

# deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$\Pi=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $\tau=3,141592$

NR 12 (547) 2019

CENA 4 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)



Nakład: 3500 egz.



**Rozmyślania  
o myślakach**  
str. 10

$q$

$Mp$

$M(Mp)$



$p$

$\perp$

$Mq$



## SPIS TREŚCI NUMERU 12 (547)

Pół szklanki mocnego kodu. Zanim dopadnie nas grypa <i>Piotr Krzyżanowski</i>	str. 1
O dziesiątym problemie Hilberta <i>Joanna Ochremiak</i>	str. 4
Jak uniknąć częściowej rozstrzygalności? Ze sztuczną inteligencją na czarne dziury <i>Filip Morawski</i>	str. 6
Nieskończoność: 7. Rozmyślania o myślakach <i>Michał Korch</i>	str. 10
 Zadania	str. 12
 Rehabilitować epokę <i>Magdalena Fikus</i>	str. 13
Ślad ruchomego odcinka <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 14
Pułapka z fal grawitacyjnych <i>Szymon Charzyński</i>	str. 16
Średnie w zawodach studenckich <i>Bartosz Bieganowski, Aurelia Dymek, Daniel Strzelecki</i>	str. 18
Informatyczny kącik olimpijski (133): <i>Cyfrowy ciąg</i>	str. 20
Prosto z nieba: Co z tego, że świeci Słońce?	str. 21
Klub 44	str. 22
Niebo w grudniu	str. 22
Aktualności	str. 24
Nagroda Nobla z (astro)fizyki	str. 24
 Twierdzenie Bézouta <i>Bartłomiej Bzdega</i>	str. 25

31 października 2019 roku  
zmarł

**Andrzej Szymacha**  
fizyk, autor *Delty*

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej,  
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,  
dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący,  
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,  
prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks,  
dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak,  
dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga,  
prof. dr hab. Andrzej Majhofer,  
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur,  
dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś,  
prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,  
prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol,  
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,  
Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana,  
Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek,  
Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik,  
Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł

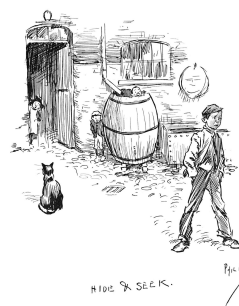


Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**W następnym  
numerze  
opowiemy  
o nietrywialnych  
problemach  
dziecięcych  
odliczank.**



Raz, dwa, trzy,  
wychodź ty!

1102 S. SLEK.

## Zanim dopadnie nas grypa

Piotr KRZYŻANOWSKI\*

\* Uniwersytet Warszawski, Wydział  
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

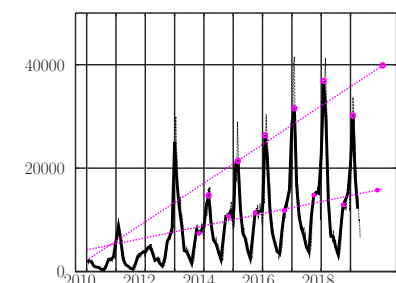
Czy lubicie długoterminowe prognozy pogody? Odbija się w nich głęboko zakorzeniona ludzka wiara, że odległą przyszłość można przewidzieć – na przekór *efektowi motyla*. No cóż, sam muszę przyznać, że cieszę się, gdy grudniowe prognozy przewidują piękną, słoneczną i mroźną aurę na zimowe ferie; ale jeśli zapowiadają ponury mokry standard, wtedy ratuję się myślą, że to przecież tylko prognoza...

Oczywiście można przewidywać nie tylko pogodę: na przykład zimą byłoby całkiem ciekawie przepowiedzieć rozwój corocznej epidemii grypy. I właśnie teraz, mimo braku wiedzy medycznej, uzbrojony jedynie w serię liczb, prosty model i kilka linii kodu (wybiorę moje ulubione środowisko obliczeniowe Octave, [www.octave.org](http://www.octave.org)) spróbuję przewidzieć, jak będzie przebiegać w tym sezonie.

Szczerze mówiąc, zdziwiłbym się, gdyby przyszłość posłuchała się moich prognoz: użyte przeze mnie narzędzia są raczej mało wyrafinowane. Ale... gdyby przewidywania się sprawdziły... czyż nie byłoby zabawnie?

Skorzystamy z publicznie dostępnych danych NIZP-PZH na temat raportowanej przez lekarzy w całej Polsce liczby zachorowań na grypę (jak je zdobyć samemu, pisaliśmy w  $\Delta_{19}^{10}$ ). Zaczniemy od naszkicowania wykresu zachorowań w ostatnich latach, zobacz rysunek obok. (Dane zbierane są cztery razy w miesiącu).

Wykres jest mało regularny, niemniej możemy zauważyć, że w pierwszym kwartale każdego roku ma silny pik, a w sierpniu – wyraźne minimum. Tabela obok pokazuje daty, gdy zostało osiągnięte ekstremum, a dane do niej można wygenerować kodem:



Średnia miesięczna liczba zachorowań na dzień (uśrednienie trochę wygładza wykres). Górna kolorowa prosta została dopasowana do pików z lat 2014–2018 metodą najmniejszych kwadratów. Analogicznie dopasowano dolną do chwil listopadowej stagnacji

minimum	maksimum
08.08.2012	23.01.2013
08.08.2013	08.03.2014
08.08.2014	01.03.2015
08.08.2015	16.02.2016
08.07.2016	23.01.2017
08.08.2017	08.02.2018
08.08.2018	08.02.2019

Daty rocznych ekstremów raportowanej zachorowalności na grypę (podana jest data początku pomiaru).

Dla prostoty w powyższej tabelce porównywaliśmy liczby z kolejnych raportów, które obejmują okresy *nierównej* długości. W rzeczywistości powinniśmy działać na średniej dziennej zachorowalności – i tak właśnie robimy w późniejszych obliczeniach

Wyjątkowa była ubiegła zima, kiedy grypa przebiegała nad wyraz łagodnie.

```

1 pkg load signal;
2 [~, loc] = findpeaks(infected, 'MinPeakDistance', 24);
3 maxinfected = infected(loc); maxdays = days(loc);
4 disp( datestr(maxdays) );

```

W programie przyjęliśmy, że w zmiennej *infected* znajdują się liczby zachorowań, które wcześniej ściągnęliśmy z NIZP-PZH, a w *days* – daty odpowiadających pomiarów. Funkcja *findpeaks* z pakietu *signal* znajduje położenia *loc* lokalnych maksimum danych zawartych w wektorze *infected*. Dodatkowo wymagamy, by odległość między maksimum wynosiła co najmniej 24 pomiary, czyli 6 miesięcy (jasne, są przecież odległe z grubsza o rok). W trzeciej linii wydobywamy z danych tylko te odpowiadające znalezionym maksimum, które w kolejnej linii wypisujemy na ekranie.

Minimum zawsze przypada na drugi tydzień sierpnia. Maksimum nie zachowuje się aż tak regularnie, ale jak możemy obliczyć, średnia odległość między maksimum na przestrzeni ostatnich 6 lat wynosi około 368 dni – czyli z grubsza też jeden rok (co w końcu nie powinno nas aż tak dziwić...).

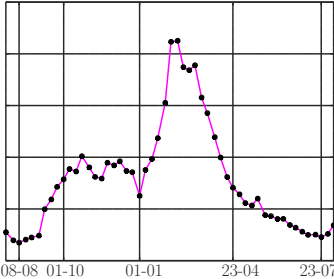
Rzuca się w oczy, że od kilku lat piki zgłaszanej liczby zachorowań systematycznie rosną (niemal liniowo). Nie będąc lekarzem, ale za to trochę wyobrażając sobie, jak działa *sprawozdawczość*, przypuszczałbym, że za tym wzrostem nie stoi realny wzrost liczby wszystkich zachorowań na grypę w Polsce – ale że zapewne jest on efektem coraz lepiej działającego systemu zbierania danych (coraz więcej lekarzy odsyła stosowne formularze?). Gdyby więc liniowy trend miał utrzymać się jeszcze w tym sezonie, łatwo będzie przewidzieć orientacyjną szczytową liczbę zgłoszeń:

```

1 P = polyfit(maxdays, maxinfected, 1);
2 disp( polyval(P, maxdays(end)+365) );

```

Całą robotę – dopasowanie wykresu prostej do maksimum – wykonuje pierwsza linia powyższego kodu: funkcja **polyfit** wyznacza *metodą najmniejszych kwadratów* wielomian  $P$  stopnia pierwszego, najmniej oddalony od punktów pomiarowych  $(x_k, y_k)$ , gdzie  $x_k = \text{maxdays}(k)$ , a  $y_k = \text{maxinfected}(k)$ . W drugiej linii obliczamy wartość tego wielomianu w dniu następnego maksimum zachorowań (przyjeliśmy, że wypadnie dokładnie za rok od ostatniego).



Typowy przebieg sezonu grypowego (tu dla sezonu 2015/2016)

Naturalnie w dłuższej perspektywie liniowy wzrost nie może się utrzymać, co zrozumiemy, przedłużając kolorową prostą *w lewo*: „przewiduje” ona, że już w 2008 roku lekarze powinni byli zgłosić... ujemną liczbę zachorowań.

### Modelowanie w wybranym sezonie

Powyższe miało charakter czysto rozrywkowy, więc czas na coś poważniejszego. Prawie każdy sezon chorobowy ma podobny przebieg (rysunek obok):

- dosyć szybki wzrost zachorowań od połowy sierpnia,
- z początkiem października następuje stabilizacja liczby zachorowań, a nawet – w pierwszym tygodniu stycznia – jej chwilowy spadek,
- od początku stycznia – kilkutygodniowa faza szybkiego wzrostu liczby zachorowań,
- osiągnięcie szczytowej liczby zachorowań (najczęściej w lutym),
- szybkie zmniejszanie się liczby zachorowań gdzieś tak do końca kwietnia,
- powolny spadek do kolejnego minimum.

Czy więc dałoby się – dysponując *bieżącymi* danymi ze strony internetowej NIZP-PZH – przewidzieć rozwój tegorocznej grypy? Do tego wykorzystamy następujący, bardzo prosty, model zachorowań. Niech  $S_t$  oznacza liczbę osób podatnych na wirusa (ale na razie zdrowych) w dniu  $t$ , z kolei  $I_t$  – liczbę osób zarażonych (i przy tym zarażających), a  $R_t$  – liczbę osób, które już nie mogą być zarażone ani zarażać, bo np. wyzdrowiały i nabrały odporności. W modelu przyjmujemy następującą zależność  $S, I, R$  w dniu następnym od tychże w dniu obecnym:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - b \cdot I_t \cdot S_t, \\ I_{t+1} &= I_t + b \cdot I_t \cdot S_t - a \cdot I_t, \\ R_{t+1} &= R_t + a \cdot I_t. \end{aligned}$$

Gdybyśmy znali współczynniki modelu:  $a, b$ , to moglibyśmy go użyć do wyznaczenia przyszłych wartości  $S, I, R$  tak, jak w poniższej funkcji:

```
function [S,I,R] = KMCK(a,b,S1,I1,R1,n)
% wyznacza S = [S1, S2, ..., Sn], I = [I1, I2, ..., In], R = [R1, R2, ..., Rn].
S(1) = S1; I(1) = I1; R(1) = R1;
for t = 1:n-1
    S(t+1) = S(t) - b*I(t)*S(t);
    I(t+1) = I(t) + b*I(t)*S(t) - a*I(t);
    R(t+1) = R(t) + a*I(t);
end
end
```

Opisany model to tzw. model Kermacka–McKendricka, o którym pisaliśmy w  $\Delta_{16}^4$  – u nas w wersji z czasem dyskretnym.

Między innymi wiadomo, że istotnym czynnikiem wpływającym na skuteczność rozprzestrzeniania się grypy jest pogoda – co powoduje, że *w rzeczywistości* wartość współczynnika  $b$  zmienia się w czasie, podczas gdy my radośnie przyjmujemy, że jest stała.

To bardzo zgrubny model, ale mamy nadzieję, że okaże się wystarczający, jeśli ograniczymy zakres jego stosowalności. Nie możemy liczyć na to, że uda się nam w modelu dopuszczającym tylko jeden pik zachorowań odtworzyć wieloletni przebieg choroby. Ale wymodelowanie okresu największej zachorowalności w sezonie, powiedzmy: od początku stycznia do końca kwietnia, wydaje się celem jak najbardziej realnym.

Ponieważ  $1/a$  odpowiada średniej długości okresu, gdy zainfekowany zaraża, to możemy z dobrym skutkiem przyjąć, że  $1/a = 2,5$  dnia (potem bierzemy zwolnienie i kładziemy się do łóżka), więc  $a = 0,4$  (na dzień).

Nie znając dobrej wartości współczynnika  $b$ , dopasujemy ją tak, by wartości  $I$  wyznaczone przez model jak najlepiej przybliżyły te, które już znamy z raportów

Pomijamy istotny szczegół, że raporty NIZP-PZH nie podają liczby wszystkich zachorowań, co więcej – podawane przypadki nie zawsze muszą być prawdziwą gripą. Taki urok medycyny.

NIZP-PZH. W tym celu definiujemy funkcję

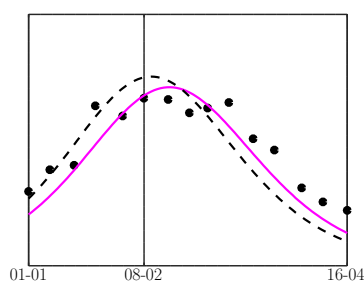
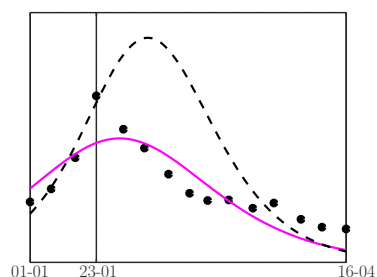
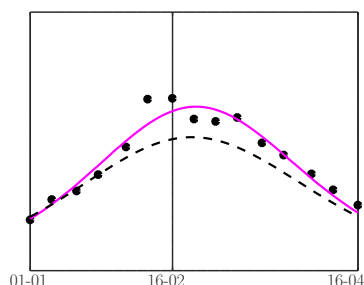
$$b \mapsto F(b) := [I_1(b), I_2(b), \dots, I_n(b)],$$

która dla zadanego  $b$  wyznacza (za pomocą powyższego modelu) wartości  $I_t$  w punktach pomiarów w zadanym przez nas okresie. Następnie, korzystając z funkcji `leasqr` z pakietu `optim`, znajdziemy wartość  $b$ , która zminimalizuje sumę kwadratów odchyłeń wartości przewidywanych od wartości zmierzonych:

$$(I_1(b) - \text{infected}(1))^2 + \dots + (I_n(b) - \text{infected}(n))^2 \rightarrow \min!$$

Listing 1. (Octave)

```
1 [infected, days] = przytnijdane(infected, days, '01-01-2016', '23-04-2016');
2 pkg load optim;
3 [~, b] = leasqr(days, infected, 0.4, F);
```



Wymodelowany przebieg grypy dla sezonów 14/15, 15/16 i 16/17. Pionowa kreska wskazuje realne maksimum zachorowań. Linia kolorem: wynik działania modelu dla  $b$  wyznaczonego na podstawie wszystkich danych. Czarna, przerywana linia: dla  $b$  wyznaczonego na podstawie tylko pierwszych czterech pomiarów

Najpierw ograniczamy zbiór danych `infected`, `days` do interesującego nas okresu (implementację funkcji `przytnijdane` można sobie z grubsza wyobrazić), a po załadowaniu pakietu `optim` funkcja `leasqr` wyznacza  $b$  minimalizujące sumę kwadratów odchyłeń (czwarty argument,  $F$ , jest potrzebny, bo ta funkcja wyznacza wartości  $I_1(b), I_2(b), \dots$  potrzebne do obliczenia odchyłeń) – omówienie jej implementacji, wykorzystującej KMCK, pominiemy.

Jak widać na wykresach obok, dla tak wyznaczonego  $b$  dostaliśmy kolorową krzywą, całkiem dobrze wpasowującą się w punkty pomiarowe (sezon 2016/2017 jest – jak widzieliśmy wcześniej – pod wieloma względami wyjątkowy i model nie przewiduje prawidłowo wielkości piku). Okazuje się, że dla większości sezonów dostajemy podobną wartość optymalnego  $b$ . Aby więc przewidywać przyszłe epidemie, możemy po prostu skorzystać ze „średniej” wartości  $b \approx 0,434$ , co zamyka sprawę (po prostu startujemy symulację z wartości znanych w konkretnym dniu). Z drugiej strony wybór uśrednionego  $b$  powoduje, że nie możemy reagować na ewentualne *atypowości* bieżącego sezonu (np. niesprzyjającą aurę lub szczególnie zjadliwy szczep wirusa, co w każdym przypadku powoduje zmianę współczynnika  $b$ ). Wówczas lepiej dopasować nowe  $b$  do bieżących danych. Przykładowy wynik dopasowania  $b$  na podstawie jedynie czterech pomiarów ze stycznia (linia przerywana na wykresach obok) pokazuje, że możemy się wtedy sporo pomylić; jednak im więcej pomiarów wykorzystamy, tym lepsze będą przewidywania.

A zatem... zaglądając do mojej szklanej/krzemowej kuli...

P R Z E P O W I A D A M, Ż E:

1. Następny sezon grypy... już się zaczął: w połowie sierpnia!
2. Od października do końca grudnia raportowana liczba zachorowań nie przekroczy... 140 tysięcy w tygodniu! *[Odczytany liniowy trend z pierwszego wykresu]*.
3. Szczyt zachorowań przypadnie... w drugim tygodniu lutego! *[Po prostu zakładam, że stanie się to za rok od ostatniego]*. Będzie wtedy zgłaszanych aż 400 tysięcy zachorowań tygodniowo! *[Z liniowego trendu na pierwszym wykresie; jednak nie wierzę w to zbyt i mam nadzieję, że naprawdę będzie ich znacznie mniej... Chociaż, z drugiej strony, grypa jest chorobą zdradziecką, więc po poprzednim roku ciszy teraz może zaatakować ze zdwojoną siłą]*.
4. Przebieg zachorowalności w I kwartale 2020 roku... będę na żywo monitorować i prognozować na swojej stronie internetowej ([www.mimuw.edu.pl/~przykry](http://www.mimuw.edu.pl/~przykry)) już od teraz, co tydzień uwzględniając nowe dane! *[Będę dopasowywać na bieżąco parametry modelu, minimalizując błąd średniokwadratowy, podobnie jak opisano powyżej]*.

No dobra, czas kończyć pisanie. Już w trakcie poczułem się – jakoś tak – niewyraźnie: boli mnie głowa, drapie w gardle i... tak jakby... łamie w kościach? Czyżby –

Aaa... apsik!...

# O dziesiątym problemie Hilberta

Joanna OCHREMIAK\*

\*LaBRI, Bordeaux

Podczas odbywającego się w 1900 roku w Paryżu Drugiego Międzynarodowego Kongresu Matematyków jeden z referatów wygłosił wybitny niemiecki matematyk David Hilbert. W swoim wystąpieniu zawarł on listę dwudziestu trzech zagadnień matematycznych stanowiących, jego zdaniem, szczególnie wyzwanie dla matematyków w rozpoczynającym się XX wieku. Większość z nich doczekała się rozwiązania. Inne, jak słynna hipoteza Riemanna, pozostają otwarte, inspirując kolejne pokolenia naukowców.

Dziesiąty spośród problemów Hilberta dotyczy *równań diofantycznych*, czyli równań postaci  $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ , gdzie  $P$  jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Przykładem równania diofantycznego jest więc  $2x_0^2x_1 - x_1^5 + 1 = 0$  oraz  $5x_0x_1x_2^2 - x_0x_2 + x_1^2 = 0$ . Hilbert postulował znalezienie procedury, która pozwalałaby dla dowolnego równania diofantycznego rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków, czy równanie to ma rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych, czy też nie. Problem ten jest o tyle wyjątkowy, że jako jedyny na liście Hilberta odwołuje się do pojęcia *algorytmu*, które na przełomie XIX i XX wieku nie miało jeszcze formalnej definicji. W przypadku wynalezienia postulowanej metody (czego, jak możemy się domyślać, spodziewał się Hilbert) byłoby intuicyjnie jasne, że stanowi ona pozytywne rozwiązanie problemu. Negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta nie byłoby jednak możliwe bez doprecyzowania jego sformułowania w języku matematycznym.

Oryginalne pytanie postawione przez Hilberta dotyczyło istnienia rozwiązań równania diofantycznego w zbiorze liczb całkowitych. Nietrudno jednak wykazać, że obie wersje problemu są równoważne.



Współcześnie powszechnie przyjęte definicje pozwalają w sposób całkowicie formalny stwierdzić, że nie istnieje algorytm, który mając dane na wejściu równanie diofantyczne, rozstrzyga, czy ma ono rozwiązanie w liczbach naturalnych. Negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta jest konsekwencją słynnego twierdzenia z roku 1970, wieńczącego wiele lat pracy czwórki matematyków: Jurija Matijasiewicza, Julii Robinson, Martina Davisa oraz Hilarego Putnama.

Celem tego artykułu jest sformułowanie tak zwanego *twierdzenia MRDP* (od Matijasiewicz, Robinson, Davis, Putnam), wyjaśnienie zawartej w nim fascynującej idei rozwiązania dziesiątego problemu Hilberta oraz przedstawienie pewnych jego zaskakujących konsekwencji.

Intuicyjnie, algorytm to po prostu skończony zbiór instrukcji. Powszechnie znany jest algorytm dodawania pisemnego, zwany „dodawaniem pod kreską”, czy też algorytm Euklidesa wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb. Pojęcie algorytmu zostało sformalizowane w latach trzydziestych XX wieku niezależnie przez Kurta Gödla, Alana Turinga, Emila Posta oraz Alonzo Churcha. Zaproponowane definicje, na pozór bardzo różne, okazały się równoważne i stanowią dziś podstawę zarówno sposobu funkcjonowania komputerów, jak i teoretycznych badań nad ich możliwościami. Na potrzeby tego artykułu pozostaniemy jednak przy intuicyjnym rozumieniu pojęcia algorytmu, pamiętając, że kryje się za nim dobrze zdefiniowany obiekt matematyczny.

Wracając do zagadnienia, z którym mierzyli się Matijasiewicz, Robinson, Davis oraz Putnam – w języku współczesnej informatyki dotyczy ono tak zwanego *problemu decyzyjnego*: chcemy wiedzieć, które elementy zbioru  $A$  mają interesującą nas własność  $w$ . Dziesiąty problem Hilberta to problem decyzyjny  $(A, w)$ , gdzie zbiór  $A$  to zbiór wszystkich równań diofantycznych, a własność  $w$  to posiadanie co najmniej jednego rozwiązania w liczbach naturalnych. Innym znanym przykładem problemu decyzyjnego jest *problem pierwszości*: interesuje nas w tym przypadku zbiór  $A$  wszystkich liczb naturalnych oraz własność  $w$  bycia liczbą pierwszą.

Problem decyzyjny  $(A, w)$  jest *rozstrzygalny*, jeśli istnieje algorytm, który, mając dany na wejściu dowolny element  $a$  zbioru  $A$ , po wykonaniu skończonej liczby operacji rozstrzyga, czy element  $a$  ma własność  $w$ , czy też nie. Bezpośrednią



### Rozwiązanie zadania F 989.

Masy atomowe pierwiastków występujących naturalnie w przyrodzie wypełniają przedział od 1 (wodór) do 244 (pluton), a promienie atomowe, przedział od  $0,5 \cdot 10^{-10}$  m (wodór) do  $2,67 \cdot 10^{-10}$  m (cez) – wynik oszacowania zależy od charakteru wiązań, jakie atom tworzy, gdy wchodzi w związki chemiczne. Masy atomów nie zależą od tworzonych przez nie wiązań, a więc w obliczeniach posłużymy się ich masami. Spróbujmy oszacować „typową” masę atomów wchodzących w skład Ziemi. W atmosferze mamy niemal wyłącznie azot i tlen o masach atomowych 14 i 16, w skorupie Ziemi dominuje tlen oraz krzem o masie atomowej 28, a jądro Ziemi składa się głównie z żelaza i niklu o masach atomowych 56 i 59. Przyjmijmy, że typowa liczba masowa to 50, i obliczmy, ile takich atomów „składa” się na masę Ziemi:

$$N = \frac{M}{50 \cdot u} = \frac{6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{50 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 7 \cdot 10^{49}.$$

Dla „sprawdzenia” oszacujmy, ile „typowych atomów” wypełni objętość Ziemi. Promienie atomów najczęściej występujących na Ziemi mieszczą się w przedziale od  $1,0 \cdot 10^{-10}$  m do  $2,0 \cdot 10^{-10}$  m. Przyjmijmy promień „typowego” atomu  $r = 1,5 \cdot 10^{-10}$  m. Otrzymujemy, że do „wypełnienia” objętości Ziemi potrzeba:

$$N' = R^3 / r^3 \approx \frac{(6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3} \approx 8 \cdot 10^{49}.$$

Przyjęliśmy kulisty kształt atomów i pominięliśmy fakt, że ciasno upakowane kule wypełniają „tylko” około 3/4 objętości przestrzeni, oraz wpływ ogromnych ciśnień we wnętrzu Ziemi (do około 330 GPa). Zgodność otrzymanych wartości  $N$  i  $N'$  jest nawet nieco zaskakująca.



### Rozwiązanie zadania F 990.

W sieci fcc atomy obsadzają wierzchołki sześcianu i środki jego ścian bocznych. Najbliższe atomy znajdują się więc w odległości

$$d_F = a_F \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,5786 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

W sieci bcc atomy obsadzają wierzchołki sześcianu i jego środek. Najbliższe atomy są więc odległe o

$$d_B = a_B \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,5152 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Różnica odległości między atomami jest bardzo mała i odpowiada stosunkowi gęstości fazy fcc do fazy bcc, równemu 0,928. Warto zauważyć, że w sieci bcc przypadają 2 atomy na jedną komórkę elementarną (atom w środku należy do komórki, a każdy z atomów „narożnych” należy do ośmiu sąsiadujących komórek), a w sieci fcc 4 atomy (każdy „narożny” należy do ośmiu komórek, a te w środkach ścian do dwóch sąsiadujących komórek).

konsekwencją twierdzenia MRDP (do którego sformułowania zmierzają nasze rozważania) jest nierozstrzygalność dziesiątego problemu Hilberta.

Zwróćmy jednak uwagę, że zdefiniowane powyżej pojęcie rozstrzygalności jest stosunkowo restrykcyjne. Mniej satysfakcjonujące rozwiązanie problemu decyzyjnego  $(A, w)$  otrzymamy, wymagając jedynie, żeby algorytm po skończonej liczbie kroków zwrócił pozytywną odpowiedź dokładnie wtedy, gdy na wejściu ma dany element zbioru  $A$  o własności  $w$ . Natomiast jeśli dany element nie spełnia  $w$ , to algorytm może się nie zatrzymać. Problem decyzyjny, dla którego taki algorytm istnieje, nazywamy *częściowo rozstrzygalnym*. Łatwo stwierdzić, że dziesiąty problem Hilberta jest częściowo rozstrzygalny: wystarczy rozważyć algorytm, który dla danego równania diofantycznego sprawdza po kolei wszystkie możliwe wartościowania w liczbach naturalnych występującego w nim zbioru niewiadomych. Jeśli któreś z kolei wartościowanie spełni równanie, algorytm zwraca odpowiedź pozytywną, natomiast w przeciwnym przypadku nigdy nie zakończy on swojego działania.

Dziesiąty problem Hilberta jest więc przykładem problemu decyzyjnego, który jest częściowo rozstrzygalny, ale nie jest rozstrzygalny. Wynika to jednak dopiero z udowodnionego w 1970 roku twierdzenia MRDP. Na długo przed rokiem 1970 matematycy zdawali sobie sprawę z istnienia częściowo rozstrzygalnych, ale nierozstrzygalnych problemów decyzyjnych postaci  $(N, w)$ , gdzie  $w$  jest pewną własnością liczb naturalnych. Twierdzenie MRDP potwierdza odważną hipotezę, według której zbiór wszystkich częściowo rozstrzygalnych problemów decyzyjnych dotyczących liczb naturalnych jest w pewien sposób silnie powiązany ze zbiorem równań diofantycznych.

Każda własność  $w$  liczb naturalnych definiuje podzbiór  $A_w$  liczb naturalnych o własności  $w$ . Jednocześnie, każdy podzbiór  $A$  liczb naturalnych definiuje własność  $w_A$  należenia do podzbioru  $A$ . Upraszczając nieco terminologię, zamiast o rozstrzygalnych lub częściowo rozstrzygalnych problemach decyzyjnych postaci  $(N, w)$  możemy więc mówić o rozstrzygalnych lub częściowo rozstrzygalnych podzbiórach zbioru liczb naturalnych. W 1950 roku Martin Davis sformułował hipotezę, zgodnie z którą każdy częściowo rozstrzygalny podzbiór zbioru liczb naturalnych jest tak zwanym *zbiorem diofantycznym*.

Definicja zbioru diofantycznego wymaga rozważenia równań diofantycznych z parametrem. Parametrem nazwiemy po prostu jedną, wyróżnioną niewiadomą. Równanie diofantyczne z parametrem jest więc postaci  $P(a, x_1, \dots, x_k) = 0$ . Definiuje ono całą rodzinę równań diofantycznych: podstawiając za parametr  $a$  dowolną liczbę naturalną  $n$ , otrzymamy równanie diofantyczne (bez parametru), które oznaczать będziemy przez  $P_n(x_1, \dots, x_k) = 0$ . Dla dowolnego równania diofantycznego z parametrem  $P(a, x_1, \dots, x_k) = 0$ , zbiór tych liczb naturalnych  $n$ , dla których równanie  $P_n(x_1, \dots, x_k) = 0$  ma rozwiązanie w liczbach naturalnych, nazywamy *zbiorem diofantycznym*. Przykładem zbioru diofantycznego jest zatem zbiór drugich potęg liczb naturalnych odpowiadający równaniu  $x_1^2 - a = 0$ , a także zbiór liczb złożonych odpowiadający równaniu  $(x_1 + 2)(x_2 + 2) - a = 0$ .

Zauważmy, że każdy zbiór diofantyczny jest częściowo rozstrzygalny. Rzeczywiście, przypuśćmy, że mamy dany zbiór diofantyczny zadany przez równanie diofantyczne z parametrem  $P(a, x_1, \dots, x_k) = 0$ . Algorytm świadczący o tym, że zbiór ten jest częściowo rozstrzygalny, dla danej na wejściu liczby naturalnej  $n$  oblicza równanie diofantyczne  $P_n(x_1, \dots, x_k) = 0$ , a następnie sprawdza po kolei wszystkie wartościowania jego niewiadomych w liczbach naturalnych. Jeśli któreś wartościowanie spełni równanie  $P_n(x_1, \dots, x_k) = 0$ , algorytm zwraca odpowiedź pozytywną, zaś w przeciwnym przypadku nie zakończy on swojego działania.

Hipoteza Davisa, jak już wspomnieliśmy, dotyczy implikacji przeciwnej: każdy częściowo rozstrzygalny podzbiór zbioru liczb naturalnych jest diofantyczny. Została ona udowodniona po dwudziestu latach intensywnych badań. Jej potwierdzenie stanowi treść twierdzenia MRDP, które możemy zatem sformułować następująco:

**Twierdzenie MRDP.** *Podzbiór zbioru liczb naturalnych jest częściowo rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem diofantycznym.*

Uwzględniając fakt istnienia częściowo rozstrzygalnych, ale nierozstrzygalnych podzbiorów zbioru liczb naturalnych, twierdzenie MRDP implikuje istnienie nierozstrzygalnych zbiorów diofantycznych i w konsekwencji negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta. Zanim jednak prześledzimy dokładniej tę ostatnią implikację, przyjrzyjmy się, jak zaskakująca jest w istocie treść twierdzenia MRDP.

Wspomniany powyżej problem pierwszości jest z pewnością rozstrzygalny: dla danej na wejściu liczby naturalnej  $n$  trywialny algorytm sprawdza po kolei, czy  $n$  jest podzielne przez jakąkolwiek liczbę ze zbioru  $\{2, \dots, n-1\}$ . W szczególności, zbiór liczb pierwszych jest częściowo rozstrzygalny. Z twierdzenia MRDP wynika zatem, że istnieje równanie diofantyczne z parametrem  $P(a, x_1, \dots, x_k) = 0$ , które ma rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy  $a$  jest liczbą pierwszą! Podobnie ma się sprawa ze zbiorem wszystkich potęg liczby 2, zbiorem liczb Fibonacciego... i przypuszczalnie z każdym innym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, którego definicja przychodzi nam łatwo do głowy.

Pozostaje nam przyjrzeć się, w jaki sposób z twierdzenia MRDP wynika negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta. Przypuśćmy, że odpowiedź ta byłaby pozytywna, i niech  $\mathcal{A}$  oznacza algorytm, który dla dowolnego równania diofantycznego rozstrzyga, czy ma ono rozwiązanie w liczbach naturalnych, czy też nie. Rozważmy równanie diofantyczne z parametrem  $P(a, x_1, \dots, x_k) = 0$  definiujące pewien zbiór diofantyczny  $X$ . Zauważmy, że następujący algorytm rozstrzyga przynależność do zbioru  $X$ : dla danej na wejściu liczby naturalnej  $n$  oblicz równanie diofantyczne  $P_n(x_1, \dots, x_k) = 0$ , a następnie za pomocą algorytmu  $\mathcal{A}$  rozstrzygnij, czy ma ono rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych. Odpowiedź pozytywna oznacza, że  $n \in X$ , natomiast odpowiedź negatywna oznacza, że  $n \notin X$ . Wykazaliśmy w ten sposób, że każdy zbiór diofantyczny jest rozstrzygalny. Na mocy twierdzenia MRDP oznacza to, że każdy częściowo rozstrzygalny podzbiór zbioru liczb naturalnych jest rozstrzygalny. Otrzymana sprzeczność implikuje nierozstrzygalność dziesiątego problemu Hilberta.

Zdefiniowanie zbioru, który nie jest częściowo rozstrzygalny, jest zadaniem zdecydowanie nietrywialnym.

## Jak uniknąć częściowej rozstrzygalności?

W artykule powyżej wspomniano, że prawie każdy zbiór liczb naturalnych, który przyjdzie nam na myśl, jest częściowo rozstrzygalny. Spróbujmy jednak pokazać, że słowo *prawie* jest tu istotne, czyli że możliwa jest konstrukcja zbioru  $S \subseteq \mathbb{N}$ , który nie jest częściowo rozstrzygalny.

Po pierwsze zauważmy, że jeśli zarówno zbiór  $S$ , jak i jego dopełnienie  $\mathbb{N} \setminus S$  są częściowo rozstrzygalne, to wówczas  $S$  jest nawet rozstrzygalny. To, że  $S$  jest częściowo rozstrzygalny, oznacza, że istnieje algorytm (nazwijmy go *pozytywnym*), który dla danej liczby  $n \in \mathbb{N}$  zatrzyma się i odpowie „ $n$  należy do  $S$ ”, jeśli  $n \in S$  (ale być może nie zatrzyma się, jeśli  $n \notin S$ ). Podobnie, skoro  $\mathbb{N} \setminus S$  jest częściowo rozstrzygalny, to istnieje algorytm (nazwijmy go *negatywnym*), który dla danej liczby  $n \in \mathbb{N}$  zatrzyma się i odpowie „ $n$  należy do  $\mathbb{N} \setminus S$ ”, o ile  $n \in \mathbb{N} \setminus S$ . A zatem jeśli puścimy naraz oba algorytmy, pozytywny i negatywny, to któryś z nich się zatrzyma i zwróci poprawną odpowiedź (zakładamy, że wtedy automatycznie zatrzymujemy również drugi

algorytm). To pokazuje, że istotnie w takiej sytuacji  $S$  jest rozstrzygalny.

A zatem do konstrukcji zbioru, który nie jest nawet częściowo rozstrzygalny, wystarczy znaleźć  $S \subseteq \mathbb{N}$  taki, że jest on częściowo rozstrzygalny, ale nie jest rozstrzygalny. Wówczas  $\mathbb{N} \setminus S$  nie będzie nawet częściowo rozstrzygalny. Aby skonstruować taki zbiór  $S$ , potrzebna jest pewna wiedza; zakładamy, że Czytelnik Doświadczony zna definicję i podstawowe intuicje związane z maszynami Turinga. Zbiór maszyn Turinga, które akceptują słowo puste, jest częściowo rozstrzygalny (wystarczy znaleźć bieg akceptujący dla tego słowa pustego), ale nie jest rozstrzygalny (uzasadnienie można znaleźć np. w artykule Szymona Toruńczyka „Paradoks Russella” w  $\Delta_{17}^{11}$ ). Każdą maszynę Turinga można jednoznacznie zakodować jako liczbę naturalną. Zatem zbiór zakodowań maszyn Turinga, które akceptują słowo puste, jest częściowo rozstrzygalny, ale rozstrzygalny już nie jest.

Wojciech CZERWIŃSKI



# Ze sztuczną inteligencją na czarne dziury

\* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika Polskiej Akademii Nauk

Filip MORAWSKI\*

Jak bardzo inteligentna jest współczesna sztuczna inteligencja (*artificial intelligence*, AI)? W przeciwieństwie do tego, co przedstawia fantastyka naukowa, AI jest na razie dość mało zaawansowana, żeby nie powiedzieć – prymitywna. Rzeczywistość i fantastykę naukową wiele różni; daleko nam jeszcze do stworzenia androidów i maszyn, które potrafią myśleć i funkcjonować jak ludzie. Mimo to współczesna AI stanowi nieodłączną część naszego życia, chociaż często możemy nie zdawać sobie z tego sprawy. Z dobrodziejstw AI korzysta się w wielu dziedzinach, począwszy od marketingu, a skończywszy na diagnostyce medycznej. Szczególnie przydatna okazuje się w nauce, pomagając zrozumieć prawa stojące za fascynującymi zjawiskami natury. Jednym z tych zjawisk są fale grawitacyjne (*gravitational waves*, GW), do których wyławiania z szumu kosmosu i detektorów można wykorzystać właśnie AI.

Odkrycie GW przez zespoły LIGO i Virgo – mimo iż miało miejsce w 2015 roku – już uznawane jest za jedno z największych odkryć XXI wieku, o czym świadczy Nagroda Nobla przyznana w 2017 roku. Otworzyło ono nowe okno na Wszechświat, nazwane astronomią grawitacyjną. Dzięki astronomii grawitacyjnej uzyskaliśmy wgląd w procesy znane do tej pory tylko z teorii lub obserwowane jedynie pośrednio, jak czarne dziury. Detekcja GW powstałej w wyniku połączenia się dwóch czarnych dziur to nie tylko triumf nauki, lecz także technologii i inżynierii. Zarejestrowana fala grawitacyjna odpowiadała zmianie odległości o rzędy wielkości mniejszej niż rozmiar protonu. Było to możliwe dzięki wielu przełomom w dziedzinie fizyki laserów, fizyki kwantowej, a także analizy danych. Wielkim sukcesem teorii jest także zgodność obserwowanych sygnałów z Ogólną Teorią Względności (OTW).

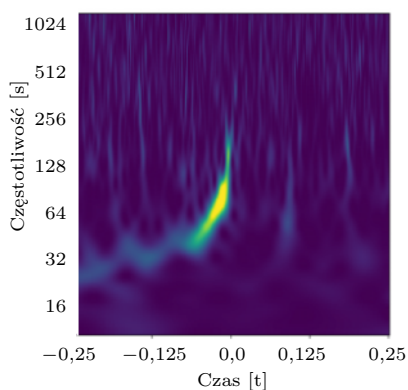
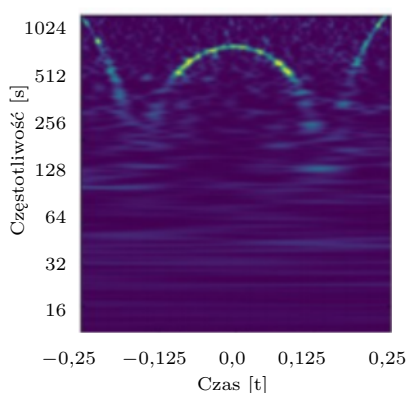
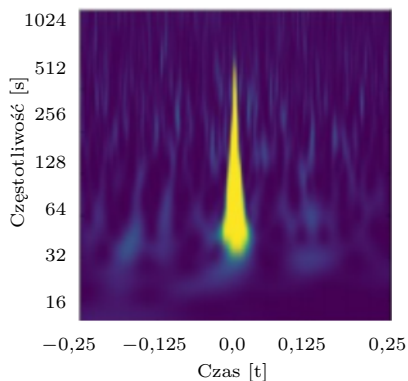
Rejestrowany sygnał jest bezwymiarową wartością, względnym odkształceniem detektora (*strain*), opisywanym wzorem

$$h = \frac{\delta L}{L}.$$

Fala grawitacyjna rozchodząc się w czasoprzestrzeni, periodycznie zniekształca ją (w kierunku prostopadłym do kierunku propagacji, według OTW). Ten efekt jest rejestrowany w interferometrze o ramionach długości  $L$ ;  $\delta L$  oznacza zmianę długości wywołaną przejściem fali. Dotychczas zarejestrowane sygnały osiągnęły odkształcenie  $h$  rzędu  $10^{-21}$ . Biorąc pod uwagę długość ramienia interferometru (3–4 km),  $\delta L$  wyniosła około  $10^{-18}$  m.

Głównym zadaniem analizy danych jest zrozumienie źródeł szumów przeszkadzających w detekcji sygnałów z kosmosu. Z tego powodu interferometry LIGO i Virgo wyposażone są w liczne dodatkowe detektory rejestrujące stan otoczenia detektorów, np. drgania podłoża, dźwięki, stan pola elektromagnetycznego. W efekcie pewne źródła szumów są względnie łatwe do wyeliminowania. Dzięki swej czułości detektory rejestrują praktycznie wszystko: falowanie i przypyły morza, przelatujące samoloty, ale także np. kruki stukające dziobami w obudowę systemu chłodniczego pokrytego lodem, co przez pewien czas stanowiło problem w LIGO Hanford. Wiele artefaktów pojawia się jednak tylko w głównym kanale interferometru. Wraz z poprawą czułości wzrasta też liczba sygnałów (amplituda fali jest proporcjonalna do odległości – 10-krotna poprawa czułości oznacza 1000-krotnie większą objętość Wszechświata dostępną do badań!), ale też czułość na przeróżne źródła szumu. Dlatego poszukiwania słabego sygnału GW wymagają doskonalszych metod analizy danych niż te używane aktualnie.

Szczególnie wymagającym etapem w redukcji szumów jest charakterystyka przejściowych sygnałów, tzw. gliczy (*glitches*), których przykłady przedstawiono na rysunku 1. Część z nich jest względnie łatwa do identyfikacji i eliminacji z danych. Jednakże źródła wielu gliczy są wciąż nieznane.



Rys. 1. W procesie analizy danych odkształcenie czasoprzestrzeni  $h$  przedstawia się w postaci spektrogramu (częstotliwości w funkcji czasu). Łatwiejsze staje się wtedy określenie charakteru sygnału. Rysunki przedstawiają przykłady instrumentalnych gliczy oraz, dla porównania, fali grawitacyjnej. Powyższe zakłócenia są jednymi z częściej zauważanych w interferometrze. Nazwano je „puls” (*blip*, górny rysunek) oraz „gwizd” (*whistle*, środkowy rysunek). Sygnał fali grawitacyjnej emitowany przez ciasny układ podwójny nazywany jest „ćwierkiem” (*chirp*, dolny rysunek). Sygnały te mogą się wydawać łatwo rozróżnialne, jednakże biorąc pod uwagę złożoną morfologię szumów i ich zmieniające się kształty, analiza zakłóceń staje się zadaniem nietrywialnym

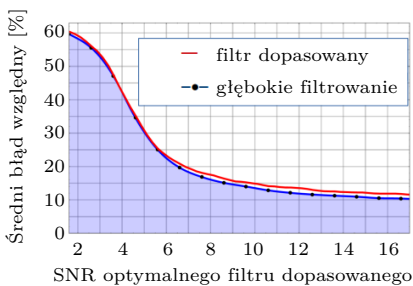
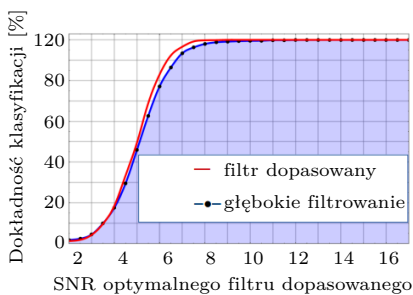


Zrozumienie i eliminacja gliczy z danych ma doprowadzić – w idealnym przypadku – do otrzymania szumu gaussowskiego, w którym zawarty jest tylko astrofizyczny sygnał o dużo mniejszej niż sam szum amplitudzie. Odnalezienie tak słabego impulsu wymaga zastosowania czulego algorytmu, jakim jest metoda filtru dopasowanego (*matched filtering method*, MFM). Jest ona optymalną z punktu widzenia teorii metodą poszukiwania GW. MFM polega na wyznaczeniu korelacji krzyżowej pomiędzy analizowanymi danymi a pewnym założonym wzorcem sygnału. W celu odnalezienia głęboko ukrytej w szumie GW korelacja ta obliczana jest w poszczególnych przedziałach częstotliwości i ważona przez widmową gęstość amplitudy szumu. Daje to większą wagę częstotliwościom, w których szum jest niski. Tym samym, uzyskiwany na wyjściu stosunek sygnału do szumu (*signal to noise ratio*, SNR) jest w danym przedziale częstotliwości tym wyższy, im niższy jest tam szum.

Definicja SNR używana w analizie danych GW uwzględnia zarówno amplitudę sygnału zanurzonego w szumie, jak i jego czas trwania. W poniższym uproszczonym wzorze  $h$  odpowiada amplitudzie wzorca GW,  $s$  danym zawierającym ten sygnał,  $f$  częstotliwości sygnału, zaś  $S$  jest widmową gęstością amplitudy szumu.

$$SNR \propto \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{h(f)s(f)}{S(f)} e^{-2\pi ift}$$

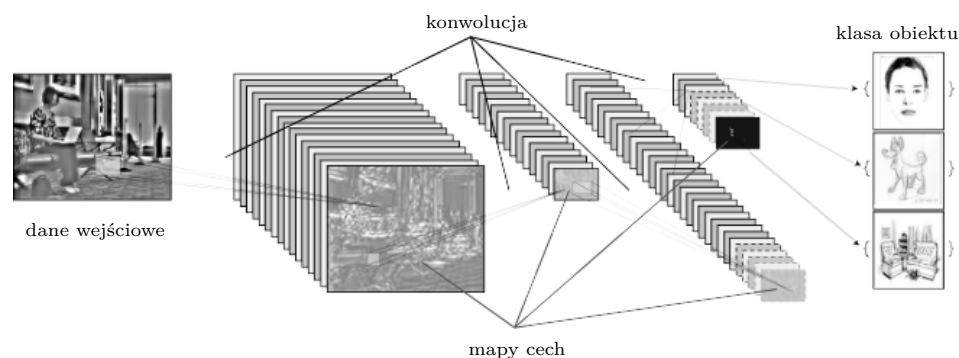
Pomysł wykorzystania AI w poszukiwaniach GW narodził się wraz z rosnącą popularnością zaawansowanych algorytmów uczenia maszynowego. Niewątpliwą ich zaletą jest możliwość analizowania słabych sygnałów o złożonym charakterze. Ponadto AI może być wykorzystana do analizy w czasie rzeczywistym. W kontekście astronomii grawitacyjnej stanowi to nie lada zaletę ze względu na wymogi astronomii wieloaspektowej (*multimessenger astronomy*). Tylko szybka reakcja i dokładna detekcja GW umożliwia obserwatoriom astronomicznym na całym świecie zwrócenie teleskopów w kierunku źródła sygnału i zaobserwowanie go w dziedzinie elektromagnetycznej. Ogromna ilość informacji związana z tego typu interdyscyplinarną analizą wyzwoliła w sierpniu 2017 roku taką ogólnoswiatową interwencję, która pozwoliła zaobserwować dwie zlewające się gwiazdy neutronowe na obu falach jednocześnie: grawitacyjnych i elektromagnetycznych.



Rys. 2. Wyniki działania algorytmu głębokiego filtrowania (*deep filtering*). Górny rysunek przedstawia dokładność klasyfikacji sygnału fali grawitacyjnej, czyli skuteczność, z jaką algorytm rozróżnia sygnał od szumu. Jak widać, dla większości rozważanego SNR, metoda działała prawie w 100% poprawnie. Dolny rysunek przedstawia wyniki estymacji błędu względnego mas łączących się czarnych dziur. Im mniejsza jego wartość, tym dokładniejsze oszacowanie względem rzeczywistej wartości. Podobnie jak w przypadku klasyfikacji, dla większości analizowanych sygnałów metoda osiągnęła znakomite wyniki. Warto zauważyć, że metoda filtru dopasowanego (*matched filtering*) i algorytm głębokiego filtrowania osiągnęły bardzo podobne rezultaty

Jednym z najciekawszych projektów wykorzystujących AI w badaniach GW jest *głębokie filtrowanie* (*deep filtering*, DF, zob. D. George and E. A. Huerta, *Phys. Lett. B* 778 (2018)). Projekt ten prowadzony jest przez uczonych z Uniwersytetu Illinois w Stanach Zjednoczonych Eliu Huertę oraz Daniela George'a i stawia sobie za cel stworzenie systemu do detekcji GW w czasie rzeczywistym przy użyciu AI. Głębokie filtrowanie wyróżnia się na tle innych algorytmów nie tylko dokładną klasyfikacją sygnałów, ale również możliwością estymacji parametrów fizycznych obiektów-źródeł GW, na przykład mas zlewających się czarnych dziur. Dokładna estymacja umożliwi lepsze zrozumienie zachodzących w trakcie trwania tego zjawiska procesów, poprzez zastosowanie w treningu algorytmu najbardziej zaawansowanych modeli sygnału.

DF opiera swoje działanie na jednym z najpopularniejszych algorytmów AI – konwolucyjnych sieciach neuronowych (*convolutional neural networks*, CNN). Metoda ta powstała w oparciu o badania kory wzrokowej u ssaków – części mózgu, która specjalizuje się w przetwarzaniu informacji wizualnej. Kluczowym elementem CNN jest tzw. warstwa konwolucyjna (*convolutional layer*). Jej zadaniem jest ekstrakcja charakterystycznych cech z danych wejściowych i rzutowanie ich do „mapy cech” (*feature map*), jak to pokazuje rysunek 3. Mniejsza warstwa konwolucyjna pozwala na otrzymanie bardziej szczegółowych map, a wówczas CNN charakteryzuje się większą rozdzielczością. Z kolei większa warstwa konwolucyjna doprowadzi do zmniejszenia rozdzielczości algorytmu na zmiany lokalne, jednocześnie umożliwiając ogólniejszą charakterystykę.



Rys. 3. Przykład działania konwolucyjnej sieci neuronowej. Algorytm poprzez szereg operacji konwolucji (realizowanych przez warstwy konwolucyjne) ma za zadanie zaklasyfikować dane wejściowe (zdjęcie) do jednej z klas obiektu widocznego na tym wejściu (człowiek, pies lub fotel). Każdorazowa konwolucja prowadzi do utworzenia mapy cech. Przeważnie tylko pierwsza z map zawiera zrozumiałe dla nas informacje (w niniejszym przypadku jest to mapa konturów widocznych na zdjęciu). Kolejne (głębiej położone) mapy charakteryzują się bardziej abstrakcyjną, trudną do zrozumienia reprezentacją.

DF składa się z dwóch równoległych CNN, które nazwano klasyfikatorem i estymatorem. Klasyfikator ma za zadanie odróżnić sygnał fali grawitacyjnej od szumu bądź też czegośkolwiek, co może ją imitować (jak wspomniane wcześniej glicze). W kontekście AI realizuje on zagadnienie klasyfikacji. Skuteczność działania algorytmu wyraża się poprzez dokładność klasyfikacji. Dokładność 100% odpowiada modelowi idealnie klasyfikującemu dane – CNN zawsze rozpoznaje sygnał GW.

Z kolei estymator realizuje zagadnienie nazywane regresją, dostarczając ilościowej informacji na temat analizowanego sygnału. W kontekście DF celem estymatora jest dokładne określenie mas składników układu podwójnego czarnych dziur. Skuteczność działania algorytmu wyraża się poprzez porównanie generowanych przez CNN wyników z wartościami oczekiwanymi. Istnieje wiele możliwości na określenie tej wartości. Twórcy DF zdecydowali się wykorzystać błąd względny. Idealnie działający estymator osiąga wartości błędu równe 0%.

Autorzy na potrzeby treningu DF stworzyli obszerny zbiór danych zawierający wzorce GW emitowanych przez ciasne układy podwójne czarnych dziur. Zbiór ten został tak przygotowany, by odzwierciedlić sygnały, które interferometry LIGO oraz Virgo są w stanie zarejestrować z największym prawdopodobieństwem. Masy czarnych dziur zostały dobrane tak, by ich wartości znalazły się w przedziale od 5 do 75  $M_{\odot}$ , zaś stosunek ich mas wynosił od 1 do 10. W sumie otrzymany zbiór danych zawierał 5000 wzorców GW, które zostały „zanurzone” w rzeczywistym szumie interferometru. Przygotowane w ten sposób dane podzielono na dwie części: treningową oraz testową. Zbiór testowy został dodatkowo wzbogacony o glicze imitujące GW. Zabieg ten miał sprawdzić podatność DF na detekcję sygnałów niebędących ani gaussowskim szumem, ani pochodzenia kosmicznego.

W implementacji DF zwraca uwagę fakt nietypowego wykorzystania CNN. Zazwyczaj algorytm ten operuje na obrazach, takich jak przedstawione na rysunku 1 spektrogramy, i skupia się na przestrzennej

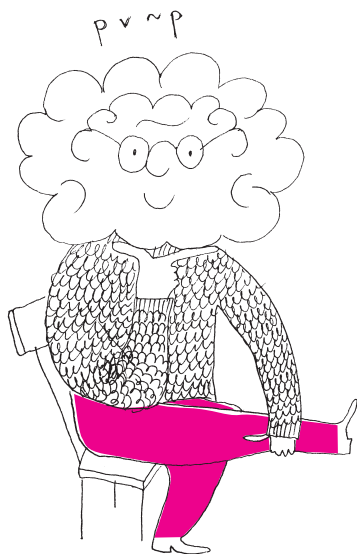
analizie danych. Jednakże w przypadku DF algorytm wykorzystuje jednowymiarowe ciągi czasowe i analizuje je pod kątem zmienności czasowej. Klasyfikacja sygnału GW, a tym bardziej estymacji jego parametrów, za pomocą badania ewolucji czasowej sygnału nie należy do prostych zadań. Jednakże twórcy DF osiągnęli znakomite wyniki, zamieszczone na rysunku 2. Okazało się, że CNN działają niezwykle dokładnie dla szerokiego zakresu SNR, zarówno w kontekście klasyfikacji, jak i regresji. Pomimo obecności gliczy w zbiorze testowym klasyfikator nie dał się oszukać i nie przypisał błędnie tych sygnałów jako GW. Co więcej, AI osiągnęła tak dobre wyniki, jak wykorzystywana od wielu lat MFM. Estymacja mas czarnych dziur zdała się działać jeszcze lepiej. Wyniki te napawają dużym optymizmem na przyszłość.

W dotychczasowych badaniach DF analizowany był pod kątem GW emitowanych podczas łączenia się czarnych dziur. Jednakże twórcy projektu nie zatrzymali się na analizie tylko tego zjawiska. Aktualnie pracują nad rozszerzeniem DF na sygnały emitowane podczas łączenia się gwiazd neutronowych. Praca ta może odegrać kluczową rolę w astronomii wieloaspektowej.

Na podsumowanie warto wspomnieć o interdyscyplinarnym charakterze takich badań. Celem algorytmów AI jest optymalizacja pewnej funkcji wielowymiarowej, opisującej dane zagadnienie. Naukowcy nadają znaczenie generowanym wynikom analizy. Z punktu widzenia AI nie ma znaczenia, czy poszukiwany sygnał w szumie jest GW, czy też falą elektromagnetyczną rozchodzącą się w mózgu. Ta niezależność algorytmów otwiera perspektywę na wzajemne oddziaływanie niezwiązanych ze sobą dziedzin nauki. Próbuąc rozwiązać astrofizyczne zagadnienie za pomocą AI, przy okazji i przypadkiem możemy wpłynąć na rozwój metod diagnostycznych w medycynie. Nie byłby to pierwszy raz, gdy potencjalnie niezwiązane ze sobą dziedziny nauki korzystają ze swoich wyników. Nawet po długim czasie. Sto lat temu mało kto podejrzewał, że ogólna teoria względności Alberta Einsteina umożliwi nawigację satelitarną z dokładnością do milimetrów albo obserwacje zderzających się czarnych dziur w odległym kosmosie.

## Nieskończoność: 7. Rozmyślania o myślakach

Michał KORCH



W październikowym numerze *Delty* przedyskutowaliśmy hipotezę continuum i zaskakujące rozwiązanie problemu dotyczącego jej prawdziwości (o ile Czytelnik zgodzi się nazwać to rozwiązaniem). Na pytanie, czy istnieje nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, który nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych ani ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych (jest więc „większy” od zbioru liczb naturalnych, ale „mniejszy” od zbioru liczb rzeczywistych), odpowiedź nie brzmi „tak” ani „nie”. Okazało się, że nie jest możliwe udowodnienie, że taki zbiór istnieje, ani że taki zbiór nie istnieje. Inaczej mówiąc, umiemy udowodnić, że nie da się udowodnić, iż taki zbiór istnieje (czego dokonał Paul Cohen). Ale też umiemy udowodnić, że nie da się udowodnić, że taki zbiór nie istnieje (tego dokonał wcześniej Kurt Gödel). Wszystko to przy założeniu, że same aksjomaty matematyki (czyli, powiedzmy, teorii zbiorów) są niesprzeczne.

Ale jak to możliwe? Czy nie jest przypadkiem tak, że każde matematyczne zdanie jest albo prawdziwe, albo nie? Spróbujemy się nad tym zastanowić w tym odcinku naszej nieskończonej przygody.

Zbliżamy się więc nieuchronnie do świata logiki. Ten świat wygodnie nam będzie zwiedzać razem z myślakami – stworzonkami wymyślonymi przez Raymonda Smullyana, które myślą w bardzo precyzyjny sposób. Będziemy zatem określać precyzyjnie coraz bardziej interesujące style myślenia i wnioskowania.

Zacznijmy od najprostszego typu myślaka. **Myślak podstawowy** po pierwsze wierzy we wszystkie tautologie. Tautologia to takie zdanie, które zawsze jest prawdziwe, niezależnie od okoliczności. Na przykład, jeśli  $p$  to dowolne zdanie logiczne, to zdanie „ $p$  lub nie  $p$ ” jest tautologią. Myślak wierzy we wszystkie tego typu zdania. Po drugie, myślak podstawowy ma tę cechę, że jeśli wierzy w dowolne zdanie  $p$  oraz w zdanie „z  $p$  wynika  $q$ ”, to również uwierzy w zdanie  $q$ .

O myślaku powiemy, że jest **sprzeczny**, jeśli wierzy w pewne sprzeczne zdanie (np. w zdanie „nie jest prawdą, że  $p$  lub nie  $p$ ”, takie zdanie będziemy oznaczać  $\perp$ ). Zauważmy, że sprzeczny myślak podstawowy ma tę cechę, że wierzy absolutnie we wszystko. Rzeczywiście, skoro z fałszu wynika wszystko, dla dowolnego zdania  $p$  zdanie „jeśli  $\perp$ , to  $p$ ” jest tautologią, więc myślak w nie wierzy. Skoro jednak wierzy również w  $\perp$ , to wierzy także i w  $p$ . Myślaka będziemy nazywać **zuchwałym**, jeśli wierzy on w to, że nie jest sprzeczny.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na jedną kwestię. Nigdy do tej pory nie powiedzieliśmy, że jeśli myślak wierzy w jakieś zdanie  $p$ , to wierzy, że w nie wierzy. To jest związane z pewną samoświadomością, której myślak podstawowy może nie posiadać. Ta cecha będzie nam jednak przydatna w dalszych rozważaniach. Dla każdego zdania  $p$  zdanie „myślak wierzy w  $p$ ” oznaczymy jako  $Mp$ .

Powiemy na przykład, że myślak **wie o myśleniu**, jeśli dla każdych zdań  $p$  i  $q$  wierzy on, że jeśli uwierzy w  $p$  oraz w zdanie „jeśli  $p$ , to  $q$ ”, to uwierzy też w  $q$ . Inaczej mówiąc, myślak wie o myśleniu, jeśli ma świadomość reguły rządzącej jego rozumowaniem. Formułując to jeszcze inaczej, myślak taki wierzy w każde zdanie postaci „jeśli  $Mp$  oraz  $M(\text{jeśli } p \text{ to } q)$ , to  $Mq$ ”.

To jednak jeszcze nie wszystko. Dodajmy myślakom kolejny element samoświadomości. Powiemy, że myślak,

który wie o myśleniu, jest **normalny**, jeśli za każdym razem, gdy wierzy w zdanie  $p$ , wierzy też w to, że wierzy w  $p$ . Inaczej mówiąc, jeśli wierzy w  $p$ , to również wierzy w  $Mp$ .

No i w końcu, o normalnym myślaku będziemy mówić, że jest **samoświadomy**, jeśli wie, że jest normalny. Czyli jeśli dla każdego zdania  $p$  wierzy, że jeśli uwierzy w  $p$ , to uwierzy, że uwierzy w  $p$ . Inaczej mówiąc, wierzy w każde zdanie postaci „jeśli  $Mp$ , to  $M(Mp)$ ”. O ile myślak normalny nie musi koniecznie wierzyć w to, że jest normalny (ta cecha to właśnie samoświadomość), to okazuje się, że myślaki samoświadome nawet wiedzą, że są samoświadome! Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego udowodnienia tego faktu.

Założymy także, że jeśli ktoś powie do myślaka pewne zdanie  $p$  (np. „pada deszcz”), to myślak uwierzy w zupełnie naturalne w tej sytuacji zdanie „ten ktoś mówi prawdę wtedy i tylko wtedy, gdy pada deszcz”.

Powiedzmy teraz, że do samoświadomego myślaka przychodzi pewien człowiek. Człowiek ten niech nazywa się Kurt (oczywiście, ku czci Kurta Gödla). Kurt mówi następujące słowa: „nie uwierzysz, że mówię prawdę”. Okazuje się, że wtedy myślak, o ile nie jest sprzeczny, nigdy się o tym nie dowie (nigdy w to nie uwierzy, że jest niesprzeczny). Jeśli natomiast myślak jest zuchwały (czyli wierzy, że jest niesprzeczny), to stanie się sprzeczny!

Jak to możliwe? Aby się przekonać, prześledźmy rozumowanie samoświadomego zuchwałego myślaka. A myśli on tak: „Załóżmy, że uwierzę, że Kurt mówi prawdę. To znaczy, że uwierzę w to, co powiedział. Uwierzę, że nie uwierzę, że on mówi prawdę. Ale skoro uwierzę w to, że mówi prawdę, a jestem normalny, to także uwierzę, że wierzę w to, że on mówi prawdę. Zatem jednocześnie uwierzę w to, że nie wierzę, że on mówi prawdę, i w to, że wierzę w to, że mówi prawdę. Czyli uwierzę w dwa przeciwne sobie zdania, czyli stanę się sprzeczny. Ale ja nie mogę się stać sprzeczny”. To ostatnie myśli myślak, będąc myślakiem zuchwałym. Rozumuje więc dalej: „Ponieważ to sprzeczność, to założenie, że uwierzę, że Kurt mówi prawdę, nie jest prawdziwe. Wynika z tego, że na pewno nie uwierzę, że Kurt mówi prawdę. A zatem rzeczywiście mówi prawdę”. Myślak ten wierzy zatem w to, że Kurt mówi prawdę, a także będąc normalnym, wierzy w to, że wierzy, że Kurt mówi prawdę. Ale myśli dalej: „Wierzę, że on mówi prawdę, a on jednak powiedział, że w to nie uwierzę. Więc nie mówi prawdy”. W tym momencie myślak wierzy zarówno w to, że Kurt mówi prawdę, jak i w to, że Kurt nie mówi prawdy. A zatem nasz myślak rzeczywiście popadł w sprzeczność! Do czego może doprowadzić myślaka zuchwałość!

Druga wersja naszego wniosku powinna być zatem jasna. Jeśli myślak jest samoświadomy, ale nie jest sprzeczny, to na pewno nigdy nie uwierzy w to, że nie jest sprzeczny. Gdyby bowiem w to wierzył, wtedy, co pokazaliśmy, jest sprzeczny!

Zauważmy jeszcze, że jeśli zdanie „Kurt mówi prawdę” oznaczmy jako  $p$ , to zdanie, które Kurt wypowiedział, to „nie  $Mp$ ”. W takim razie zdanie, w które w wyniku wypowiedzi Kurta myślak uwierzył, to: „Kurt mówi prawdę wtedy i tylko wtedy, gdy nie  $Mp$ ”. Czyli po prostu zdanie „ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy nie  $Mp$ ”.

Okazuje się, że matematyka jest w pewnym sensie samoświadomym myślakiem, który rozmyśla nad takim właśnie zdaniem. Kurt Gödel udowodnił, że jeśli założymy aksjomatykę, z której wynikają wszystkie twierdzenia arytmetyki liczb naturalnych (tzw. arytmetykę Peano), to system dowodzenia ma właściwości samoświadomego myślaka. W tym wypadku wiara myślaka w pewne zdanie  $p$  odpowiada możliwości udowodnienia zdania  $p$ . Co więcej, Gödel pokazał, że istnieje zdanie  $p$  takie, że nasz system matematyczny zawiera zdanie postaci „ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy nie  $Mp$ ” (w tym wypadku  $Mp$  dla pewnego zdania  $p$  znaczy po prostu, że z przyjętych aksjomatów można udowodnić  $p$ ). Aby znaleźć takie zdanie  $p$ , Kurt Gödel wykorzystał sprytny pomysł, który polegał na ponumerowaniu wszystkich możliwych zdań. Czytelnika zainteresowanego, w jaki dokładnie sposób można znaleźć takie zdanie, odsyłamy do podręczników akademickich (np. „Gödel’s Theorems”, Peter Smith, dostępny w Internecie).

W każdym razie okazuje się, że przyjmując dowolny system aksjomatów zawierający arytmetykę na liczbach

naturalnych, jeśli są one niesprzeczne, nie jest możliwe udowodnienie tego faktu. Wobec tego, paradoksalnie, fakt, że nie ma dowodu wewnętrznej niesprzeczności aksjomatów matematyki, można traktować jako pozytywną informację! Inaczej mówiąc, wiadomo, że nie da się udowodnić tego, że aksjomaty matematyki są niesprzeczne (no chyba że są sprzeczne, bo wtedy da się z nich udowodnić wszystko!). Ten fakt nazywany jest drugim twierdzeniem Gödla o niezupełności.

Słowo „niezupełność” w nazwie tego twierdzenia odnosi się do tego, że istnieją takie zdania, których nie da się udowodnić ani obalić, wychodząc od przyjętych aksjomatów. Jako przykład drugie twierdzenie Gödla podaje właśnie zdanie o tym, że aksjomaty są niesprzeczne. Nie jest to jedyny przykład takiego zdania (pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności mówi po prostu, że takie zdanie istnieje). My już poznaliśmy inny przykład takiego zdania – jest nim hipoteza continuum.

Co można z tym począć? Można myśleć na dwa sposoby. Pierwszy z nich to wyobrażenie, że istnieje wiele światów matematycznych. Za każdym razem, gdy spotykamy takie zdanie, jak hipoteza continuum, to będziemy wiedzieli, że istnieją matematyczne światy, w których to zdanie jest prawdziwe, jak też i światy, w których to zdanie jest nieprawdziwe. Możemy myśleć, jakie są konsekwencje dla takiego matematycznego systemu, gdy na przykład hipoteza continuum jest prawdziwa, a jakie, gdy nie jest prawdziwa. Możemy rozważać różne przypadki matematycznych światów.

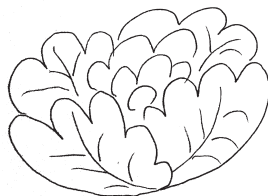
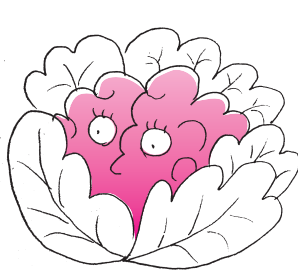
Można też myśleć, że istnieje jeden prawdziwy matematyczny świat. I po prostu jeszcze nie wiemy, czy hipoteza continuum jest w nim prawdziwa, czy też nie, bowiem nasz system aksjomatów nie jest wystarczająco silny. Trzeba zatem pracować nad znalezieniem nowego aksjomatu – stwierdzenia, które wszyscy uznają za prawdziwe, i to takiego, że dodanie go do aksjomatów rozstrzygnie hipotezę continuum. Oczywiście, zgodnie z twierdzeniem Gödla nadal będą zdania nierozstrzygnięte także przez ten nowy system aksjomatów. Ale to podejście w szczególności oznacza, że chociaż problem hipotezy continuum jest rozwiązany w zakresie przyjętych obecnie aksjomatów, to nie jest rozwiązany w sensie ogólnym.

Sam Gödel był wyznawcą istnienia jednego prawdziwego matematycznego świata. Uważał, że prawdopodobnie hipoteza continuum nie jest prawdziwa – dowód jej nierozstrzygalności uznawał za świadectwo tego, że przyjęte aksjomaty w niewystarczający sposób opisują świat matematyczny. Kwestia ta wywołała sporo dyskusji w matematycznym świecie. Jeden z najwybitniejszych matematyków zajmujących się współcześnie teorią mnogości, Hugh Woodin, zaproponował nowy aksjomat, z którego w szczególności wynika zaprzeczenie hipotezy continuum. Nie można jednak w żaden sposób o tym stwierdzeniu powiedzieć, że oczywiście jest, iż powinno ono być uznane za aksjomat.

Nie brakuje jednak wybitnych badaczy, których poglądy na matematyczny świat i hipotezę continuum są zbliżone do idei wieloświata matematycznego. Izraelski matematyk, autor niejednego przełomowego odkrycia matematycznego, Saharon Shelah, napisał w artykule „Logical Dreams” z 2003 roku: „Niektórzy uważają, że przekonujące dodatkowe aksjomaty teorii mnogości, które rozstrzygają problemy o dużym znaczeniu, zostaną znalezione lub nawet już zostały znalezione. Trudno dyskutować z tą nadzieją oraz trudno rozważać argumenty, które nie zostały jeszcze zasugerowane. Nie zgadzam się jednak z czystym platońskim poglądem, że interesujące problemy w teorii mnogości można rozstrzygnąć, musimy tylko odkryć dodatkowy aksjomat.

Moje wyobrażenie jest takie, że mamy wiele możliwych teorii mnogości, wszystkie zgodne z aksjomatami ZFC” (z podstawowymi aksjomatami teorii mnogości).

Zostawmy ten problem w tym miejscu. Każdy Czytelnik ma prawo do swoich wyobrażeń co do wynikającego z powyższych rozważań obrazu matematyki. Faktem jest, że powszechnie przyjęte aksjomaty nie rozstrzygają, czy istnieją jakieś „nieskończoności” pomiędzy nieskończonością przeliczalną a tą mocy continuum. Możemy jednak z łatwością konstruować nieskończenie wiele (bardzo nieskończenie wiele!) jeszcze większych nieskończoności. Tym zajmiemy się w kolejnym, ostatnim, odcinku naszych przygód z nieskończonością.



## Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

**M 1621.** Na tablicy początkowo napisana została liczba 1. Jeśli na tablicy napisana jest co najmniej jedna z liczb  $n$ ,  $2n$ ,  $3n + 1$ , to można dopisać każdą z pozostałych. Rozstrzygnąć, czy każda dodatnia liczba całkowita może w pewnym momencie pojawić się na tablicy.

Rozwiązanie na str. 16

**M 1622.** Dany jest kwadrat  $ABCD$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżące odpowiednio wewnątrz trójkątów  $ABC$  i  $ADC$  mają tę własność, że  $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ = 45^\circ$ . Wykazać, że  $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$ .

Rozwiązanie na str. 19

**M 1623.** Dany jest kwadrat  $ABCD$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżące odpowiednio wewnątrz trójkątów  $ABC$  i  $ADC$  mają tę własność, że  $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ = 45^\circ$ . Wykazać, że

$$[ABP] + [ADQ] + [CPQ] = [CDQ] + [BCP] + [APQ],$$

gdzie  $[F]$  oznacza pole figury  $F$ .

Rozwiązanie na str. 19

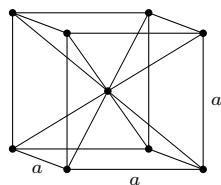
Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 989.** Oszacuj liczbę atomów, z których składa się Ziemia. Promień Ziemi  $R \approx 6400$  km, masa Ziemi  $M \approx 6,0 \cdot 10^{24}$  kg, jednostka masy atomowej ( $1/12$  masy atomu  $^{12}\text{C}$ )  $u \approx 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg. Pozostałe informacje znajdź, analizując dane przytaczane w układzie okresowym pierwiastków.

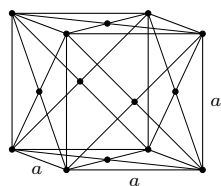
Rozwiązanie na str. 5

**F 990.** W temperaturze  $910^\circ\text{C}$  żelazo podlega przemianie fazowej, w której zmienia się sposób uporządkowania jego atomów. W niskich temperaturach atomy kryształu żelaza obsadzają węzły sieci regularnej, centrowanej przestrzennie (rysunek 1 przedstawia komórkę elementarną takiej sieci, zwanej siecią bcc). Powyżej  $910^\circ\text{C}$  atomy obsadzają węzły sieci regularnej centrowanej powierzchniowo (rysunek 2 przedstawia jej komórkę elementarną – sieć fcc). Badając dyfrakcję promieni  $X$  na kryształach, można nie tylko ustalić rodzaj struktury, ale także rozmiar komórki elementarnej. Dla sieci bcc długość boku komórki wynosi  $a_B = 2,9044 \cdot 10^{-10}$ , a dla fcc  $a_F = 3,6467 \cdot 10^{-10}$  (obie długości mierzone w temperaturze  $910^\circ\text{C}$ ). Jak podczas przemiany zmienia się odległość między najbliższymi atomami sieci? Jak zmienia się gęstość żelaza?

Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1



Rys. 2

## Rehabilitować epokę

Koniec września, początek października – to czas, kiedy nauka łatwiej przebija się do świadomości społecznej. To czas na festiwale nauki.

W tym roku w Warszawie odbyła się debata oksfordzka pt. „Uniewinnić średniowiecze” ([debatyoksfordzkie.org/](http://debatyoksfordzkie.org/)). Chyba każdy z nas, przynajmniej w szkole, zetknął się z określeniem „mroki średniowiecza”. Czy zatem to obiegowe powiedzenie ma rację bytu?

Tym, którzy nie brali udziału w jakiegokolwiek debacie oksfordzkiej (zachęcam), wyjaśniam, że odbywa się zgodnie ze ściśle określonymi regułami rządzącymi dyskusją uczestników (limitowany czas na wypowiedź i dyskusję), umożliwiającymi jasne sformułowanie opinii. W warszawskim Teatrze Polskim do debaty stanęło trzech mówców po stronie obrońców tezy, trzech przeciw niej. Osiągnąć średniowiecza bronili Jarosław Szczepański, Andrzej Gierszewski, Przemysław Urbańczyk. Oskarżali Jan Hartman, Grzegorz Pac, Andrzej Zybala.

Argumenty...?

Średniowiecze to wielka rewolucja rolnicza, upowszechnienie pieniądza, początki nauk ekonomicznych, powstawanie i rozbudowa miast, upowszechnienie metod pomiaru czasu i odległości, wspaniałe budowle świeckie i sakralne, eksploracja globu, refleksja nad Wszechświatem, załóżki metody naukowej. Rozwój filozofii, etyki ekonomicznej, etyki pracy, Marcin Luter i jego nauki. Formowanie narodów, cywilizacja i religia zachodniej Europy wkracza do Europy środkowej, rozwój państw słowiańskich. Argumentacja rzeczowa, materialna, prezentowana przez adwokatów średniowiecza zetknęła się z atakiem emocji prokuratorów. Ci zauważyli człowieka, jego cierpienie, nędzę, choroby i masowe epidemie, coraz szerzej atakujące przeludnione miasta. Towarzyszące temu zaostrzenie prawodawstwa, surowe wyroki (słynne „czarownice” topione i palone na stosach). Wzrost ekonomiczny, średniowieczne niewolnictwo. Despotyzm władców, wojny, zaczątki totalitaryzmu.



Czy chciałbyś żyć w tamtych czasach, pytali oskarżający. Upraszczaając (lub wznosząc na inny poziom), dyskusja toczyła się także wokół pytania filozoficznego: czy uważamy, że zło jest immanentną cechą ludzkiego charakteru, ludzkiej natury? Czy w kolejnych stuleciach nauczyliśmy się kontrolować (przynajmniej czasem) zło panujące w ludzkich społecznościach, o różnym stopniu ucywilizowania, czy ewoluowaliśmy w kierunku istot „lepszyc” ze społecznego punktu widzenia?

To nie była „akademicko” chłodna debata. Chwilami co bardziej rozgrzani sporem dyskutanci podnosili głos, broniąc określonych poglądów. Taka gorąca dyskusja ujawnia wyraźnie zalety jej porządkowania, zamykania w formalnych ramach. Słuchacze i dyskutanci niechętnie opuszczali salę – dużo zostało do przegadania...

Przed rozpoczęciem debaty publiczność głosowała, z pewnym nadmiarem broniąc średniowiecza (58/52), a wynik ten znacząco uległ zmianie przy powtórnym głosowaniu na zakończenie spotkania (79/40). Zwyciężyły osiągnięcia materialne nad emocjami i przemijającymi ludzkimi zachowaniami.

Na koniec „wisienka” w postaci innej jesiennej wiadomości naukowej – że nie wspomnę o laureatce literackiej Oldze Tokarczuk. Jeden z laureatów Nagrody Nobla z chemii, John Goodenough, jest profesorem w dziedzinie fizyki ciała stałego w Uniwersytecie w Austin (Texas). Jest też najstarszym z dotychczasowych laureatów: ma 97 lat. Obecnie opracowuje wysoko sprawne, niepalne baterie z nowego typu elektrodami. Lekarze dokuczają mu, zakazując pracy dłużej niż do godziny 16. Był w podróży, gdy się dowiedział o swojej nagrodzie. I podobno powiedział: „mam nadzieję, że tam, w Teksasie, dalej będą mnie zatrudniać”.

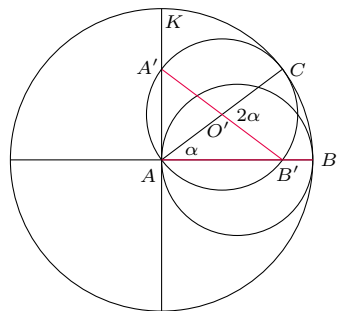
Magdalena FIKUS ([magda.fikus@gmail.com](mailto:magda.fikus@gmail.com))

# Ślad ruchomego odcinka

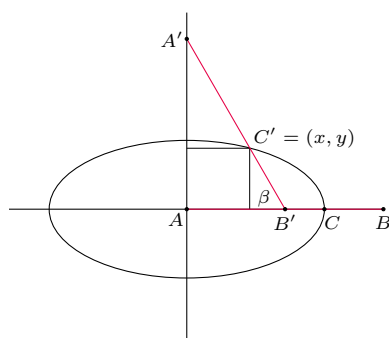
Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

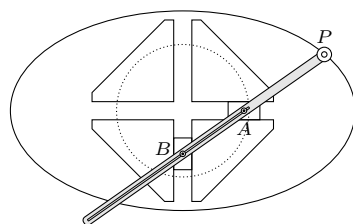
O toczeniu okręgu pisali perski astronom Nasir al-Din al-Tusi w 1247 r., Mikołaj Kopernik w 1543 r., a w 1570 r. włoski matematyk Gerolamo Cardano, odpowiedzialny również za wzory opisujące rozwiązania równań trzeciego stopnia.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Choć ruch jest wszechobecny w naszym otoczeniu, to opis dynamicznych zmian będących jego wynikiem sprawia nam kłopot. Oto kilka prostych obserwacji.

*Gdy okrąg toczy się bez poślizgu po wewnętrznej stronie nieruchomego okręgu o dwa razy większej średnicy, to dowolnie wybrany punkt mniejszego okręgu przesuwa się po średnicy dużego okręgu tam i z powrotem.*

Wykażemy, że tak jest. Na małym okręgu ustalmy punkty  $A$  i  $B$ , tak jak na rysunku 1. Gdy mały okrąg toczy się po łuku  $BC$  i kąt  $\sphericalangle BAC = \alpha > 0$ , to przecina odcinek  $AB$  w takim punkcie  $B'$ , że kąt  $\sphericalangle B'O'C = 2\alpha$ . Wówczas łuki  $BC$  oraz  $B'C$  są tej samej długości. Oznacza to, że podczas toczenia małego okręgu punkt  $B$  przesuwa się do punktu  $B'$  wzdłuż prostej  $AB$ , co chcieliśmy uzasadnić.

Zauważmy, że w tym samym czasie punkt  $A$  przesuwa się do punktu  $A'$  wzdłuż prostej  $AK$ . Punkt  $A'$  z punktem  $B'$  są końcami średnicy małego okręgu (bo łuki  $CB'$  i  $AA'$  są równej długości), więc kąt  $\sphericalangle A'AB$  jest prosty. Mamy więc dodatkową informację: podczas opisanego toczenia końce odcinka  $AB$  ślizgają się po wzajemnie prostopadłych średnicach większego okręgu.

Okazuje się, że:

*Każdy punkt pośredni odcinka  $AB$ , którego końce ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, zakreśla elipsę (rys. 2).*

Wiedział to już Proklos (412–485). Uzasadnienie jest łatwe. Ponieważ

$$\frac{x}{|A'C'|} = \cos \beta, \quad \frac{y}{|C'B'|} = \sin \beta,$$

więc z zależności

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1, \quad |A'C'| = |AC|, \quad |C'B'| = |CB|$$

mamy

$$\frac{x^2}{|AC|^2} + \frac{y^2}{|CB|^2} = 1,$$

a to jest równanie elipsy. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy punkt zakreślający krzywą leży na przedłużeniu odcinka  $AB$ . Mamy zatem kolejną obserwację:

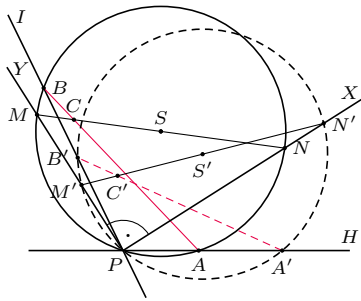
*Jeśli punkty  $A$  i  $B$  prostej  $L$  ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, to każdy inny punkt prostej  $L$  zakreśla elipsę.*

Rezultat ten jest podstawą konstrukcji „cyrkla” do wykreślenia elipsy o danym środku, danych kierunkach głównych i danych długościach osi (rys. 3).

A jak wygląda sytuacja, gdy punkty  $A$  i  $B$  ślizgają się po ramionach kąta  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ? Problem ten rozstrzygnął w 1646 roku Frans van Schooten (Młodszy, 1615–1660). Był on holenderskim matematykiem związanym ze szkołą inżynierską w Lejdzie oraz uczniem i przyjacielem René Descartesa (Kartezjusza). W 1637 roku pomagał Kartezjuszowi w przygotowaniu ilustracji do pierwszego wydania traktatu *Discours de la méthode...*, który zawierał esej *La géométrie*. W 1649 roku van Schooten przetłumaczył na łacinę i wydał *Geometrię* Kartezjusza, wraz z licznymi komentarzami i uzupełnieniami (swoimi i swoich uczniów). Van Schooten stał się jednym z pierwszych matematyków promujących i rozpowszechniających nową

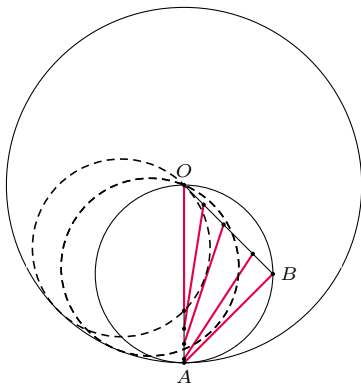


Geometrię Kartezjusza. Znakomitym uczniem van Schootena był Christiaan Huygens.



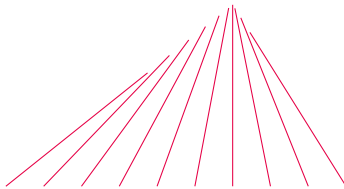
Rys. 4

Rozwiązanie van Schootena jest geometryczne i niezwykle pomysłowe. Niech dany będzie kąt  $\sphericalangle IPH$ , różny od kąta prostego. Po ramionach tego kąta ślizga się odcinek  $AB$  (rys. 4). Jaką krzywą zakreśla wówczas punkt  $C$  należący do tego odcinka i nie będący jego końcem? Punkty  $A, B$  i  $P$  jednoznacznie wyznaczają okrąg o środku  $S$  opisany na trójkącie  $\triangle ABP$ . Prosta  $SC$  wyznacza średnicę  $MN$ . Wówczas proste  $PM$  i  $PN$  tworzą kąt prosty. Po przemieszczeniu się odcinka  $AB$  do położenia  $A'B'$  punkty  $A', B'$  i  $P$  wyznaczają okrąg o środku  $S'$  opisany na trójkącie  $\triangle A'B'P$ . Prosta  $S'C'$  wyznacza jego średnicę  $M'N'$ . Oczywiście  $|MN| = |M'N'|$ , bo utworzone okręgi są przystające (gdyż kąt  $\sphericalangle IPH$  wpisany w oba okręgi wyznacza w nich cięciwy równej długości). Ponadto kąty  $\sphericalangle NCA$  i  $\sphericalangle N'C'A'$  są równe (cięciwy  $AB$  i  $A'B'$  są takiej samej długości, więc ich odległości od środków odpowiednich okręgów pozostają stałe). Analogicznie, kąty  $\sphericalangle BCM$  i  $\sphericalangle B'C'M'$  są równe. W tej sytuacji, dla przystających okręgów łuk  $AN$  jest takiej samej długości jak łuk  $A'N'$ , więc kąty wpisane oparte na tych łukach są równe, tj.  $|\sphericalangle NPA| = |\sphericalangle N'PA'|$ . Ponieważ kąty te leżą po tej samej stronie prostej  $PH$ , więc punkt  $N'$  leży na prostej  $PN$ . Z analogicznych powodów punkt  $M'$  leży na prostej  $PM$ . Oznacza to, że ślad punktu  $C$  możemy wyznaczyć z ruchu odcinka  $MN$ , którego końce ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych  $PX$  i  $PY$ . Z wcześniejszych rozważań wiemy już, że w tym przypadku punkt  $C$  zakreśla łuk elipsy. Zatem mamy:



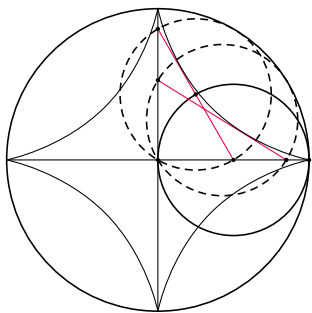
Rys. 5

**Twierdzenie** (Frans van Schooten (Młodszy), 1646 r.). *Jeśli punkty  $A$  i  $B$  prostej  $L$  ślizgają się po ramionach kąta  $\alpha \in (0, \pi)$ , to każdy inny punkt prostej  $L$  zakreśla elipsę.*



Rys. 6. Każdy trójkąt da się zamieścić odcinkiem przy odpowiednim ruchu

A może potrafimy coś powiedzieć o obszarach „zakreślanych” przez tak wędrujące odcinki? W *Kalejdoskopie matematycznym* Hugona Steinhausa wiele wyjaśniają rysunki (rys. 5, 6) oraz tekst: „Gdy poruszamy zapalstkę tak, żeby jej oba końce biegły po prostych przecinających się, to ruch jej jest identyczny z ruchem cięciwy mniejszego koła w systemie (...) dwóch kół [patrz rys. 1]. Trzeba tylko wziąć przecięcie prostych za środek dużego koła, a małe koło narysować przez środek dużego i oba końce zapalstki.” Gdy końce odcinka ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, to zamiecie on obszar ograniczony *asteroidą* (rys. 7).



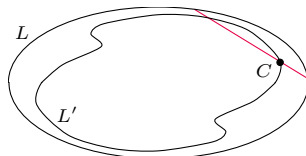
Rys. 7

Z przemieszczaniem odcinka na płaszczyźnie związanych jest wiele ciekawych i niebanalnych zagadnień, np.:

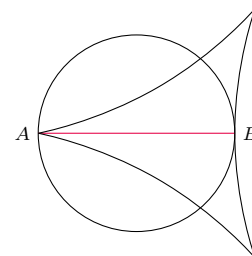
**Twierdzenie** (Hamnet Holditch, 1858 r.). *Jeśli oba końce odcinka ślizgają się po krzywej zamkniętej  $L$ , a punkt  $C$  dzielący odcinek w stosunku  $a : b$  zakreśla krzywą  $L'$ , to różnica pól figur ograniczonych krzywymi  $L$  i  $L'$  jest równa  $\pi ab$ . (Patrz rys. 8 oraz  $\Delta_{84}^8, \Delta_{86}^{10}$ .)*

**Problem** (Sōichi Kakeya, 1917 r.). *Na płaszczyźnie wyznaczyć zbiór o najmniejszym polu, w którym można odcinek jednostkowy obrócić o kąt co najmniej  $\pi$  (o zmaganiach z tym problemem pisaliśmy też w  $\Delta_{83}^6, \Delta_{13}^4$ ).*

Dwa przykłady zbiorów, w których możliwy jest obrót odcinka, pokazano na rysunku 9.



Rys. 8



Rys. 9

Nikogo prawdopodobnie nie dziwi fakt, że gdy wyrzucimy jakiś przedmiot, np. piłkę, to tor jego lotu nie będzie linią prostą, tylko zakrzywi się w stronę Ziemi. Interpretujemy to jako konsekwencję oddziaływania grawitacyjnego między tym obiektem a Ziemią. Większość ludzi wie (aczkolwiek ciągle aktywni są przeciwnicy tej tezy), że Ziemia, tak jak inne planety Układu Słonecznego, krąży po orbicie wokół Słońca. Podobnie satelity krążą wokół Ziemi, która zakrzywia tor ich ruchu, tak samo jak zakrzywia tor lotu piłki. Nie dziwi więc nas, że coś krąży wokół jakiegoś masywnego obiektu. Mierząc parametry orbit gwiazd krążących po eliptycznych orbitach w okolicy centrum naszej Drogi Mlecznej, astronomowie wyliczyli masę czarnej dziury, która się znajduje w samym centrum. Mimo

że jej nie widać, to wnioskujemy, że musi tam być, bo widzimy gwiazdy, które krążą wokół niej. Takie krążące po orbitach obiekty są w tzw. stanie związanym – nie mogą uciec od centrum przyciągania.

A czy w pustej przestrzeni, w której nie ma żadnego masywnego obiektu, grawitacja może sprawić, że cząstka będzie krążyć? Wydaje się to sprzeczne z intuicją, ale najnowsze prace teoretyczne wskazują na to, że pewne konfiguracje fal grawitacyjnych mogą zmusić masywne cząstki do krążenia wokół pewnej osi (wyróżnionej przez tę falę). Fale grawitacyjne same w sobie są bardzo trudno uchwytnie, jak więc to możliwe, że pewne konfiguracje takich fal mogą pułapkować cząstki? Co wyróżnia te konfiguracje i czy mogą one być wytwarzane gdzieś we Wszechświecie?

Na naszym kanale DeltamiEduPl na YouTube pod filmem prezentującym prosty argument za tym, że Ziemia nie jest płaska ([youtu.be/PUfrFoxd2\\_A](https://youtu.be/PUfrFoxd2_A)), rozpętała się swego czasu gorąca dyskusja.

## Skąd się biorą fale grawitacyjne?

Czternastego września 2015 roku w Stanach Zjednoczonych dwa detektory LIGO zarejestrowały po raz pierwszy w historii fale grawitacyjne, o czym pisaliśmy w  $\Delta_{16}^4$ . W 2017 roku za odkrycie to Nagrodą Nobla zostali uhonorowani Rainer Weiss, Barry C. Barish i Kip S. Thorne. Nie była to jednak pierwsza Nagroda Nobla związana z falami grawitacyjnymi. W 1993 roku otrzymali ją Russell A. Hulse i Joseph H. Taylor za obserwacje odkrytego przez nich w 1974 roku pulsara PSR 1913 + 16, które otworzyły nowe możliwości badania grawitacji i dostarczyły pierwszych pośrednich dowodów wskazujących na istnienie fal grawitacyjnych.

To, co łączy obserwacje pulsara Hulse’a–Taylora i detekcje LIGO–Virgo (po pierwszej, oznaczanej GW150914, było kilkanaście kolejnych), to fakt, że dotyczą układów podwójnych, których opis w teorii grawitacji Newtona jest bardzo prosty. W teorii grawitacji Newtona, składniki układu (takiego jak np. Ziemia–Księżyc) okrążają środek masy układu po orbitach eliptycznych (lub w szczególnym przypadku kołowych). Całkowita energia takiego układu oraz całkowity moment pędu związany z ruchem orbitalnym są stałe w czasie. Do tego prostego newtonowskiego obrazka Ogólna Teoria Względności Einsteina (OTW) wnosi istotne poprawki, o czym pisałem szerzej w  $\Delta_{15}^{12}$ .

Przewidywane przez OTW promieniowanie grawitacyjne (nie występujące w teorii Newtona) unosi energię z układu podwójnego, czego skutkiem jest „spadanie” na siebie składników układu, czyli stopniowe zacieśnianie się orbit i skracanie okresu obiegu. Pulsar obserwowany przez Hulse’a i Taylora ma towarzysza o podobnej masie, czyli jest jednym ze składników układu podwójnego. Dokładne pomiary parametrów jego orbity (o których więcej pisałem „nasz człowiek” w zespole LIGO–Virgo, Michał Bejger, w  $\Delta_{15}^{12}$ ) przeprowadzone w latach 1974–1978 wykazały, że okres jego obiegu skraca się, czyli składniki układu spadają na siebie, a więc promieniowanie grawitacyjne unosi z układu energię. Pomiary dokładnie zgadzały się z przewidywaniami OTW.

Zbliżanie się do siebie składników układu podwójnego oznacza również zmniejszanie orbitalnego momentu pędu układu. Promieniowanie grawitacyjne unosi więc nie tylko energię, ale także moment pędu. Fala grawitacyjna jest falą poprzeczną, może więc mieć *spinowy* moment pędu związany z polaryzacją lub *orbitalny* moment pędu związany z kształtem frontu falowego (o czym więcej pisałem w  $\Delta_{18}^2$ ). Tutaj szczególnie będzie nas interesować orbitalny moment pędu fali grawitacyjnej. Można obliczyć, że w pobliżu układu podwójnego promieniowanie grawitacyjne przez niego wytwarzane niesie orbitalny moment pędu. Oznacza to, że w przyrodzie występują naturalne źródła tego rodzaju promieniowania.



### Rozwiązanie zadania M 1621.

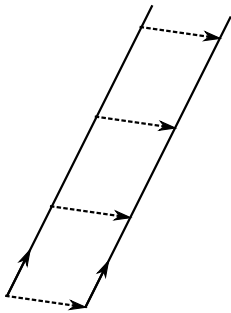
Wykażemy, że każda dodatnia liczba całkowita  $n$  mogła zostać uzyskana (poprzez ciąg kilku kolejnych dopisywań) z pewnej mniejszej liczby. Stąd dostaniemy odpowiedź twierdzącą na postawione w zadaniu pytanie. Liczbę dającą resztę 1 z dzielenia przez 3, powiedzmy  $3k + 1$ , można uzyskać w jednym kroku z liczby  $k$ . Liczba dająca resztę 2 z dzielenia przez 3, powiedzmy  $3k + 2$ , może zostać uzyskana w dwóch krokach z liczby  $2k + 1$ : w pierwszym kroku dopisujemy liczbę  $6k + 4$ . Wreszcie liczba podzielna przez 3, powiedzmy  $3k$ , może zostać uzyskana w siedmiu krokach z liczby  $k$ : w kolejnych pośrednich krokach dopisujemy  $2k$ ,  $4k$ ,  $12k + 1$ ,  $36k + 4$ ,  $18k + 2$ ,  $9k + 1$ .

## Od pułapek elektromagnetycznych do grawitacyjnych

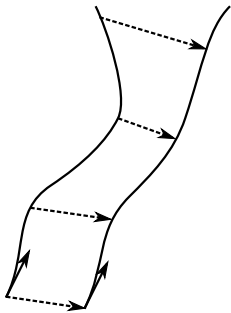
Fale elektromagnetyczne posiadające orbitalny moment pędu pułapują cząstki naładowane wokół tzw. osi wirowej, wokół której fala wiruje. Ruch złapanej cząstki wygodnie jest opisywać, wyróżniając dwie skale czasowe. W małej skali cząstka oscyluje z częstością fali. Amplituda tych oscylacji jest mała. W dużej skali czasowej obserwuje się powolne zmiany średniego położenia cząstki, wokół którego wykonuje ona szybkie oscylacje o małej amplitudzie. Zmiany średniego położenia można opisać, wprowadzając uśrednioną efektywną siłę, która ściąga cząstkę do osi fali i działa tak samo na cząstki o ładunku dodatnim i ujemnym (co może być zaskakujące). Niezależnie od ładunku cząstki są „łapane” w kierunkach prostopadłych do osi wirowej i wykonują wokół niej oscylacje (patrz  $\Delta_{18}^3$ ).

Skoro fale elektromagnetyczne mają taką własność, to naturalnie nasuwa się pytanie, czy fale grawitacyjne niosące orbitalny moment pędu również będą pułapować cząstki wokół osi wirowej. Odpowiedź na to pytanie okazuje się pozytywna, co zostało pokazane w pracy [\*].

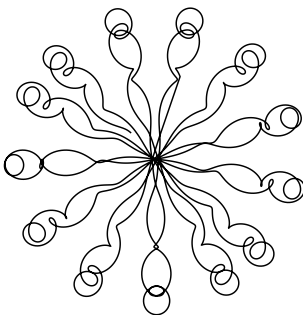
[\*] Iwo Białynicki-Birula, Szymon Charzyński, *Trapping and Guiding Bodies by Gravitational Waves Endowed with Angular Momentum*, Phys. Rev. Lett. 121, 171101 (2018).



Rys. 1. Dwie bliskie geodezyjne startujące równolegle w płaskiej przestrzeni



Rys. 2. Dwie bliskie geodezyjne startujące równolegle w zakrzywionej przestrzeni



Rys. 3. Przykładowe rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnej. Rzut trajektorii cząstki na płaszczyznę prostopadłą do osi wiązki

## Ruch cząstki swobodnej w zakrzywionej czasoprzestrzeni

OTW opisuje grawitację jako zakrzywienie czasoprzestrzeni. Cząstka swobodna porusza się w takiej czasoprzestrzeni po tzw. linii *geodezyjnej*. W geometrii euklidesowej, której uczymy się w szkole, geodezyjne to odcinki prostych. Natomiast na sferze geodezyjnymi są odcinki okręgów wielkich (trójkąty budowane z takich odcinków mają sumę kątów większą niż  $180^\circ$ ). Ogólnie w geometrii Riemanna geodezyjne to linie lokalnie najkrótsze (patrz na przykład artykuł Witolda Mozgawy  $\Delta_{19}^9$ ). W OTW (jest to tzw. geometria pseudoriemannowska) geodezyjna lokalnie maksymalizuje czas własny. Dlatego właśnie zegary na satelitach systemu GPS chodzą szybciej (patrz  $\Delta_{19}^{11}$ ) niż te na powierzchni Ziemi. Satelita porusza się swobodnie, nie doświadczając żadnych przyspieszeń, czyli po geodezyjnej. Natomiast zegar stojący na Ziemi doświadcza stałego przyspieszenia  $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$  i nie porusza się po linii geodezyjnej.

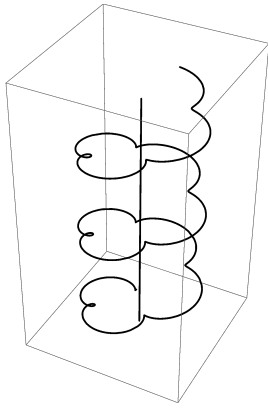
Żeby zobaczyć, jak fala grawitacyjna wpływa na cząstki swobodne, trzeba znaleźć geodezyjne cząstek w czasoprzestrzeni, zawierającej interesującą nas falę grawitacyjną. Najbardziej przemawiający i przekonujący obraz daje porównanie bliskich sobie trajektorii cząstek.

## Dewiacja geodezyjna

Wyobraźmy sobie dwie cząstki startujące z dwóch różnych punktów z takimi samymi prędkościami (ten sam kierunek i ta sama wartość prędkości). Geometrycznie odpowiada to dwóm geodezyjnym startującym z dwóch różnych punktów w równoległych kierunkach. W płaskiej przestrzeni euklidesowej takie linie pozostaną na zawsze równoległe, jak na rysunku 1. W przestrzeni zakrzywionej nie musi tak być. To, jak zmienia się odległość między dwiema bliskimi geodezyjnymi i kierunek wektora łączącego punkty na tych geodezyjnych, opisuje tzw. *równanie dewiacji geodezyjnej*. Gdyby przestrzeń była płaska, czyli krzywizna byłaby równa zero, to wektor łączący punkty na dwóch geodezyjnych, które początkowo były równoległe, byłby stały, czyli dwie cząstki wystrzelone równoległe z tymi samymi prędkościami leciałyby w stałej odległości od siebie. Obecność krzywizny powoduje, że wektor ten zmienia się w miarę przesuwania się po krzywej. Oznacza to, że w zakrzywionej czasoprzestrzeni cząstki wystrzelone równoległe mogą z czasem zacząć się oddalać albo przybliżać do siebie (rys. 2).

## Ruch cząstek w polu fali grawitacyjnej z orbitalnym momentem pędu

W optyce przykładem fal elektromagnetycznych niosących orbitalny moment pędu i w związku z tym wykorzystywanych do pułapowania cząstek są tzw. wiązki Bessela. W ich opisie występują funkcje specjalne, które wzięły swą nazwę od niemieckiego astronoma, geodety i matematyka Friedricha Wilhelma Bessela. Okazuje się, że istnieją rozwiązania zlinearyzowanej OTW (opisującej słabe pola grawitacyjne) posiadające własności analogiczne do elektromagnetycznych



Rys. 4. Przykładowe rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnych. Jedna cząstka porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi wiązki. Druga cząstka krąży wokół tej osi. Warunki początkowe są tak dobrane, że ruch jest dokładnie okresowy

wiązek Bessela, które zostały nazwane *gravitacyjnymi wiązkami Bessela*. Wiązka taka w pewnym otoczeniu osi wirowej ma również podobne własności, jak fala grawitacyjna emitowana przez układ podwójny w otoczeniu osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny orbitalnej układu (w pewnym zakresie odległości). W odróżnieniu jednak od fali emitowanej przez układ podwójny wiązka Bessela ma znacznie prostszy opis matematyczny, pozwalający na ścisłe analityczne rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnej.

W czasoprzestrzeni opisywanej przez pewną konkretną wiązkę Bessela oś wirowa fali jest geodezyjną, czyli cząstka swobodna może poruszać się dokładnie po tej osi, z dowolną stałą prędkością. Rozwiązując równanie dewiacji geodezyjnej wokół tej geodezyjnej, możemy zobaczyć, jak będą poruszać się cząstki w jej otoczeniu. Analityczne rozwiązania tego równania przedstawione są na rysunku 3. Widać, że trajektorie cząstek oscylują wokół osi wirowej fali, cząstki pozostają więc „złapane” w jej otoczeniu – nawet jak się oddalają, to potem zwracają. Można w dodatku tak dobrać warunki początkowe, żeby dostać ruch dokładnie okresowy, jak na rysunku 4.

### Czy to ma jakieś zastosowanie praktyczne?

Poprzedni numer *Delty* był w całości poświęcony przykładom nieoczekiwanych zastosowań praktycznych wyników abstrakcyjnych badań podstawowych. Wyniki tutaj referowane są na razie czysto teoretyczne. Taka matematyczna ciekawostka. Nie wiadomo nawet, czy zjawisko to da się zaobserwować w jakimś eksperymencie, ani czy występuje ono w jakichś procesach astrofizycznych. Na razie można tylko spekulować. Może ma jakieś znaczenie w tworzeniu galaktycznych dżetów, czyli strumieni materii wyrzucanych prostopadłe do dysku aktywnej galaktyki, wzdłuż osi jej obrotu? Na razie ciągle zbyt mało wiemy o tym efekcie, ale badania trwają.

## Średnie w zawodach studenckich

Bartosz BIEGANOWSKI\*, Aurelia DYMEK\*, Daniel STRZELECKI\*

\* doktoranci, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Autorzy brali udział w takich zajęciach – prowadzonych przez doktora Roberta Skibę na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, oraz startowali m. in. w zawodach Vojtěch Jarník International Mathematical Competition w Ostrawie (Czechy), International Mathematical Competition for Students w Błagojewgradzie (Bulgaria) oraz North Countries Universities Mathematical Competition w Sankt Petersburgu (Rosja) Challenges.

Czytelnicy *Delty* zapewne znają zawody matematyczne dla uczniów, takie jak Olimpiada Matematyczna lub Kangur Matematyczny. Nie wszyscy wiedzą jednak, że konkursowe zmagania można kontynuować również podczas studiów. Na niektórych uczelniach odbywają się nawet specjalne zajęcia, podczas których rozwiązuje się i omawia zadania konkursowe.

Przyjrzyjmy się bliżej często używanemu podczas zawodów studenckich twierdzeniu o wartości średniej, przypisywanemu Lagrange’owi. Stwierdza ono, że dla funkcji ciągłej  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i różniczkowalnej w przedziale  $(a, b)$  istnieje punkt  $c$  w przedziale  $(a, b)$  taki, że

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Inaczej mówiąc, przyrost wartości funkcji wyraża się przez przyrost wartości zmiennej i pochodną funkcji w pewnym punkcie pośrednim.

Równie przydatne jest uogólnienie powyższego twierdzenia, znane jako twierdzenie Cauchy’ego. Mianowicie, dla funkcji ciągłych  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i różniczkowalnych w przedziale  $(a, b)$  istnieje punkt  $c$  w przedziale  $(a, b)$  taki, że

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Zauważmy, że biorąc w twierdzeniu Cauchy’ego funkcję  $g(x) = x$  dla każdego  $x$ , uzyskujemy twierdzenie Lagrange’a.

Jesteśmy gotowi, aby zastosować powyższe twierdzenia do rozwiązywania zadań z międzynarodowych zawodów dla studentów. Rozważmy różniczkowalną funkcję  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  taką, że  $|f'(x)| \neq 1$  dla wszystkich  $x$  z przedziału  $[0, 1]$ .

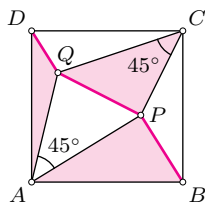
Okazuje się, że z twierdzenia Lagrange’a można wyprowadzić twierdzenie Cauchy’ego. Zachęcamy Czytelnika do próby przeprowadzenia tego rozumowania.

**Rozwiązanie zadania M 1622.**

Skoro  $AB = AD$  oraz  $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAP + \sphericalangle DAQ$ , to istnieje punkt jednocześnie symetryczny do  $B$  względem  $AP$  i do  $D$  względem  $AQ$ ; nazwijmy go  $M$ . Trójkąt  $PQM$  ma boki o długościach  $BP$ ,  $DQ$ ,  $PQ$ , a jego kąt wewnętrzny przy wierzchołku  $M$  ma miarę  $\sphericalangle ABP + \sphericalangle ADQ$ .

Podobnie istnieje punkt  $N$ , jednocześnie symetryczny do  $B$  względem  $CP$  oraz do  $D$  względem  $CQ$ . Trójkąt  $PQN$  jest przystający do trójkąta  $PQM$ , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku  $N$  ma miarę  $\sphericalangle CBP + \sphericalangle CDQ$ . Pozostaje zauważyć, że  $\sphericalangle PMQ + \sphericalangle PNQ =$   
 $= \sphericalangle ABP + \sphericalangle ADQ + \sphericalangle CBP + \sphericalangle CDQ =$   
 $= 180^\circ$ ,

skąd  $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ = 90^\circ$ . Teza zadania wynika więc z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do dowolnego z tych dwóch trójkątów.

**Rozwiązanie zadania M 1623.**

Skoro  $AB = AD$  oraz  $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAP + \sphericalangle DAQ$ , to istnieje punkt jednocześnie symetryczny do  $B$  względem  $AP$  i do  $D$  względem  $AQ$ ; nazwijmy go  $M$ . Skoro  $[ABP] = [AMP]$  oraz  $[ADQ] = [AMQ]$ , to lewa strona dowodzonej równości przybiera postać  $[APCQ] + [PQM]$ .

Podobnie istnieje punkt  $N$ , jednocześnie symetryczny do  $B$  względem  $CP$  oraz do  $D$  względem  $CQ$  i podobnie prawą stronę dowodzonej równości można przepisać jako  $[APCQ] + [PQN]$ . Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że trójkąty  $PQM$  oraz  $PQN$  są przystające (cecha bok-bok-bok).

Twierdzenie o wartości średniej może także przynieść zaskakująco proste rozwiązanie zadania, które początkowo zdaje się wymagać zupełnie innych metod. Wykażemy, że jeśli

$$\sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i+1} a_i = 0,$$

to wielomian  $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ma dodatni pierwiastek rzeczywisty. To zadanie nie pochodzi wprawdzie bezpośrednio z zawodów matematycznych, ale jest motywowane zadaniem 2.10.1. z bardzo dobrego zbioru zadań: T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*.

Kiedy już wiemy, że chcemy wykorzystać twierdzenie o wartości średniej, to nie pozostaje nic innego, jak znaleźć odpowiednią funkcję. Chcemy udowodnić istnienie punktu, w którym zeruje się dany wielomian, dlatego pierwszym słusznym pomysłem jest rozważenie

Udowodnimy, że równości  $f(\alpha) = \alpha$  i  $f(\beta) = 1 - \beta$  są spełnione dla co najwyżej jednej pary liczb  $\alpha$  i  $\beta$  z przedziału  $[0, 1]$ . Załóżmy, że  $f(\alpha) = \alpha$  i  $f(\alpha') = \alpha'$  dla  $0 \leq \alpha < \alpha' \leq 1$ , z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy, że istnieje  $c \in (\alpha, \alpha')$  takie, że

$$\alpha' - \alpha = f(\alpha') - f(\alpha) = f'(c)(\alpha' - \alpha),$$

więc  $f'(c) = 1$ , ale to jest sprzeczne z założeniem  $|f'(x)| \neq 1$  dla  $x \in [0, 1]$ . Podobnie wykluczamy istnienie dwóch elementów  $\beta$  o własności  $f(\beta) = 1 - \beta$ . Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie, Ambitnemu Czytelnikowi proponujemy pokazanie istnienia pary punktów  $\alpha$  i  $\beta$  o powyższych własnościach. W ten sposób zostanie uzyskane rozwiązanie zadania 1. w kategorii I z 22. Zawodów im. Vojtěcha Jarníka.

Okazuje się, że twierdzenie o wartości średniej może zostać zastosowane także do rozwiązywania równań. Rozważmy następujące równanie:

$$17^x + 2^x = 11^x + 2^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie tego równania zostało postawione jako problem 1. w kategorii II podczas 28. Zawodów V. Jarníka.

Rozwiązanie rozpoczniemy od prostej obserwacji, że liczba  $x = 0$  jest rozwiązaniem powyższego równania. Przyjmijmy zatem, że  $x \neq 0$  również jest rozwiązaniem. Równanie możemy przepisać w następujący sposób:

$$(*) \quad 17^x - 11^x = 8^x - 2^x.$$

Niech  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(t) = t^x$ . Funkcja ta spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na odcinku  $[2, 8]$ . Zatem istnieje taka liczba  $t_1 \in (2, 8)$ , że

$$(8 - 2)f'(t_1) = f(8) - f(2) = 8^x - 2^x.$$

Funkcja ta spełnia również założenia tegoż twierdzenia na odcinku  $[11, 17]$ , więc istnieje liczba  $t_2 \in (11, 17)$  spełniająca zależność

$$(17 - 11)f'(t_2) = f(17) - f(11) = 17^x - 11^x.$$

Zauważmy, że  $t_1 < t_2$ . Podstawiając otrzymane zależności (przypomnijmy, że  $x$  jest rozwiązaniem) do równania (\*), dostajemy równość

$$6f'(t_1) = 6f'(t_2),$$

którą możemy przepisać równoważnie jako

$$6xt_1^{x-1} = 6xt_2^{x-1}.$$

Ponieważ  $x \neq 0$ , to  $t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$  i w konsekwencji

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1.$$

Skoro  $0 < t_1 < t_2$ , to  $x = 1$ . Łatwo sprawdzić, że  $x = 1$  jest również rozwiązaniem równania. Zatem jedynymi rozwiązaniami są  $x = 0$  oraz  $x = 1$ .

funkcji

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1},$$

której pochodną jest właśnie  $w(x)$ . Pozostaje zauważyć, że

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(2) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i+1} a_i \right) = 0.$$

Zatem na mocy twierdzenia Rolle'a, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a dla  $f(a) = f(b)$ , wnioskujemy istnienie punktu  $x_0 \in (0, 2)$  takiego, że  $w(x_0) = 0$ .

Mamy nadzieję, że przekonaliśmy Czytelnika do tego, że twierdzenia o wartości średniej mogą być bardzo użyteczne podczas rozwiązywania zadań w trakcie międzynarodowych zawodów matematycznych – i nie tylko...

## Informatyczny kącik olimpijski (133): Cyfrowy ciąg

W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania „Cyfrowy ciąg”, które pojawiło się w eliminacjach do zawodów *Romanian Master of Informatics*.

**Cyfrowy ciąg:** *Tadek napisał ciąg  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , złożony z  $n$  cyfr od 1 do 9. Chciałby podzielić ten ciąg na  $k$  spójnych fragmentów. Każdy fragment czytany od lewej do prawej tworzy liczbę. Tadek chciałby dokonać takiego podziału, aby największa z  $k$  otrzymanych liczb była jak najmniejsza.*

Niech  $S[a : b]$  oznacza fragment  $s_a, s_{a+1}, \dots, s_b$ .

Zauważmy, że  $S$  zawiera tylko cyfry od 1 do 9 – nie ma cyfry 0. Zatem dowolny jego fragment opisuje liczbę bez zer wiodących. Od tego momentu zakładamy, że rozważamy tylko liczby bez zer wiodących. Wiadomo, że dłuższa liczba jest większa niż krótsza. W związku z tym chcemy tak podzielić ciąg, aby największa liczba była możliwie najkrótsza. Największa liczba zawiera przynajmniej  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  cyfr. Zauważmy, że w jakimś optymalnym podziale będą wyłącznie liczby  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ -cyfrowe lub  $(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)$ -cyfrowe. Dokładniej, w jakimś optymalnym podziale będzie:

- $x$  liczb  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ -cyfrowych, gdzie  $x = k$ , jeśli  $k|n$  i  $x = n \bmod k$  w przeciwnym przypadku,
- $y$  liczb  $(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)$ -cyfrowych, gdzie  $y = k - x$ .

Niech  $d_x = \lceil \frac{n}{k} \rceil$  oraz  $d_y = \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ . Szukamy takiego podziału  $S$  na  $x$  liczb  $d_x$ -cyfrowych i  $y$  liczb  $d_y$ -cyfrowych, żeby największa liczba była jak najmniejsza.

### Rozwiązanie $O(nk)$

Ten problem możemy rozwiązać za pomocą metody programowania dynamicznego. Otóż niech  $DP[i][j]$  oznacza wartość największej liczby w optymalnym podziale  $id_x + jd_y$  pierwszych cyfr ciągu na  $i$  liczb  $d_x$ -cyfrowych oraz  $j$  liczb  $d_y$ -cyfrowych. Wyznamy wartości  $DP[i][j]$  dla wszystkich takich  $i, j$ , że  $0 \leq i \leq x$  oraz  $0 \leq j \leq y$ . Wówczas wynikiem będzie  $DP[x][y]$ . Niech  $DP[0][0] = 0$ , zaś  $DP[i][j] = \min(p_1, p_2)$  dla  $i + j > 0$ , gdzie:

- $p_1$  to wynik podziału przy założeniu, że ostatnia liczba ma  $d_x$  cyfr. Wtedy  $p_1 = \max(DP[i-1][j], S[1 + (i-1)d_x + jd_y : id_x + jd_y])$ , jeśli  $i > 0$  i  $p_1 = \infty$  w przeciwnym przypadku.
- $p_2$  to wynik podziału przy założeniu, że ostatnia liczba ma  $d_y$  cyfr. Wtedy  $p_2 = \max(DP[i][j-1], S[1 + id_x + (j-1)d_y : id_x + jd_y])$ , jeśli  $j > 0$  i  $p_2 = \infty$  w przeciwnym przypadku.

Mamy  $O(k)$  liczb „dłuższych” oraz  $O(k)$  liczb „krótszych”, czyli wszystkich stanów do obliczenia jest  $O(k^2)$ . Obliczenie jednego stanu zajmuje  $O(\frac{n}{k})$  (porównanie dwóch liczb długości  $O(\frac{n}{k})$ ). Zatem całe rozwiązanie działa w czasie  $O(nk)$ .

### Rozwiązanie $O(\frac{n^2}{k} \cdot \log(n))$

W tym rozwiązaniu wykorzystamy algorytm wyszukiwania binarnego. Wiemy, że wynikiem jest wartość jakiegoś pod słowa długości  $d_x$ . W pierwszej fazie rozwiązania weźmy wszystkie  $d_x$ -cyfrowe pod słowa i uporządkujmy je niemalejąco. Takich liczb jest  $O(n)$ .

Ich posortowanie wymaga  $O(n \cdot \log(n))$  porównań, zaś jedno porównanie zajmuje czas  $O(\frac{n}{k})$ . Zatem pierwsza faza działa w czasie  $O(\frac{n^2}{k} \cdot \log(n))$ .

Kiedy mamy już uporządkowany ciąg i wiemy, że jedna z tych liczb jest wynikiem, to możemy wykonać w tym ciągu wyszukiwanie binarne – drugą fazę rozwiązania. Załóżmy, że w kroku algorytmu sprawdzamy, czy wynik jest nie większy niż  $w$ . Zatem chcemy dowiedzieć się, czy istnieje podział ciągu na co najwyżej  $k$  liczb nie większych niż  $w$ . W tym celu będziemy dokonywali podziału od lewej do prawej. W każdym kroku zachłannie wybieramy największą możliwą liczbę. Jeśli liczba utworzona przez  $d_x$  kolejnych cyfr jest nie większa niż  $w$ , to dodajemy ją do podziału. W przeciwnym przypadku dodajemy liczbę o jeden krótszą. Jeśli po  $k$  krokach wykorzystamy wszystkie cyfry, to znaleźliśmy podział o wyniku co najwyżej  $w$ .

Algorytm wyszukiwania binarnego wykona  $O(\log(n))$  kroków. W każdym kroku przechodzimy po całym ciągu, co zajmuje  $O(n)$  operacji. Zatem druga faza działa w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ , a w całym rozwiązaniu wykonuje się  $O(\frac{n^2}{k} \cdot \log(n))$  operacji.

### Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Spróbujmy przyspieszyć pierwszą fazę poprzedniego rozwiązania. W tym celu wykorzystamy słownik pod słów bazowych, którego konstrukcja wymaga  $O(n \cdot \log(n))$  operacji. Za pomocą tej struktury danych możemy w czasie  $O(1)$  porównać leksykograficznie dwa pod słowa, co jest równoważne porównaniu wartości liczbowych przez nie reprezentowanych. A więc pierwszą fazę rozwiązania wykonujemy w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ .

### Wersja trudniejsza – cyfry na okręgu

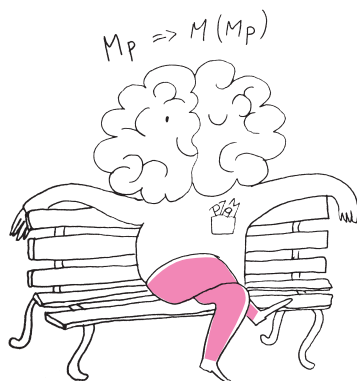
Dla ambitnych Czytelników proponujemy trudniejszą wersję zadania – cyfry są ułożone na okręgu, który możemy rozciąć w dowolnym miejscu. Przedstawimy krótki zarys rozwiązania. Zdublikujmy ciąg  $S$ , sklejając dwie jego kopie. W ten sposób każde pod słowo długości  $n$  opisuje jakąś rotację cykliczną  $S$ . Wynik będziemy wyszukiwali binarnie (jak w poprzednim rozwiązaniu). W każdym kroku, dla każdej pozycji wyznaczamy najdalszą pozycję na prawo, gdzie może zaczynać się kolejna liczba. Jeśli pozycje zinterpretujemy jako wierzchołki, a przejścia do kolejnych liczb jako krawędzie, to otrzymamy graf acykliczny. Pytamy, czy w takim grafie istnieje  $k$ -krawędziowa ścieżka, która pokrywa  $n$  liter. Można to sprawdzić metodą skoków potęgami dwójki.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

## Prosto z nieba: Co z tego, że świeci Słońce?

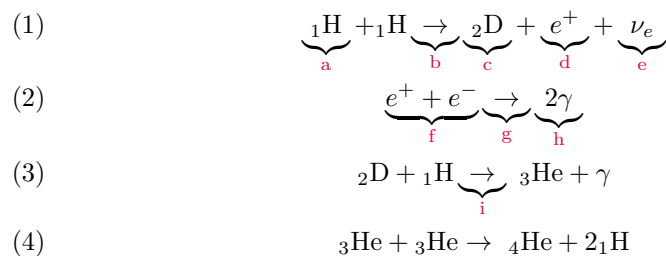
W jaki sposób Słońce wytwarza ogromną ilość energii niezbędnej do podtrzymania życia na Ziemi? Począwszy od pierwszej połowy XIX wieku pytanie to było nie lada wyzwaniem dla astronomów i fizyków teoretycznych, którzy spierali się o to gorąco z geologami i biologami ewolucyjnymi, a problemem pogodzenia wieku Słońca i Ziemi zajmowali się najznajomsi fizycy epoki. Dziewiętnastowieczni fizycy uważali, że źródłem energii słonecznej jest grawitacja. W wykładzie z 1854 roku Hermann von Helmholtz zaproponował model, w którym energia Słońca pochodzi z grawitacyjnego kurczenia się (i związanego z tym rozgrzewania) dużej masy – czyli konwersję energii grawitacyjnej na ciepło; podobne hipotezy stawiali nieco wcześniej Julius von Mayer i John James Waterston. William Thomson, lord Kelvin, oszacował wiek Słońca – a zatem też i Ziemi – w następujący sposób. Obliczył energię grawitacyjną Słońca i podzielił wynik przez tempo, w jakim promieniuje ono energię, co daje czas życia rzędu zaledwie 30 milionów lat. Dla porównania, drugi co do atrakcyjności pomysł, czyli produkcja energii dzięki reakcjom chemicznym (np. spalaniu węgla), daje znacząco gorszy wynik – czas rzędu tysięcy lat.

Całkowita energia potencjalna (dla uproszczenia, jednorodnej) kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$  to  $U = -3GM^2/(5R)$ . W przypadku Słońca  $U_{\odot} \simeq 4 \cdot 10^{41}$  J. Jasność Słońca, czyli moc emitowanego promieniowania, to  $L_{\odot} \simeq 4 \cdot 10^{26}$  W. Dzieląc  $U_{\odot}/L_{\odot}$  dostajemy prawie dokładnie 30 milionów lat.



Podczas gdy fizycy koncentrowali się na pochodzeniu promieniowania, biologowie i geolodzy rozważali jego wpływ na procesy zachodzące na Ziemi i związane z tym skale czasowe. W 1859 roku Karol Darwin w pierwszym wydaniu swojego dzieła *O powstawaniu gatunków przez dobór naturalny* dokonał zgrubnego oszacowania wieku Ziemi na podstawie obserwacji w dolinie Weald na południu Anglii. Uzyskał wiek Ziemi około 300 milionów lat – zupełnie wystarczający, by dobór naturalny wytworzył obserwowaną różnorodność gatunków istniejących na Ziemi, ale jednocześnie drastycznie niezgodny z obliczeniami Kelvina.

Dziś wiemy, że Kelvin się mylił, a geolodzy i biologowie mieli rację. Różne pomiary, m.in. radioaktywne datowanie meteorytów, wykazują, że wiek Słońca i Układu Słonecznego to około 4,6 miliarda lat. Tę „niewielką” pomyłkę można jednak wybaczyć – w tamtych czasach nie wiedzano o innych, bardziej efektywnych metodach produkcji energii, czyli o możliwości przekształcania masy w energię w reakcjach jądrowych. Odkrywczy tej nowej dziedziny – fizyki jądrowej – to Wilhelm Roentgen (promieniowanie X, 1895 r.), Henri Becquerel (naturalna radioaktywność soli uranu, 1896 r.), Maria Skłodowska-Curie i Pierre Curie (szczegółowe badania spontanicznej radioaktywności pierwiastków i dowód na to, że promieniowanie pochodzi wprost z atomów, a nie z oddziaływań między nimi), Ernest Rutherford (podwaliny fizyki jądrowej). Przełom w zrozumieniu, jak działa Słońce, dokonał się w około 40 lat. Poniżej jedna z wersji cyklu proton-proton zachodzącego w jego wnętrzu:



Cykl kończy się wyprodukowaniem 26,73 MeV energii, z których przeważającą większość doceniamy później na Ziemi.

Zatrzymajmy się na chwilę w tym miejscu, żeby docenić także, ile ciekawej wiedzy znajduje się w tych równaniach. Dowiadujemy się z nich o: **a** jądrach atomowych, **b** reakcjach jądrowych, **c** istnieniu izotopów, **d** antymaterii, **e** oddziaływaniach słabych, **f** cząstkach przenoszących ładunek elektryczny, **g** zamianie materii na promieniowanie, **h** fotonach gamma, **i** transmutacji; czyli spełnieniu snów alchemików starających się przez stulecia zamienić jedne pierwiastki w inne.

Inspirowane noblowskim wykładem Johna Bahcalla i wykładem TED Davida Deutscha pt. *A new way to explain explanation*.

Michał BEJGER

## Klub 44 F

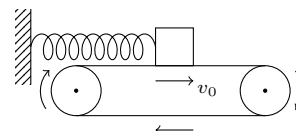


Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 2020

### Zadania z fizyki nr 688, 689

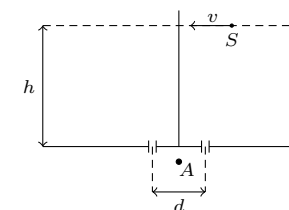
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**688.** Na nieruchomej taśmie transportera leży klocek o masie  $M$ , przyczepiony do ściany za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  (rys. 1). Taśmę wprawiono w ruch ze stałą prędkością  $v_0$  i po pewnym czasie ustaliły się drgania harmoniczne klocka. Znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Współczynnik tarcia klocka o taśmę jest równy  $\mu$ .



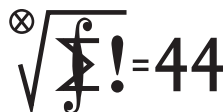
Rys. 1

**689.** Punktowe źródło światła  $S$  porusza się ruchem jednostajnym równoległe do ekranu, w którym znajdują się dwa małe otworki w odległości  $d = 2$  mm od siebie. Odległość źródła od ekranu wynosi  $h = 1$  m (rys. 2). Oświetlenie w punkcie  $A$  na osi układu zmienia się z częstotliwością  $f = 15$  Hz, długość fali świetlnej emitowanej przez źródło  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  m. Znaleźć prędkość źródła  $v$ . Podczas pomiarów oświetlenia źródło znajduje się w małej odległości od osi układu.



Rys. 2

## Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 781 ( $WT = 1,36$ ) i 782 ( $WT = 2,41$ ) z numeru 5/2019

Paweł Kubit	Kraków	43,07
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,30
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Olszewski	Warszawa	40,97
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	31,91
Mikołaj Pater	Opole	30,32

### Zadania z matematyki nr 791, 792

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**791.** Funkcja  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+a) - \ln(x+b)} \quad (\text{stałe: } a > b > 0).$$

Wykazać, że ma ona asymptotę ukośną (przy  $x \rightarrow \infty$ ), i znaleźć równanie tej asymptoty.

**792.** Dane są liczby naturalne  $m, n$ , przy czym  $n$  jest liczbą nieparzystą, większą niż  $2m$ . Udowodnić, że liczba

$$m^n + (m+1)^n + \dots + (n-m)^n$$

jest podzielna przez  $n^2$ .

Zadanie 792 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Niebo w grudniu

Nastał ostatni miesiąc 2019 roku. **Słońce** przebywa niżej niż  $21^\circ$  pod równikiem niebieskim, dlatego grudniowe dni są najkrótsze w całym roku, a noce najdłuższe. 22 grudnia o godzinie 5:19 naszego czasu Słońce osiągnie najbardziej na południe wysunięty punkt ekliptyki, i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna zima. Na początku stycznia nasza planeta przechodzi przez peryhelium, stąd w grudniu i styczniu porusza się najszybciej, pokonując na orbicie

ponad  $1^\circ$  dziennie. Dlatego początek zimy nie oznacza najpóźniejszego wschodu i najwcześniejszego zachodu Słońca. Najwcześniejszy zmierzch w tym roku ma miejsce już 11 grudnia, natomiast najpóźniejszy świt – 31 grudnia. W czerwcu analogiczny odstęp jest znacznie mniejszy, ponieważ wtedy z kolei Ziemia porusza się po swojej orbicie najwolniej. Dzięki temu również zima jest najkrótszą porą roku, lato zaś – najdłuższą. Różnica wynosi ponad 4 dni.



Grudzień to miesiąc, w którym zarówno rano, jak i wieczorem nachylenie ekliptyki do widnokregu jest całkiem spore, dzięki czemu przebywające blisko Słońca i ekliptyki ciała niebieskie są widoczne dość dobrze, niezależnie od tego, czy znajdują się na wschód, czy na zachód od niego. Stąd tak samo przed, jak i po nowiu panują dobre warunki do obserwacji tzw. **światła popielatego**, czyli nocnej strony Księżyca oświetlonej światłem słonecznym odbitym od Ziemi. Przypomnę tutaj, że Ziemia jest prawie czterokrotnie większa od Księżyca i odbija w przestrzeń kosmiczną zdecydowanie więcej światła. Ponadto fazy Księżyca i Ziemi się uzupełniają, a więc gdy Księżyc z perspektywy Ziemi jest w nowiu, to Ziemia z perspektywy Księżyca jest w pełni, i odwrotnie. To wszystko sprawia, że Ziemia na niebie widocznym z Księżyca w okolicach nowiu świeci bardzo jasno, dzięki czemu nocna strona naturalnego satelity Ziemi jest bez kłopotu widoczna wtedy gołym okiem, jeśli tylko znajduje się on nad horyzontem jeszcze przed wschodem lub po zachodzie Słońca.

Pierwsza połowa miesiąca upłynie w **blasku Księżyca**. Srebrny Glob 4 grudnia przejdzie przez I kwadrę, 12 grudnia – przez pełnię, 19 grudnia – przez ostatnią kwadrę, zaś 26 grudnia – przez nów, okraszony zaćmieniem Słońca, widocznym z Azji i Australii. W grudniu, ze względu na bliskość perihelium, tarcza słoneczna jest duża, a zatem Srebrny Glob nie zdoła zasłonić jej całej i dojdzie tylko do zaćmienia obrączkowego, czyli w momencie fazy maksymalnej wokół tarczy Księżyca pozostanie jasna obwódka słoneczna. Faza obrączkowa potrwa maksymalnie prawie 3 minuty i 40 sekund w okolicach cieśniny Malakka. Pas zaćmienia obrączkowego przejdzie od Półwyspu Arabskiego przez tropikalną część Oceanu Indyjskiego po zachodni Pacyfik.

Niestety w tym miesiącu Księżyc nie zakryje gwiazdy jaśniejszej od  $4^m$ . Na początku miesiąca, 4 grudnia, Srebrny Glob w fazie 54% przejdzie  $4,5^\circ$  od Neptuna i niewiele ponad  $1^\circ$  od trójki gwiazd  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  i  $\psi_3$  Aqr. Dobę później wieczorem za księżycową tarczą znikną na chwilę gwiazdy 30 i 33 Psc, o jasności około  $+4,5^m$ . Ósmego dnia miesiąca Srebrny Glob w fazie 87% przejdzie  $5^\circ$  od Urana (i  $12^\circ$  od Miry, o której więcej poniżej). Już trzy dni później Księżyc w pełni minie w odległości  $4^\circ$  Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka, zaś 15 grudnia jego tarcza, oświetlona w 85%, wejdzie  $2^\circ$  na wschód od M44, widocznej gołym okiem gromady otwartej gwiazd. W nocy z 16 na 17 grudnia Księżyc utworzy trójkąt równoboczny z Regulusem i R Leo, drugą jasną w grudniu mirydą, zbliżając się doń na  $5^\circ$ . Cienki już sierp Księżyca w fazie 28% przejdzie 21 grudnia prawie  $7^\circ$  na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, a 23 grudnia, 10-procentowy sierp Srebrnego Globu minie planetę Mars w odległości  $3^\circ$ . Po nowiu, w ostatnich dniach miesiąca, najpierw cienki sierp Księżyca 28 i 29 grudnia zbliży się na  $5^\circ$  do planety Wenus, zaś w Sylwestra, z sierpem pogrubionym do 27%, Księżyc ponownie przejdzie  $6^\circ$  od Neptuna.

Miesiąc zacznie się od dobrej widoczności **Merkurego** na niebie porannym, świecącego niedaleko poprawiającego swą widoczność **Marsa**. Pod koniec ubiegłego miesiąca,

28 listopada, Merkury osiągnął maksymalną elongację zachodnią, oddalając się od Słońca na ponad  $20^\circ$ . Początkowo planeta na 45 minut przed świtem zdąży się wzniesić na  $10^\circ$  i pozostanie widoczna do połowy grudnia. W tym czasie przejdzie od środka gwiazdozbioru Wagi poprzez Skorpiona do Wężownika, prezentując tarczę o średnicy  $6''$ , jasności  $-0,6^m$  i fazie rosnącej od 70 do 90%. Merkury przejdzie niecały stopień od gwiazdy Graffias 11 i 12 grudnia.

Dystans między Merkurym a Marsem urośnie do połowy grudnia od  $10$  do  $20^\circ$ . Czerwona Planeta o tej samej porze wznosi się na wysokość ponad  $15^\circ$ , lecz jej blask to tylko  $+1,7^m$ , przy średnicy tarczy  $4''$ . Mars wędruje przez gwiazdozbiór Wagi i 12 grudnia zbliży się na nieco ponad  $15'$  do gwiazdy Zuben Elgenubi.

Wieczorem nisko nad południowo-zachodnią częścią firmamentu ciasną parę utworzą planety **Venus** i **Saturn**. Pierwsza planeta poprawia swoją widoczność po spotkaniu ze Słońcem, druga zaś zbliża się do niego i niebawem zginie w zorzy wieczornej. Wenus przejdzie niecałe  $2^\circ$  na południe od Saturna 11 grudnia. Jednak godzinę po zmierzchu obie planety znajdą się na wysokości zaledwie  $7^\circ$ , stąd nie są łatwym celem do obserwacji. Z ich odróżnieniem nie powinno być kłopotu, gdyż Wenus świeci z jasnością  $-4^m$ , przy średnicy tarczy  $13''$  i fazie od 88 do 82%. Druga z planet świeci blaskiem  $+0,6^m$ , a jej tarcza ma średnicę  $15''$ .

Najlepiej widoczne są ostatnie dwie planety Układu Słonecznego. **Neptun** kreśli swoją pętlę ponad  $70'$  na zachód od gwiazdy  $\varphi$  Aqr, świecąc z jasnością  $+7,9^m$ , a zatem jest widoczny przez lornetki. Natomiast jaśniejszy o ponad  $2^m$  **Uran** znajduje się  $7^\circ$  na południe od głównej figury Barana, jednak w jego bezpośrednim sąsiedztwie nie ma jasnych gwiazd, którymi można się kierować w jego szukaniu.

W grudniu promieniują dwa coroczne roje meteorów: **Geminidy** z maksimum około 14 grudnia oraz **Ursydy**, mające maksimum 23 grudnia. Obserwacje Geminidów popsuje Księżyc w fazie 92%, wędrujący wtedy niecałe  $15^\circ$  od radiantu. Drugi rój ma szczęście do Księżyca prawie w nowiu i jest widoczny bardzo dobrze. Radiant Ursydów znajduje się na przedłużeniu linii łączącej gwiazdy Pherkad i Kochab, czyli koła Małego Wozu, jakieś  $2,5^\circ$  od drugiej z nich. Są to raczej wolne meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 33 km/s. Można się spodziewać nawet do 30 meteorów na godzinę.

Maksimum aktywności **mirydy R Leo**, znajdującej się około  $5^\circ$  na zachód od jasnego Regulusa w Lwie, prognozuję się na 6 grudnia. W tym czasie może być ona wyraźnie jaśniejsza od  $+5^m$  i na ciemnym niebie widoczna bez pomocy przyrządów optycznych. Już w lornetkach R Leo wyróżnia się też oczywistą ciemnoczerwoną barwą, dzięki czemu nie można jej pomylić z innym obiektem. Gwiazda widoczna jest w drugiej połowie nocy, górując jeszcze w czasie nocy astronomicznej, na wysokości  $49^\circ$ . W listopadzie przez maksimum blasku przeszła inna miryda, o Ceti, która w grudniu nadal powinna być dostrzegalna gołym okiem. Mira na początku miesiąca góruje około godziny 21 na wysokości  $35^\circ$ .

*Ariel MAJCHER*

## Nagroda Nobla z (astro)fizyki

W tym roku Nagroda Nobla z fizyki została przyznana trzem astrofizykom. Połowę nagrody otrzymał James Peebles za rozwój teoretycznych podstaw współczesnej kosmologii, natomiast kolejną połowę otrzymali Michel Mayor oraz Didier Queloz za odkrycie pierwszej planety pozasłonecznej krążącej wokół gwiazdy typu słonecznego.

### Teoretyczne podstawy współczesnej kosmologii

James Peebles jest profesorem emerytowanym na Uniwersytecie w Princeton. Jest uważany za jednego z twórców współczesnej kosmologii, dla której stworzył (i nadal rozwija) podstawy teoretyczne. Zaczynając już od 1964 roku, znacząco przyczynił się do pogłębienia naszej wiedzy o budowie i ewolucji Wszechświata od Wielkiego Wybuchu do czasów współczesnych. Zapytany, która z jego prac stanowi największy wkład w rozwój kosmologii, stwierdził po prostu „It’s work of my life” (Praca mojego życia).

I trudno temu zaprzeczyć – wielkoskalowa struktura Wszechświata, kosmiczne promieniowanie tła, ciemna materia, ciemna energia, powstanie pierwiastków cięższych od wodoru czy epoka inflacji to tylko niektóre z zagadnień, dla których podstawy teoretyczne istnieją dzięki pracy Jamesa Peeblesa.

W roku 1965 Peebles wyjaśnił znaczenie kosmicznego promieniowania tła (*Cosmic Microwave Background radiation* – CMB) w kontekście formowania się struktur we Wszechświecie. Przewidział, że promieniowanie wypełniające Wszechświat w początkowych etapach jego ewolucji powstrzymywało wzrost zagęszczeń materii, i dopiero gdy Wszechświat rozszerzył się do odpowiednich rozmiarów, gaz ochłodził się na tyle, by mogły powstać gwiazdy i galaktyki. Pomógł również w oszacowaniu, jak duże powinny być fluktuacje w rozkładzie materii „wdrukowane” w temperaturę CMB, jeszcze zanim te przewidywania potwierdziły obserwacje satelity COBE (*Cosmic Background Explorer*). Dodatkowo w 1968 roku badając gromady kuliste, argumentował, że mogły one powstać przed galaktykami.

W pracy *Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe* (1970) Peebles i Yu argumentowali, że fluktuacje temperatury wpisane w CMB mogłyby być spowodowane falami dźwiękowymi pochodzącymi z początkowych zmian w gęstości plazmy wypełniającej wczesny Wszechświat. Autorzy przewidzieli, na podstawie obliczeń teoretycznych, że wariacje te będą rzędu 15 na 100 000. Pomiar wykonany dziesięciolecie później przez satelitę COBE wykazały, że były one jeszcze mniejsze, rzędu 1 na 100 000.

Na tym jednak przełomowe prace Peeblesa się nie kończą. Na podstawie symulacji numerycznych opisujących tworzenie tzw. galaktyk z poprzeczką stwierdził on, że potrzebna jest duża ilość dodatkowej masy – ciemnej materii – aby galaktyki takie jak Droga Mleczna mogły być stabilne. Podążając tym tokiem myślenia, już w 1982 roku opublikował teorię zimnej ciemnej materii. Parę lat później przywrócił stałą kosmologiczną do teoretycznego opisu Wszechświata, na początku w kontekście opisu zimnej ciemnej materii i tworzenia wielkoskalowej struktury Wszechświata, a potem jako składowej modelu kosmologicznego, gdzie stała kosmologiczna reprezentuje wewnętrzną energię samej przestrzeni i jest najprostszym wyjaśnieniem dla ciemnej energii – nieznanego mechanizmu,

przez który Wszechświat rozszerza się w coraz szybszym tempie. Jednym słowem, wraz z wcześniejszymi pracami, Peebles połączył kluczowe elementy standardowego modelu kosmologii: zimną ciemną materię i ciemną energię.

Tegoroczny laureat Nagrody Nobla jest jednym z pierwszych astrofizyków, którzy zaadaptowali prawa fizyki do studiowania Wszechświata jako jednego, spójnego systemu ewoluującego z czasem. Jego metody i obliczenia przekształciły kosmologię z pola spekulacyjnego w naukę precyzyjną – sprawdzalną za pomocą obserwacji.

### Pierwsza planeta krążąca wokół gwiazdy takiej jak Słońce

Chociaż istnieje wiele sposobów na znalezienie egzoplanety (zostaną one opisane w  $\Delta_{20}^1$ ), laureaci Nagrody Nobla w swych badaniach zastosowali *metodę prędkości radialnej*. Wykorzystuje ona fakt, że gwiazda i planety jej układu orbitują wokół wspólnego środka ciężkości. Mimo iż ruch gwiazdy odbywa się po znacznie mniejszej „orbicie”, to jednak wykazuje ona zauważalne *chybotanie*. Obserwując te niewielkie ruchy gwiazdy, możliwe jest wywnioskowanie, że wokół niej orbituje planeta, a na podstawie dłuższych obserwacji oszacowanie jej wielkości i odległości do gwiazdy. Współcześnie wiadomo, że metoda ta jest szczególnie przydatna w znajdowaniu super-Jowiszów (planet większych niż największa planeta w naszym Układzie Słonecznym), ponieważ powodują one duże – stosunkowo łatwe do zaobserwowania – ruchy swojej macierzystej gwiazdy.

W ten sposób w roku 1995 Michel Mayor oraz Didier Queloz znaleźli dziwny obiekt orbitujący wokół gwiazdy 51 Pegasi – planetę dwa razy większą niż Jowisz, a do tego krążącą 7 razy bliżej swojej gwiazdy niż jest oddalony Merkury od Słońca. Obiekt ten znany jest obecnie jako 51 Peg b. Odkrycie to było niezmiernie zaskakujące, gdyż nikt wówczas nie spodziewał się, że gazyowy gigant może znajdować się tak blisko swojej gwiazdy macierzystej – gazy tworzące takie obiekty potrzebują znacznie chłodniejszych temperatur, aby uformować planetę (muszą znajdować się poza tzw. „linią śniegu”). W kontekście obowiązujących wcześniej teorii formowania się planet 51 Peg b nie mógł więc istnieć – był pierwszym z wielu odkrytych później „Gorących Jowiszów”.

51 Peg-b nie była pierwszą odkrytą egzoplanetą. W 1992 roku Aleksander Wolszczan, wspólnie z kanadyjskim naukowcem Dale Frailem, dokonał odkrycia planet krążących wokół nietypowego obiektu – pulsara PSR 1257+12. Pulsar jest bardzo szczególnym typem gwiazdy neutronowej będącej pozostałością po wybuchu supernowej. Metoda wykrywania planet zaproponowana przez polskiego astronoma nie może być więc zastosowana do innych typów gwiazd. Mayor i Queloz zaproponowali metodę, która pozwoliła odkryć planetę krążącą wokół gwiazdy typu słonecznego, czyli taką, na której potencjalnie mogło rozwinąć się życie – rozbudzając uzasadniony entuzjazm wokół egzoplanet.

Odkrycie Szwajcarów zapoczątkowało falę poszukiwań egzoplanet. Współcześnie, 25 lat później, liczba zaobserwowanych egzoplanet wzrosła do 4057 i stale się powiększa. Co więcej, opracowano wiele nowych metod wyszukiwania planet, szacowania ich wielkości, określania składu atmosfery, kompozycji, orbit i wielu innych. Zaobserwowano typy planet, które nie istnieją w naszym układzie słonecznym (takie jak „super-Ziemia”), a nawet odkryto planetę krążącą wokół najbliższej nam gwiazdy – Proxima Centauri.

Anna DURKALEC



# Twierdzenie Bézouta

Bartłomiej BZDEGA

Rozważmy wielomian  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ . Korzystając ze wzoru

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$

możemy zapisać

$$P(x) - P(y) = (x - y)F(x, y), \text{ gdzie } F(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i+j+1} x^i y^j$$

(przyjmujemy, że  $a_k = 0$  dla  $k$  większych od stopnia wielomianu  $P$ ). Dzięki tej tożsamości mamy trzy następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Dla dowolnego wielomianu  $P$  w wyrażeniu  $P(x) - P(y)$  można wyłączyć przed nawias różnicę  $x - y$ .

**Twierdzenie 2.** Jeśli wielomian  $P$  ma współczynniki całkowite, to dla różnych liczb całkowitych  $a$  i  $b$  zachodzi podzielność liczb całkowitych  $a - b \mid P(a) - P(b)$ . W szczególności, jeśli  $d \mid P(n)$ , to  $d \mid P(n + d)$  dla całkowitych  $d \neq 0$  i  $n$ .

**Twierdzenie 3 (Bézouta).** Wielomian  $P(x)$  dzieli się przez dwumian  $x - \alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P(\alpha) = 0$ .

Twierdzenie 1 już zostało wykazane. Aby udowodnić twierdzenie 2, wystarczy zauważyć, że w wyrażeniu  $F(a, b)$  wszystkie współczynniki są jednocześnie współczynnikami wielomianu  $P$ , więc są całkowite. Zatem wartość tego wyrażenia jest również liczbą całkowitą.

Kolej na dowód twierdzenia Bézouta. Niech  $y = \alpha$  będzie stałą. Wtedy wyrażenie  $F(x, \alpha)$  jest wielomianem zmiennej  $x$ , a zapis  $P(x) = (x - \alpha)F(x, \alpha) + P(\alpha)$  jest dzieleniem wielomianu  $P(x)$  przez dwumian  $x - \alpha$  z resztą  $P(\alpha)$ .

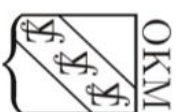
*Uwaga.* Jeśli wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity  $c$ , to wielomian  $P(x)/(x - c)$  również ma współczynniki całkowite. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

## Zadania

- Wielomian  $P$  ma wszystkie współczynniki całkowite i dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności  $P(-n) < P(n) < n$ . Wykazać, że  $P(-n) < -n$  dla wszystkich naturalnych  $n$ .
- Wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych. Udowodnić, że ten wielomian nie ma pierwiastków będących liczbami całkowitymi.
- Wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2019 dla pięciu różnych argumentów będących liczbami całkowitymi. Dowieść, że ten wielomian nie ma pierwiastków całkowitych.
- Wielomian  $P$  ma trzeci stopień i wszystkie współczynniki całkowite oraz spełnia równości:  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$  i  $P(3) = 3$ . Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość  $|P(4)|$ .
- Znaleźć taki wielomian  $P$ , który ma czwarty stopień i spełnia równości:  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(2) = \frac{2}{3}$ ,  $P(3) = \frac{3}{4}$ ,  $P(4) = \frac{4}{5}$ .
- Różne wielomiany  $P$  i  $Q$  spełniają warunek  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ . Wykazać, że wielomian  $P(P(x)) - Q(Q(x))$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) - Q(x)$ .
- Wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że  $P(n)$  jest liczbą pierwszą dla wszystkich naturalnych  $n$ . Dowieść, że  $P$  jest wielomianem stałym.
- Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią  $a$ . Niech  $P(x) = x^2 + x - a$ . Udowodnić, że jeśli dla pewnego naturalnego  $n > \sqrt{a}$  liczby  $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$  są względnie pierwsze z  $P(n)$ , to liczba  $P(n)$  jest pierwsza.
- Wyznaczyć wszystkie niestałe wielomiany  $P$  o współczynnikach całkowitych, spełniające warunek: Dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  co najwyżej jedna z liczb  $P(1), P(2), \dots, P(2n-1)$  dzieli się przez  $n$ .
- Wyznaczyć wszystkie wielomiany  $P$  o współczynnikach całkowitych, które dla każdego naturalnego  $n$  spełniają podzielność  $P(n) \mid 2^n - 1$ .

1. Na mocy pierwszego twierdzenia mamy  $2n \mid P(n) - P(-n)$ , a z założenia  $P(-n) < -n$ , więc  $P(n) \leq P(-n) - 2n < -n - 2n = -3n$ , czyli  $P(n) < -n$ .  
2. Z twierdzenia 2 dla  $d = 2$  wynika, że  $2 \mid P(n) - P(n+2)$  dla każdego naturalnego  $n$ .  
3. Niech  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ . Liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są różnymi pierwiastkami wielomianu  $P(x) - 2019$ .  
4. Wielomian  $P(x) - x$  ma pierwiastki 1, 2 i 3, więc  $P(x) - x = a(x-1)(x-2)(x-3) + r(x)$ , gdzie  $r(x)$  jest wielomianem stopnia nie większego niż 2. Porównując współczynniki przy  $x^2$  i  $x$  otrzymujemy  $a = 1$  i  $a = 1$ , więc  $P(x) = x^3 + px + q$ .  
5. Rozważmy wielomian piątego stopnia  $Q(x) = x^5 + 1$ . Jego pierwiastkami są  $0, 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ , gdzie  $\omega = e^{2\pi i/5}$ .  
6. Niech  $p = P(x)$  i  $q = Q(x)$ . Mamy  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ , więc  $P(Q(x)) - Q(P(x)) = 0$ .  
7. Niech  $p = P(x)$ . Na mocy twierdzenia 1 wystarczy dwukrotnie skorzystać z twierdzenia 1 dla naturalnych  $k$  mamy  $p \mid P(1 + kp)$ , więc  $P(1 + kp) = p$ , gdyż  $P$  dla argumentów całkowitych są liczbami pierwszymi. Wielomian  $P(x) - p$  ma zatem nieskończenie wiele miejsc zerowych, więc jest zerowy.  
8. Mamy  $P(n) > 1$  dla  $n > \sqrt{a}$ . Przyjmujemy, że liczba  $P(n)$  nie jest pierwsza. Wtedy ma ona dzielnik pierwszy  $d \leq \sqrt{P(n)}$ .  
9. Wówczas  $d \mid P(n) - d$ , czyli  $d \mid P(n) - P(-d)$ . Wspólnym dzielnikiem  $P(n)$  i  $P(-d)$  jest  $P(n) - P(-d)$ , a z założenia dostatecznie dużych  $k < 0$  mamy  $P(k) \neq 0$ . Niech  $n = |P(k)|$ .  
10. Dla wszystkich dostatecznie dużych  $k > 0$  mamy  $P(k) \neq 0$ . Niech  $n = |P(k)|$ .  
Ponieważ  $n \mid P(k)$ , również  $n \mid P(n)$ .  
Zatem  $k + n \geq 2n$ , czyli  $|P(k)| \geq k + n \geq 2n$ ,  
dla dużych  $k$ . Stąd można wywnioskować, że  $P(x) = x$  albo  $P(x) = -x$ .  
10. Jeśli wielomian  $P$  jest stały, to  $P(x) = 1$  lub  $P(x) = -1$ . W przeciwnym razie dla pewnego  $n$  mamy  $P(n) \neq \pm 1$ ,  
zatem  $n \mid P(n) - 1$  lub  $n \mid P(n) + 1$ .  
Mamy wtedy też  $n \mid d$  dla  $d = P(n) + 1$  lub  $d = P(n) - 1$ .  
Zatem z założenia zadania  $d \mid 2^n - 1$  dla  $d = P(n) + 1$  lub  $d = P(n) - 1$ .  
Wtedy  $2^n - 1 \geq P(n) + 1$  lub  $2^n - 1 \geq P(n) - 1$ .  
Jeśli  $2^n - 1 \geq P(n) + 1$ , to  $2^n \geq P(n) + 2$ .  
Jeśli  $2^n - 1 \geq P(n) - 1$ , to  $2^n \geq P(n)$ .  
W obu przypadkach mamy  $2^n \geq P(n)$ .  
Z twierdzenia 2 dla  $d = 2$  wynika, że  $2 \mid P(n) - P(n+2)$  dla każdego naturalnego  $n$ .  
Wynioskujemy, że  $P(n)$  jest liczbą względną pierwszą z  $P(n+2)$  dla każdego naturalnego  $n$ .  
Wskazówki do zadań

## LXI SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ



# MATEMATYCZNE ZMIANY

Zapraszamy  
do zgłaszania  
propozycji na  
PLAKATOWĄ  
SESIJĘ

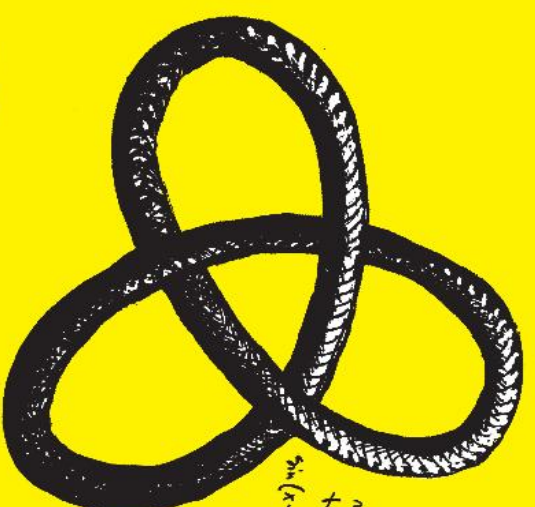
Będzie między innymi o tym:

- wielkie zmiany paradygmatów w matematyce,
- zmiany bardziej lokalne – poważne skutki małych zmian w wielkich twierdzeniach,
- układy dynamiczne – czyli matematyczne modelowanie zmian,
- niezmienniki – czyli co pozostaje niezmiennie, gdy wszystko się zmienia.

Szkoły są otwarte dla wszystkich związanych z matematyką, niezależnie od tego, czy jej uczą, uprawiają ją, piszą o niej, czy się nią pasjonują. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy, którzy uczą bądź chcą uczyć w szkołach wyższych. **ZAPRASZAMY.**

Zgłoszenia uczestnictwa przyjmowane będą do 20 grudnia 2019 roku poprzez formularz znajdujący się na stronie [www.simp.uhp.edu.pl](http://www.simp.uhp.edu.pl).

Pytania należy kierować na adres [okm@uhp.edu.pl](mailto:okm@uhp.edu.pl).



## 42. KONKURS UCZNIOWSKICH PRAC Z MATEMATYKI IM. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8.

Mówiąc krótko: **należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!**



**TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:  
30 KWIEŚNIA 2020 ROKU**  
**FINAL:  
WRZESIEŃ 2020 ROKU**



Regulamin konkursu, przykładowe tematy prac, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji: [www.deltam.edu.pl/delta/redakcja/konkurs\\_pra\\_ucznioiwskich](http://www.deltam.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_pra_ucznioiwskich)



[deltam@mi.muw.edu.pl](mailto:deltam@mi.muw.edu.pl)  
Delta.czasopismo