanii rozkład głosów oddanych na Demokratów w 18 dystryktach był dodatnio asymetryczny.

Mimo że w całym stanie poparcie dla Demokratów było nieznacznie większe (50,28% głosów), to uzyskała ona tylko 5 mandatów (27,78%). Rządząca w Pensylwanii partia Republikańska tak rozdzieliła dystrykty, że znaczące poparcie na Demokratów skupiło się w 5 dystryktach, a w pozostałych 13 z niewielką przewagą wygrali Republikanie.



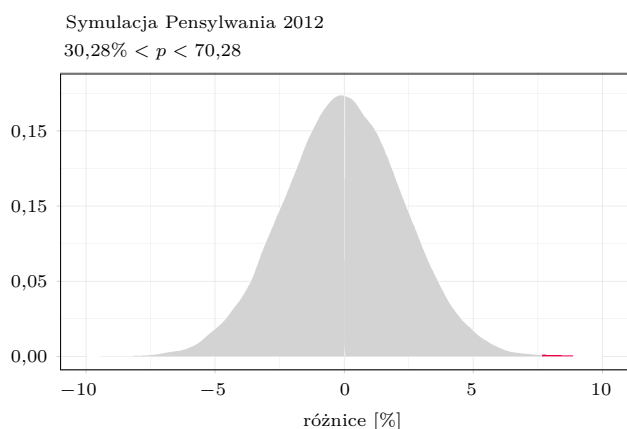
Rys. 3. Kolorami (zielony – Republikanie, szary – Demokraci) oznaczono dystrykty, w których wygrała dana partia.

Wielkość asymetrii można zmierzyć różnicą między średnią arytmetyczną a medianą. Dla rozkładów dodatnio asymetrycznych ta różnica jest dodatnia, dla symetrycznych – równa 0. Takiej metody użyły niektóre sądy w Stanach Zjednoczonych, uznając, że występuje gerrymandering, gdy ta różnica jest duża.

W przypadku wyborów w Pensylwanii różnica między średnią a medianą wśród danych z 18 dystryktów wynosiła 7,71%. Czy ta różnica jest duża? Zgodnie z metodologią testowania należałoby ocenić, jakie byłoby prawdopodobieństwo przekroczenia tej wartości, gdyby rozkład głosów na Demokratów w 18 dystryktach był symetryczny wokół 50,28%. Przyjmując, że procent głosów w dystryktach ma rozkład jednostajny w przedziale (30,28; 70,28), prawdopodobieństwo, że różnica między średnią a medianą jest większa niż 7,71%, wynosi 0,0004.

Wniosek: Jest niezwykle mało prawdopodobne, aby w tej sytuacji rozkład wyników głosowania na Demokratów był symetryczny wokół 50,28%.

Symulacja metodą Monte Carlo (próbka 10 000 powtórzeń). Używany zazwyczaj w tej sytuacji test t Studenta nie jest dobrym rozwiązaniem.



Rys. 4

Na rysunku 4 przedstawiony jest rozkład różnic między średnią a medianą w 18 dystryktach, przy założeniu symetrii rozkładu głosów na Demokratów ze średnią 50,28%. Ledwo widoczny czerwony obszar na prawo od 7,71 odpowiada prawdopodobieństwu osiągniętego wyniku w wyborach przy tym założeniu.

Rozwlekłość

Zauważono, że w stanach z dystryktami o dziwnych, rozwlekłych kształtach dochodzi do niesprawiedliwego podziału mandatów. Sąd Najwyższy USA wielokrotnie powtarzał w swoich ocenach, że *dziwnie wyglądające kształty są wskaźnikami złych intencji*.

Aby ocenić stopień tej manipulacji, należałoby znaleźć jakiś „wskaźnik dziwności kształtu”. Jednym ze stosowanych jest wskaźnik Polsby’ego–Poppera (wskaźnik *PP*), będący stosunkiem pola powierzchni dystryktu do pola koła o obwodzie równym obwodowi dystryktu. Z nierówności izoperymetrycznej wynika, że wskaźnik ten nigdy nie przekracza 1 – wartości dla koła, czyli obszaru idealnie „niedziwnego”.

Pole wewnątrz prostej zamkniętej krzywej płaskiej o długości L jest największe dla koła o obwodzie L (p. artykuł w Δ_{11}^4 *Symetryzacja Steiner*).

Jednak nie zawsze małe wartości *PP* wskazują na zafałszowanie, a duże na poprawność wyborów. Podział

z rysunku 1a, gdzie dystrykty są najbardziej wydłużone (wskaźnik *PP* jest najmniejszy i wynosi około 0,26), idealnie odpowiada proporcjom głosów. Podział z rysunku 1b ($PP \approx 0,64$ jest największy) skrajnie zafałszowuje proporcje głosów

PP zależy też od skali mapy – im mniejsza skala, tym mniejsze wartości. Odpowiedzialny za to jest efekt fraktalny – im mniejsza skala, tym dłuższa jest linia brzegowa.

Niezgodność głosów i mandatów – wskaźnik *EG*

Najbardziej przemawiającym do wyobraźni jest wskaźnik *EG* (*Efficiency Gap* – wskaźnik niewykorzystanych głosów). Wskaźnik ten liczy frakcję różnicy niewykorzystanych przez partie głosów w stosunku do ogólnej liczby oddanych głosów.

Artykuł *Jak wykryć salamandrę w Δ_{18}^4* poświęcony jest wadom i zaletom *EG*.

Gdy partia zdobywa mandat w danym dystrykcie, to głosy niewykorzystane są nadwyżką nad połowę głosów niezbędną do jego uzyskania. Gdy partia nie zdobywa mandatu, to wszystkie oddane na nią głosy są niewykorzystane.

Na rysunku 1a zieloni stracili po 5 głosów w dwóch dystryktach, szarzy – po 5 głosów w trzech. Różnica $15 - 10 = 5$ głosów dla szarych oznacza, że nie wykorzystali oni $5/50 = 10\%$ wszystkich głosów. Jest to właśnie współczynnik *EG* dla szarych (dla zielonych wynosi on -10%). Jak widać, *EG* nie oddaje poprawnego podziału na dystrykty w tym przypadku. Lepiej byłoby, gdyby stracone głosy były liczone proporcjonalnie do zasobu głosów danej partii na całym obszarze (stanie). Tu zieloni stracili $10/20 = 50\%$ swoich głosów, szarzy $15/30 = 50\%$, więc skorygowany współczynnik *EG* (\widetilde{EG}) wynosi 0%. Mimo wielu niekorzystnych własności *EG* wysokie wartości tego wskaźnika (powyżej 7%) są przyjęte jako argument sądowy przemawiający za gerrymanderingiem.

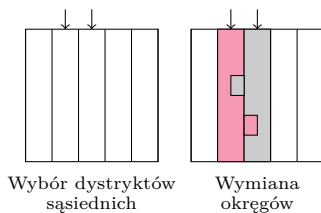
Szerzej: dustingmixon.wordpress.com/2017/10/11/an-impossibility-theorem-for-gerrymandering/

Anthony Kennedy, sędzia Sądu Najwyższego USA, zalecał użycie *EG* jako obiektywnego testu: *Setka różnych sędziów może badać te same mapy i pod warunkiem, że są oni biegli w arytmetyce, dojdą oni do identycznych konkluzji, czy mapy mieszczą się w dopuszczalnym zakresie i które z nich należy uznać za niekonstytucyjne*. (cyt. za: ballotpedia.org/Efficiency_gap).

Metoda MCMC – test $\sqrt{\epsilon}$

Rozkład prawdopodobieństwa symptomów gerrymanderingu jest trudny do wyznaczenia głównie z powodów geograficzno-politycznych. Lista wszystkich możliwych podziałów na dystrykty w danym stanie spełniających prawnie wymagane warunki spójności, reprezentatywności rasowej i niepodzielności miast jest trudna do ustalenia.

Szczegóły twierdzenia Pegdena można znaleźć w pracy: M. Chikina, A. Frieze, W. Pegden *Assessing significance in a Markov chain without mixing*, PNAS March 14, 2017 114 (11) 2860-2864.



Rys. 5

Nieprzywiedlność – z każdego stanu można przejść do każdego.

Odwracalność – prawdopodobieństwo przejścia trajektorii i_0, i_1, \dots, i_k jest równe prawdopodobieństwu przejścia trajektorii i_k, i_{k-1}, \dots, i_0 .

Stacjonarność – dla każdego stanu startowego po odpowiednio długim czasie łańcuch zbiega do tego samego rozkładu π .

Do utworzonego łańcucha map można zastosować twierdzenie Pegdena. W tym przypadku X_0 jest mapą podlegającą ocenie, X_1, \dots, X_k – mapami wygenerowanymi w kolejnych krokach. π jest rozkładem prawdopodobieństwa w przestrzeni wszystkich dopuszczalnych map. Etykiety e_i to wartości funkcji opisującej wartości testu na występowanie gerrymanderingu (np. różnica między średnią a medianą, miara rozwlekłości $1/PP$, współczynnik EG , \tilde{EG}). Z twierdzenia Pegdena wynika, że prawdopodobieństwo wystąpienia ε -outliera w ciągu e_0, e_1, \dots, e_k nie przekracza $\sqrt{2\varepsilon}$.

Oszacowanie prawdopodobieństwa wystąpienia symptomu gerrymanderingu na zaobserwowanym poziomie jest możliwe dzięki algorytmowi „pełzającego” generowania map podziału na dystrykty i twierdzeniu udowodnionemu przez Wesleya Pegdena i innych.

Algorytm startuje od mapy, która podlega ocenie. W kolejnych krokach nowa mapa powstaje przez wymianę pary losowo wybranych obwodów na granicy dwóch losowo wybranych sąsiadujących ze sobą dystryktów. Jeśli ta wymiana prowadziłaby do podziału prawnie niedozwolonego, losowanie powtarza się aż do skutku. Ciąg map utworzonych w kolejnych krokach tworzy łańcuch Markowa.

Twierdzenie (Pegden, test $\sqrt{\varepsilon}$). *Niech $\mathcal{M} = X_0, X_1, \dots$ będzie odwracalnym, nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa o stacjonarnym rozkładzie stanów π . Przypuśćmy, że stanom \mathcal{M} przypisano etykiety o wartościach rzeczywistych. Jeżeli X_0 ma rozkład π , wtedy dla każdego ustalonego k prawdopodobieństwo, że etykieta X_0 jest ε -outlierm pośród etykiet przypisanych trajektorii X_0, X_1, \dots, X_k , nie przekracza $\sqrt{2\varepsilon}$.*

Etykieta e_0 jest ε -outlierm dla ciągu etykiet e_0, e_1, \dots, e_k , gdy

$$\frac{\#\{i : e_i \geq e_0\}}{k + 1} \leq \varepsilon$$

Gdy na bazie mapy X_0 wygenerujemy 1000 map i $e_0 > \max(e_1, e_2, \dots, e_{1000})$, to prawdopodobieństwo, że e_0 osiągnęło przypadkowo tak dużą wartość, jest mniejsze niż 0,045. Gdy wśród 1000 dodatkowo wygenerowanych map pięć będzie miało wartości co najmniej takie jak e_0 , to mapa X_0 nie może być uważana za zmanipulowaną, gdyż prawdopodobieństwo takiego wyniku wynosi 0,11, co jest stosunkowo wysokim prawdopodobieństwem.

Z twierdzenia Pegdena można też oszacować, ile „pełzających” map należy wykonać, aby uzyskać zadany poziom dziwności tej mapy (zwany w statystyce poziomem istotności). Aby prawdopodobieństwo, że duża wartość etykiety e_0 jest przypadkowa, nie przekroczyło 0,05, należy wygenerować więcej niż $800 \cdot r$ map takich, że spośród nich dokładnie $r - 1$ etykiet ma wartość co najmniej tak dużą jak e_0 . Analizując tą metodą podział Pensylwanii na dystrykty w 2012 roku, obliczono, iż prawdopodobieństwo, że obserwowane wartości różnicy między średnią i medianą są przypadkowo tak duże, jest mniejsze niż 0,0004. Oznacza to silne argumenty za wystąpieniem gerrymanderingu. Wymagało to bardzo wielu godzin pracy silnych komputerów.

Finał

Rozstrzygnięcie o możliwości wystąpienia gerrymanderingu wymusza na sędziach użycie coraz bardziej skomplikowanych metod matematycznych i statystycznych. Wykraczają one daleko poza umiejętności arytmetyczne, o których mówił sędzia Kennedy.

Tradycyjne sądownictwo broni się przed takimi nowinkami. Nawet wskaźnik EG spotyka się z oporem. Jeden z sędziów argumentował, że trudność w zrozumieniu tego wskaźnika, z jaką społeczeństwo mogłoby się spotkać, doprowadziłaby ostatecznie do osłabienia wiarygodności sądu. Inny z kolei powiada: *Może to po prostu wynikać z mojego wykształcenia, ale mogę ten wskaźnik opisać tylko jako socjologiczny belkot.*

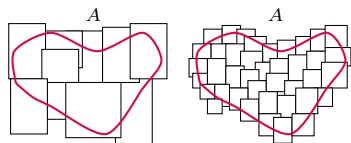
W reakcji na takie wypowiedzi w kwietniu 2018 roku pojawiła się na Uniwersytecie Princeton praca pod tytułem *Antidotum na belkot. Propozycja zestawu narzędzi dla sędziów do testowania stronniczego gerrymanderingu*. W pracy tej proponuje się m.in. użycie testu Studenta do oceny zagrożenia gerrymanderingiem. I na jej końcu pojawia się złośliwe stwierdzenie: *Skoro piwowarzy potrafią wykorzystać moc statystycznego rozumowania, z pewnością sędziowie też mogą.*

Nadeszły ciekawe czasy dla prawników.

Test Studenta powstał przy okazji kontroli jakości w browarze Guinnessa.

Miara

Przypuśćmy, że μ jest miarą określoną na wszystkich podzbiórach \mathbb{R} , która jest dodatnia i skończona na odcinkach oraz niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Podzielmy odcinek $[0, 10]$ na części w taki sposób, że dwie liczby należą do jednej części tylko wtedy, gdy różnica między nimi jest wymierna. Dla przykładu, liczby 2 i 7,3 są w tej samej części, ale w innej części niż $\sqrt{5}$. Niech $\mathcal{V} \subseteq [0, 10]$ będzie zbiorem, do którego wybraliśmy dokładnie jednego reprezentanta z każdej części. Ustawmy wszystkie liczby wymierne z przedziału $[-10, 10]$ w nieskończony ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ i niech \mathcal{V}_n będzie zbiorem \mathcal{V} przesuniętym o q_n . Zbiory \mathcal{V}_n są parami rozłączne, ich suma zawiera odcinek $[0, 10]$, ale jest zawarta w $[-10, 20]$ (dlaczego?). Ponieważ wszystkie zbiory \mathcal{V}_n mają tę samą miarę, to jeśli wynosi ona 0, to odcinek $[0, 10]$ musiałby mieć miarę 0, a jeśli jest ona dodatnia, to odcinek $[-10, 20]$ miałby miarę nieskończoną. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność. Zbiór \mathcal{V} nazywamy **zbiorem Vitaliego**.



Coraz dokładniejsze pokrycia zbioru A prostymi prostokątami dają coraz lepsze przybliżenie jego miary zewnętrznej λ^* .

Człowiek to istota nie tylko myśląca, ale i *mierząca* – można by rzec górnolotnie, że mierzenie (rozmiarów wrogiej armii, zaopatrzenia spichrzów, stanu skarbcza itp.) leży u podstaw naszej cywilizacji. W języku matematyki **miara** jest definiowana przez następujące, zdroworozsądkowe warunki. Po pierwsze, jest to *funkcja*, która podzbiorem pewnej przestrzeni przyporządkowuje liczbę nieujemne (np. miarą pewnego podzbioru przestrzeni powietrznej ograniczonej balonikiem jest 100 cm^3). Po drugie, jakąkolwiek przestrzeń rozpatrujemy, jej pusty podzbiór ma miarę 0 (tak jak pusty skarbiec czy nienapompowany balonik). Po trzecie, jeśli połączę wiele *rozłącznych* podzbiorów w jeden, to miara tak powstałego podzbioru ma być sumą miar podzbiorów wyjściowych (tutaj „wiele” może również oznaczać „przeliczalnie wiele”, szczególnie można znaleźć w artykułach Michała Korcha i Marty Szumańskiej w Δ_{19}^4).

Czy każdy podzbiór dowolnej przestrzeni możemy zmierzyć? Okazuje się, że mogą być z tym problemy. Dla przykładu, nie istnieje miara μ określona na wszystkich podzbiórach zbioru liczb rzeczywistych w taki sposób, że miara dowolnego odcinka jest dodatnia i skończona oraz przesuwając zbiór na prostej, nie zmieniamy jego miary (uzasadnienie na marginesie). Ważne jest zatem, aby definiując miarę, zaznaczyć, jaka jest jej *dziedzina*, czyli jakie zbiory są względem niej **mierzalne**.

Jak w takim razie możemy zdefiniować miarę – poza trywialnym przypadkiem **miary liczącej**, która podzbiorem zbioru przeliczalnego przyporządkowuje liczbę elementów? Z pomocą przychodzi nam pojęcie **miary zewnętrznej**. Jest to nieujemna funkcja ν określona na *wszystkich* podzbiórach danej przestrzeni, która spełnia warunki: (a) $\nu(\emptyset) = 0$, (b) jeśli $A \subseteq B$, to $\nu(A) \leq \nu(B)$, (c) miara zewnętrzna „połączenia” dowolnie wielu zbiorów (niekoniecznie rozłącznych) jest nie większa od sumy miar zewnętrznych tych zbiorów. Jeśli znajdziemy miarę zewnętrzną (warunki są łagodniejsze od tych, które definiują miarę!), to możemy zapytać o zbiory A , które są dobrymi „rozdzielnikami”, to znaczy dla dowolnego podzbioru S badanej przestrzeni zachodzi $\nu(S \setminus A) + \nu(S \cap A) = \nu(S)$. Mówimy wówczas, że zbiór A spełnia **warunek Carathéodory’ego** względem ν . Okazuje się, że jeśli ograniczymy ν do zbiorów spełniających warunek Carathéodory’ego względem niej, to otrzymamy miarę (jak już wspomnieliśmy, określenie dziedziny przy definiowaniu miary jest bardzo istotne!).

Uf, zrobiło się bardzo abstrakcyjnie – zobaczymy, jak to działa na przykładzie. Co to jest pole powierzchni, każdy widzi, ale mało kto potrafiłby je zdefiniować w sposób zadowalający matematyka (Czytelniku, jeśli nie wiesz jak, spróbuj przez chwilę uczynić to sam!). Zaczniemy od zdefiniowania pola prostokąta o bokach równoległych do osi ustalonego układu współrzędnych (taki prostokąt nazwiemy „prostym”). Dla prostego prostokąta $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ określamy pole zgodnie z naszymi oczekiwaniami, czyli $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Dla dowolnie ustalonego podzbioru płaszczyzny A rozważmy teraz wszystkie możliwe jego pokrycia przeliczalną liczbą prostych prostokątów, a dla każdego takiego pokrycia zsumujmy pola tych prostokątów. *Kres dolny* (czyli największe ograniczenie dolne) tych sum oznaczmy jako $\lambda^*(A)$. Można udowodnić, że λ^* jest miarą zewnętrzną na płaszczyźnie. Jeśli więc ograniczymy ją do zbiorów, które spełniają względem niej warunek Carathéodory’ego, dostaniemy miarę nazywaną dwuwymiarową **miarą Lebesgue’a** – i to jest dla matematyka porządnie zdefiniowane pole. Oczywiście, należałoby się jeszcze zastanowić, jakie właściwie zbiory są mierzalne względem miary Lebesgue’a (warunek Carathéodory’ego nie jest bowiem szczególnie wygodny). Jedną z charakterystyk mówi, że są to zbiory będące złączeniem co najwyżej przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych oraz zbioru, którego miara zewnętrzna λ^* wynosi 0. Brzmi bardzo skomplikowanie, ale oznacza między innymi, że możemy śmiało mierzyć pola wszystkich figur geometrycznych znanych ze szkoły średniej. I jak tu nie wierzyć w słowa Goethego: *Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie, od razu przekładają to na swój własny język i wówczas staje się to zupełnie czymś innym*.

Informatyczny kącik olimpijski (128): Trzej znajomi

W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania „Trzej znajomi”, które pojawiło się na drugim etapie XIII Młodzieżowej Olimpiady Informatycznej.

Trzej znajomi: Adam, Błażej i Cezary postanowili napisać ciąg n liczb naturalnych. Każdy z nich miał inny pomysł na ciąg. Adam chciał napisać ciąg $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, Błażej ciąg $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, zaś Cezary ciąg $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Znajomi długo nie mogli dojść do porozumienia, dlatego postanowili zbudować nowy ciąg $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Ustalili, że na każdej pozycji wybiorą którąś ze swoich opcji, czyli $d_i \in \{a_i, b_i, c_i\}$. Koledzy zgadzają się, że różnica pomiędzy największym a najmniejszym elementem ciągu d powinna być jak najmniejsza. Jaką najmniejszą różnicę może mieć ciąg d ?

Rozwiązanie $O(3^n \cdot n)$

Zacznijmy od rozwiązania, które generuje wszystkie możliwe ciągi d . Takich ciągów jest 3^n (wartość każdego z n elementów można wybrać na 3 sposoby). Spośród wygenerowanych ciągów należy wybrać ten, który ma najmniejszą różnicę pomiędzy największym a najmniejszym elementem, oraz wypisać tę różnicę. Dla ustalonego ciągu d znalezienie najmniejszego i największego elementu można wykonać w czasie $O(n)$ (przeglądamy kolejne elementy, pamiętając najmniejszy oraz największy). Rozwiązanie działa w czasie $O(3^n \cdot n)$.

Obserwacja:

Zauważmy, że dla ustalonych całkowitych x, y ($x \leq y$) możemy w czasie $O(n)$ sprawdzić, czy istnieje ciąg d , którego wartości elementów należą do przedziału $[x; y]$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, aby dla każdego indeksu i ($1 \leq i \leq n$) przynajmniej jeden z trzech elementów a_i, b_i, c_i należał do $[x; y]$.

Rozwiązanie $O((m_2 - m_1)^2 \cdot n)$

Niech m_1 i m_2 oznaczają odpowiednio wartość najmniejszego i największego elementu w ciągach a, b i c . Korzystając z powyższej obserwacji, wystarczy dla wszystkich par liczb całkowitych x i y ($m_1 \leq x \leq y \leq m_2$) sprawdzić, czy istnieje ciąg d , którego wartości należą do przedziału $[x; y]$. Spośród poprawnych przedziałów należy wybrać ten o najmniejszej różnicy $y - x$. Wszystkich przedziałów do sprawdzenia jest $O((m_2 - m_1)^2)$. Zatem rozwiązanie zajmuje czas $O((m_2 - m_1)^2 \cdot n)$.

Rozwiązanie $O(n^3)$

Niech S będzie zbiorem wartości, które występują przynajmniej raz w ciągu a, b lub c . Zauważmy, że wystarczy rozważać tylko takie przedziały $[x; y]$, dla których $x \leq y$ oraz $x, y \in S$. Moc zbioru S jest rzędu $O(n)$ (co najwyżej $3n$ różnych wartości może pojawić się w a, b, c , ponieważ tyle jest w sumie elementów). Stąd do sprawdzenia mamy $O(n^2)$ przedziałów, zatem całkowita złożoność czasowa wynosi $O(n^3)$.

Rozwiązanie $O(n^2 \cdot \log(n))$

Okazuje się, że nie musimy sprawdzać wszystkich wyżej wymienionych przedziałów. Wystarczy, że dla każdego $x \in S$ wyznaczymy takie najmniejsze y , że istnieje ciąg d , którego wartości elementów należą do $[x; y]$. Ustalmy

$x \in S$, dla którego szukamy najmniejszego y . Następnie wartość y wyszukajmy binarnie w przedziale $[x; \max(S)]$. Rozwiązanie działa w czasie $O(n^2 \cdot \log(n))$.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Podobnie jak wyżej, dla każdego $x \in S$ wyznaczymy najmniejsze poprawne y . W tym celu skonstruujemy ciąg d , którego największy element będzie możliwie najmniejszy. Dla każdego d_i mamy trzech kandydatów a_i, b_i, c_i . Spośród nich wybieramy najmniejszego, który jest większy lub równy x . Jeśli taki element nie istnieje, to znaczy, że nie istnieje ciąg d z minimalnym elementem x . W przeciwnym przypadku $y = \max(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Dla ustalonego x wyznaczenie minimalnego y odbywa się w czasie $O(n)$, zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^2)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

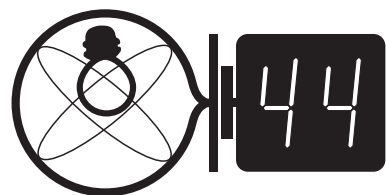
Każdy z elementów ciągów a, b i c opiszmy parą liczb: wartość i indeks. W ten sposób otrzymamy $3n$ par: $(a_1, 1), (a_2, 2), \dots, (a_n, n), (b_1, 1), (b_2, 2), \dots, (b_n, n), (c_1, 1), (c_2, 2), \dots, (c_n, n)$. Następnie posortujmy te pary rosnąco względem pierwszej współrzędnej, aby otrzymać ciąg $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_{3n}, q_{3n})$. Zauważmy, że z ciągu p_i, \dots, p_j (dla $1 \leq i \leq j \leq 3n$) można wybrać n elementów, które utworzą ciąg d , jeśli $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq \{q_i, q_{i+1}, \dots, q_j\}$. Innymi słowy, dla każdej pozycji (od 1 do n) musimy ustalić przynajmniej jeden element. Zatem chcemy znaleźć takie indeksy i, j ($1 \leq i \leq j \leq 3n$), że z p_i, \dots, p_j można zbudować ciąg d oraz $p_j - p_i$ jest minimalne. Wystarczy, że dla każdego i od 1 do $3n$ znajdziemy najmniejsze takie $j \geq i$, że z elementów p_i, \dots, p_j można zbudować ciąg d . Do rozwiązania tego problemu wykorzystamy metodę gąsienicy. Na początku $i = j = 1$. Dopóki fragment p_i, \dots, p_j nie pozwala stworzyć poprawnego ciągu, to zwiększamy j o jeden. W przeciwnym przypadku przechodzimy do kolejnego i . W każdym kroku zliczamy liczbę wystąpień każdego indeksu na rozpatrywanym fragmencie oraz pamiętamy liczbę różnych indeksów, które występują przynajmniej raz. Jeśli ta wartość jest równa n , to wtedy rozpatrywany fragment tworzy ciąg d .

Sortowanie działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$, zaś faza szukania najkrótszych fragmentów dla każdego początku zajmuje czas $O(n)$. Zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

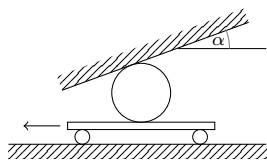
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2019

Zadania z fizyki nr 680, 681

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



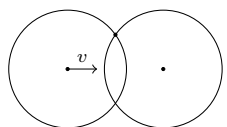
Rys. 1

680. Walec o masie M znajduje się między ruchomą poziomą platformą i nieruchomą powierzchnią nachyloną do poziomu pod kątem α (rys. 1). Współczynnik tarcia walca o platformę wynosi μ_1 , a o powierzchnię nachyloną μ_2 . Jaką minimalną siłę trzeba przyłożyć do platformy, aby walec nie obracał się, a platforma poruszała się w lewo ruchem jednostajnym?

681. Na powierzchnię szkła naniesiono cienką warstwę materiału, którego współczynnik załamania $n = 4/3$ jest mniejszy od współczynnika załamania szkła. Jaka może być najmniejsza grubość tej warstwy, aby przy prostym padaniu światła białego długości fali $\lambda_1 = 700$ nm oraz $\lambda_2 = 420$ nm w świetle odbitym były jednocześnie maksymalnie wygaszone?

Rozwiązania zadań z numeru 2/2019

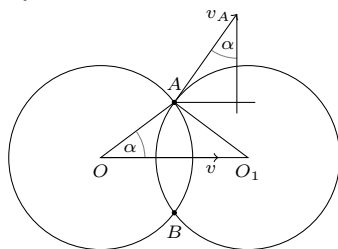
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

672. Na poziomej powierzchni stoi cienka obręcz o promieniu R . Mija ją ze stałą prędkością v taka sama obręcz (rys. 2). Obręcze przylegają do siebie. Znaleźć zależność prędkości górnego punktu „przecięcia” obręczy od odległości między ich środkami.

673. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego. Tłok może przemieszczać się w cylindrze bez tarcia, cylinder i tłok są izolowane cieplnie od otoczenia. Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_1 , temperatura gazu w cylindrze T_1 . W pewnej chwili ciśnienie zewnętrzne wzrasta skokowo do wartości p_2 , a po ustaleniu się stanu równowagi spada skokowo do pierwotnej wartości. Znaleźć i porównać temperatury gazu w skrajnych stanach równowagi.



Rys. 3

672. Ponieważ obręcz o środku w punkcie O_1 jest nieruchoma, prędkość v_A punktu A jest w każdej chwili styczna do okręgu o środku w O_1 (rys. 3). Odcinek AB dzieli odległość $d = |OO_1|$ na dwie równe części, zatem składowa pozioma prędkości v_A ma stałą wartość $v/2$. Wektor v_A tworzy z pionem kąt α i ma długość $v_A = v/(2 \sin \alpha)$. Zachodzi związek $\sin \alpha = \sqrt{1 - (d/2R)^2}$ i szukana zależność ma postać

$$v_A = \frac{v}{2\sqrt{1 - (d/2R)^2}}$$

673. W stanie początkowym objętość gazu wynosi $V_1 = (nRT_1)/p_1$. Oznaczmy objętość gazu po zwiększeniu ciśnienia do p_2 i ustaleniu się równowagi przez V_2 , a temperaturę w tym stanie przez T_2 . Przemiana jest adiabatyczna, ale nie kwazistacjonarna, korzystamy więc z pierwszej zasady termodynamiki: $\Delta U = W$, gdzie $\Delta U = 3nR(T_2 - T_1)/2$ jest zmianą energii wewnętrznej, a praca wykonana nad gazem jest dodatnia i wynosi $W = p_2(V_1 - V_2) = nR(p_2T_1/p_1 - T_2)$. Stąd temperatura w stanie równowagi po sprężeniu gazu wynosi

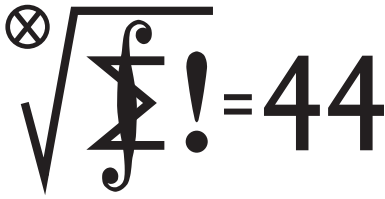
$$T_2 = \frac{2p_2 + 3p_1}{5p_1} T_1$$

Oznaczając objętość końcową przez V_3 , a temperaturę przez T_3 i ponownie korzystając z pierwszej zasady termodynamiki oraz równań Clapeyrona, otrzymujemy równanie: $3nR(T_3 - T_2)/2 = p_1(V_2 - V_3) = nR(p_1T_2/p_2 - T_3)$. Stąd temperatura w stanie końcowym dana jest wzorem

$$T_3 = T_1 + \frac{6(p_2 - p_1)^2}{25p_1p_2} > T_1$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
666 ($WT = 3,05$), 667 ($WT = 2,40$)
668 ($WT = 3,06$), 669 ($WT = 1,45$)
z numerów 11/2018 i 12/2018

Marian Łupieżowicz	Gliwice	41,74
Tomasz Rudny	Poznań	40,29
Jan Zambrzycki	Białystok	34,68
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,15
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	27,80
Aleksander Surma	Myszków	25,69
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Michał Kozlik	Gliwice	25,18



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2019

Zadania z matematyki nr 783, 784

Redaguje Marcin E. KUCZMA

783. Na płaszczyźnie narysowano N kwadratów o bokach równoległych i prostopadłych do ustalonego wspólnego kierunku. Niech S będzie zbiorem środków tych kwadratów; zakładamy, że jest to N różnych punktów oraz że żaden punkt zbioru S nie leży na brzegu żadnego kwadratu. Udowodnić, że można wyróżnić niektóre z tych N kwadratów tak, by każdy punkt zbioru S leżał w co najmniej jednym wyróżnionym kwadracie oraz w co najwyżej czterech wyróżnionych kwadratach.

784. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , które można zapisać w postaci sumy $p = a^2 + b^2$ ($a, b \geq 1$ całkowite) tak, by liczba $2ab$ była kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 784 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2019

Przypominamy treść zadań:

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d , które jednocześnie spełniają nierówności
 $a + b \geq c + d$, $ab + cd \geq (a + b)(c + d)$, $(a + b)cd \geq ab(c + d)$.

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π , położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d , przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

775. Niech $a, b, c, d \geq 0$ będą liczbami o rozważanej własności. Wielomian o pierwiastkach $-a, -b, c, d$

$$W(x) = (x + a)(x + b)(x - c)(x - d) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

ma współczynniki nieujemne, co wynika z podanych założeń:

$$A = a + b - c - d \geq 0,$$

$$B = ab + cd - ac - ad - bc - bd \geq 0,$$

$$C = -abc - abd + acd + bcd = -ab(c + d) + (a + b)cd \geq 0,$$

$$D = abcd \geq 0.$$

Skoro $A, B, C, D \geq 0$, zatem $W(x) > 0$ dla $x > 0$. Brak pierwiastków dodatnich oznacza, że $c = d = 0$.

Na odwrót, gdy $c = d = 0, a \geq 0, b \geq 0$, zadane nierówności są spełnione. Rozwiązaniem zadania są czwórki $(a, b, 0, 0)$ z $a, b \geq 0$.

776. Przyjmijmy $k = 2$ i ustalmy prostokątny układ współrzędnych, w którym wierzchołkami sześcianu są punkty $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, a rzutem prostokątnym punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę π jest punkt $P = (a, b, c)$ o współrzędnych $a, b, c \geq 0$. Zatem $d^2 = |OP|^2 = a^2 + b^2 + c^2$; zaś płaszczyzna π jest dana równaniem $ax + by + cz = d^2$.

Załóżmy, że ma ona punkty wspólne ze wszystkimi ścianami sześcianu; więc np. ze ścianą o wierzchołkach $(1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$. Każda z półprzestrzeni $(ax + by + cz \leq d^2, ax + by + cz \geq d^2)$ musi zawierać jeden z tych czterech wierzchołków. Zatem przy pewnym doborze znaków mamy nierówność $\pm a \pm b - c \geq d^2$. Skoro $a, b \geq 0$, znaczy to, że $a + b - c \geq d^2$.

Analogicznie $a - b + c \geq d^2$ oraz $-a + b + c \geq d^2$. Dodajemy te trzy nierówności i otrzymujemy

$$a + b + c \geq 3d^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2;$$

czyli, równoważnie,

$$\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{6}\right)^2 \leq \frac{1}{12}.$$

Lewa strona to kwadrat odległości punktu P od punktu $Q = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Tak więc $|PQ| \leq \frac{1}{6}\sqrt{3}$. A ponieważ $|OQ| = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, ostatecznie $|OP| \leq |OQ| + |QP| \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Gdy $P = (a, b, c) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, wszystkie nierówności stają się równościami; płaszczyzna o równaniu $x + y + z = 1$ leży w odległości $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ od O i spotyka wszystkie ściany. Dla $k = 2$ szukane maksimum wynosi więc $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; zaś w przypadku ogólnym – po przeskalowaniu – wynosi $\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot k$.



Rozwiązanie zadania M 1603.

Przypiszmy drużynom $2n$ punktów przestrzeni, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Jeśli dwie drużyny rozegrały ze sobą mecz pierwszego dnia, połączmy odpowiadające im punkty odcinkiem niebieskim, a jeśli drugiego dnia – odcinkiem czerwonym.

Zauważmy, że uzyskujemy w ten sposób układ łamanych zamkniętych, z których każda ma parzystą liczbę odcinków, gdyż w każdej z nich kolejne odcinki mają różny kolor. Wystarczy z każdej takiej łamanej wybrać co drugi wierzchołek – w ten sposób uzyskamy n punktów, z których żadne dwa nie są połączone odcinkiem. Drużyny odpowiadające tym punktom mają więc żadaną własność.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 769 ($WT = 1,62$) i 770 ($WT = 2,71$) z numeru 11/2018

Andrzej Kurach	Ryjewo	44,06
Marcin Małogrosz	Warszawa	43,64
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Michał Adamaszek	Kęty	39,75
Paweł Najman	Kraków	36,72
Paweł Kubit	Kraków	36,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Witold Bednarek	Łódź	35,31

Nowa twarz w Klubie 44: pan Andrzej Kurach. Witamy!

Prosto z nieba: nie świeci, a grzeje...

Tak zwana ciemna materia jest jedną z największych zagadek nie tylko współczesnej astronomii, ale także fizyki. Jest potrzebna do wyjaśnienia obserwacji astronomicznych, na przykład krzywych rotacji galaktyk, które kręcą się tak, jakby znajdowały się w potencjale grawitacyjnym stworzonym przez coś więcej niż tylko widoczną, świecąca materię gwiazd i gazu. Ciemna materia z definicji nie emituje fal elektromagnetycznych, oddziałuje natomiast grawitacyjnie. Z punktu widzenia fizyki kluczowa jest odpowiedź na pytanie, *czym jest* ciemna materia: nieodkrytymi do tej pory cząstkami elementarnymi (spoza Modelu Standardowego?), czarnymi dziurami czy czymś jeszcze zupełnie innym, o czym obecnie nie mamy pojęcia. Szacuje się, że ciemna materia to około 25% całej materii-energii Wszechświata (dla porównania, „zwykła” materia barionowa to tylko około 4%).

Niedawno znaleziono dowody na to, że ciemna materia oddziałuje i przemieszcza się w wyniku tworzenia się gwiazd w galaktykach. Obserwacje astronomiczne, o których poniżej, dostarczają pierwszych dowodów efektu nazywanego „grzaniem ciemnej materii” i w przyszłości dadzą wskazówki co do tego, z czego może składać się ciemna materia.

Dowody obserwacyjne pochodzą z centrów pobliskich galaktyk karłowatych. Galaktyki te to małe, słabo świecące galaktyki, które zwykle znajdują się na orbitach wokół większych, takich jak na przykład Droga Mleczna. Podczas formowania się gwiazd, promieniowanie i emisja cząstek (wiatry gwiazdowe) wypychają gaz i pył z centrum galaktyki. W rezultacie samo centrum galaktyki ma mniejszą masę, co wpływa na to, jak mocno jest przyciągana ciemna materia. W efekcie z powodu mniejszego przyciągania grawitacyjnego ciemna materia migruje z dala od centrum: kinematycznie „podgrzewa się”.

J. I. Read, M. G. Walker, P. Steger,
„Dark matter heats up in dwarf galaxies”,
*Monthly Notices of the Royal
Astronomical Society*, 484, 2019

Zespół astrofizyków z uniwersytetów w Surrey i Zurychu oszacował ilość ciemnej materii w centrach 16 karłowatych galaktyk z bardzo różnymi historiami powstawania gwiazd. Galaktyki, które dawno temu przestały tworzyć gwiazdy, miały wyższe gęstości ciemnej materii w swoich centrach niż te, w których wciąż zachodzą procesy gwiazdotwórcze. Potwierdza to hipotezę, że w starszych galaktykach ciemna materia jest mniej podgrzana.

Dzięki temu można także w teorii ustanowić ograniczenia na modele ciemnej materii. Musi ona być w stanie formować karłowate galaktyki w szerokim zakresie gęstości centralnych, a gęstości te muszą zależeć od ilości formujących się gwiazd. Jak na razie wyniki obserwacji sugerują, że ciemna materia jest praktycznie bezzderzeniowym płynem, który można kinematycznie „podgrzać” i przemieszczać, natomiast nie umożliwiają precyzyjnego określenia, czym jest ciemna materia. Są jednakże istotnym krokiem do tego odkrycia.

Michał BEJGER

Niebo w czerwcu

Czerwiec to miesiąc najdłuższych dni i najkrótszych nocy w ciągu roku. Na początku trzeciej dekady, dokładnie 21 czerwca o godzinie 17:54 naszego czasu, Słońce przejdzie przez najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki, rozpoczynając na półkuli północnej astronomiczne lato. Od tego momentu dnia zacznie ubywać, a proces ten potrwa aż do początku zimy. Pierwszego dnia lata następuje kulminacja kilku procesów: jest to najdłuższy dzień na półkuli północnej, strefa dnia polarnego (a także strefy białych nocy cywilnych, żeglarskich i astronomicznych) na północy i nocy polarnej na południu sięga najdalej i zaczyna się cofać, jest to środek sezonu na obłoki srebrzyste i łuki okołohoryzontalne

(więcej o tym zjawisku na angielskiej stronie:
www.atoptics.co.uk/ha10/cha2.htm).

Koniec wiosny to ostatnia pora dobrego nachylenia ekliptyki (które jest głównym wyznacznikiem dobrej widoczności planet wewnętrznych i pozostałych planet, jeśli są blisko Słońca) do wieczornego widnokregu. Wraz z początkiem lata kąt ten zaczyna się zmniejszać, a rano – przeciwnie, staje się coraz większy. W czerwcu zmiana dopiero się zaczyna, zatem w tym miesiącu panują jeszcze dość dobre warunki widoczności wieczornej, zaś przed świtem znajdujące się blisko Słońca planety nie wznoszą się zbyt wysoko. Ma to swoje odbicie w warunkach obserwacyjnych planet wewnętrznych oraz przebywających blisko Słońca planet Mars, Neptun i Uran.

Planeta Merkury, po przejściu w maju tuż na północ od Słońca, dąży do maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie 23 czerwca, oddalając się od naszej Gwiazdy Diennej na 23° . Planetę można obserwować przez cały miesiąc (niestety nie więcej niż 5° nad północno-zachodnim widnokregiem), jak przemierza początkowo gwiazdozbiór Byka, potem Bliźniąt, a ostatni tydzień miesiąca spędzi w gwiazdozbiorze Raka. W tym czasie jasność planety spadnie z $-1,1^m$ do $+1,2^m$, średnica tarczy urośnie z 5 do 10 sekund kątowych, a jej faza spadnie z 85 do 25%. Towarzystwa Merkuremu dotrzyma planeta Mars, zbliżająca się do wrześniowej koniunktury ze Słońcem. Czerwiec to ostatni miesiąc, w którym można dostrzec Marsa na niebie wieczornym. Przed jego końcem planeta zniknie w zorzy wieczornej i pojawi się na niebie porannym dopiero w październiku. Mars świeci w czerwcu z jasnością $+1,8^m$, a jego tarcza ma średnicę $4''$. Mars i Merkury 18 czerwca zbliżą się do siebie na zaledwie $13'$ (to mniej niż połowa średnicy tarczy Księżycy czy Słońca).

Obie planety czeka w czerwcu jeszcze bliskie spotkanie z powracającym na wieczorne niebo Księżycem. Na początku miesiąca, 3 czerwca w południe polskiego czasu Księżyc znajdzie się w nowiu, a już 4 czerwca, mając fazę zaledwie 2%, przejdzie $4,5$ stopnia pod Merkurym. Jednak jest to spotkanie trudne do dostrzeżenia, gdyż pół godziny po zachodzie Słońca Srebrny Glob zniży się na wysokość 4° , a łatwiej wtedy dostrzegalny Merkury znajdzie się prawie 3° na prawo i w górę od niego. Dobę później o tej samej porze Księżyc wznieśnie się na 8° , zwiększając fazę do 7%, a nieco ponad 3° na prawo od niego znajdzie się planeta Mars. Wieczorem 10 czerwca Merkury przejdzie około $10'$ od Meksuty, gwiazdy 3. wielkości, oznaczanej na mapach nieba grecką literą ϵ . Przez cały miesiąc za wskazówkę do odszukania planet mogą służyć Kastor i Polluks, dwie jasne gwiazdy Bliźniąt świecące kilka stopni nad nimi.

Po minięciu Marsa Księżyc powędruje dalej i 8 czerwca przemknie 2° od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, zaś 10 czerwca przejdzie przez I kwadrę. Dobę później, w fazie 68%, znajdzie się 2° od Porrimy, a 12 czerwca, w fazie 78% – ponad 6° na Spikę, jasnymi gwiazdami Panny. Do gwiazdozbioru Skorpiona Srebrny Glob dotrze 15 czerwca, prezentując tarczę w fazie 98%. Kilka stopni na prawo i w dół od niego da się dostrzec charakterystyczny łuk z północno-zachodniej części Skorpiona, z gwiazdami Graffias i Dschubba. Najjaśniejsza gwiazda konstelacji, Antares, pokaże się 8° pod Księżycem.

W tym samym rejonie nieba przebywa planeta karłowata (1) Ceres, która ostatniego dnia maja przeszła przez opozycję względem Słońca i kreśli zygzak na pograniczu gwiazdozbiorów Wagi, Skorpiona i Wężownika, kilkakrotnie w całym sezonie obserwacyjnym przecinając dzielące je granice. W połowie miesiąca, 15 czerwca, Ceres zajmie pozycję trochę ponad 3° na zachód od Księżycy i jednocześnie $100'$ nad gwiazdą Graffias, która jest o tyle ciekawa, że jest szerokim układem

podwójnym, gdzie dwie gwiazdy o jasnościach $+2,6$ i $+4,9^m$ dzieli na niebie prawie $14''$. Podczas tegorocznej opozycji Ceres pojaśnieje do około $+7^m$, czyli uplasuje się między Uranem a Neptunem. Zatem do jej dostrzeżenia jest potrzebna przynajmniej lornetka i ciemne niebo.

16 czerwca Księżyc w pełni dotrze na odległość trochę ponad 1° od Jowisza. Takie spotkanie oznacza, że Jowisz jest w opozycji względem Słońca. I faktycznie, opozycja planety wypadła 6 dni wcześniej. W związku z opozycją czerwiec jest najlepszym miesiącem do obserwowania największej planety Układu Słonecznego. Jest ona wtedy widoczna całą noc w środkowej części Wężownika. W czerwcu blask Jowisza wyniesie $-2,6^m$, zaś jego tarcza będzie miała średnicę $46''$. Jest to odpowiednio $0,1^m$ i $2''$ więcej niż podczas opozycji rok temu.

Kolejne 2 dni później Srebrny Glob, w fazie zmniejszonej do 97%, przejdzie 2° od planety Saturn, której opozycja wypada na początku lipca. Do końca miesiąca blask Saturna urośnie do $+0,1$ wielkości gwiazdowej, zaś jego tarcza zwiększy średnicę do $18''$.

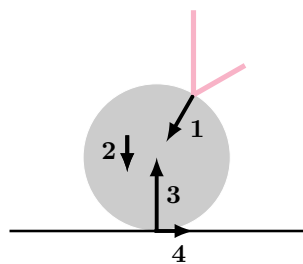
Dzień przed ostatnią kwadrą, 24 czerwca, Księżyc spotka się z trójką gwiazd ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 Aquarii oraz z odległym o 5° Neptunem. Dwa dni wcześniej planeta zmieni kierunek swojego ruchu na wsteczny, a zatem będzie praktycznie nieruchoma względem gwiazd tła, około $70'$ na wschód od gwiazdy 4. wielkości ϕ Aquarii i jednocześnie $20'$ od gwiazdy 5. wielkości 96 Aquarii. W czerwcu Neptun świeci z jasnością $+7,9^m$ i około godziny 2 wznosi się na wysokość niewiele przekraczającą 10° .

Po spotkaniu z Neptunem Księżyc podąży ku nowiu, przez który przejdzie na początku lipca, powodując przy tym całkowite zaćmienie Słońca, widoczne z południowego Pacyfiku. Jego warunki obserwacyjne szybko się pogorszą, gdyż ekliptyka rano jest już wtedy nachylona niekorzystnie, a dodatkowo, z naszej perspektywy, Księżyc wędruje kilka stopni pod nią. Z tego względu praktycznie niewidoczne są planety Uran i Wenus, świecące na tle gwiazdozbiorów Barana i Byka.

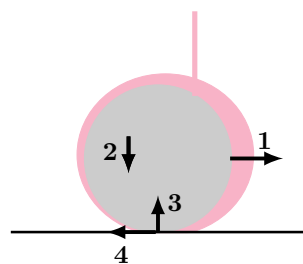
Pod koniec czerwca, jak co roku, maksimum swojej aktywności mają meteory z roju Bootydów, promieniujących z północnej części Wolarza. W najciemniejszej części nocy ich radiant wznosi się wysoko nad północno-zachodnim widnokregiem. Jest to najwolniejszy z obfitych rojów meteorów, ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi zaledwie 18 km/s, stąd przelot każdego meteoru trwa kilka sekund. W tym roku warunki widoczności roju są dobre, gdyż Księżyc po ostatniej kwadrze pojawi się na nieboskłonach, jak już zacznie się ponownie rozwidniać, i nie wpłynie znacząco na liczbę widocznych zjawisk. Aktywność roju jest zmienna, od kilku do ponad 100 meteorów na godzinę. Nie prognozuję się, niestety, ich szczególnie wysokiej aktywności w tym roku.

Ariel MAJCHER

Fizyczne potyczki



Rys. 1. Model teoretyczny I; 1 – siła oddziaływania woda-piłka, 2 – siła grawitacji, 3 – siła reakcji podłoża, 4 – siła oporu.



Rys. 2. Model teoretyczny II; 1 – siła oddziaływania woda-piłka, 2 – siła grawitacji, 3 – siła reakcji podłoża, 4 – siła oporu.

Każdy może przeprowadzić w domu następujące doświadczenie. Dowolnej wielkości piłkę kładziemy pod stabilnym strumieniem wody. Możemy wtedy zaobserwować, że piłka oscyluje pod lejącą się wodą, ale nie ucieka spod niej. Nie wygląda to na skomplikowany układ fizyczny, spróbujmy zatem zrozumieć ruch piłki, analizując siły na nią działające.

Pobieżna analiza mogłaby wyglądać tak jak na rysunku 1. Strumień wody uderzający o piłkę działa na nią siłą skierowaną prostopadle do powierzchni piłki. Pionowa składowa tej siły jest równoważona przez reakcję podłoża, zaś składowa pozioma przez siłę tarcia statycznego. Chociaż działające siły się równoważą, siła, z jaką strumień wody oddziałuje na piłkę, ma niezerowy moment względem punktu styczności piłki z podłożem, co powoduje, że piłka będzie się toczyć.

Niestety, według naszego prostego modelu piłka potoczy się tak, że wyjdzie spod strumienia wody, nie będzie zatem wykonywała żadnych oscylacji. Coś musieliśmy zrobić źle. Jak się zatem porządnie rozwiązuje to zadanie? Autor tych słów nie zna żadnego podręcznika albo zbioru zadań, w którym można by znaleźć odpowiedź. Spróbujmy więc nieco pokombinować.

Uważne przyglądanie się piłce w wannie prowadzi do wniosku, że realizowana jest sytuacja przedstawiona na rysunku 2: woda opływa piłkę, a więc zakręca po powierzchni piłki, przy czym znacznie więcej wody płynie po stronie piłki, w którą uderza strumień, niż po stronie przeciwnej. Taki ruch wymaga występowania działających na wodę sił o niezerowych składowych w kierunku środka piłki. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na piłkę powinna działać wtedy siła o składowej na zewnątrz piłki powodująca poziomy ruch „wciągający” piłkę pod strumień wody.

Jak duża jednak będzie siła wciągająca piłkę pod strumień wody? Jej wyznaczenie nie jest bardzo łatwą sprawą. A jest to tylko jedno z siedemnastu zadań, z jakimi mierzyli się uczestnicy **Międzynarodowego Turnieju Fizyków** odbywającego się w Lozannie w ostatnim tygodniu kwietnia. Inne dotyczyły m.in. tego, czy struga wody może okręcić się wokół naładowanego elektrycznie pręta albo jakie prawa fizyki dyktują ruch nasion klonu. Zadania te ogłaszane są z ponadpółrocznym wyprzedzeniem i dotyczą fizyki spotkanych na co dzień zjawisk, które nie doczekały się jeszcze satysfakcjonującego wyjaśnienia. Uczestnicy po kilkumiesięcznej pracy w grupach przedstawiają swe rozwiązania przed międzynarodowym jury. Nie przypomina to jednak zwykłego egzaminu, gdyż rozwiązania mogą być krytykowane i ulepszone przez innych uczestników – wywiązuje się stąd często prawdziwa naukowa potyczka! To właśnie stanowi o wyjątkowości Turnieju, który kształci umiejętności prowadzenia prawdziwej debaty naukowej przez studentów. W bieżącym roku nasz kraj reprezentowała drużyna z Uniwersytetu Warszawskiego, a jeden z jej członków, Jerzy Szuniewicz, zdobył nagrodę indywidualną za najlepsze moderowanie dyskusji rozwiązania zadania turniejowego.

iptnet.info

Wróćmy jednak do naszej piłki polewanej wodą. Można próbować stworzyć model, w którym masa wody będzie reagować na ruch piłki z pewnym skończonym opóźnieniem. Takie rozwiązanie zostało zaproponowane przez drużynę niemiecką i reprezentowało podejście, w którym nie wyprowadza się wszystkich elementów rozwiązania „z pierwszych zasad”, ale umiejętnie parametryzuje własną niewiedzę na temat otaczającego świata, a następnie próbuje określić wartości liczbowe tych parametrów na podstawie danych doświadczalnych. Innym sposobem jest przeprowadzenie pełnej symulacji hydrodynamicznej ruchu wody po poruszającej się piłce. To było z kolei zrealizowane przez drużynę ukraińską, której rozwiązanie wymagało wielokrotnie

większego nakładu pracy w porównaniu do rozwiązania studentów zza Odry, a opisywało ruch piłki z taką samą dokładnością. Tak czy siak, proste z pozoru zadanie okazało się niebanalnym problemem teoretycznym, a przedstawione rozwiązania odpowiadały różnym podejściom metodologicznym stosowanym we współczesnej „prawdziwej” fizyce.

Dlatego według autora tej kolumny Międzynarodowy Turniej Fizyków jest jedną z najciekawszych propozycji rywalizacji naukowej oferowanych studentom fizyki. Może warto, by wzięły w niej udział także inne polskie uczelnie?

Krzysztof TURZYŃSKI



Jak przechrzyć stereometrię

Bartłomiej BZDEGA

Zadania z geometrii przestrzennej potrafią przysporzyć problemów, ale niektóre z nich można z powodzeniem sprowadzić do zadań z planimetrii. Najprostsza metoda jest rozważenie pewnego przekroju danej w zadaniu bryły. Jeśli zauważymy, że sporo punktów występujących w treści zadania leży na wspólnej płaszczyźnie, to rozważenie przekroju tą płaszczyzną daje realne szanse na rozwiązanie. Ćwiczmy to w zadaniach 1 i 2. Dobrze jest wykonać osobny rysunek dla wybranego przekroju – można wtedy więcej dostrzec.

W szkole składamy wielościany z ich siatek. Czasem warto zrobić na odwrót, a wtedy z obiektu przestrzennego otrzymamy łatwiejszy do analizy obiekt płaski. Takie podejście przynosi efekt w zadaniach 4 i 6. W szczególności dobrym pomysłem jest wyprostowanie pewnego kąta dwuściennego wielościanu, co pozwala dwie sąsiednie ściany i ich wspólną krawędź potraktować jako wielokąt i przekątną. Zadania 3 i 5 nadają się do tego wyśmienicie.

Rzut prostokątny na płaszczyznę Π jest przekształceniem, w którym każdemu punktowi P przyporządkujemy taki punkt $P' \in \Pi$, że $PP' \perp \Pi$. Jeśli A' i B' są rzutami prostokątnymi punktów, odpowiednio, A i B na płaszczyznę Π oraz prosta AB przecina tę płaszczyznę w punkcie K , to trójkąty prostokątne $AA'K$ i $BB'K$ są podobne, a ponadto punkty A' , B' i K leżą na jednej prostej. Można zrobić z tego użytek, rozwiązując zadania 7 i 8.

Zadania

1. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s i s' . Trzy różne punkty A , B i C leżą na okręgu o . Punkt P leży na sferze s , na zewnątrz sfery s' . Prosta PA przecina sferę s' w punkcie $A' \neq A$; analogicznie określamy punkty B' i C' . Dowieść, że płaszczyzna Π , przechodząca przez punkt P i styczna do sfery s , jest równoległa do płaszczyzny $A'B'C'$.

2. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkt K leży na odcinku AD i spełnia warunek

$$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{|BC|}.$$

Proste AI i BC przecinają się w punkcie L . Dowieść, że prosta KL przechodzi przez środek odcinka DI .

3. Prostopadłościan ma krawędzie długości a , b i c . Wyznaczyć najkrótszą drogę łączącą dwa przeciwległe wierzchołki tego prostopadłościanu, biegnącą po jego powierzchni.

4. Suma miar kątów płaskich przy wierzchołku nienależącym do podstawy ostrosłupa jest równa 60° . Dowieść, że obwód podstawy tego ostrosłupa jest nie mniejszy od długości każdej jego bocznej krawędzi.

5. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$|AB| = |CD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ.$$

Dowieść, że $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle ADC|$.

6. Odcinek DD' jest wysokością czworościanu $ABCD$, w którym zachodzą równości

$$|AB| = |CD|, \quad |AC| = |BD| \quad \text{i} \quad |AD| = |BC|.$$

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , zaś S środkiem ciężkości tego trójkąta. Dowieść, że punkty D' , O i S leżą na jednej prostej.

7. Prosta przechodząca przez środek J sfery wpisanej oraz środek O sfery opisaney na czworościanie $ABCD$ przecina krawędź AB . Wykazać, że miary kątów ACB i ADB są równe lub sumują się do 180° .

8. W czworościanie $ABCD$ wszystkie wewnętrzne kąty dwuścienne są ostre.

Punkt S leży wewnątrz tego czworościanu, a jego odległość od każdej z płaszczyzn ABC , BCD , CDA i DAB jest większa niż 1. Dowieść, że przynajmniej dwa spośród odcinków AS , BS , CS , DS mają długość większą niż $\sqrt{5}$.

1. Rozważmy przekrój płaszczyzną ABP . Oznaczmy przez ℓ prostą będącą częścią wspólną płaszczyzn Π i ABP . Rachunek na kątach dowodzi, że $\ell \parallel A'B'$. Analogicznie, dla przekroju płaszczyzną PBC można dowiedzieć, że $\ell \parallel B'C'$. Najpierw dowodzimy, że $\frac{|AT|}{|TL|} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{|BC|}$. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie Menelaosa dla trójkąta $AD'I$ i prostej KL . Wyprowadzamy kąt dwuścienny przy krawędzi c , otrzymując z sąsiadujących ścian prostokąt o bokach c i $a + b$. Poszukiwana najkrótsza droga wędruje po linii prostej, czyli wzdłuż przekątnej tego prostokąta. Jej długość to $\sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$. Dwa analogiczne wyniki otrzymamy dla krawędzi a i b , więc powyższa droga jest najkrótsza, jeśli $c \geq a, b$.
4. Rysując siatkę powierzchni bocznej tego ostrosłupa, otrzymamy wielokąt $S_0A_1 \dots A_n$, w którym $|A_0S| = |A_nS|$ i $|\sphericalangle A_0SA_n| = 60^\circ$. Z tego wynika, że trójkąt A_0A_nS jest równoboczny. Bzeg podstawy ostrosłupa na narysowanej siatce jest łamane $A_0A_1 \dots A_n$.
5. Czworokąt powstały po wyprostowaniu kąta pomiędzy ścianami ABD i CBD jest trapezem równoramiennym.
6. Siatkę takiego czworościanu jest trójkąt $D_0D_1D_2$, w którym punkty A , B i C są środkami odcinków odpowiednio D_0D_1 , D_1D_2 i D_2D_0 . Punkt D' jest ortocentrum trójkąta $D_0D_1D_2$. Wystarczy skorzystać z twierdzenia Eulera.
7. Rozważmy rzuty J_1 oraz O_1 punktów J oraz O na płaszczyznę ABC . analogicznie J_2 oraz O_2 na płaszczyźnie ABD . Ponieważ $|JJ_1| = |JJ_2|$, otrzymujemy $|\angle OO_1| = |\angle OO_2|$. Dalej, z twierdzenia Pitagorasa, okręgi opisane na ścianach ABC i ABD mają równe promienie. Teza wynika z twierdzenia sinusów.
8. Rzutując prostokątnie punkt P na płaszczyznę ABC , otrzymamy punkt P' leżący wewnątrz trójkąta ABC , którego odległość od każdego z boków tego trójkąta jest większa od 1. Któryś z kątów trójkąta ABC , powiedzmy kąt A , ma miarę nieprzekraczającą 60° . Stąd $|AP'| > 2$. Mamy też $|PP'| > 1$, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APP' otrzymamy $|AP| > \sqrt{5}$. Powtarzając to rozumowanie dla płaszczyzn BCD , otrzymamy tezę.

Wskazówki do zadań

Dzień Popularyzacji Matematyki

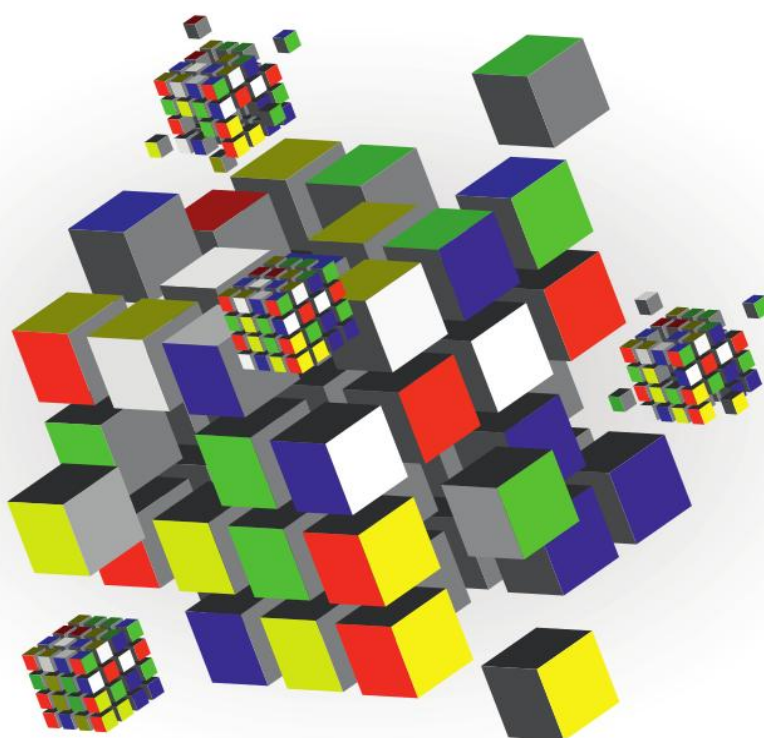
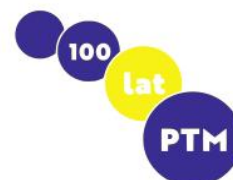


im^{up}

ptm rok zał. 1919

4 września 2019 roku
9:00 - 14:00
Uniwersytet Pedagogiczny
w Krakowie

W ydarzenie edukacyjno-popularyzatorskie wpisane w program Jubileuszowego Zjazdu Matematyków Polskich w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego



W ykłady plenarne
krótkie prelekcje
warsztaty

W ręczenie nagród
w Konkursie im. Anny Zofii Krygowskiej
na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki

F inał Konkursu
Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego

W ręczenie nagród w Konkursie
Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego
Auditorium Maximum UJ godz. 14:30