

deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 5 (564) 2021

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-2005 I NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

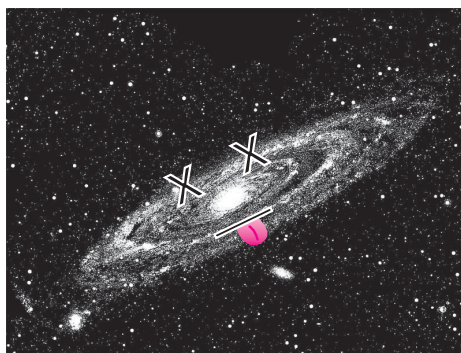
Jeszcze trochę
o geometrii
kolejowej
str. 12



Nakład: 3500 egz.



W następnym numerze:
Nagła śmierć we Wszechświecie.



SPIS TREŚCI NUMERU 5 (564)


Niniejszy tytuł orzeka o samym sobie
Jędrzej Kołodziejski

 *Zadania*

Grafen i spółka
Anna Łapińska

Uogólnienie algorytmu Euklidesa
Adam Barański

Równania różniczkowe i geometria (I)
Grzegorz Łukaszewicz

 Jeszcze trochę o geometrii kolejowej
Szymon Charzyński

O metrykach i kulach
Jarosław Górnicki

Wycieczka na Merkurego
Lech Falandysz


 ROCZNICE, ROCZNICE...
Magdalena Fikus

Klub 44

Prosto z nieba: Mars wciąż żyje!

Niebo w maju

Aktualności
Zupełnie nic

 Algorytm Euklidesa
Bartłomiej Bzdęga

str. 1 **Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 3 **Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

str. 6 **Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

str. 9 **Adres do korespondencji:** Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

str. 12 **Prenumerata:** Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

str. 14 **Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

str. 17 Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł

str. 19  **Strona internetowa** (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl
Można nas też znaleźć na facebook.com/Delta.czasopismo

str. 20

str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Niniejszy tytuł orzeka o samym sobie

Jędrzej KOŁODZIEJSKI*

*Doktorant, Instytut Informatyki,
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania M 1673.

Można. Każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako $2^A B$, gdzie $A \geq 0$ i B jest liczbą nieparzystą.

Liczby postaci $2^a(4b+1)$ pokolorujemy na białą, a liczby postaci $2^a(4b+3)$ pokolorujemy na czerwono ($a, b \geq 0$). Pokażemy, że suma dwóch liczb białych nie jest potęgą dwójki (rozumowanie w przypadku liczb czerwonych jest analogiczne).

Weźmy dwie różne liczby białe: $2^s(4k+1)$ i $2^t(4\ell+1)$, gdzie $k, \ell \geq 0$, $s \geq t \geq 0$, i załóżmy, że ich suma jest potęgą dwójki. Jeśli $s > t$, to

$$2^s(4k+1) + 2^t(4\ell+1) = 2^t(2^{s-t}(4k+1) + 4\ell + 1).$$

Liczba $2^{s-t}(4k+1) + 4\ell + 1 \geq 3$ jest nieparzysta, więc nie może być potęgą dwójki. Wobec tego $s = t$. Jednakże wtedy

$$2^s(4k+1) + 2^s(4\ell+1) = 2^{s+1}(2(k+\ell) + 1).$$

Gdyby $k > \ell$, to $2(k+\ell) + 1 \geq 3$ jest znów nieparzysta, więc nie może być potęgą dwójki. Zatem $k = \ell$, czyli wybrane liczby białe są równe – sprzeczność.

W języku mamy do czynienia z różnymi rodzajami definicji. Możemy definiować daną rzecz przez wyliczenie jej istotnych cech – takich jak np. posiadanie blatu i nóg przez stół. Inną formą definicji, nazywaną definicją *ostensywną*, jest bezpośrednie wskazanie egzemplarza rozważanej rzeczy – np. stołu. Zdanie:

To jest definicja ostensywna.

jest zatem definicją ostensywną definicji ostensywnej!

„ $\exists x(\dots)$ ” to skrót dla „istnieje x takie że...”, zaś „ $\forall x(\dots)$ ” – „dla każdego x ...”.

Numerowanie formuł możemy na przykład otrzymać, porządkując wszystkie formuły leksykograficznie i n -tej formule przypisując numer n . Alternatywnie, utożsamiając liczby z ich zapisami binarnymi, otrzymujemy bijekcję liczb z (rozpoczynających się od jedynek) ciągami zer i jedynek.

Większość z nas zna zapewne bajkową postać Pinokia – ożywionego za sprawą magii drewnianego chłopca, którego nos rósł wtedy i tylko wtedy, gdy ten kłamał. Czy jednak zadaliśmy sobie kiedyś pytanie, co by się stało, gdyby Pinokio powiedział „mój nos teraz urośnie”? Jeśli jego nos zacząłby rosnąć, to znaczyłoby, że wypowiedź była prawdziwa – ale w takim wypadku nos nie powinien rosnąć. Jeśli jednak nos by nie urosł, słowa Pinokia byłyby fałszywe – czyli jednak powinien rosnąć. Sprzeczność! Antynomia ta stanowi jedno z wielu wcieleń słynnego *paradoksu kłamcy* sformułowanego w antycznej Grecji przez Eubulidesa. Paradoks dotyczy prawdziwości następującego *zdania kłamcy*:

To zdanie jest fałszywe.

Chwila zastanowienia pokazuje, że z prawdziwości powyższego zdania wynika jego fałszywość, a z fałszywości prawdziwość – nie może być zatem ani prawdziwe, ani fałszywe! Co z tym fantem zrobić? Tym, co na pierwszy rzut oka odróżnia zdanie kłamcy od „porządnych” zdań, jest samoodnośność. Zamiast bowiem mówić o stołach czy liczbach naturalnych – jak to zdania mają w zwyczaju – orzeka ono coś o sobie samym. Wydaje się, że to właśnie ta cecha stanowi źródło sprzeczności. Czy siedzącą na ławie oskarżonych samoodnośność uznamy zatem za winną? Jak się przekonamy, sprawa nie jest tak prosta, jak mogłoby się wydawać.

Samoodnośne wyrażenia są wśród nas

Zacznijmy od tego, że samoodnośność występuje w językach naturalnych – takich jak język polski – i ma się tam wcale dobrze. W polszczyźnie mamy wręcz specjalne słowo – „niniejszy” – służące do konstrukcji samoodnośnych wyrażen. Nie wydaje się kontrowersyjne ani podejrzane stwierdzenie, że niniejszy artykuł napisany jest w języku polskim, lub że niniejsze zdanie jest szesnastym zdaniem tego artykułu (nie licząc tytułów ani wykrzykników).

Obecność samoodnośnych wyrażen w języku naturalnym nie oznacza oczywiście, że musimy je akceptować w ścisłych i precyzyjnych teoriach formalnych. Jak się jednak okazuje, czasem nawet największa ostrożność i rygor nie uchronią nas przed samoodnośnością.

Wybermy matematyczną strukturę, o której będziemy mówić – dla ustalenia uwagi skupimy się na liczbach naturalnych \mathbb{N} z operacjami dodawania $+$ i mnożenia \times , jednak równie dobrze moglibyśmy mówić na przykład o zbiorach lub zbiorach skończonych. Dla struktury takiej możemy (choć nie zrobimy tego w niniejszym artykule) bardzo precyzyjnie zdefiniować, czym są poprawnie zbudowane formuły logiczne, i określić znaczenie każdej takiej formuły. Za pomocą różnych formuł możemy wyrażać różne stwierdzenia – na przykład formuła $\text{Parzyste}(x) = \exists y(y + y = x)$ mówi, że liczba x jest parzysta, zaś $\text{Przemienność} = \forall x(\forall y(x \times y = y \times x))$ wyraża znaną nam ze szkoły przemienność mnożenia liczb naturalnych. Formuły, które *po prostu* coś konstatują (takie jak Przemienność), nie zaś orzekają *o jakiejś zmiennej* (jak to robi $\text{Parzyste}(x)$ o x -ie, które jest prawdziwe o liczbie 2, a fałszywe o liczbie 3), nazwiemy zdaniami. Ponieważ formuły logiczne są skończonymi napisami, możemy ponumerować je wszystkie – każdemu φ przypisując unikatowy numer $\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że pozwala nam to interpretować formuły mówiące o liczbach jako mówiące o kodach formuł – czyli pośrednio o samych formułach. Jak pokazał Rudolf Carnap, jeśli tylko sposób, w jaki numerujemy formuły, ma kilka naturalnych własności, to umożliwi on formułom mówienie *o samych sobie*:

Lemat przekątniowy. Dla każdej formuły $\varphi(x)$ skonstruować można zdanie ψ takie, że:

$$\psi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

Zdanie ψ mówi zatem dokładnie tyle, że liczba $\ulcorner \psi \urcorner$ będąca jego własnym numerem ma własność φ .

Aby zilustrować znaczenie lematu, rozważmy inny paradoks – nazwiemy go paradoksem Gödla – związany z następującym zdaniem Gödla:

Tego zdania nie da się udowodnić.

Czy zdanie Gödla może być fałszywe? Gdyby tak było, fałszem byłoby to, co głosi – a więc zdanie Gödla miałyby dowód. To jednak niemożliwe, nie da się bowiem udowodnić zdania fałszywego. Zatem zdanie Gödla jest prawdziwe – ale to z kolei oznacza, że nie ma dowodu. Mamy zatem przykład zdania prawdziwego, ale niedowodliwego! Dzięki lematowi przekątniowemu ten wyrażony w języku naturalnym paradoks daje się przekuć w ścisły dowód słynnego twierdzenia Gödla:

Twierdzenie 1 (Gödel). *Dla każdego (rozsądnego) systemu aksjomatów A istnieje zdanie prawdziwe, ale niedające się z A udowodnić.*

Istotnie, rozważmy następującą własność liczb: „liczba x jest numerem zdania niemającego dowodu w oparciu o aksjomaty A ”. Okazuje się, że jeśli tylko A da się sensownie reprezentować, to istnieje formuła $\varphi_A(x)$ wyrażająca powyższą własność. Z lematu przekątniowego otrzymujemy wtedy zdanie ψ mówiące, że $\ulcorner \psi \urcorner$ jest numerem zdania niemającego dowodu w oparciu o aksjomaty A . Zdanie ψ orzeka więc o samym sobie, że nie ma dowodu w oparciu o aksjomaty A . Argument analogiczny do użytego przy (nieformalnym) zdaniu Gödla świadczy o tym, że jeśli tylko z A nie da się udowodnić nic fałszywego, to są również pewne prawdziwe stwierdzenia, których zeń nie dowiedzimy.

Alibi

No dobrze, widzimy zatem, że samoodnośność występuje „w przyrodzie” i że często, mimo wielkiej ostrożności, nie da się jej uniknąć nawet w systemach formalnych. Ważniejsze jednak jest pytanie, czy to faktycznie ona odpowiada za antynomie. Jak się okazuje, samoodnośność ma alibi: paradoksy podobne

do paradoksu kłamcy mogą wystąpić również bez niej. Rozważmy następujące dwa zdania:

Następne zdanie jest prawdziwe.

Poprzednie zdanie jest fałszywe.

Analiza podobna do paradoksu kłamcy prowadzi do stwierdzenia, że żadne ze zdań nie może być ani prawdziwe, ani fałszywe. Z drugiej strony nietrudno dostrzec, że zdania te – choć żadne z nich nie mówi bezpośrednio o sobie, odnoszą się do siebie pośrednio, poprzez cykliczne powiązanie (Czytelnik może zechcieć zapisać cykl n zdań tworzących razem paradoks). Kolejny przykład pozbawiony jest już jakiegokolwiek autoreferencji – również pośredniej.

Tym razem rozważmy nieskończony ciąg zdań, z których każde mówi, że wszystkie kolejne są fałszywe:

$\varphi_1 =$ Dla każdego $i > 1$ zdanie φ_i jest fałszywe.

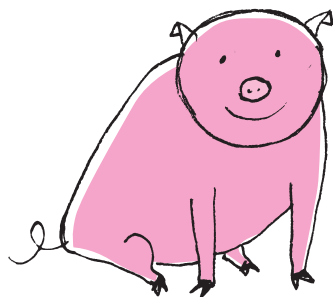
$\varphi_2 =$ Dla każdego $i > 2$ zdanie φ_i jest fałszywe.

\vdots

$\varphi_j =$ Dla każdego $i > j$ zdanie φ_i jest fałszywe.

\vdots

Zastanówmy się, czy dla jakiegokolwiek j prawdziwe jest φ_j . Gdyby tak było, znaczyłoby to, że wszystkie dalsze zdania – a więc w szczególności φ_{j+1} – są fałszywe. Skoro jednak φ_{j+1} mówi, że wszystkie następujące po nim zdania są fałszywe – to fałszywość φ_{j+1} oznacza, że dla pewnego $i > j + 1$ zdanie φ_i jest prawdziwe, co przeczy φ_j . Wszystkie zdania w ciągu muszą więc być fałszywe. Ale skoro tak, to prawdą jest to, co głosi każde ze zdań – sprzeczność! Powyższy paradoks – sformułowany po raz pierwszy przez Stephena Yablo – pokazuje, że na trudności takie jak paradoks kłamcy natrafiamy nawet bez cyklicznego odnoszenia się do siebie zdań. Samoodnośność ma alibi – to nie ona jest winna sprzeczności.



Na tropie sprzeczności

Skoro samoodnośność została oczyszczona z zarzutów, pozostajemy z pytaniem: kto zatem jest winny? Pewien trop pojawił się już w tym artykule. Być może zobaczywszy lemat przekątniowy i to, jak pozwala on sformalizować paradoks Gödla, Czytelnik zadaje sobie pytanie, jak w tym kontekście prezentuje się bardziej przecież złowieszczy paradoks kłamcy. Czyżby arytmetyka była sprzeczna? Rozważmy bowiem następującą własność liczb: „liczba x jest kodem zdania prawdziwego”. Czy istnieje formuła wyrażająca powyższą własność? Gdyby tak było, moglibyśmy zdefiniować również paradoksalną własność „liczba x jest kodem formuły fałszywej”. Stosując lemat przekątniowy do wyrażającej ją hipotetycznej formuły $\varphi(x)$, otrzymalibyśmy zdanie ψ mówiące o sobie, że jest fałszywe. Wiemy już jednak, że takie paradoksalne zdanie prowadzi do sprzeczności. Jeśli więc wierzymy, że arytmetyka sprzeczna nie jest, to płynącym stąd wnioskiem jest twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy:

Twierdzenie 2 (Tarski). *Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ wyrażająca prawdziwość, tj. taka, że: $\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba x jest kodem formuły prawdziwej.*

Nie znaczy to, że nie da się ściśle opisać prawdy i fałszu dla formuł określonego systemu formalnego (w naszym przykładzie – arytmetyki liczb naturalnych).

Odpowiedź do zadania 1 z artykułu „O metrykach i kulach”. Norma

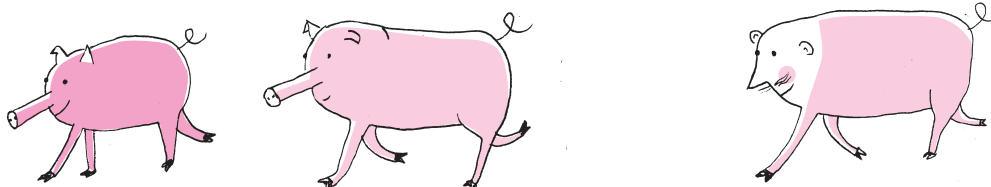
$$\|(x, y)\| = \max\{\max\{|x|, |y|\}, \frac{\sqrt{2}}{2}(|x| + |y|)\}$$

ściana wierzchołki kwadratu jednostkowego w normie $\|\cdot\|_\infty$ z przykładu 4. Inny ośmiokąt otrzymamy, biorąc normę

$$\|(x, y)\| = \max\{|x| + (\sqrt{2}-1)|y|, (\sqrt{2}-1)|x| + |y|\}.$$

Opis taki wymaga jednak wyjścia poza sam ten system i przyjęcia *zewnątrznej perspektywy*.

Niczym w dobrym kryminale, godnym Herkulesa Poirot czy Sherlocka Holmesa, ostateczny werdykt jest więc zupełnie inny, niż wydawało się na początku. To nie samoodnośność, ale lekkomyślnie nadużywane pojęcie prawdy, choć z pozoru tak niewinne, odpowiada za sprzeczności! Dodajmy na koniec, że twierdzenie Tarskiego mówi tylko o prawdziwości na gruncie sformalizowanych, matematycznych systemów – takich jak arytmetyka liczb naturalnych. Pojęcie prawdziwości w językach naturalnych – takich jak język polski – znajduje się poza jurysdykcją formalnych wnioskowań i tu, otoczona hordami paradoksów, sprzeczność może pozostać bezkarna.



Przygotował Dominik BUREK



Zadania

M 1672. Dane są funkcje kwadratowe f, g, h , które nie mają pierwiastków rzeczywistych, a ich współczynniki przy x^2 są równe. Załóżmy, że współczynniki tych funkcji przy x są parami różne. Udowodnij, że istnieje liczba rzeczywista c , dla której równania $f(x) + cg(x) = 0$ oraz $f(x) + ch(x) = 0$ mają wspólne rozwiązanie.

Rozwiązanie na str. 4

M 1673. Czy można pokolorować wszystkie liczby całkowite dodatnie, używając dwóch kolorów tak, aby suma dwóch różnych liczb tego samego koloru nie była potęgą dwójki?

Rozwiązanie na str. 1

M 1674. Danych jest 25 różnych punktów na płaszczyźnie. Niech D będzie największą z odległości między tymi punktami, a d najmniejszą z nich. Udowodnij, że $D > 2d$.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1023. W litrowej butelce ($V_0 = 10^{-3} \text{ m}^3$) pozostała bardzo niewielka ilość wody przylegającej do dna i ścianek butelki. Butelkę szczelnie zamknięto, a następnie ogrzano do temperatury 100°C . Jakie maksymalne ciśnienie wewnątrz butelki można w ten sposób osiągnąć? Jaka minimalna ilość wody musi pozostać w butelce, żeby to ciśnienie mogło być osiągnięte? Początkowa temperatura butelki z wodą wynosi $t_0 = 20^\circ\text{C}$, ciśnienie powietrza w pomieszczeniu równe jest standardowemu ciśnieniu atmosferycznemu, $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$, a stała gazowa $R \approx 8,314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$. Można założyć, że w momencie zamykania butelki, poza resztką wody, znajdowało się w niej tylko suche powietrze.

Rozwiązanie na str. 7

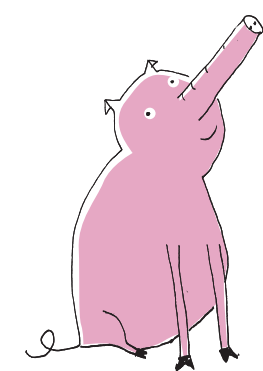
F 1024. W procesie przewodzenia ciepła strumień j przenoszonej energii (ciepła) jest proporcjonalny do szybkości zmian temperatury z odległością

$$j = -\lambda \frac{dT}{dr},$$

gdzie T oznacza temperaturę, a r współrzędną w kierunku najszybszego spadku temperatury (minus oznacza przepływ w kierunku malenia temperatury).

Stalową kulkę o promieniu $R = 2,5 \text{ cm}$ i temperaturze początkowej 20°C wrzucono do wrzątku (100°C). Oszacuj, po jakim czasie τ zanurzenia we wrzątku kulka osiągnie temperaturę 100°C ? Dane dla stali: ciepło właściwe $c \approx 0,47 \text{ J}/(\text{g}\cdot\text{K})$, współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda \approx 20 \text{ W}/(\text{K}\cdot\text{m})$, a gęstość $\rho \approx 8 \text{ g}/\text{cm}^3$.

Rozwiązanie na str. 6



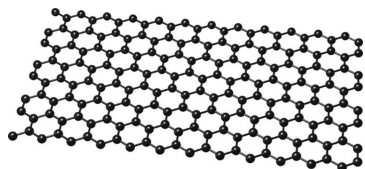
Wyjaśnienie: *Strumień energii* to ilość energii przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni.

Grafen i spółka

Anna ŁAPIŃSKA*

*Wydział Fizyki, Politechnika
Warszawska

Nowe materiały przyczyniają się do rozwoju ludzkości już od czasów prehistorycznych. Wszak nawet kolejne epoki w dziejach ludzkości nazywane były od surowca, jaki w danym czasie został rozpowszechniony, tak więc mieliśmy epokę kamienia, brązu czy żelaza. Aktualnie, pomimo iż czasy prehistorii mamy za sobą, to w dalszym ciągu nasze życie napędzają nowe materiały. I tak jak krzem zrewolucjonizował elektronikę XX wieku, tak teraz ciągle poszukujemy jego godnego następcy. Jednym z pretendentów do tego miana jest sławny już grafen.



Rys. 1. Struktura pojedynczej warstwy grafenu

Czym jednak tak naprawdę jest grafen? Grafen to nic innego jak odmiana alotropowa węgla. Niektóre pierwiastki występują w kilku formach, różniących się właściwościami – wówczas mówimy o alotropii. W przypadku węgla wyróżniamy grafit, nanorurki węglowe, fulereny, diament i wspomniani właśnie grafen. Każdy z tych materiałów zbudowany jest tylko z jednego rodzaju cząsteczek – atomów węgla. W grafenie i graficie atomy te ułożone są w sposób heksagonalny, tworząc struktury na podobieństwo plastra miodu. Grafit zawiera wiele takich nakładających się na siebie plastrów, podczas gdy grafen to tylko pojedyncza warstwa. Okazuje się, że gdy oderwiemy z grafitu taką jedną warstwę, to ma ona całkowicie odmienne właściwości niż wiele nałożonych warstw na siebie.

Andre Geim (razem z Michaeliem Berrym) otrzymał w 2000 roku Nagrodę Ig Nobla za eksperyment, w którym żywa żaba lewitowała w silnym polu magnetycznym. Andre Geim jest jak dotąd jedynym laureatem obydwu nagród: Nobla oraz Ig Nobla.



Rys. 2. Aerożel grafenowy, który przy odpowiedniej metodzie produkcji może być lżejszy od powietrza, a mimo to jest w stanie zaabsorbować wodę o masie przekraczającej 850-krotność swojej własnej. Dlatego można go wykorzystać między innymi jako materiał służący do oczyszczania środowiska, ale także do magazynowania energii.



Rozwiązanie zadania M 1672.

Zauważmy, że stopień wielomianu $g - h$ jest równy 1, gdyż współczynniki przy x^2 funkcji g i h są równe, a współczynniki przy x są różne. Zatem istnieje x_0 takie, że $g(x_0) = h(x_0) \neq 0$ (0 nie może być miejscem zerowym g i h). Biorąc teraz

$$c := \frac{-f(x_0)}{g(x_0)},$$

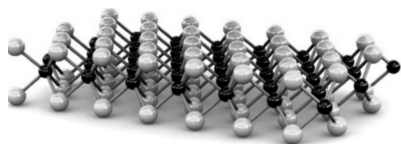
widzimy, że wielomiany $f + cg$ i $f + ch$ mają wspólny pierwiastek x_0 .

Zanim jednak przejdziemy do omówienia tych niesamowitych właściwości, dzięki którym w grafenie upatruje się nowego następcę krzemu, cofnijmy się do wydarzenia, które zapoczątkowało tę swoistą rewolucję grafenową. W 2004 roku na Uniwersytecie w Manchesterze dwaj naukowcy – Andre Geim i Konstantin Novoselov – wykonali eksperyment polegający na umieszczeniu na taśmie klejącej niewielkiej ilości grafitu i wielokrotnym sklejanu i rozklejanu jej. W wyniku tego jakże prostego doświadczenia wyizolowano pojedynczą warstwę grafitu – grafen – o grubości zaledwie jednego atomu. Obaj naukowcy zostali za to uhonorowani Nagrodą Nobla w roku 2010.

Aktualnie grafen produkuje się innymi niż noblowska metodami. Dzieje się tak z prostego powodu. Chociaż metoda taśmy klejącej daje płatki grafenowe wysokiej jakości, to jednak jej wydajność jest bardzo niska. Jedną z najpopularniejszych metod wytwarzania tego materiału jest metoda osadzania z fazy gazowej CVD (*Chemical Vapor Deposition*), w której do rozgrzanego do wysokich temperatur pieca wprowadza się odpowiednie gazy. W wyniku reakcji pomiędzy nimi atomy węgla osadzają się na umieszczonym wcześniej w piecu podłożu (najczęściej jest to folia miedziana). Autorami jednej z modyfikacji tej metody są polski naukowiec dr hab. Włodzimierz Strupiński i jego grupa. Przewagą metody CVD nad innymi jest otrzymywanie wielkopowierzchniowego grafenu.

Sam grafen, oprócz tego, że jest najcieńszy z odkrytych dotąd materiałów, jest najbardziej wytrzymały (stokrotnie bardziej niż stal o tej samej masie), najlżejszy i elastyczny. Dodatkowo ruchliwość elektronów znacząco przewyższa tę w krzemie czy arsenku galu, a pod względem przewodnictwa cieplnego około 12-krotnie przewyższa srebro. Te właściwości sprawiają, że można go zastosować w wielu gałęziach przemysłu, m.in. w elektronice, optoelektronice lub medycynie. Jedną ze stosowanych form grafenu jest aerożel przedstawiony na rysunku 2.

Grafen jednak, z uwagi na specyficzną budowę oraz brak przerwy energetycznej, przysparza wielu problemów naukowcom poszukującym dla niego komercyjnego, opłacalnego zastosowania. W wyniku między innymi tych ograniczeń do łask badaczy wróciły inne, doskonale znane już od lat 60. ubiegłego wieku materiały w postaci objętościowej (3D) z grupy, którą nazywamy dichalkogenkami metali przejściowych TMDC (*Transition Metal Dichalcogenides*). Jest to olbrzymia grupa związków, którą w najprostszy sposób można opisać za pomocą wzoru M_nX_m .



Rys. 3. Struktura MoS₂, jednego z dichalkogenów. Atom metalu przejściowego (tutaj: Mo) znajduje się pomiędzy dwoma atomami chłogenu (tutaj: S)

Widok z góry na taką warstwę przypomina wspomniany wcześniej plaster miodu. I podobnie jak w przypadku grafenu, wiązania w płaszczyźnie pojedynczej warstwy wyróżniają się wyjątkową siłą, w przeciwieństwie do słabszych wiązań pomiędzy warstwami. Słabsze wiązania są jednocześnie przyczyną, dla której możemy swobodnie odrywać kolejne warstwy.

Najbardziej znane, a co za tym idzie, również najbardziej przebadane związki tej grupy to MoS₂ oraz WS₂. Oba są półprzewodnikami i oba sprawdzają się świetnie w tradycyjnej formie w postaci smarów czy dodatków do olejów. Jednak gdy oderwiemy jedną warstwę każdego z tych związków, to okaże się, że ich przerwa energetyczna ulega transformacji ze skośnej na prostą, a to dalej pociąga za sobą zupełną zmianę właściwości w porównaniu do trójwymiarowego odpowiednika.

Z półprzewodników MoS₂ i WS₂ buduje się tranzystory, fotodetektory, biosensory, katalizatory w reakcji hydrokatalizy wody i inne.

MXenes to stosunkowo niedawno powołana do życia grupa materiałów. Pierwsze doniesienia na temat tych związków datowane są raptem na 10 lat wstecz, czyli na 2011 rok. Całą grupę, podobnie jak w przypadku TMDC, opisać można za pomocą wzoru ogólnego: M_{n+1}X_n. Literą M oznaczamy metal przejściowy z grupy d układu okresowego pierwiastków, np. skand (Sc), tytan (Ti), wanad (V), cyrkon (Cr), niob (Nb), molibden (Mo); X to z kolei atom węgla (C) lub azotu (N). Te syntetyczne związki wytwarza się z fazy MAX, którą dokładnie oznacza się jako M_{n+1}AX_n. Litera, która pojawiła się pomiędzy atomami metali przejściowymi a atomami węgla lub azotu, odnosi się do pierwiastków grupy IIIa lub IVa, np. glinu (Al). Aktualnie znanych jest około 70 różnych faz MAX, np. Ti₂AlC, Ti₃AlC₂. Podobnie jak w przypadku innych materiałów warstwowych, również dla tych obserwuje się zróżnicowanie wiązań pomiędzy atomami. I tak wiązania pomiędzy atomami M–X są zdecydowanie silniejsze niż te M–A, co sprawia, że wiązania słabsze mogą być rozbite, dając nowy związek. Usunięcie bowiem pierwiastka oznaczonego jako A jest istotnym krokiem na drodze do wytworzenia MXenes. O ile jednak w przypadku grafenu czy TMDC do rozdzielenia sąsiadujących warstw wystarczy zwykła taśma klejąca, tak w przypadku MXenes konieczne jest zaprzęgnięcie złożonych procesów chemicznych. Właściwości MXenes można modyfikować w zależności od stechiometrii lub zmian powierzchni czy procedury wytwarzania. Mimo że MXenes najczęściej są metalami, to w wyniku odpowiednich zabiegów procesowych niektóre z nich mogą być półprzewodnikami.

Literą M w tym wypadku oznaczamy atom metalu przejściowego, czyli np. tytanu (Ti), molibdenu (Mo), wolframu (W), hafnu (Hf), niobu (Nb). Natomiast X oznacza się atom chłogenu, czyli siarkę (S), selen (Se), tellur (Te). W tej grupie znajdziemy m.in. zarówno półprzewodniki (MoS₂, WS₂), półmetale (WTe₂, TiSe₂), jak i metale (NbS₂, VSe₂). Różnorodność tej grupy jest zatem ogromna. Cechą wspólną wszystkich związków TMDC jest ich budowa. Pojedynczą warstwę w tym wypadku tworzą dwa atomy chłogenu oraz umieszczony pomiędzy nimi jeden atom metalu przejściowego, jak na rysunku 3.

Przykładowo dołączenie grup fluorowych, hydroksylowych lub tlenowych do związku Ti₂CO₂ daje mu wytrzymałość na rozciąganie przewyższającą tę dla grafenu, a także zwiększenie elastyczności. Inną ciekawą cechą tej grupy związków jest osiąganie niespotykanej dotychczas efektywności ekranowania promieniowania elektromagnetycznego w stosunku do innych materiałów 2D. Raportuje się, że niektóre MXenes ekranują promieniowanie EM na poziomie 92 dB, a to oznacza, że co najmniej 99,9999994% padającego promieniowania jest blokowanych przez materiał. Jest to bardzo obiecująca wartość, szczególnie biorąc pod uwagę ewentualne zastosowania w nanokompozytach polimerowych. Na rysunku 4 przedstawiono warstwę wykonaną z MXenes, przeznaczoną do zastosowania w ekranowaniu fal EM.



Rys. 4. Warstwa z MXenes do ekranowania fal elektromagnetycznych

Dodatkowo w nanokompozytach mogą wpływać na poprawę właściwości mechanicznych. Oprócz nanokompozytów naukowcy próbują wykorzystać MXenes m.in. jako materiały do magazynowania energii w ogniach paliwowych czy takich urządzeniach, jak baterie jonowo-litowe lub superkondensatory.

Opisane tutaj grupy materiałów o strukturze dwuwymiarowej nie są jedynymi, natura zna wiele innych przykładów tego typu materiałów. Warto tu wspomnieć chociażby o jednej z odmian fosforu – czarnym fosforze i jego monowarstwie – fosforenie, czy heksagonalnym azotku boru. Takie przykłady można by mnożyć i mnożyć. Wszystkie te materiały w wyniku zmniejszenia wymiarowości uzyskują nowe, dotychczas niespotykane właściwości. Przy czym każdy z nich jest na swój sposób specyficzny i wymaga specjalnego postępowania. Dużym problemem wciąż pozostaje opracowanie taniej oraz bezpiecznej produkcji tych materiałów na skalę przemysłową. Biorąc jednak pod uwagę intensyfikację prac, rychło możemy się spodziewać rozwiązania tej kwestii, a kto wie, może wówczas nowe materiały o strukturze 2D, na czele z grafenem, na stałe wpiszą się w nasze codzienne życie.

Uogólnienie algorytmu Euklidesa

* Student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

Adam BARAŃSKI*

Algorytm Euklidesa najczęściej kojarzy nam się z wyznaczaniem największego wspólnego dzielnika dwóch liczb[†]. Istotnie, jest to elementarny i efektywny sposób na otrzymanie NWD dwóch liczb. Jednak czy korzystamy przy tym ze wszystkich informacji, jakie daje nam przeprowadzenie tego algorytmu? Okazuje się, że wiele jego bardzo ciekawych zastosowań... nawet nie korzysta z końcowego wyniku, jakim jest największy wspólny dzielnik. Na samym jednak początku przypomnijmy, na czym polega ów algorytm.

Weźmy dwie dowolne liczby naturalne $a > b$. Przez NWD(a, b) będziemy oznaczać największy wspólny dzielnik liczb a, b . Dla wygody zapisu oznaczmy $r_0 := a, r_1 := b$. Wówczas po podzieleniu z resztą otrzymujemy

$r_0 = q_0 r_1 + r_2$ dla pewnych naturalnych $q_0, r_2, 0 \leq r_2 < r_1$.
Jeśli $r_2 = 0$, to kończymy algorytm, ponieważ NWD(r_0, r_1) =

r_1 . W przeciwnym razie, gdy $r_2 \neq 0$, możemy powtarzać operację dzielenia z resztą aż do skutku. Jeśli przez r_{k+1} oznaczymy resztę z dzielenia r_{k-1} przez r_k , to otrzymamy ciąg nierówności

$$r_0 > r_1 > r_2 > \dots \geq 0.$$

Jednak malejący ciąg nieujemnych liczb całkowitych nie może być nieskończony, więc dla pewnego n mamy $r_n > r_{n+1} = 0$. Zatem $r_{n-1} = q_{n-1} r_n$. Po obserwacji, że

$$\begin{aligned} \text{NWD}(r_0, r_1) &= \text{NWD}(r_1, r_2) = \text{NWD}(r_2, r_3) = \\ &= \dots = \text{NWD}(r_{n-1}, r_n) = r_n, \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} r_0 &= q_0 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_1 r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots & \vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-2} r_{n-1} + r_n & r_n = \text{NWD}(a, b). \end{aligned}$$

[†] O algorytmie Euklidesa można przeczytać w tym numerze *Delty* w Kąciku Początkującego Olimpijczyka.



Rozwiązanie zadania F 1024.
Zmiana temperatury stalowej kulki wyniesie $\Delta T = 80^\circ\text{C}$. Dla osiągnięcia takiej zmiany należy dostarczyć energię w postaci ciepła równą

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3} c \rho \Delta T.$$

Ciepło to będzie dostarczane przez powierzchnię kulki z szybkością

$$\frac{dQ}{dt} = 4\pi R^2 \cdot j.$$

W miarę ogrzewania wnętrza kulki strumień ciepła j wnikającego przez powierzchnię będzie się zmieniał. Dla naszego oszacowania przyjmijmy, że jego średnia (względem czasu) wartość to w (grubym) przybliżeniu

$$j \approx \lambda \frac{\Delta T}{R}.$$

Prowadzi to do oszacowania:

$$\tau \approx \frac{c \rho R^2}{3 \lambda}.$$

Dla danych zadania otrzymujemy $\tau \approx 40$ s. Ścisłe biorąc, ciepło właściwe stali i jej gęstość zależą od temperatury. Pominięcie tych zmian jest jednak nieistotne w porównaniu z niedokładnością naszego oszacowania średniego strumienia ciepła. Otrzymany wynik należy traktować jak oszacowanie rzędu wielkości czasu τ .

W taki *poziomy* sposób będziemy odtąd zapisywać ułamek łańcuchowy

$$x_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_{n-1}}}}}$$

Przejdźmy więc do ciekawszej części, a mianowicie jednego z wielu zastosowań algorytmu Euklidesa. Zauważmy, że powyższe dzielenia z resztą można przepisać jako:

$$(1) \quad \frac{r_0}{r_1} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \quad \frac{r_1}{r_2} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \quad \dots, \quad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}, \quad \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n-1}.$$

W takim razie, podstawiając kolejno powyższe równości, otrzymujemy

$$\frac{r_0}{r_1} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}} = \dots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_{n-1}}}}}$$

Ułamki tej postaci nazywamy **ułamekami łańcuchowymi**.

Jak więc widzimy, algorytm Euklidesa pozwala nam na rozwijanie liczb wymiernych w ułamki łańcuchowe. Ponadto, skoro kończy się on po skończeniu wielu krokach, to możemy dojść do następującego wniosku.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej liczby wymiernej algorytm Euklidesa daje skończone rozwinięcie w ułamek łańcuchowy.*

Kanoniczna wersja algorytmu Euklidesa pozwala nam rozwijać tylko liczby wymierne. Co jednak, gdybyśmy znaleźli analogiczną metodę dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych? Jak się okazuje, nie jest to wcale aż tak trudne do osiągnięcia.

Oznaczmy ilorazy $x_k := \frac{r_k}{r_{k+1}}$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$; z równości (1) możemy odczytać

$$x_0 = q_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \dots, \quad x_{n-2} = q_{n-2} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad x_{n-1} = q_{n-1},$$

przy czym dla każdego k zachodzi $\frac{1}{x_k} < 1$, więc q_k jest częścią całkowitą x_k .

Niech $[x]$ będzie częścią całkowitą (funkcją *entier*) liczby $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $x_k = q_k + \frac{1}{x_{k+1}} = [x_k] + \frac{1}{x_{k+1}}$, lub równoważnie

$$(2) \quad q_k = [x_k] \quad \text{oraz} \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - [x_k]} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Wykazaliśmy więc, że x_k spełniają rekurencję (2) oraz

$$x_0 = q_0 + \frac{1}{\left[q_1 + \frac{1}{\left[q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_{n-1}}} \right]} \right]}.$$

Łatwo możemy sprawdzić, że przeprowadzając operacje (2), jesteśmy w stanie rozwijać (możliwe, że „nieskończenie długo”) każdą liczbę rzeczywistą w ułamek łańcuchowy. Korzystając z tego ogólnego algorytmu Euklidesa, możemy udowodnić następujący fakt.

Wniosek 1. *Liczba $\sqrt{2}$ nie należy do zbioru liczb wymiernych.*

Dowód. Przyjmijmy $x_0 := \sqrt{2}$. Zauważmy, że $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, więc $x_1 = \frac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$. Jednakże jeśli $x_n = 1 + \sqrt{2}$, to $\lfloor x_n \rfloor = 2$, a w konsekwencji również

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Zatem skoro $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, to $x_n = 1 + \sqrt{2}$ dla wszystkich naturalnych n . W takim razie $q_0 = 1$, $q_n = 2$ dla $n > 0$, a liczba

$$\sqrt{2} = 1 + \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\dots} \right|$$

ma nieskończone rozwinięcie w ułamek łańcuchowy, więc na mocy twierdzenia 1 nie może być wymierna. \square

Kluczową własnością algorytmu Euklidesa, z której korzystamy, jest to, że kończy się on po skończeniu wielu krokach. Opiszemy teraz uogólnienie zachowujące tę cechę i dające nam możliwość szerszego zastosowania. Zauważmy, że operacja, którą wykonywaliśmy, parze (a, b) przypisywała parę (b, r) , gdzie r było resztą z dzielenia a przez b . Algorytm kończył się po skończeniu wielu krokach dlatego, że reszta z dzielenia była coraz mniejsza oraz ograniczona z dołu przez 0.

Podobnie możemy zdefiniować uogólnioną wersję. Dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy przekształcenie φ_m wzorem

$$\varphi_m(a, b) = (b \cdot m, r) \text{ dla } a \geq b,$$

gdzie r jest resztą z dzielenia a przez b . Zauważmy, że $b \cdot m \geq b > r$, a więc przy każdym przekształceniu φ_m druga współrzędna zmniejsza się i jest ograniczona z dołu przez 0. Zatem nie ma znaczenia, jakie bralibyśmy φ_{m_i} ($m_i \in \mathbb{N}$), zawsze algorytm, który w i -tym kroku przekształca parę (a, b) na $\varphi_{m_i}(a, b)$, kończy się po skończeniu wielu krokach.

Zobaczmy na przykładzie, jak działa nasza uogólniona wersja algorytmu Euklidesa. Rozważmy ciąg $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że $m_k = k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, i zastosujmy ciąg przekształceń φ_{m_k} na liczbach 101 i 82. A więc mamy

$$(101, 82) \xrightarrow{\varphi_1} (82 \cdot 1, 19) \xrightarrow{\varphi_2} (19 \cdot 2, 6) \xrightarrow{\varphi_3} (6 \cdot 3, 2),$$

a skoro 18 jest podzielne przez 2, to kończymy algorytm. Od razu narzuca się następująca obserwacja – wynikiem naszego algorytmu nie musi być największy wspólny dzielnik liczb a i b (bowiem $\text{NWD}(101, 82) = 1 \neq 2 = \text{NWD}(18, 2)$). Możemy jednak w sposób analogiczny do (1) rozwinąć liczbę $\frac{101}{82}$ w uogólniony ułamek łańcuchowy, korzystając z przeprowadzonego algorytmu. Mamy:

$$\frac{101}{82} = 1 + \frac{1}{\frac{82-1}{19}}, \quad \frac{82 \cdot 1}{19} = 4 + \frac{2}{\frac{19-2}{6}}, \quad \frac{19 \cdot 2}{6} = 6 + \frac{3}{\frac{6-3}{2}},$$

zatem

$$\frac{101}{82} = 1 + \frac{1}{\frac{82-1}{19}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{\frac{19-2}{6}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{6 + \frac{3}{\frac{6-3}{2}}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{6 + \frac{3}{9}}}$$

Uogólnionymi ułamekami łańcuchowymi (*generalized continued fraction*) nazywamy wszystkie ułamki tej postaci, lub bardziej precyzyjnie, postaci:

$$(3) \quad a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{\dots} + \frac{b_n}{a_n},$$

gdzie a_0 jest dowolną liczbą całkowitą, zaś $a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ są naturalne. Ułamkiem łańcuchowym (po prostu) są wtedy ułamki postaci (3) dla $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Powyżej udało nam się więc rozwinąć ułamek $\frac{101}{82}$ w uogólniony ułamek łańcuchowy (3) dla $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$.

Zauważmy, że dla dowolnego ciągu liczb naturalnych $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ możemy wyprowadzić podobne wzory, a mianowicie

$$(4) \quad q_k = \lfloor x_k \rfloor \text{ oraz } x_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{x_k - \lfloor x_k \rfloor} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n-2,$$

i wówczas

$$x_0 = q_0 + \frac{m_1}{q_1} + \frac{m_2}{q_2} + \frac{m_3}{\dots} + \frac{m_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Ponieważ uogólniona wersja algorytmu Euklidesa również kończy się po skończeniu wielu krokach, więc możemy sformułować odpowiednik twierdzenia 1.

Przez ten nieskończony ułamek sygnalizujemy tu jedynie, że nasz algorytm się nie zatrzymuje. Przy odrobinie wysiłku można przypisać nieskończonemu ułamkom łańcuchowym wartości liczbowe, ale o tym później.



Rozwiązanie zadania F 1023.

Po ogrzaniu do 100°C ciśnienie zawartego w butelce powietrza wzrośnie do $p = p_0 T / T_0$, gdzie $T = (273,15 + 100)$ K jest temperaturą końcową w skali Kelvina, a $T_0 = (273,15 + 20)$ K temperaturą początkową powietrza. Poza powietrzem w butelce będzie też para wodna. Maksymalne ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze $t_0 = 100^\circ\text{C} = 373,15$ K jest równe standardowemu ciśnieniu atmosferycznemu $p_0 \approx 10^5$ Pa. Ciśnienie w butelce będzie równe sumie ciśnień powietrza i nasyconej pary wodnej. Ostatecznie:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $p \approx 2,34 \cdot 10^5$ Pa. Liczba moli nasyconej pary wodnej w objętości $V_0 = 10^{-3} \text{ m}^3$ i temperaturze $T = 373,15$ K wynosi:

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT} \approx 0,041,$$

co odpowiada około 0,74 g, czyli około $0,74 \text{ cm}^3$ wody – jest to kropla o średnicy około 11 mm (masa 1 mola wody to 18 g, a jej gęstość w temperaturze 20°C to ok. 1 g/cm^3). Co najmniej tyle wody musi znajdować się w butelce przed rozpoczęciem ogrzewania, żeby osiągnąć obliczone wyżej ciśnienie.

W temperaturze 20°C ciśnienie pary nasyconej wynosi około 2,34 kPa. Przyjęcie, że przed ogrzewaniem poza powietrzem w butelce była także para nasycona, wprowadziłoby nieznaczną poprawkę do podanego wyniku (mniej niż 0,001 mola pary).



Rozwiązanie zadania M 1674.

Rozpatrzmy dowolny punkt X z danego zbioru i weźmy okrąg Ω o środku w punkcie X i promieniu $D + \frac{d}{2}$. Z definicji D okrąg Ω zawiera wszystkie 25 okręgów o środkach w wyjściowych punktach i promieniu $\frac{d}{2}$. Wobec tego porównując pola, dostajemy

$$\pi \left(D + \frac{d}{2} \right)^2 > 25 \cdot \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2,$$

czyli równoważnie $D > 2d$.

Twierdzenie 2. Dla każdego ciągu $(m_k)_{k \in \mathbb{N}} = (2, 2, \dots)$ jeśli liczba x_0 jest wymierna, to po zastosowaniu algorytmu opisanego wzorem (4) uzyskane rozwinięcie w uogólniony ułamek łańcuchowy dla $b_i = m_{i+1}$ jest skończone.

Warto tutaj dodać kilka słów komentarza. Rozwinięcie uzyskane przez zastosowanie algorytmu Euklidesa (bądź jego uogólnionej wersji) jest jednoznacznie wyznaczone. Nie oznacza to jednak, że rozwinięcie liczby w uogólniony ułamek łańcuchowy jest jednoznaczne – nawet po ustaleniu ciągu $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ możliwe jest uzyskanie różnych rozwinięć danej liczby (jak na marginesie obok). Twierdzenie to daje nam jednak pewność, że rozwijając liczbę wymierną w szczególny sposób (dany wzorem (4)), otrzymamy rozwinięcie skończone. Zaobserwujmy jego zastosowanie na przykładzie dowodu następującego faktu.

Wniosek 2. Liczba e jest niewymierna.

Dowód. Dowód oprzemy na rozwinięciu e w nieskończony uogólniony ułamek łańcuchowy:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n, \quad \text{gdzie } R_n := 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{\dots} + \frac{n-1}{n}.$$

Znając już rozwinięcie liczby e , łatwo uzasadnić jej niewymierność. Przyjmijmy ciąg $(m_k) = (1, 1, 2, 3, \dots)$ i zastosujmy uogólniony algorytm Euklidesa (4) do $x_0 = e$.

Dla wyznaczenia x_1 wystarczy zauważyć, że zaznaczony na marginesie kolorem

ułamek $e' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ jest większy od 1. W konsekwencji $[e] = 2$ i wartość

$x_1 = \frac{1}{e-2}$ jest równa właśnie e' . I tak dalej, łatwo przekonać się, że uogólniony algorytm Euklidesa w kolejnych krokach po prostu *odcina* kolejne początkowe fragmenty ułamka. Skoro ułamek ten jest nieskończony, algorytm nigdy nie kończy działania, co na mocy twierdzenia 2 oznacza niewymierność e .

Pozostaje uzasadnić zbieżność $R_n \rightarrow e$. W tym celu będziemy korzystać z następującej definicji liczby e :

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Da się wykazać, że $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$, gdzie P_n, Q_n zdefiniowane są rekurencyjnie, a mianowicie:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2, & P_1 &= 3, & P_{n+1} &= P_n(n+1) + P_{n-1}n & \text{dla } n \geq 1 \\ Q_0 &= 1, & Q_1 &= 1, & Q_{n+1} &= Q_n(n+1) + Q_{n-1}n & \text{dla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $P_0 = 2 = \frac{2!}{1}, P_1 = 3 = \frac{3!}{2}, P_2 = 8 = \frac{4!}{3}$ itd. Za pomocą indukcji możemy udowodnić, że $P_n = \frac{(n+2)!}{n+1}$. Gdy znamy już wartość P_n , narzuca się podstawienie

$$\tilde{Q}_n = \frac{Q_n}{P_n} = Q_n \frac{n+1}{(n+2)!}.$$

Wówczas $\tilde{Q}_0 = \frac{1}{2}, \tilde{Q}_1 = \frac{1}{3}$ oraz z rekurencji mamy

$$\tilde{Q}_{n+1} \frac{(n+3)!}{n+2} = \tilde{Q}_n(n+2)! + \tilde{Q}_{n-1}(n+1)!$$

Dzieląc stronami przez $\frac{(n+3)!}{n+2}$, dostajemy $\tilde{Q}_{n+1} = \tilde{Q}_n \frac{n+2}{n+3} + \tilde{Q}_{n-1} \frac{1}{n+3}$. Jednakże wówczas $\tilde{Q}_{n+1} - \tilde{Q}_n = -\frac{1}{n+3}(\tilde{Q}_n - \tilde{Q}_{n-1})$, co przez indukcję pozwala wyznaczyć $\tilde{Q}_{n+1} - \tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+3}}{(n+3)!}$ i ostatecznie $\tilde{Q}_n = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!}$. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{Q}_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!}} = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Kończy to dowód zbieżności $R_n \rightarrow e$, a zatem i dowód niewymierności e . □

W powyższym dowodzie kluczowe było przedstawienie liczby e w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego. Niestety, nie każde rozwinięcie ma taką własność, że przy każdym kroku algorytmu *schodzimy* o jedno piętro w dół. Taka sytuacja nie ma na przykład miejsca, gdy przeprowadzamy algorytm na przedstawionym obok rozwinięciu liczby π . Od razu więc narzuca się pytanie, czy możemy w jakiś sposób sklasyfikować te rozwinięcia, na których przeprowadzenie algorytmu *odcina* kolejne piętra? Czy jest w ogóle możliwe, aby przeprowadzenie algorytmu niekoniecznie *schodziło* o jedno, ale na przykład o kilka pięter w dół? I najważniejsze, jaki ma to wszystko związek z tytułowym algorytmem Euklidesa...?

Dla ciągu $(m_k)_{k \in \mathbb{N}} = (2, 2, \dots)$ wszystkie poniższe rozwinięcia dają tę samą liczbę:

$$\frac{2}{2}, \frac{2}{1 + \frac{2}{2}}, \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{2}}}, \dots$$

Można się umówić, że granicę ciągu R_n zapiszemy jako

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots}}}}$$

Dla ułamka jak w (3) rekurencję $P_{n+1} = a_{n+1}P_n + b_{n+1}P_{n-1}$ (i podobną dla Q_{n+1}) można uzasadnić przez obserwację, że zamiana a_n na $a_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ daje ułamek o jedno piętro dłuższy.

Liczbę π możemy zapisać jako nieskończony ułamek łańcuchowy w następujący sposób:

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

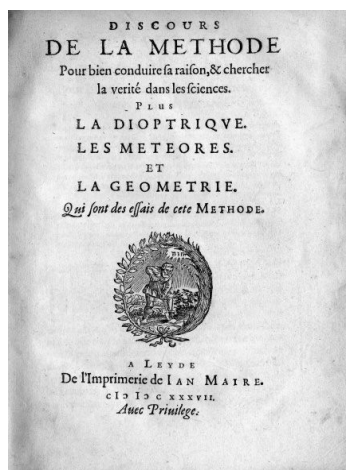
Równania różniczkowe i geometria (I)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

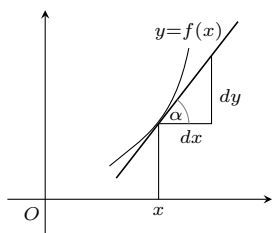
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Réne Descartes (1596–1650)



Strona tytułowa *Rozprawy o metodzie dobrego powodowania swoim rozumem i szukania prawdy w naukach* Kartezjusza; tłumaczenie tytułu: Tadeusz Boy-Żeleński [1918]



Interpretacja dx, dy : para (dx, dy) jest wektorem stycznym do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$.

Pochodna jako tangens kąta α :
 $dy = f'(x)dx \simeq (y' - y) = f'(x)(x' - x)$ – równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$.

Sformułowana w XVII wieku, za sprawą Kartezjusza i Fermata, **geometria analityczna ustanowiła związek geometrii z analizą**. Dla przykładu okrąg zdefiniowany jako zbiór punktów na płaszczyźnie jednakowo odległych od danego punktu na tej płaszczyźnie otrzymał teraz – w dodatku do geometrycznej reprezentacji i definicji słownej – reprezentację w postaci równania algebraicznego $x^2 + y^2 = r^2$, gdzie para (x, y) to współrzędne kartezjańskie punktu na okręgu o środku w $(0, 0)$, a r to jego promień. Wydana w 1637 roku *Rozprawa o Metodzie* Kartezjusza była prawdziwym przełomem nie tylko w filozofii, ale także w matematyce. Od tej chwili badano krzywe również metodami analitycznymi.

Następny przełom w matematyce w XVII wieku nastąpił, głównie za sprawą Leibniza i Newtona, wraz z wprowadzeniem **rachunku różniczkowego i całkowego**. Pozwala on powiązać nie tylko daną krzywą, ale całe rodziny krzywych, z jednym równaniem, tym razem nie algebraicznym, lecz różniczkowym.

Zacznijmy od najprostszego przykładu, gdzie rodzina krzywych to rodzina prostych, które w prostokątnym układzie kartezjańskim są równoległe do osi OX . W opisie Kartezjusza możemy dowolną prostą tej rodziny opisać równaniem

$$(1) \quad y(x) = c,$$

gdzie c jest liczbą rzeczywistą. Chcąc opisać całą rodzinę za pomocą jednego równania, musimy wyeliminować parametr c , mówiący o miejscu przecięcia tej prostej z osią OY . Można to zrobić, biorąc pochodną względem zmiennej x obu stron równania. Otrzymamy wtedy równanie

$$(2) \quad y'(x) = 0 \quad \text{lub w innym zapisie} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Pochodzący od Leibniza symboliczny zapis $\frac{dy}{dx} = 0$ jest niezwykle wygodny do badania równań. Nie ma w nim niczego tajemniczego, jeśli się wie, jak go rozumieć w danym kontekście. Symbole dy i dx nazywamy różniczkami, stąd równanie (2) jest **równaniem różniczkowym**, a dokładniej **równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu**. Przejście od równania (2) do równania (1) nazywamy **całkowaniem równania różniczkowego**. Szukane **rozwiązanie ogólne** to cała rodzina prostych, od których wyszliśmy w tym przykładzie.

Rozważmy przykład nieco trudniejszy. Naszą rodziną krzywych jest teraz rodzina okręgów o środku w punkcie $(0, 0)$ na płaszczyźnie i dowolnych promieniach $c > 0$. Wiemy już, że każdą krzywą tej rodziny możemy opisać równaniem

$$(3) \quad x^2 + y^2 = c^2.$$

Spróbujmy ułożyć równanie różniczkowe tej rodziny okręgów. Wyłączając punkty przecięcia okręgów z osią OX , półokręgi powyżej i poniżej tej osi wyrażone są przez pewne funkcje $y = y(x)$, które w tym przykładzie łatwo wyliczyć z równania (3). My jednak postąpimy nieco inaczej. Zapiszmy równanie (3) w postaci

$$x^2 + y(x)^2 = c^2$$

i weźmy pochodną obu stron względem zmiennej x . Otrzymamy

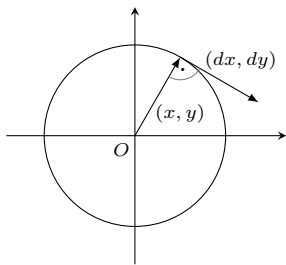
$$2x + 2y(x)y'(x) = 0,$$

zatem ostatecznie

$$(4) \quad y'(x) = -\frac{x}{y} \quad \text{lub w innym zapisie} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Równanie (4) opisuje rodzinę naszych okręgów, a gdyby się ktoś upierał, że przecież przy jego wyprowadzaniu wyłączyliśmy punkty przecięcia okręgów z osią OX , to tu przychodzi z pomocą genialna symbolika Leibniza. W otoczeniu wyłączonych punktów zapisujemy równanie jako

$$(5) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x},$$



Iloczyn skalarny wektora (x, y) z wektorem (dx, dy) stycznym do szukanej krzywej jest równy zeru

$$(x, y)(dx, dy) = xdx + ydy = 0.$$

Szukaną krzywą w przypadku (4) i (5) jest okrąg.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Nie odważam się na dodatkową notatkę o Leibnizu na marginesie, zdając sobie sprawę, że z konieczności każda jej realizacja byłaby równie informatywna jak przybliżenie Wam słonia bezsprzecznie prawdziwym stwierdzeniem, że jest to duże i sympatyczne zwierzę. Odsyłam do literatury na końcu artykułu.

gdzie teraz zmienną zależną jest funkcja $x(y)$. Dla upartych, którzy nie zgadzają się, że równania (4) i (5) to przecież nie jedno równanie, użyjemy trzeciego zapisu:

$$xdx + ydy = 0.$$

Czy patrząc na to równanie, widzicie już jego rozwiązanie ogólne? Co ono oznacza geometrycznie? Prawda, że widać? A teraz scałkujemy je analitycznie. Przyłożmy do równania znak całki, będący nieco zniekształconą literą „S”, oznaczającą sumowanie – oznaczenie wprowadzone przez Leibniza w 1675 roku. Znając własności tej operacji, możemy napisać

$$\int xdx + \int ydy = 0,$$

co daje bezpośrednio

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C = 0.$$

Tutaj C jest dowolną stałą całkowania, a równanie ma rozwiązania dla $C < 0$, stąd możemy podstawić $C = -\frac{1}{2}c^2$ i dostajemy równanie (3).

Ten algorytm działa tylko w dość prostych przypadkach. Rozważmy teraz przypadek jeszcze trudniejszy. Spróbujmy scałkować równanie

$$(6) \quad (xy^2 + x^3 + y - x)dy - (y^3 + x^2y - y - x)dx = 0.$$

Widać, że poprzedniego algorytmu nie da się zastosować bezpośrednio. Co zatem możemy zrobić?

Gdy piszący te słowa poznawał równania różniczkowe po raz pierwszy, z tak zwanych nowoczesnych lub współczesnych podręczników, był mocno rozczarowany. Dawały one wrażenie, że ich struktura podobna jest do struktury książki kucharskiej z przepisami. „Gdy masz to, zrób tak” – zbiór tricków, za pomocą których można było scałkować równania różnych typów. Tricków, ale żadnego ogólnego algorytmu.

Na przykład w przypadku równania (6) należało „zauważyć”, że zmieniając zmienne x i y na nowe, r i θ ,

$$(7) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(para (r, θ) to tzw. *współrzędne biegunowe*), możemy wyrazić równanie (6) w nowych zmiennych jako

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2),$$

które całkuje się już bezpośrednio. Znając rozwiązanie $r = r(\theta)$, można, korzystając z równań (7), wyrazić je w zmiennych (x, y) , otrzymując tym samym rozwiązanie równania (6). Wszystkie własności rozwiązania można odczytać z jego wyrażenia w zmiennych biegunowych. W formie uwikłanej postaci $F(r, \theta) = c$, którą nazywamy *całką pierwszą równania różniczkowego*, wyraża się ono wzorem

$$\log \left| \frac{1}{r^2} - 1 \right| + 2\theta = c.$$

Dodatkowymi rozwiązaniami są $r = 0$ i $r = 1$.

Kilka słów o powyższym „zauważaniu”. . . Z równania (6) można odgadnąć, że grupa obrotów płaszczyzny wokół początku układu współrzędnych przeprowadza rozwiązania tego równania na rozwiązania tego samego równania. Pomoże nam w tym geometria.

Nasze równanie zapisujemy w postaci

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}} = \frac{1}{r^2 - 1},$$

gdzie $r^2 = x^2 + y^2$. Lewa strona powyższego równania jest tangensem kąta α pomiędzy styczną do krzywej całkowej w punkcie (x, y) a promieniem wodzącym tego punktu wyprowadzonym z początku układu współrzędnych. Oznacza to, że krzywe całkowe tworzą z okręgami $r^2 = x^2 + y^2$ stały kąt, a każdy

obrót wokół początku układu współrzędnych przeprowadza krzywe całkowe na krzywe całkowe, stąd też grupa obrotów zachowuje równanie różniczkowe (6). Z równania

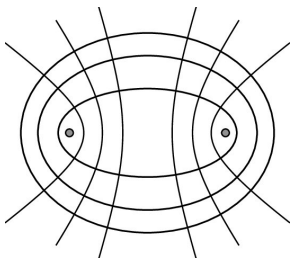
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{r^2 - 1}$$

wynika też, że okrąg o promieniu 1 jest krzywą całkową, którą grupa przekształca na ten sam okrąg. Drugim rozwiązaniem o tej własności jest oczywiście początek układu współrzędnych. Widzimy, że działanie grupy obrotów zachowuje wielkość $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, zmienia się tylko kąt obrotu θ . W płaszczyźnie (r, θ) odpowiada to wędrówce po prostych $r = \text{const}$, a stąd już wnioskujemy, że podstawienie (7) jest właściwe. Więcej o tym w następnym artykule.

No dobrze, ale „zauważenie” to przecież nie algorytm. Okazuje się, że takie algorytmy istnieją, że były już znane w XIX wieku i widniały w podręcznikach z równań różniczkowych, ale. . . w pewnym momencie jakby o nich zapomniano,



Sophus Lie (1842–1899)



Rodzina współogniskowych elips i hiperbol



Charles Babbage (1791–1871)

Literatura:

M. R. Antognazza, *Leibniz. Biografia intelektualna*, Kraków: Copernicus Center Press, 2018.
 Ch. Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, London, Longman 1864.
 J. Mazur, *Enlightening Symbols. A Short Story of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*, Princeton University Press, 2014.

wyrzucając jednocześnie z podręczników. Przypomniano sobie o nich w późnych latach 60. XX wieku, w związku z badaniami ważnych zagadnień nieliniowych, jednocześnie w dobie komputerów, których działanie nie opiera się na „zauważaniu”, ale na algorytmach.

O tym, jak rozwiązać równanie (6), i nie tylko to, korzystając z ogólnej metody, opowiemy w następnym artykule. Jego bohaterem będzie Sophus Lie – bardzo ciekawy gigant matematyczny, którego jedną z naczelnych idei było przeniesienie teorii całkowalności równań algebraicznych, teorii Galois, na równania różniczkowe. Dotyka to najważniejszej ogólnej idei wprowadzonej do matematyki i fizyki w XIX wieku, idei symetrii danego obiektu, w naturalny sposób powiązanej z pojęciami niezmienniczości i grupy – pojęcia te widzimy już u Galois. Idee te pozwoliły **powiązać głęboko równania różniczkowe z geometrią i algebrą**. Zauważmy, że mamy tu nową jakość. Dołączyła algebra. Jej język połączył teorię całkowalności równań algebraicznych i różniczkowych, wskazując na ciekawe analogie między głównymi twierdzeniami obu teorii.

Wróćmy do naszych elementarnych rozważań. Powyższe powiązania równań różniczkowych z rodzinami krzywych mają proste uogólnienia. Na przykład gdy chcemy znaleźć równanie różniczkowe związane z rodziną parabol

$$(8) \quad y = x^2 + ax + b.$$

Zauważmy, że jest to rodzina dwuparametrowa. Aby pozbyć się parametrów, różniczkujemy dwukrotnie to równanie, dostając $y''(x) = 2$. Całkując to równanie bezpośrednio dwa razy, dostajemy rozwiązanie ogólne w postaci (8). Widzimy, że stopień równania jest związany z liczbą parametrów danej rodziny krzywych.

Rozważmy trudniejszy przykład, rodzinę współogniskowych stożkowych daną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1,$$

gdzie a i b , $a > b$, są ustalonymi stałymi, λ jest parametrem ($\lambda > -b^2$ to elipsy, $b^2 < -\lambda < a^2$ to hiperbole, wspólne ogniska $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$). Równaniem różniczkowym opisującym tę rodzinę jest równanie

$$xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2 - a^2 + b^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Proponujemy Czytelnikom udowodnienie powyższego stwierdzenia oraz faktu, że elipsy i hiperbole przecinają się pod kątem prostym.

Poniżej przedstawię kilka uwag, które nasunęły mi się podczas pisania tego artykułu.

Zachwyciałem się notacją Leibniza. Jak ważne jest wybranie dobrej notacji, można zobaczyć, śledząc rozwój rachunku różniczkowego i całkowego. Newton oznaczał pochodną funkcji y przez \dot{y} , a Leibniz przez $\frac{dy}{dx}$. Ponieważ na Wyspach Newton był bogiem, którego należało naśladować, jego następcy używający tej notacji spowodowali opóźnienie rozwoju rachunku różniczkowego na Wyspach o całe lata w stosunku do Kontynentu. Z tą sytuacją walczył Charles Babbage – jeden z ojców komputerów. W 1819 roku, jeszcze jako student, wraz z kilkoma kolegami założył on na uniwersytecie w Cambridge *Analytical Society*, towarzystwo promujące rachunek różniczkowy. Jednym z głównych celów tego towarzystwa była walka z „kropkowcami” i krzewienie notacji Leibniza.

Symbolika musi być dobra do rozwiązywania problemów, a sama w sobie nie jest matematyką, lecz tylko symbolicznym zapisem pewnych idei ujętych w relacje pomiędzy danymi obiektami. Fascynujące jest to, że „równania wiedzą więcej od nas”, tzn. zawierają nieraz w sobie rzeczy, o których nam się nie śniło, gdy je wypisywaliśmy, ale to już temat na oddzielny artykuł.

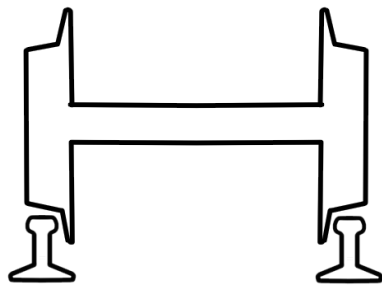
Zauważmy na koniec, że notacja Leibniza jest bezpośrednio związana z algorytmem rozwiązania problemu. Leibniz chciał stworzyć język uniwersalny, za pomocą którego dałoby się rozwiązać np. każdy spór. Dany problem należało przełożyć na ten język, zastosować odpowiedni algorytm i otrzymać wynik. Wiadomo, że tak ogólne wizje nie mają widocznych realizacji i... ludzie dalej się kłócą, kto ma rację w danej sprawie.

5

mała delta

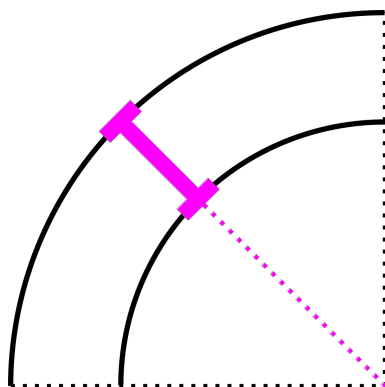
Jeszcze trochę o geometrii kolejowej

W poprzednim numerze *Delty*, w artykule Macieja Ogrodnika, mogliśmy przeczytać o kształtach krzywych, wzdłuż których tory na zakrętach układa się tak, aby zapewnić jak najlepszy komfort pasażerom pociągu. Przy okazji warto się zastanowić, jak to się dzieje, że pociąg jedzie po szynach nie tylko prostych, ale również zakrzywionych.



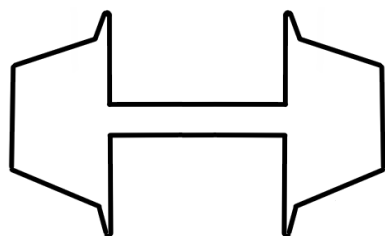
Rys. 1

Dlaczego pociąg nie wypada z szyn? Każdy, kto widział koła pociągu z bliska (albo bawił się modelem kolejki), wie, że po wewnętrznej stronie koła mają szerokie obrzeże, które wychodzi poniżej główki szyny, co zapobiega zsuwaniu się kół z szyn (rys. 1). Te poszerzone obrzeża kół służą dokładnie temu celowi, ale nie jest to główny mechanizm, dzięki któremu pociąg trzyma się torów – jest to raczej *zabezpieczenie* przed wykołnieniem w sytuacjach, kiedy *główny* mechanizm odpowiedzialny za gładkie toczenie się pociągu po szynach z jakiegoś powodu zawodzi. Sytuacje, kiedy obrzeże szoruje o bok szyny, bardzo łatwo rozpoznać, bo słychać wtedy charakterystyczny głośny pisk. Dzieje się tak, kiedy pociąg przejeżdża przez mocno powykrzywiane tory na zwrotnicach kolejowych, albo kiedy tramwaj skręca po ostrym zakręcie na skrzyżowaniu ulic. Na prostych odcinkach torów i łagodnych łukach tego charakterystycznego pisku praktycznie nigdy nie słychać.



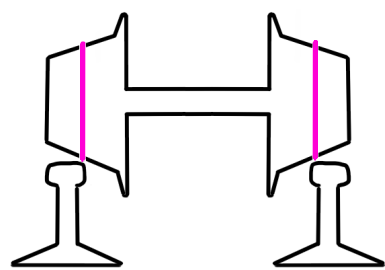
Rys. 2

Z pokonywaniem zakrętów przez wielośladowe pojazdy kołowe związany jest jeszcze jeden problem. Na zakręcie koła znajdujące się po zewnętrznej stronie poruszają się po większym łuku niż koła znajdujące się po stronie wewnętrznej. W samochodach problem ten rozwiązuje się w ten sposób, że koła nienapędzane poruszają się swobodnie niezależnie od innych, natomiast koła na osi napędzanej połączone są z resztą układu napędowego za pośrednictwem tzw. mechanizmu różnicowego, umożliwiającego właśnie poruszanie się kół z różnymi prędkościami. W pociągach jest inaczej – koła znajdujące się na jednej osi są połączone na sztywno – często lewe i prawe koło razem z łączącym je wałem stanowią jeden odlany z formy kawał stali. Oba koła muszą więc zawsze obracać się z tą samą prędkością kątową. Jak więc pociąg pokonuje zakręty? Czy jedno z kół musi się ślizgać?



Rys. 3. Przekrój osi z dwoma kołami. Proporcje na rysunkach 3, 4 i 5 nie są zachowane. W rzeczywistości koła są oczywiście znacznie węższe, a nachylenie tworzącej stożka mniejsze. Tutaj rysujemy bez zachowania proporcji, żeby mechanizm był wyraźnie widoczny

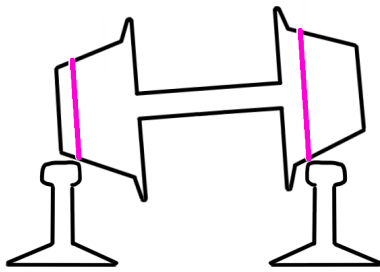
Okazuje się, że rozwiązanie tych wszystkich problemów jest bardzo proste. Powierzchnia koła pociągu, która toczy się po szynie, nie jest powierzchnią walca, a powierzchnią stożka (rys. 3). Obwód koła maleje w miarę oddalania się od obrzeża znajdującego się po wewnętrznej stronie koła. Taki kształt kół stabilizuje pociąg w jeździe po prostej, jak również pozwala na gładkie, bezpoślizgowe pokonywanie łuków.



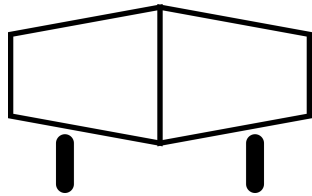
Rys. 4. Dwa koła na jednej osi jadące prosto

Jeżeli tory są proste, to wystarczy, aby oś z kołami toczyła się symetrycznie, czyli tak, aby promienie okręgów, wzdłuż których oba koła toczą się po szynach, były równe (rys. 4).

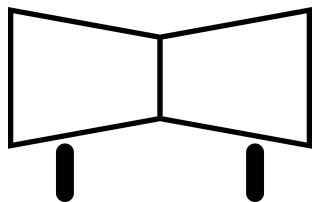
Jeżeli w czasie jazdy po prostej zdarzy się tak, że któraś z osi wagonu przesunie się odrobinę w bok, np. w prawo, to koło znajdujące się po prawej stronie będzie się toczyć po szynie tą częścią stożkowej powierzchni, której obwód jest większy niż obwód toczący się po szynie po lewej stronie. Prawe koło będzie więc pokonywać większy dystans niż lewe (rys. 5). Kiedy jedno koło pokonuje większy dystans niż drugie, oznacza to, że oś porusza się po łuku, w tym wypadku w lewo, czyli oś będzie skręcać w lewo i dążyć do



Rys. 5. Dwa koła na jednej osi podczas pokonywania zakrętu w lewo. Prawe (zewnętrzne) koło pokonuje dłuższą drogę niż lewe (wewnętrzne), ponieważ obwód prawego koła w miejscu styku z szyną jest większy niż obwód lewego koła w miejscu jego styku



Rys. 6



Rys. 7

skompensowania tego odchylenia od sytuacji symetrycznej. Jeżeli „z rozpędu” oś przejdzie przez położenie symetryczne i wychyli się w drugą stronę, to analogiczny mechanizm zawróci ją z powrotem do położenia równowagi. Jasne jest zatem, że istnieje mechanizm stabilizujący toczącą się po szynach oś, zwracający ją do położenia równowagi, nawet wtedy, kiedy zostanie z niego wychylona.

A co z zakrętami? Na zakręcie oś przesuwana się w stronę zewnętrznej szyny i koło zewnętrzne toczy się większym obwodem niż wewnętrzne. Skąd wiadomo, jak daleko ma się przesunąć? Po prostu na zakręcie położenie równowagi się zmienia – im mniejszy promień skrzywienia, tym większa musi być asymetria w ustawieniu osi. Jeżeli asymetria będzie zbyt duża lub zbyt mała, to ten sam mechanizm, który stabilizuje toczenie po prostej, zadziała w jeździe po łuku, zmieni się tylko położenie równowagi, wokół którego będą występowały ewentualne oscylacje.

Opisany tu mechanizm działa niezależnie od szerokiej obrzeży kół, których piskliwego kontaktu z bokami szyn chcielibyśmy za wszelką cenę unikać – w trosce o komfort pasażerów (a także z innych powodów). Odstęp między obrzeżami jest trochę mniejszy niż rozstaw szyn, właśnie po to, żeby mógł działać opisany tu mechanizm i aby obrzeża nie tarły o boki szyn cały czas. Dodatkowo na zakrętach, w zależności od promienia krzywizny, czasem szyny montuje się w odległości większej niż na prostych odcinkach torów – po to, żeby obrzeża wewnętrznych kół znalazło się dalej od boku szyny i żeby koło to mogło toczyć się mniejszym obwodem. Gdy ten geometryczny mechanizm stabilizacji nie wystarcza, dochodzi do głośnego kontaktu szerokiego obrzeża koła z boczną powierzchnią szyny. Jak napisałem na początku, ten drugi stopień zabezpieczenia przed wykolejeniem *włącza* się dopiero wtedy, gdy główny mechanizm okazuje się niewystarczający.

Żeby w praktyce przekonać się, jak działa mechanizm stabilizujący ruch pociągu po szynach, zachęcamy Cię, Czytelniku, do wykonania prostego doświadczenia. W tym celu dwa jednorazowe kubki papierowe skleamy ze sobą brzegami, jak na rysunku 6. Tak przygotowany kształt możemy toczyć po torach zrobionych z dwóch równo oddalonych listewek lub linijek. Tor wygodnie jest pochylić tak, żeby pojazd toczył się samoczynnie pod wpływem grawitacji. Jeżeli zacniemy od niesymetrycznego położenia początkowego, to zaobserwujemy, że kubki toczą się „slalomem”, ale pozostają na torze. Jeżeli tor będzie wystarczająco długi i prosty, to zaobserwujemy, że oscylacje naturalnie wygasają i toczenie się stabilizuje. Aby przetestować jazdę w zakrętach, można wyciąć krzywe tory, np. z kartonu (kształty takich krzywych opisane były w poprzednim numerze *Delty*). Efekt stabilizowania się ruchu, który widać w tym prostym doświadczeniu, ma fundamentalne znaczenie w kolejnictwie. Żeby się przekonać, że nie każdy kształt tak ładnie się toczy, można też kubki skleić denkami, jak na rysunku 7, i próbować je toczyć po szynach. Łatwo się przekonamy, że taki kształt toczy się w sposób bardzo niestabilny, nawet po prostym torze – minimalne odchylenie od symetrycznego położenia względem toru wykazuje tendencję do dalszego pogłębiania się i szybko prowadzi do „wykolejenia”. Dociekliwy Czytelnik może poeksperymentować z innymi kształtami.

Widzimy, że dla komfortu pasażerów nie tylko kształt torów jest niezwykle ważny, ale również kształt kół. Od komfortu jeszcze ważniejsze jest jednak bezpieczeństwo. Aby pociąg stabilnie się toczył i nie wykolejał, bardzo ważne jest, żeby koła były odpowiednio wyprofilowane. Dlatego produkcja kół wymaga dużej precyzji, a w czasie eksploatacji kształt kół jest sprawdzany podczas regularnie przeprowadzanych przeglądów. Zużyte koła poddaje się ponownej obróbce w celu przywrócenia im właściwego kształtu lub wymienia na nowe, jeżeli nie nadają się do naprawienia.

Szymon CHARZYŃSKI

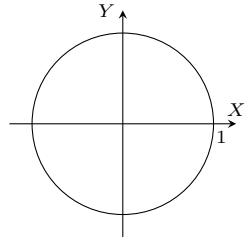
O metrykach i kulach

Jarosław GÓRNICKI*

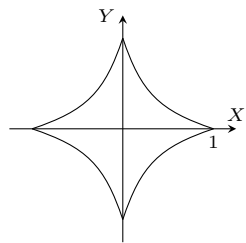
* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Funkcję $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ spełniającą dla dowolnych $x, y, z \in X$ warunki
(m1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(m2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(m3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
nazywamy *metryką* (odległością).
Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną*, zobacz Δ_{19} .

W przestrzeni metrycznej (X, d) odcinek, prostą, okrąg określamy następująco:
(1) *odcinek* o końcach $a, b \in X$ to zbiór $\{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$,
(2) *prosta* przechodząca przez punkty $a, b \in X, (a \neq b)$ to zbiór $\{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b) \vee d(x, a) + d(a, b) = d(x, b) \vee d(x, b) + d(b, a) = d(x, a)\}$,
(3) *okrąg* o środku $a \in X$ i promieniu $r \geq 0$ to zbiór $\{x \in X : d(x, a) = r\}$.



Rys. 1



Rys. 3

Funkcję $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy *normą*, jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}$ spełnia warunki

- (n1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (n2) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$,
- (n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Parę $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*. W przestrzeniach unormowanych wzór $d(x, y) = \|x - y\|$ definiuje metrykę. Definicje te pozostają prawdziwe, gdy zamiast przestrzeni \mathbb{R}^2 rozważymy dowolną przestrzeń liniową X .

Jasiu, jak daleko masz do szkoły? Ciociu, to zależy, na jaką lekcję? Ta wymiana zdań pokazuje, że w życiu codziennym odległość jest pojęciem subiektywnym. Może być określona na wiele sposobów, np. droga na szczyt czerwonym szlakiem to 2,5 h. W matematyce trzymamy się prostych reguł (patrz margines).

Płaszczyzna \mathbb{R}^2 (ogólnie: zbiór) z różnymi metrykami może mieć różne własności. W tym artykule będą nas interesować kształty kul jednostkowych.

Przypomnijmy, *kulę* o środku w punkcie $p \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $B[p, r] = \{x \in X : d(p, x) \leq r\}$. Słowo „kula” nie określa tu kształtu zbioru $B[p, r]$ – ten może być zaskakujący.

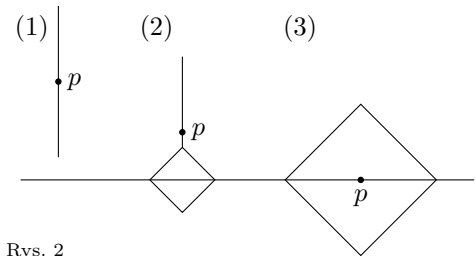
Przykład 1. Na początek coś regularnego. Gdy w szkole odległość między punktami $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ mierzymy linijką, czyli stosujemy wzór Pitagorasa

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

to otrzymujemy wzorcową przestrzeń euklidesową (\mathbb{R}^2, d_2) . Kule w tej przestrzeni są kołami, a brzeg kuli $B_2[0, 1]$ opisuje równanie $x^2 + y^2 = 1$ (rys. 1). W takiej przestrzeni poznajemy geometrię euklidesową płaszczyzny oraz analizę matematyczną, postrzegamy otaczający nas lokalnie świat. A jak wygląda geometria i analiza w innej metryce?

Przykład 2. Na płaszczyźnie porośniętej gęstą dżunglą, przez którą przepływa rzeka, poruszamy się ścieżkami prostopadłymi do rzeki lub rzeką. Odległość między punktami wyznacza długość drogi, jaką musimy pokonać. W tej przestrzeni kształt kuli zależy od położenia jej środka i wielkości promienia. Dla kuli o promieniu $r = 1$ możemy wyróżnić przypadki (rys. 2):

- (1) odległość środka kuli p od rzeki wynosi co najmniej 1,
- (2) środek kuli p jest poza rzeką, ale w odległości mniejszej niż 1,
- (3) środek kuli p jest na rzece.



Rys. 2

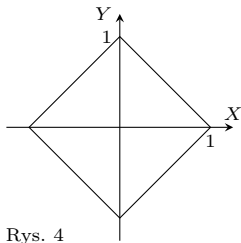
Przykład 3. Gdy odległość między punktami $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ określimy wzorem

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|},$$

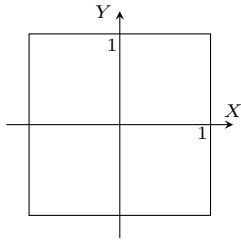
to brzeg kuli $B[0, 1]$ opisuje krzywa $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1$. Jej kształt otrzymamy, rysując najpierw wykres funkcji $y = (1 - \sqrt{x})^2, 0 \leq x \leq 1$, następnie odbijając ten wykres względem osi OX , a potem (całość) względem osi OY (rys. 3). Odcinek łączący punkty $A = (0, 1)$ i $B = (1, 0)$ nie zawiera się w kuli $B[0, 1]$, bo dla punktu $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in [A, B], \tilde{d}(0, C) = \sqrt{2} > 1$.

Przykłady 2 i 3 pokazują, że kule w przestrzeni metrycznej ani nie muszą mieć jednego ustalonego kształtu, ani nie muszą być zbiorami wypukłymi (zbiór jest *wypukły*, gdy wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek je łączący). Unikniemy tego, wprowadzając metrykę za pomocą *normy* (patrz margines). Na przykład, aby otrzymać kulę $B_2[0, 1]$ z przykładu 1, wprowadzamy normę euklidesową $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

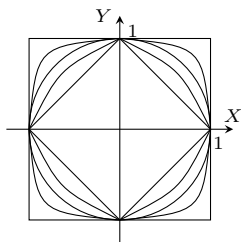
Gdy metryka pochodzi od normy, to rolę kuli jednostkowej $B[0, 1]$ w przestrzeni \mathbb{R}^2 (ogólniej, w przestrzeni liniowej) musi pełnić zbiór A , który jest wypukły, symetryczny względem punktu 0 , tj. $A = -A$, którego przecięcie z każdą prostą przechodzącą przez punkt 0 jest skończonym niezdegenerowanym odcinkiem. Zależność w drugą stronę też jest prawdziwa: dowolny taki zbiór A definiuje normę, w której jest on kulą jednostkową.



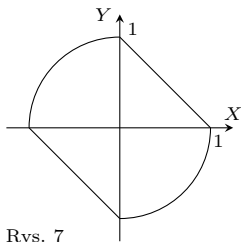
Rys. 4



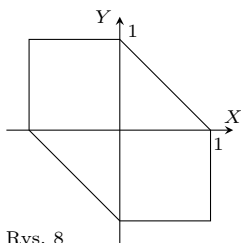
Rys. 5



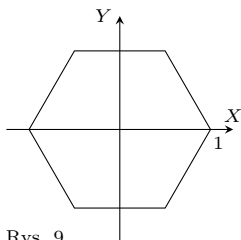
Rys. 6



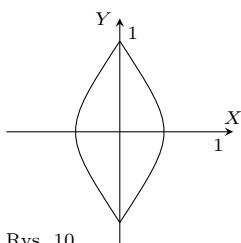
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Poznanie przykładów kształtowania kul przez normy i norm przez kule może być pożytecznym doświadczeniem. Rachunki ograniczymy do niezbędnego minimum na rzecz odwoływania się do znanych przykładów i naszej wyobraźni. Zapraszamy!

Przykład 4. W rodzinie norm $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ dla normy $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ kula

$$B_1[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

jest kwadratem (rys. 4). Zauważmy, że obwód tej kuli, mierzony w metryce, z której ta kula pochodzi, jest równy 8.

Ponieważ $\lim_{p \rightarrow \infty} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x|, |y|\}$, więc $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. W tej normie kula

$$\begin{aligned} B_\infty[\mathbf{0}, 1] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\} \end{aligned}$$

też jest kwadratem o obwodzie równym 8 (rys. 5). Kule jednostkowe w normach $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$ przedstawia rys. 6.

Przykład 5. Norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ z przykładu 4 jest szczególnym przypadkiem z rodziny norm $\|(x, y)\| = a|x| + b|y|$, gdzie $a, b > 0$. Przy takich normach kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest rombem o bokach równoległych do prostych $y = \pm \frac{a}{b}x$.

Norma $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ z przykładu 4 jest szczególnym przypadkiem z rodziny norm $\|(x, y)\| = \max\{a|x|, b|y|\}$, gdzie $a, b > 0$. Przy takich normach kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych.

Przykład 6. W normie $\|(x, y)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, |x + y|\}$ kula $B[\mathbf{0}, 1]$ powstaje z przycięcia koła jednostkowego pasem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$ (rys. 7).

Przycięcia koła jednostkowego możemy modelować, przyjmując np. normy

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &= \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, \lambda|x + y|\}, \text{ gdzie } \lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \|(x, y)\| &= \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, 2|x|\}. \end{aligned}$$

Przykład 7. Jeśli norma $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|, |x + y|\}$, to kula

$$\begin{aligned} B[\mathbf{0}, 1] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|, |x + y|\} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |x + y| \leq 1\} \end{aligned}$$

jest sześciokątem będącym częścią wspólną trzech pasów (rys. 8). Można na to też patrzeć jak na przycięcie kwadratu jednostkowego w normie $\|\cdot\|_\infty$ z przykładu 4 pasem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$. Obwód tej kuli jest równy 6.

Oczywiście możliwe są również inne przycięcia wspomnianego kwadratu.

Przykład 8. Kula $B[\mathbf{0}, 1]$ może być sześciokątem foremnym, którego jednym z wierzchołków jest punkt $(1, 0)$. Otrzymamy ją jako przecięcie trzech pasów, przyjmując normę (rys. 9)

$$\|(x, y)\| = \max\left\{\left|x + \frac{\sqrt{3}}{3}y\right|, \left|x - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right|, \frac{2\sqrt{3}}{3}|y|\right\}.$$

Obwód tak otrzymanej kuli jednostkowej jest równy 6.

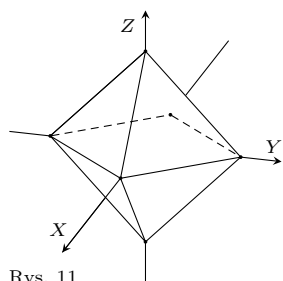
Zadanie 1 (rozwiązanie na stronie 2). Określić normę $\|(x, y)\|$ tak, aby kula jednostkowa $B[\mathbf{0}, 1]$ była ośmiokątem foremnym.

Przykład 9. Korzystając z normy

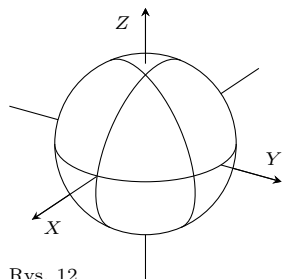
$$\|(x, y)\| = \max\{-x + \sqrt{x^2 + y^2}, x + \sqrt{x^2 + y^2}\} = |x| + \sqrt{x^2 + y^2},$$

otrzymujemy kulę $B[\mathbf{0}, 1]$ – „soczewkę wypukłą”, która jest ograniczona dwoma łukami parabol $x = \pm \frac{1-y^2}{2}$ (rys. 10).

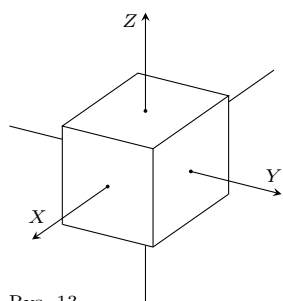
W 1932 roku Stanisław Gołąb wykazał, że: *na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 obwód kuli jednostkowej jest liczbą z przedziału $[6, 8]$. Ograniczenie dolne realizują kule sześciokątne z przykładów 7 i 8, a ograniczenie górne realizują kule kwadratowe z przykładu 4. Więcej o twierdzeniu Gołąba będzie można przeczytać niebawem w *Delcie!**



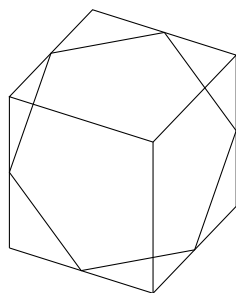
Rys. 11



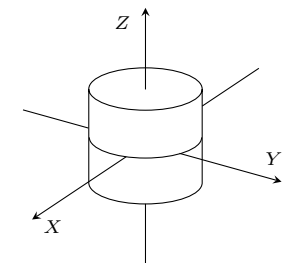
Rys. 12



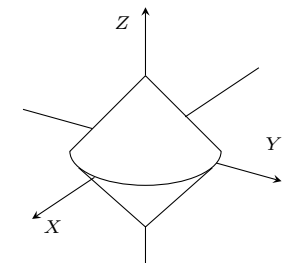
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

W 2000 roku Charles L. Adler i James Tanton pokazali, że wśród kul jednostkowych $B_p[\mathbf{0}, 1]$ wyznaczonych przez metryki $\|(x, y)\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, z przykładu 4, najmniejszy obwód ($= 2\pi$) ma kula $B_2[\mathbf{0}, 1]$ wyznaczona przez metrykę (normę) euklidesową.

Pole koła jednostkowego w metryce euklidesowej z przykładu 1 jest równe π . A może ktoś z Czytelników ma pomysł, jak obliczyć pola kół jednostkowych w innych metrykach...

Pokazaliśmy już, jaki kształt mogą przyjmować kule jednostkowe w zbiorze \mathbb{R}^2 przy różnych metrykach. Teraz zobaczymy, jaki kształt mają kule jednostkowe w przestrzeni \mathbb{R}^3 z różnymi metrykami.

Ze względu na możliwe zastosowania uwagę skierujemy na metryki pochodzące od normy. Gwarantują one, że kule jednostkowe $B[\mathbf{0}, 1]$ w przestrzeni \mathbb{R}^3 są zbiorami wypukłymi, symetrycznymi względem punktu $\mathbf{0}$, których przecięcie z każdą prostą przechodzącą przez punkt $\mathbf{0}$ jest skończonym odcinkiem różnym od punktu. Prawdziwa jest też zależność w drugą stronę: każdy zbiór o wyżej podanych własnościach definiuje normę, w której jest on kulą jednostkową.

Przykład 11. W rodzinie norm $\|(x, y, z)\|_p = (|x|^p + |y|^p + |z|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ wyróżnimy normy:

(a) $\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$.

Elementarne wiadomości o równaniu płaszczyzny w przestrzeni \mathbb{R}^3 pozwalają nam dostrzec, że w tym przypadku kula $B_1[\mathbf{0}, 1]$ jest ośmiościanem foremnym (rys. 11), którego przekrój płaszczyzną $z = 0$ jest kwadratem $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 1\}$.

(b) $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

W tym przypadku kula $B_2[\mathbf{0}, 1]$ ma kształt tradycyjnej kuli (rys. 12). Łatwo możemy sobie wyobrazić, że po lekkiej modyfikacji tej normy do postaci $\|(x, y, z)\| = \sqrt{ax^2 + by^2 + cz^2}$, $a, b, c > 0$ kula jednostkowa jest elipsoidą.

(c) $\|(x, y, z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

Skoro

$$B_\infty[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |z| \leq 1\},$$

więc zbiór $B_\infty[\mathbf{0}, 1]$ jest sześcianem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych (rys. 13). Przekroje tego sześcianu płaszczyznami zawierającymi punkt $\mathbf{0}$ są wielokątami, wśród których są sześciokąty foremne (rys. 14).

Przykład 12. Jeśli normę określa wzór

$$\|(x, y, z)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, |z|\},$$

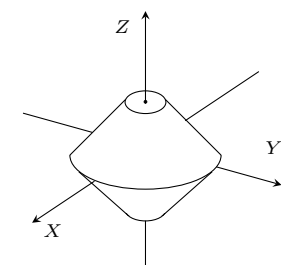
to kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest walcem. Istotnie, zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ tworzy „rurę” o przekroju koła jednostkowego i osi OZ , którą następnie ograniczamy płaszczyznami $z = \pm 1$ (rys. 15).

Przykład 13. Niech $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2} + |z|$. Przecinając zbiór $B[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} + |z| \leq 1\}$ płaszczyzną $z = 0$, otrzymujemy koło $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. W przecięciu zbioru $B[\mathbf{0}, 1]$ płaszczyzną $x = 0$ otrzymujemy kwadrat $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| \leq 1\}$. Analogicznie w przecięciu zbioru $B[\mathbf{0}, 1]$ dowolną płaszczyzną postaci $ax + by = 0$. Zatem kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest „dwustożkiem” powstałym w wyniku złączenia dwóch identycznych stożków podstawami (rys. 16).

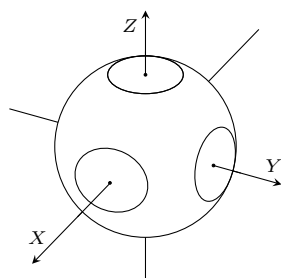
Przykład 14. Kulę jednostkową „dwustożkową” z przykładu 3 możemy modelować, „prycinając” jej fragmenty. Norma

$$\|(x, y, z)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2} + |z|, \frac{3}{2}|z|\}$$

przycina wierzchołki stożków płaszczyznami $z = \pm \frac{2}{3}$ (rys. 17).



Rys. 17



Rys. 18

Przykład 15. Analogicznie możemy postąpić z klasyczną kulą jednostkową z przykładu 11(b) i przyciąć ją sześcianem (rys. 18). Zapewnia to norma

$$\|(x, y, z)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{4}{3} \max\{|x|, |y|, |z|\}\}.$$

W ten sposób możemy mikсовать różne normy. Do tworzenia kul można wykorzystać powierzchnie obrotowe. W danej przestrzeni unormowanej od jednego kształtu kuli jednostkowej do innego kształtu tej kuli możemy przejść w sposób ciągły. Liczba kul jednostkowych o rozmaitych kształtach jest więc ogromna. Wyprawa do czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej z normą $\|\cdot\|_2$, nawet w przypadku najprostszych figur – to fascynująca wyprawa pełna niespodzianek. . . Jaką objętość ma tam kula, jakie jest jej pole powierzchni? Co na ten temat możemy powiedzieć w przestrzeni \mathbb{R}^3 z innymi metrykami? Pytań jest wiele.

Czy do klasyfikacji przestrzeni można (jak?) wykorzystać własności kul? Okazuje się, że przestrzenie, w których kule nie mają „ostrzy”, „ostrej krawędzi”, których brzegi nie zawierają odcinków, fragmentów płaszczyzny, mają więcej użytecznych własności. Lepiej to widać w przestrzeniach o nieskończonym wymiarze. Czytelnikom zainteresowanym tematem polecam lekturę książki: K. Goebel, S. Prus, *Elements of Geometry of Balls in Banach Spaces*, Oxford University Press, 2018.

Wycieczka na Merkurego

Lech FALANDYSZ

Merkury – u Greków Hermes – był boskim wysłannikiem, który przybywał na Ziemię i kontaktował się z ludźmi. Miał skrzydlaty kapelusz, czasem złote sandały ze skrzydłami, dzięki którym szybko przemieszczał się z miejsca na miejsce. Opiekował się pasterzami, pomagał podróżnym, kupcom i złodziejom. Jednak nie o rzymskim bogu chcemy pisać. Dziś Merkurem nazywamy planetę najbliższą Słońcu. Jego średnia odległość od Słońca wynosi około 0,39 AU (jednostki astronomicznej).

W 1974 roku w pobliżu Merkurego przeleciała Sonda „Mariner10”. Wykonała ona wiele pomiarów i fotografii. Teraz, po około 47 latach, gdy nastąpił dalszy postęp technologiczny, pokusimy się o znacznie bliższy „lot” – chcemy wylądować na planecie. Nasz statek kosmiczny i jego aparaty są w dużej części wykonane z rewelacyjnych materiałów – fulerenów – bardzo lekkich, bardzo wytrzymałych i mających niezwykle właściwości termiczne oraz elektryczne.

Na początek trzeba wybrać odpowiednią orbitę. Jeśli chcemy podróżować bez dużego balastu, jakim jest paliwo chemiczne, to wybrać należy lot beznapędowy po orbicie Hohmanna. Dokładny opis użycia tej eliptycznej orbity w lotach kosmicznych został przedstawiony w artykule „Wycieczka na Wenus”, Δ_{20}^{11} . Paliwo w mniejszej ilości potrzebne będzie do tego, by czasem skorygować ruch statku oraz regulować ruch lądownika planetarnego. Najpierw statek okrąży Ziemię bez napędu, jak satelita – na tzw. orbicie parkingowej.

Najdogodniejszym momentem wejścia na orbitę Hohmanna podczas lotu na Merkurego jest moment, gdy wyprzedza on Ziemię o 106° . Wtedy właśnie włączamy silniki i przyspieszamy. Po krótkim przyspieszeniu ruch odbywa się bez napędu silnikowego – napędza nas pole grawitacyjne Słońca. Orbita nasza ma aphelium na orbicie Ziemi, a peryhelium na orbicie Merkurego. Długość drogi do Merkurego – połowa długości elipsy – wynosi około 2,33 AU, a podróż potrwa 106 dni ziemskich (3,5 miesiąca). Merkury w tym czasie wykona około 1,2 obiegu (432°) wokół Słońca.

Jesteśmy już blisko planety i okrążamy ją po orbicie parkingowej jako tymczasowy sztuczny satelita. Drogą radiową przesyłamy wiadomość na Ziemię, która dojdzie tam po około 8 min i 40 s. W odpowiednim momencie od naszego statku odłącza się lądownik i opada na powierzchnię. Brak atmosfery nie daje możliwości wykorzystania spadochronu. Polegać musimy na hamującym działaniu silników.

Wreszcie wylądowaliśmy na rozległej równinie. To Równina Upału. Wyjście z lądownika byłoby aktem samobójczym. Aparaty wskazują temperaturę 450°C . Brak jest atmosfery. Tylko bardzo niewielka ilość cząstek α (jąder atomu helu) i innych cząstek pochodzących głównie z wiatru słonecznego tymczasowo „błąka się”

1 AU = 149 597 870 700 m

Garść informacji o Merkury: pośród planet ma on największą szybkość orbitalną – średnio ok. 48 km/s. Gdy jest w aphelium i w odpowiedniej konfiguracji względem Słońca i Ziemi, można zaobserwować jego oddalenie kątowe od Słońca (elongacja) dochodzące do ok. 28° . Przy peryhelium kąt ten dochodzi do ok. 18° . Na ogół Merkury widoczny jest przez krótki czas przed wschodem lub po zachodzie Słońca. Jego blask jest taki jak jasnych gwiazd. Z Ziemi nie można dostrzec szczegółów powierzchni planety. Wiemy, że z powodu bliskości Słońca musi być tam wysoka temperatura. Przy średnicy 2,6 razy mniejszej niż średnica Ziemi, planeta ma niewielką masę – ok. 5,5% masy Ziemi. Jej pole grawitacyjne jest zbyt małe, by utrzymać gorącą atmosferę.

przy planecie, by później oddalić się w przestrzeń kosmiczną. Prędkość ucieczki z powierzchni tej niewielkiej planety wynosi przecież tylko 4,3 km/s. A więc cząsteczki prędzej czy później „uciekną” od niej. Oprócz tzw. wiatru słonecznego, składającego się z różnych cząstek o dużych energiach, do powierzchni planety dochodzi również szkodliwe promieniowanie elektromagnetyczne. Jest to promieniowanie gamma oraz promieniowanie rentgenowskie. Oba te promieniowania są przenikliwe i bardzo szkodliwe dla ludzkiego organizmu.

Ważymy tu 38% tego co na Ziemi. Równina Upału, na której wylądowaliśmy, ma około 1300 km średnicy i prawdopodobnie powstała wskutek uderzenia olbrzymiego meteorytu. Na powierzchni Merkurego znajdują się też Równina Południowa i Równina Północna. Otoczone są one pierścieniami gór – Góry Północne i Góry Południowe. Widzimy liczne kratery. Zarówno pierścieniowe góry, jak i kratery powstały na skutek działalności wulkanicznej oraz uderzeń meteorytów. Wielkie kratery otrzymały nazwy pochodzące od nazwisk wybitnych ludzi, np: Bach, Chopin, Cervantes, Czajkowski, Homer, Michał Anioł, Kuiper, Mozart, Paderewski. Wskutek częstych uderzeń meteorytów powierzchnia planety pokryta jest regolitem – drobnymi okruchami i odłamkami skalnymi, oraz pyłem. Powierzchnia jest popękana, ze szczelinami i kraterami różnych wielkości, lecz w dużej części nieco wygładzona wulkaniczną magmą.

Łądownik przemieszcza się, a jego aparaty badają otoczenie i pobierają próbki gruntu. Wjeżdżamy na gładką kilkumetrowej szerokości powierzchnię i mamy niespodziankę. Powierzchnia jest miękka, łądownik zaczyna brodzić w gęstej i gorącej mazi. Mamy kłopot z wydostaniem się z tej pułapki, ale udało się. Okazało się, że wjechaliśmy na „zamaskowaną” pyłem powierzchnię dużej kałuży roztopionej cyny, a może ołowiu. Metale te mają temperatury topnienia 232°C i 327°C. W takich kałużach nawet kamienie utrzymują się na powierzchni, tylko częściowo zanurzone, gdyż ich gęstość jest mniejsza od gęstości roztopionego metalu. Jesteśmy ostrożni. Ale czy ostrożność – nawet największa – uchroni nas od niebezpieczeństw? Bo oto, gdy po przygodzie z kałużą roztopionego metalu łądownik stoi, a my odpoczywamy, Merkurjusz znów nam płata figla. Nagle zatrzęsł się grunt! Zatrzęsł się też łądownik i my razem z nim. W pobliżu uderzył meteoryt. Bryła skalna pędząca z szybkością kilkakrotnie większą od szybkości pocisków wybiła w gruncie krater. Ponad nim wznosi się wysoki i szeroki słup pyłu, który przez dłuższy czas będzie powoli opadał na powierzchnię i na nasz łądownik. Jak uchronić się od uderzeń meteorytowych? Gdzie spadnie następny?

Po tych przygodach decydujemy się ruszyć w dalszą drogę. Podróż nie jest łatwa. Koła łądownika napotykać na pęknięcia i szczeliny, niektóre szerokie i głębokie. Trzeba ostrożnie manewrować. Gdyby łądownik wpadł w jedną z nich, byłby to co najmniej wielki kłopot.

Temperatura na Merkurjusz nie jest jednakowa i zależy od kąta padania promieni słonecznych. Im dalej od równika, tym niższa temperatura. Okres obiegu planety i jej rotacja wokół osi są ze sobą tak zsynchronizowane, że przez jeden rok planety (88 dni ziemskich) jest dzień, a przez następny rok noc (gdy obserwator stoi w miejscu). Lecz oto skończył

się dzień, Słońce zaszło. Temperatura nagle spadła. Jest już poniżej 0°C i po jakimś czasie w najchłodniejszym momencie nocy temperatura spada do -170°C. Już dawno zamarzyły kałuże ołowiu i cyny. Gdybyśmy zostali w tamtej kałuży, teraz, na długą noc, zniewoliłaby nas, uniemożliwiając ruch. Łądownik byłby „przylutowany” do ołowianego lub cynowego podłoża.

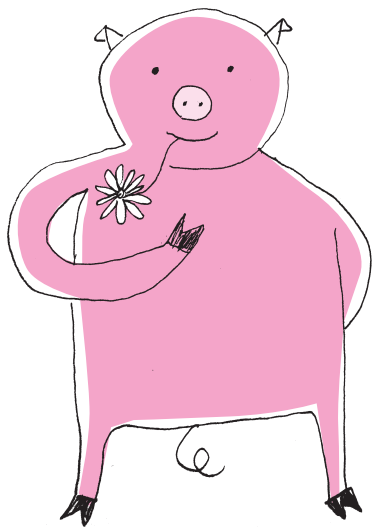
Chcemy obejrzeć wschód Słońca, ale 88 dni ziemskich to zbyt długi czas oczekiwania. Mamy jednak na to radę – posiadamy przecież silniki rakietowe. Już po chwili za ich pomocą dość szybko pędzimy w kierunku wschodnim, łądowny i czekamy na wschód Słońca. Na Ziemi Słońce wstaje w otoczeniu kolorowych chmur. A jak będzie tutaj, na Merkurjusz?

Na tle czarnego nieba widać dużo gwiazd, więcej niż widzimy z powierzchni Ziemi. Nagle ukazuje się brzeg tarczy słonecznej zabarwiony w niektórych miejscach czerwonymi niewielkimi plamkami protuberancji (wybuchów słonecznych). Tarcza słoneczna już wyszła ponad horyzont i jest wielka – ponad trzykrotnie większa niż widoczna z Ziemi. To wielka kula gorącej plazmy i ognia, w której zachodzą różne burzliwe procesy. To jakby naturalny reaktor termojądrowy, w którego wnętrzu zachodzą przemiany wodoru w hel. Ze strony tej dużej rozpalonej kuli w przestrzeń wysyłane są promienie i gorąca plazma. Plazma ta, złożona z szybkich cząstek, odwiedza okolice planet jako tzw. wiatr słoneczny. Teraz Merkurjusz spłatał nam kolejnego figla. W swoim ruchu orbitalnym zbliża się do peryhelium i ma coraz większą prędkość. Przy pewnej szybkości – jeszcze mniejszej od maksymalnej – jego prędkość kątowna zrównała się z kątowną prędkością przesuwania się tarczy słonecznej. W tym momencie widzimy, jak na czarnym tle nieba tarcza słoneczna zatrzymała się, a następnie zaczęła się cofać i wreszcie schowała się pod horyzont, skąd wcześniej wyszła.

Znów jest noc. Po kilku dniach ziemskich tarcza słoneczna powtórnie wschodzi i teraz już bez niespodzianek przemieszcza się ku zachodowi. Gdybyśmy na dużej zostali w tym miejscu, mielibyśmy długi dzień merkurjuszki – trwający 88 dni ziemskich, równy długości roku na Merkurjusz. Temperatura gruntu szybko rośnie; topnieje cyna i ołów, a wiemy, że będzie jeszcze goręcej. Na czarnym niebie w ciągu dnia oprócz Słońca widać gwiazdy. Gwiazdny firmament przemieszcza się ku zachodowi 3-krotnie szybciej niż tarcza słoneczna.

Niestety czas wracać na Ziemię. Startujemy na orbitę parkingową i łączymy się z naszym statkiem. Przez jakiś czas krążymy wokół planety, czekając na odpowiedni moment do wejścia na eliptyczną orbitę Hohmanna, która będzie naszą drogą do domu. Mamy wciąż łączność radiową z Ziemią. Fala radiowa „biegnie” do niej w zakresie czasowym od około 6,5 min do 10 min, w zależności od oddalenia Ziemi od nas. Widzimy dwie bardzo jasne planety – Wenus i Ziemię. Co 579 dni ziemskich z powierzchni Merkurego można podziwiać koniunkcję Wenus i Ziemi. Planety wówczas widoczne są obok siebie, a łączny ich blask potęguje się i ponagla nas, by powrócić do domu. Wchodzimy na orbitę powrotną i pędzimy na spotkanie z Ziemią – błękitną kolebką ludzkości.

Gilberta poznałam chyba w 1990 roku – z niemalym zdumieniem. . . W księgarni „Czuły Barbarzyńca” opowiadał o swojej pasji fotografowania dużych starych obiektów architektonicznych. Nie zajmowały go już kwasy nukleinowe, w Polsce fotografował starą fabrykę Norblina na warszawskiej Woli.



Do 2020 roku w ludzkim genomie zidentyfikowano 19 179 sekwencji kodujących białka. Ich udział w całym genomie jest zadziwiająco niski (zaledwie 2%). Znając sekwencję genu, można, dzięki znajomości kodu genetycznego, przewidzieć sekwencję aminokwasów kodowanego przez ten gen białka. Niestety takich prostych reguł rozszyfrowywania reszty sekwencji nukleotydów w DNA nie znamy – dlatego też pełne zrozumienie funkcji DNA nadal czeka na odkrywców. We wczesnych genomowych pracach o pozagenowych sekwencjach pisano jako o „śmieciowym DNA” – dziś przypisujemy im najważniejszą rolę w genomice: kodują wiele różnych cząsteczek RNA, a także są sekwencjami regulującymi wszystkie komórkowe procesy (rozpoznano 130 629 elementów aktywnych genetycznie). Utrudnieniem dalszych badań jest sam obiekt: domysły co do aktywności różnych sekwencji wymagają doświadczonego sprawdzenia, co nie jest możliwe w przypadku człowieka (nie możemy dokonywać doświadczeń „na człowieku”).

ROCZNICE, ROCZNICE. . .

Gdy od wspaniałej, wizjonerskiej pracy Jamesa Watsona i Francisca Cricka o podwójnej helisie DNA (1953) upłynęło ponad 20 lat, badacze DNA nie posunęli się znacząco w rozszyfrowaniu jej struktury chemicznej. Wiadomo było, że w każdej z dwu nici ułożone są w zdefiniowanej kolejności 4 podjednostki, nukleotydy. Sądzono, zresztą słusznie, że ta kolejność jest instrukcją dla biologicznej aktywności DNA. Jest to język czteroliterowy, zatem ułożenie wielu „liter” w określonej kolejności jest jedynym sposobem zapewnienia jednoznaczności informacji. Zdefiniowane odcinki nici DNA kodujące białka utożsamiono z genami.

Pojedyncze cząsteczki DNA są bardzo długie, połączeniom podlegają nawet miliony nukleotydów. I to okazało się zasadniczą przeszkodą w dalszym poznawaniu DNA – nie istniały wydajne, rozsądne w czasie i cenie, metody ustalania kolejności nukleotydów (sekwencjonowania DNA). Dwie takie metody pojawiły się jednocześnie po obu stronach Atlantyku. Brytyjską firmował w Cambridge dwukrotny noblista (1958, 1980) Frederick Sanger, amerykańską w Harvardzie Walter Gilbert. Opierały się na różnych reakcjach chemicznych, były wiarygodne i . . . pracochłonne. Obaj uczeni otworzyli nowe perspektywy przed biologią i medycyną molekularną i zasłużenie otrzymali w 1980 roku Nagrodę Nobla. W praktyce ostała się metoda Sangera, ponieważ tylko ta nadawała się do automatyzacji. Z zadań zajmujących kilkunastu osobom miesiące pracy automat (sekwencjator) wywiązywał się w ciągu kilku godzin.

Szybkie ulepszanie sekwencjatorów pozwoliło na sformułowanie w latach 80. zadania porównywanego wówczas do lotu na Księżyc: ustalenia sekwencji ludzkiego DNA (2 razy 23 cząsteczki w każdej komórce, łączna długość 3,2 mld nukleotydów). Pierwszy szkic sekwencji, oznaczanej jednocześnie i niezależnie w obu konkurencyjnych zespołach, opublikowano, też jednocześnie, w 2000 roku w dwóch naukowych tygodnikach: *Nature* (Sanger) i *Science* (Gilbert). Zabawne – sekwencje te były podobne, ale nie identyczne.

Końcowy wynik uśrednionej dla gatunku sekwencji pojawił się w roku 2004. Do 2010 roku realizowano światowy projekt oznaczenia sekwencji genomów 1000 osób, którego celem było poszukiwanie jednostkowych genetycznych różnic w obrębie gatunku *Homo sapiens*.

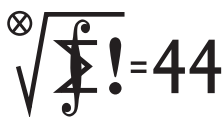
Sekwencjonowanie DNA jest obecnie na tyle tanie i proste, że w zasobach banków sekwencji znajdują się tysiące indywidualnych pełnych genomów. Liczba współautorów ostatnich prac dorównuje tej z badań cząstek elementarnych, przekracza 1200! Sekwencjonowanie DNA weszło też na trwałe do praktyki życia codziennego (m.in. w sądownictwie). Pierwsze indywidualnie oznaczone genomy należą do Craiga Ventera i Jamesa Watsona.

Zgodnie z przewidywaniami najwięcej konkretnych danych zebrano w badaniach chorób. Genetyczne korzenie udowodniono dla 1660 schorzeń, do produkcji zaaprobowano 7712 leków. Ukazało się kilkaset tysięcy publikacji, ale większość prac skupia się na genach – „celebrytach”: na przykład w 2017 roku 22% publikacji dotyczyło 1% genów. Jednemu z nich (TP53 odkrytemu w 1979 r.) poświęcono 9232 prace. Związany jest on ze wzrostem i śmiercią komórek, uszkodzony w 50% nowotworów. Żadna publikacja nie dotyczy 3% ze zdefiniowanych genów.

Każdy DNA, także ludzki, kryje w sobie wiele możliwości, różnie realizowanych przez różnych osobników i w różnych warunkach. Bada się bliskie nam genetycznie zwierzęta, choć nie należy przenosić wyników bezkrytycznie z ich świata do naszego. Zawsze z radością myślę, że na kolejne pokolenia czeka jeszcze wiele odkryć, czego nauczyła nas ostatnia pandemia.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
807 ($WT = 1,85$) i 808 ($WT = 1,74$)
z numeru 10/2020

Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Jerzy Cisło	Wrocław	37,04
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	30,53
Tomasz Czajka	Santa Clara	29,88

Zadania z matematyki nr 821, 822

Redaguje Marcin E. KUCZMA

821. Niech B będzie ustaloną liczbą naturalną; $B \geq 3$. Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie pozycyjnym przy podstawie B (cyframi zapisu są elementy zbioru $\{0, \dots, B-1\}$; cyfra wiodąca różna od zera). Rozważamy liczby naturalne N , których cyfry zapisu tworzą ciąg ściśle rosnący (największa cyfra w rzędzie jedności). Obliczyć maksymalną wartość sumy cyfr iloczynu $(B-1)N$, gdy N przebiega zbiór wszystkich liczb rozważanej postaci.

822. Dany jest trójkąt ABC . Dla dowolnego punktu D na boku BC (różnego od wierzchołków) zakreślamy okrąg ω_D , przechodzący przez D oraz środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD . Udowodnić, że istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D .

Zadanie 822 zaproponował pan Mikołaj Pater.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2021

Przypominamy treść zadań:

813. Dany jest wielokąt wypukły W (kąty $< 180^\circ$) oraz liczba naturalna m , mniejsza od liczby jego przekątnych. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów przecięć przekątnych (leżących wewnątrz W); zakładamy, że żaden z tych punktów nie należy do trzech przekątnych. Udowodnić, że w zbiorze S można wyróżnić m -elementowy podzbiór M , nie zawierający żadnego cyklu. Przez cykl rozumiemy dowolny cykliczny układ punktów (dowolnej długości ≥ 3), w którym każde sąsiednie dwa punkty leżą na jednej przekątnej, ale żadne kolejne trzy nie leżą na jednej przekątnej.

814. W pewnym trójkącie jeden z kątów ma miarę α . Dowieść, że

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} (1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \geq \frac{r}{R},$$

gdzie, jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego.

813. Dowód przez indukcję względem n , liczby wierzchołków wielokąta. Dla $n \leq 5$ twierdzenie jest oczywiste. Ustalmy $n > 5$ i przyjmijmy słuszność twierdzenia dla wielokątów o $n-1$ wierzchołkach. Weźmy dowolny n -kąt wypukły W_n , w którym żadne trzy przekątne nie mają punktu wspólnego. Wybierzmy dowolne trzy kolejne wierzchołki A, B, C i odetnijmy trójkąt ABC ; zostanie wielokąt wypukły W_{n-1} . Jego przekątne – to uprzednie przekątne wielokąta W_n , z wyjątkiem AC oraz tych wychodzących z punktu B ; liczba przekątnych spadła o $n-2$. Zbiory punktów przecięć przekątnych (w tych dwóch wielokątach) oznaczmy odpowiednio S_n i S_{n-1} .

Niech m będzie liczbą mniejszą od liczby przekątnych wielokąta W_n ; liczba $m-n+2$ jest mniejsza od liczby przekątnych wielokąta W_{n-1} . W myśl założenia indukcyjnego, w zbiorze S_{n-1} istnieje $(m-n+2)$ -elementowy podzbiór $\{X_1, \dots, X_{m-n+2}\}$, nie zawierający cyklu. Chcemy znaleźć w zbiorze S_n podzbiór m -elementowy M o analogicznej własności. Uzyskamy go, dołączając do punktów X_i punkty Y_1, \dots, Y_{n-3} , w których przekątne wielokąta W_n , wychodzące z B , przecinają odcinek AC , oraz jeszcze jeden punkt Z zbioru S_n , wybrany dowolnie na jednej z tych przekątnych; np. na BY_1 (rysunek ilustruje konfigurację dla $n=7, m=13$).

Wśród punktów X_i nie było cyklu. Aby cykl się pojawił w zbiorze M , musiałyby zawierać co najmniej jeden z punktów Y_j . Na prostych BY_j nie leży żaden punkt X_i (nigdzie nie spotykają się trzy przekątne).

Warunek definiujący cykl wymaga, by tworząca go łamana stale zakręcała. Jeśli jednym z jej punktów jest któryś Y_j , to inny Y_k musi być innym jej punktem; ale z punktów Y_2, \dots, Y_{n-3} nie ma już odejścia ani do Z , ani do punktów X_i . Nie istnieje więc cykl w zbiorze M . To kończy krok indukcyjny i dowodzi twierdzenia.

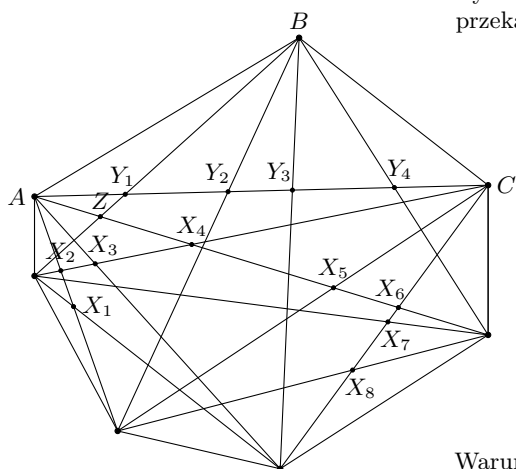
814. Niech A będzie wierzchołkiem kąta o mierze α (w rozważanym trójkącie), zaś O oraz I – środkami okręgów opisanego i wpisanego. Jeśli $AI = l$, to $\sin(\alpha/2) = r/l$. Należy zatem udowodnić nierówność

$$\frac{r}{l} \left(1 - \frac{r}{l}\right) \geq \frac{r}{2R},$$

równoważną (przez proste przekształcenie) następującą:

$$(l-R)^2 \leq R^2 - 2Rr.$$

Wzór Eulera $R^2 - 2Rr = OI^2$ sprowadza więc zadanie po prostu do nierówności trójkąta $|l-R| \leq OI$ dla punktów A, O, I .



W numerze 3/2021 rysunek ilustrujący rozwiązanie zadania 809 nie był dobry; w wydaniu elektronicznym tego numeru został już poprawiony. Przepraszamy Czytelników za niedopatrzenie.

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2021

Zadania z fizyki nr 718, 719

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

718. Samochód o masie m z napędem na przednie i tylne koła rusza z miejsca. Silnik samochodu pracuje ze stałą mocą P . Współczynnik tarcia kinetycznego kół o drogę jest równy μ . Znaleźć zależność prędkości samochodu od czasu. Opór powietrza i opory w mechanizmach samochodu zaniedbać.

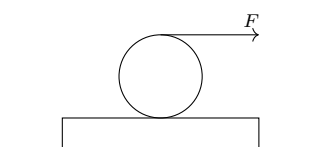
719. Z naczynia o objętości $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ odpompowano powietrze, wprowadzono do niego niewielką ilość wody i zmierzono ciśnienie dla trzech różnych wartości temperatury: przy $t_1 = 60^\circ\text{C}$, $p_1 = 1,92 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, przy $t_2 = 90^\circ\text{C}$, $p_2 = 4,20 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, przy $t_3 = 120^\circ\text{C}$, $p_3 = 4,55 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Jakie byłyby ciśnienia przy podanych temperaturach, gdyby masę wprowadzonej wody zmniejszono o 20%?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2021

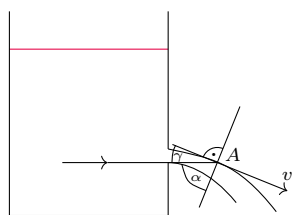
Przypominamy treść zadań:

710. W bocznej ścianie prostopadłościennego naczynia wypełnionego cieczą o współczynniku załamania n znajduje się niewielki otwór o promieniu r . Z wnętrza naczynia przez środek otworu skierowano poziomą wiązkę światła. Do jakiego poziomu nad otworem powinna wyciec ciecz, aby promień światła opuścił wyciekającą strugę, ani razu nie ulegając całkowitemu wewnętrznemu odbiciu? Zaniedbać zmiany przekroju poprzecznego strumienia. Współczynnik załamania cieczy jest dostatecznie duży.

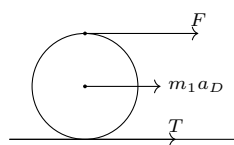
711. Na dwóch równoległych jednakowych deskach o łącznej masie m leży pełny walec o masie m_1 (widok z boku przedstawia rys. 1). Na walec nawinięto nieważki sznurek, którego koniec ciągniemy poziomą siłą F . Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek i siła F znajdują się w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami. Walec toczy się po deskach bez poślizgu, nie ma tarcia między deskami a podłożem. Znaleźć przyspieszenie desek. Zakładamy, że oś walca nie zmienia swego kierunku podczas ruchu.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

711. Siły działające na walec w kierunku poziomym w układzie związanym z deskami przedstawia rysunek 3, gdzie a_D jest przyspieszeniem desek względem podłoża, a T wypadkową siłą tarcia działającą na deski. Walec toczy się bez poślizgu, możemy więc napisać równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi przechodzącej przez punkty styczności walca z deskami

$$3m_1 R^2 a / (2R) = 2RF + m_1 a_D R,$$

gdzie a jest przyspieszeniem środka walca, oraz równanie

ruchu obrotowego względem środka walca:

$$m_1 R^2 a / (2R) = (F - T) R.$$

Równanie ruchu desek ma postać

$$m a_D = T.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy szukane wyrażenie na przyspieszenie desek

$$a_D = F / (3m + m_1).$$

710. Największy kąt γ z powierzchnią wyciekającego strumienia tworzy promień światła przechodzący przez najniższy punkt otworu, który pada na granicę rozdziału powietrza i cieczy w punkcie A (rys. 2). Kąt graniczny $\alpha = \pi/2 - \gamma$, dla którego nie nastąpi w tym miejscu całkowite wewnętrzne odbicie, spełnia równanie $\sin \alpha = 1/n$. Zatem promień opuści wyciekającą strugę, nie ulegając ani razu całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, gdy $\cos \gamma = 1/n$.

Prędkość cząsteczki cieczy v w punkcie A ma składową poziomą v_1 , równą prędkości cieczy opuszczającej naczynie tuż przy górnej krawędzi otworu i składową pionową v_2 , uzyskaną przy swobodnym spadku z wysokości $2r$. Z zasady zachowania energii wynika, że $v_2 = \sqrt{4gr}$. Wskutek wypływu masy Δm cieczy z naczynia energia potencjalna cieczy zmniejsza się o Δmgh , gdzie h jest wysokością poziomu cieczy nad otworem (możemy założyć, że masa Δm cieczy przemieściła się z powierzchni naczynia do otworu). Zatem prędkość wypływu cieczy z naczynia v_1 wynosi $\sqrt{2gh}$.

Znając v_1 i v_2 , możemy wyznaczyć kąt γ utworzony przez styczną do powierzchni cieczy w punkcie A z poziomem

$$\text{tg } \gamma = v_2 / v_1 = \sqrt{2r/h}, \quad \cos \gamma = 1 / \sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma} = 1/n.$$

Szukana wysokość słupa cieczy nad otworem dana jest wzorem $h = 2r / (n^2 - 1)$.

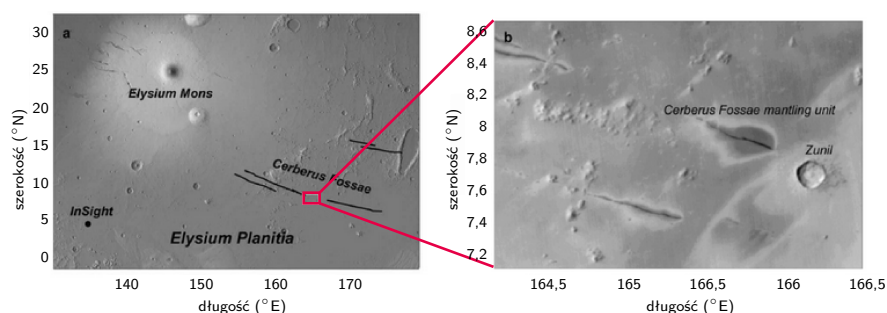
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Mars wciąż żyje!

Mapa pogładowa badanego obszaru z zaznaczonym nieczynnym wulkanem Elysium Mons oraz miejscem lądowania misji *InSight*. Szczegółowa mapa badanej formacji geologicznej w pobliżu krateru Zunil



Mars jest typowany jako pierwsza z planet (poza Ziemią), na której postawimy stopę. Wydaje się, że stanie się to już niedługo. Mamy plany, przygotowujemy misje, angażujemy naukowców, zbieramy fundusze, badamy nastroje społeczne i zastanawiamy się, kiedy to wreszcie nastąpi. Dlatego naukowcy coraz uważniej badają naszego czerwonego sąsiada. Szukamy miejsc, które mogłyby dostarczyć materiały i środki potrzebne do podtrzymania życia w ekstremalnie trudnych warunkach. Szukamy źródeł energii, które moglibyśmy wykorzystać po wylądowaniu. Szukamy też miejsc, w których mogą istnieć mikroorganizmy. Miejsc ciekawych i ekscytujących. Jednym z takich miejsc byłyby... aktywne wulkany (albo przynajmniej niedawno wygasłe).

Na Ziemi ruchy tektoniczne i wybuchy wulkanów są stosunkowo częstym zjawiskiem. Ale do 2020 roku (!) sądziliśmy, że poza odległymi księżycami Io, Trytonem i Enceladusem aktywność wulkaniczna na pozostałych planetach i księżycach Układu Słonecznego zdążyła zupełnie wygasnąć. Okazuje się jednak, że nawet najbliższe nam planety wciąż skrywają wiele tajemnic. W lipcu 2020 roku wykazano istnienie na Wenus przynajmniej 37 aktywnych wulkanów [1]! A w grudniu znaleźliśmy dowody na stosunkowo niedawną aktywność wulkaniczną również na Marsie [2].

Jak niedawna jest „stosunkowo niedawna” aktywność wulkaniczna?

Oczywiście od dawna wiadomo było, że Mars w przeszłości był aktywny wulkanicznie. Trudno bowiem na jego powierzchni przeoczyć wulkan mający 25 km wysokości – Olympus Mons. Naukowcy jednak nie są zgodni co do tego, czy jest on wciąż wulkanem aktywnym. Metody oparte na zliczaniu kraterów po uderzeniach meteorytów (im więcej kraterów, tym starsza powierzchnia) sugerują, że ostatni wpływ lawy miał tam miejsce około 2 milionów lat temu. Wyniki te są jednak sprzeczne z modelami termicznymi sugerującymi, że ostatnia eksplozja miała miejsce dużo, dużo wcześniej, bo 3,5 miliarda lat temu [3].

Jednak obszar, na którym znaleziono dowody najnowszej aktywności wulkanicznej, znajduje się daleko na zachód od Olympus Mons. W pobliżu dużo mniejszego wulkanu

Elysium Mons, na równinie zwanej Elysium Planitia. Badacze skupili się na licznych podłużnych formacjach charakterystycznych dla tego obszaru – zwanych Cerberus Fossae. W szczególności na jednej znajdującej się w pobliżu krateru Zunil (patrz rysunek). Wyróżnia ją bowiem unikalny symetryczny kształt. Co więcej, nie układa się ona wzdłuż typowego kierunku wiatrów, tak jak pozostałe formacje, a wręcz miejscami stoi „pod wiatr”, co sugeruje, że nie powstała w wyniku erozji, lecz np. w wyniku działalności wulkanicznej.

Wykorzystując metodę zliczania kraterów, wiek tej formacji oszacowano na 53–210 tysięcy lat. Jest więc naprawdę bardzo młoda, jeżeli mówimy o aktywności wulkanicznej. To oszacowanie jest jednak obarczone dość dużą niepewnością, dlatego określono również wiek relatywny w stosunku do pobliskiego dużego krateru Zunil, którego wiek szacuje się na 0,1–1 miliona lat. Okazuje się, że badana formacja pochodzi mniej więcej z tego samego okresu lub jest nawet młodsza niż moment, w którym powstał krater. Ponadto, jeśli jakieś miejsce na Marsie miałoby być aktywne wulkanicznie, to właśnie Elysium Planitia. Sejsmometr umieszczony na pobliskim instrumencie *InSight* zarejestrował w tym regionie największe jak dotąd „trzęsienie Marsa”, które mogło być związane z aktywnością magmy podpowierzchniowej.

Jeżeli faktycznie mamy do czynienia w tym miejscu z aktywnością wulkaniczną, to mogłaby ona dostarczać wystarczająco dużo energii i ciepła dla mikroorganizmów potencjalnie żyjących pod powierzchnią planety. Z drugiej strony taka aktywność wulkaniczna może tłumaczyć obecność metanu w atmosferze Marsa, przecząc jego biologicznemu pochodzeniu. Obie tezy są w tym momencie prawdopodobne i pozostaje nam czekać na kolejne odkrycia. Niezależnie jednak od poszukiwania życia na Marsie obserwacja ta jest cenną informacją dla przyszłych planów jego kolonizacji.

Anna DURKALEC

- [1] Gülcher, A.J.P. et al., “Corona structures driven by plume–lithosphere interactions and evidence for ongoing plume activity on Venus”, *Nat. Geosci.* 13, 547–554 (2020).
- [2] Horvath D. G., et al., “Evidence for geologically recent explosive volcanism in Elysium Planitia, Mars”, 2020, arXiv:2011.05956.
- [3] Taylor N. C., et al., “What can Olympus Mons tell us about the Martian lithosphere?”, 2020, *JVGR*, 402.

Niebo w maju

Maj odznacza się bardzo długimi dniami i krótkimi nocami. Słońce nadal przesuwa się na północ, lecz czyni to wyraźnie wolniej niż w kwietniu, zwiększając w trakcie miesiąca swoją wysokość górowania o 7°. Pod koniec miesiąca, 20 maja, Słońce przekroczy równoleżnik +20° deklinacji

i tym samym zacznie się dwumiesięczny okres najdłuższych dni i najkrótszych nocy w ciągu roku. Na północy kraju da się zauważyć, że niebo nawet w najciemniejszej części nocy nie robi się do końca ciemne i północny fragment widnokregu pozostaje rozjaśniony przez całą noc.

W tym miesiącu zaczyna się sezon na obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny (więcej o nim na angielskiej stronie: www.atoptics.co.uk/haalo/cha2.htm).

Oczywiście sezon na łuk okołohoryzontalny trwa najdłużej na południu Polski, najkrócej zaś nad Bałtykiem. Jeśli komuś uda się go dostrzec, może uważać się za szczęściarza. W przypadku obłoków srebrzystych jest odwrotnie: najpierw pojawiają się nad morzem, a w górach szansa na ich dostrzeżenie jest niewielka.

W maju wreszcie poprawiają się warunki obserwacyjne planet **Jowisz** i **Saturn**, zwłaszcza w drugiej połowie miesiąca, gdy do świtu wznoszą się one na wysokość ponad 15° . Saturn wędruje przez gwiazdozbiór Koziorożca i spędzi cały miesiąc około $0,5^\circ$ od gwiazdy ι Cap. Sama planeta świeci blaskiem $+0,6^m$, prezentując tarczę o średnicy $17''$. Jowisz znajduje się w Wodniku i zaczyna miesiąc niecałe $1,5^\circ$ od gwiazdy ι Aqr, by na koniec maja oddalić się od niej o kolejny stopień. Do tego dnia średnica Jowisza zwiększy się z $37''$ do $41''$, blask planety natomiast urośnie od $-2,1^m$ do $-2,3^m$. Obie planety dzieli na niebie dystans 16° . Księżyc spotka się z nimi na początku miesiąca, zaczynając 4 maja, gdy Księżyc w ostatniej kwadrze przejdzie 5° od Saturna, dobę później – w fazie zmniejszonej do 37% – w podobnej odległości na południe od Jowisza. Nie są to jednak zbliżenia łatwe do obserwacji, gdyż same planety pokażą się wtedy na wysokości 10° nad widnokregiem.

Początek miesiąca zdecydowanie nie należy do Srebrnego Globu. Co prawda zacznie on maj od fazy 80%, jednak znajdzie się wtedy daleko na południe od ekliptyki, przez co nie wzniesie się wyżej niż 12° ponad linię horyzontu. Pierwszego dnia miesiąca Księżyc zbliży się na niewiele ponad 1° do gwiazdy Kaus Borealis (λ Sgr), wschodząc dopiero o północy. Potem spotka się z Saturnem i Jowiszem, by podążyć ku nowiu 11 maja. Jednak niekorzystne nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu oraz położenie Księżyca daleko na południe od niej sprawi, że naturalny satelita Ziemi szybko zginie w zorzy porannej.

Może dobrze się składa, ze względu na to, że 6 maja, jak co roku, przypada maksimum aktywności **roju meteorów η -Akwarydów**. Niestety ich obserwacje na półkuli północnej również dotyczą niekorzystne nachylenie ekliptyki. Znacznie lepiej η -Akwarydy są widoczne z półkuli południowej, gdzie właśnie trwa jesień i ekliptyka tworzy duży kąt z porannym widnokregiem. U nas radiant roju na 1,5 godziny przed wschodem Słońca wznosi się na wysokość 10° ponad wschodni widnokrąg. Z tego względu nad Polską można liczyć na około 10 meteorów na godzinę. Jednak warto je obserwować, gdyż są to szybkie meteory – ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi prawie 67 km/s – i często zostają po nich efektowne smugi, a same zjawiska są na ogół bardzo jasne.

Wieczorem ekliptyka nadal tworzy duży kąt z horyzontem, a zatem po nowiu – już 13 maja o zmierzchu da się dostrzec jego bardzo cienki sierp w fazie 3%, na wysokości ponad 6° nad horyzontem. Warto wtedy wybrać się na obserwacje **Księżyca** również dlatego, że niecałe 3° na północ od niego znajdzie się planeta Merkury, świecąca tego wieczora blaskiem $+0,1^m$.

Dodatkowo w odległości 6° na godzinie 5 względem Merkurego znajdzie się planeta Wenus. Jest ona znacznie trudniejsza do odnalezienia, mimo blasku $-3,8^m$, gdyż zajmie wtedy pozycję na wysokości zaledwie 1° nad horyzontem.

Planeta **Merkury** jest widoczna praktycznie przez cały maj, bo już 1 maja znajdzie się 4° pod Plejadami, zaś 2 dni później przejdzie zaledwie 2° od nich. Osiem dni później planeta przejdzie 8° na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, a tydzień później osiągnie maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą 22° . Maksymalną wysokość o zmierzchu Merkury osiągnie zaś w dniu spotkania z Księżycem, wznosząc się wtedy na ponad 8° . W tym czasie blask planety spadnie z -1^m na początku miesiąca do $+2^m$ pod jego koniec; jej tarcza zwiększy średnicę od $5''$ do $10''$, a faza spadnie z 80% do 13%.

Na pożegnanie Merkury spotka się z planetą **Wenus**, która także zacznie pojawiać się na wieczornym niebie o zmierzchu. Wenus zacznie wyłaniać się z zorzy wieczornej w drugiej części miesiąca. Początkowo znajdzie się na godzinie 5 względem Merkurego, a 20 maja dystans między planetami zmniejszy się do 10° , a 8 dni później osiągnie minimalną wartość $36'$. Jednak do tego dnia blask Merkurego znacznie osłabnie i do jego dostrzeżenia niezbędna okazać może się lornetka. Wenus przez cały miesiąc świeci blaskiem $-3,8^m$, prezentując tarczę o średnicy $10''$ i fazie 96%.

Po spotkaniu z Merkurym 15 i 16 maja Księżyc minie planetę **Mars**, pokazując się najpierw w fazie 14% w odległości 5° , a następnie, w fazie 21%, w odległości 7° . Czerwona Planeta w maju pokona 18° na tle gwiazdozbioru Bliźniąt, zaczynając miesiąc $2,5^\circ$ na północ od gwiazdy Tejat Posterior (μ Gem). Przemieszczając się przez nieboskłon 10 maja, Mars przejdzie niecały stopień od Meksuty (ε Gem), by zakończyć ten miesiąc 5° od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji. W maju Mars osłabnie z $+1,6^m$ do $+1,7^m$, przy średnicy tarczy około $4''$.

W drugiej połowie miesiąca, a dokładnie 19 maja, Księżyc przejdzie przez I kwadrę i jednocześnie zbliży się na 4° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Trzy dni później, już w fazie 82%, Srebrny Glob minie Porrimę, jedną z jaśniejszych gwiazd Panny, w odległości $1,5^\circ$. Księżyc minie Spikę, najjaśniejszą gwiazdę konstelacji, 23 maja w odległości 5° , w fazie 90%.

Księżyc w pełni spotka się z Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą Skorpiona, 26 maja, przechodząc 5° na północ od niej. Wcześniej tego samego dnia dojdzie do całkowitego zaćmienia Księżyca. Naturalny satelita Ziemi zanurzy się w jej cień około godziny 13 naszego czasu, czyli gdy jest w Europie pod horyzontem. Żeby zobaczyć zaćmienie trzeba się udać w rejon basenu Oceanu Spokojnego. Całe zjawisko da się dostrzec ze wschodniej Australii, Nowej Gwinei, Nowej Zelandii, Hawajów i obszaru pomiędzy nimi. Ostatniego dnia miesiąca, w fazie zmniejszonej do 73%, Księżyc spotka się ponownie z planetą Saturn i znowu przejdzie 5° na południe od niej.

Ariel MAJCHER

Zupełnie nic

Ziemia krąży wokół Słońca. Słońce okrąża centrum Drogi Mlecznej. W czerwcu prędkości tych ruchów mają zbliżone kierunki i zwroty, a w grudniu zwroty są raczej przeciwne. Jeżeli zaś – jak na to wskazują wszelkie znaki na niebie odczytywane przez ziemskich kosmologów – nasza Galaktyka znajduje się wewnątrz skupiska ciemnej materii, to w czerwcu Ziemia pędzi przez ten ośrodek z prędkością około 250 km/s, a w grudniu tylko 190 km/s. Przy założeniu, że ciemna materia składa się z cząstek, które oddziałują z ziemskimi materiałami, można by wykrywać ciemną materię, poszukując rocznych cykli zmienności liczby niewyjaśnionych wzbudzeń odpowiednich substancji.

Tak w skrócie przedstawiał się pomysł zaproponowany czterdzieści lat temu przez Andrzeja Drukiera, Katherine Freese i Davida Spergela. Niemal dwie dekady zajęło zbudowanie detektora z „odpowiedniej” substancji. Jodek sodu (NaI), bo o nim tu mowa, jest bardzo dobrym scyntylatorem, tzn. świeci po wzbudzeniu. Wziąwszy wystarczająco dużo superczystego NaI (precz z zaśmiecającą wyniki radioaktywnością!), obudowawszy wszystko stosowną elektroniką i umieściwszy całość głęboko pod ziemią (w celu ochrony przed promieniowaniem kosmicznym), otrzymuje się działający detektor ciemnej materii.

Pierwszy detektor działający na tej zasadzie został nazwany po prostu DAMA, od angielskich słów *Dark Matter*, określających ciemną materię. Od dwudziestu lat obsługujący go zespół raportuje o rocznej zmienności niewyjaśnionych błysków, których maksimum przypada na początek lata. Amplituda tych oscylacji nie jest bardzo duża w stosunku do uśrednionego szumu detektora, wynosi ona około jednego procenta, ale właśnie tego należałoby się spodziewać, jeśli Ziemia mknie przez mgłę ciemnej materii zbudowanej z cząstek kilkakrotnie cięższych od protonu. Sygnał utrzymuje się przy kolejnych ulepszeniach detektora (znajdujących swoje odzwierciedlenie także w jego nazwie: obecnie nazywa się DAMA/LIBRA, od *Large sodium Iodide Bulk for RAre processes*).

Dlaczego zatem to wiekopomne, wydawałoby się, odkrycie nie jest szerzej znane i bardziej nagradzane? Czemu milczy Komitet Noblowski? Zasadnicze powody są dwa. Pierwszym z nich, najważniejszym z naukowego punktu widzenia, jest fakt, że DAMA nie jest jedynym eksperymentem polującym na ciemną materię: tylko w ciągu ostatniej dekady co najmniej dziesięć detektorów – wypełnionych różnymi substancjami czynnymi i obsługiwanych przez różne zespoły – nie zaobserwowało rocznej modulacji sygnału, która powinna w nich występować, gdyby doniesienia DAMA były poprawne. Drugi powód to zagadkowa tajemniczość zespołu DAMA: przez dwadzieścia lat badacze nie upublicznili surowych danych ani szczegółów ich analizy, co uniemożliwia niezależny, krytyczny osąd wyników tego eksperymentu.

Zwolennicy DAMA mogli dotąd argumentować, że to jakieś specyficzne własności jodku sodu wyróżniają ten eksperyment spośród wielu innych, a ciemna materia z jakichś powodów reaguje szczególnie silnie właśnie z atomami jodu lub sodu. Podjęto zatem próbę skonstruowania detektorów działających na tej samej zasadzie co DAMA, ale obsługiwanych przez innych badaczy, z założenia publikujących wszystkie dane. Tak powstały COSINE w Korei Południowej (*ConsOrtium between KIMS and DM-ICE Sodium Iodine Experiment*) i ANAIS (*Annual modulation with NaI Scintillators*)

w Hiszpanii. Zespół tego ostatniego eksperymentu opublikował w marcu wyniki z trzech lat obserwacji, wykazując, że żadnego sygnału pochodzącego od ciemnej materii nie ma.

Co zatem poszło nie tak? Badacze z Uniwersytetu w Pizie zauważyli, że szum detektora takiego jak DAMA rośnie z upływem czasu. Jeżeli pomiar tego typu detektora jest różnicowy, tzn. polega na odjęciu od danych uśrednionego po czasie szumu, można łatwo wpaść w pułapkę, jeśli uśrednia się ten szum w cyklu rocznym. Na początku cyklu szum jest mniejszy od średniej, potem narasta, osiągając największą wartość na koniec cyklu; w nowym cyklu sytuacja powtarza się z nową średnią. Otrzymuje się w ten sposób „sygnał” piłokształtny, który zaskakująco dobrze oddaje wyniki DAMA.

Czasami, nie odkrywając zupełnie niczego, można pomóc wyjaśnić jedną z najgłębiej skrywanych tajemnic Wszechświata...

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] D. Buttazzo, P. Panci, N. Rossi, A. Strumia, *Annual modulations from secular variations: relaxing DAMA?*, JHEP **04** (2020) 137
- [2] G. Adhikari *et al.*, *Search for a Dark Matter-Induced Annual Modulation Signal in NaI(Tl) with the COSINE-100 Experiment*, Phys. Rev. Lett. **123**, 031302 (2019)
- [3] J. Amaré *et al.*, *Annual Modulation Results from Three Years Exposure of ANAIS-112*, arXiv:2103.01175



Algorytm Euklidesa

Bartłomiej BZDEGA

Uwaga. W całym artykule zakładamy, że liczby a, b, c, d, k, m, n są całkowite.

Zacznijmy od prostej obserwacji: jeśli d jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b , to dla dowolnych liczb całkowitych x i y zachodzi podzielność $d \mid ax + by$. Wynika to wprost z definicji podzielności. W szczególności, jeśli $d \mid a, b$, to $d \mid a + b$ i $d \mid a - b$. Ta ostatnia podzielność w wersji: jeśli $d \mid n$, to $d \mid n - d$, jest często stosowanym trikiem w zadaniach o podzielności. Zazwyczaj działa w połączeniu z szacowaniem: jeżeli $d \mid m$ i $m > 0$, to $d \leq m$, przy czym d, m i n zazwyczaj są pewnymi wyrażeniami algebraicznymi.

Założmy, że $a > b \geq 0$. Na mocy wyżej opisanych własności, jeśli d jest dzielnikiem pewnych dwóch liczb spośród: $a, b, a - b$, to również dzieli trzecią. Z tego wynika, że $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a - b, b)$. Zapiszmy dzielenie z resztą $a = qb + r$. Po q -krotnym zastosowaniu powyższej równości otrzymamy

$$\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(r, b).$$

Jest to krok *algorytmu Euklidesa* – licząc NWD dwóch liczb, większą z nich zastępujemy resztą z jej dzielenia przez mniejszą. Ostatnia niezerowa reszta jest poszukiwanym NWD.

Niech $r_0 = a > b = r_1$. Dla $k \geq 0$ oznaczmy przez r_{k+2} resztę z dzielenia r_k przez r_{k+1} . Wykażemy, że $r_k = ax_k + by_k$ dla pewnych liczb całkowitych x_k i y_k . Dla $k = 0$ i $k = 1$ jest to oczywiście prawdą. Indukcyjnie, dla pewnego naturalnego q mamy

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= r_k - qr_{k+1} = (ax_k + by_k) - q(ax_{k+1} + by_{k+1}) = \\ &= a(x_k - qx_{k+1}) + b(y_k - qy_{k+1}). \end{aligned}$$

Z tego wyniku bardzo ważny wniosek: istnieją liczby całkowite x i y , dla których $ax + by = \text{NWD}(a, b)$. W szczególności liczby a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy $ax + by = 1$ dla pewnych całkowitych x i y .

Wymienię tu dwie konsekwencje tego faktu. Niech $\text{NWD}(a, b) = 1$. Wówczas:

- (1) jeśli $a \mid bc$, to $a \mid c$; (2) jeśli $a, b \mid c$, to $ab \mid c$.

Dowód. Niech $ax + by = 1$, przy czym x i y to liczby całkowite. Wtedy:

- (1) jeśli $a \mid bc$, to liczba $c/a = c(ax + by)/a = cx + y(bc/a)$ jest całkowita;
 (2) jeśli $a, b \mid c$, to liczba $c/(ab) = c(ax + by)/(ab) = x(c/b) + y(c/a)$ jest całkowita.

Zadania

- Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite a , dla których liczba $a^2 + 2a + 3$ jest dzielnikiem liczby $5a^2 + 4a + 3$.
- Niech $d, m, n > 0$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że jeśli $d \mid m^2n - 1$ oraz $d \mid mn^2 - 1$, to $d \mid n^3 - 1$.
- Liczby a i b są całkowite dodatnie. Wykazać, że jeśli $a + b + 1$ jest liczbą pierwszą dzielącą $4ab - 1$, to $a = b$.
- Niech (F) będzie ciągiem Fibonacciego, tj. $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że jeśli $0 \leq b < a \leq F_m$ dla pewnego $m \geq 2$, to algorytm Euklidesa obliczy $\text{NWD}(a, b)$ w co najwyżej $m - 2$ krokach (za krok uznajemy wykonanie dzielenia z resztą).
- Liczby całkowite dodatnie m i n spełniają podzielność $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.
- Liczby naturalne $a > b > 1$ spełniają podzielności $a + b \mid ab + 1$ i $a - b \mid ab - 1$. Dowiedzieć, że $a < b\sqrt{3}$.
- Niech k, m i n będą ustalonymi liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniającymi warunek $\text{NWD}(km, n) = 1$. Dowiedzieć, że równanie $a^k + b^m = c^n$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c .

Wskazówki do zadań
 1. Zaczodź od podzielności $a^2 + 2a + 3 \mid a^2 + 2a + 3 + 5(a^2 + 2a + 3)$. Prawa strona jest równa zero albo nie mniejsza, co do bezwzględnej wartości, od lewej.
 2. Mamy $d \mid n(m^2n - 1) - m(mn^2 - 1)$.
 3. Rozłożyć na iloczyn dwóch czynników $4ab + 1 + 2(a + b + 1)$. Co najmniej jeden z nich musi się dzielić przez $a + b + 1$.
 4. Uzasadnić i zastosować nierówność $r_k \geq r_{k+1} + 1$ dla odpowiednich k .
 5. Niech $d = \text{NWD}(m, n)$. Udowodnić, że $d^2 \mid m$ oraz $m \mid n^2$. Wywnioskować z tego, że $d^2 \mid m$ i $d \mid n$. Wygodnie będzie zapisać $n = ad$ i $m = bd$ – wtedy $\text{NWD}(a, b) = 1$.
 6. Wykazać, że liczby $a - b$ i $a + b$ są dzielnikami $b^2 - 1$. Oszacować $\text{NWD}(a - b, a + b) \geq 2$ i wywnioskować, że $a^2 - b^2 \leq 2$ (z czego wynika teza).
 7. Niech $a = 2kx$, $b = 2ky$, $c = 2z$. Wówczas $a + b + 1$ i c są liczbami całkowitymi dodatnimi i y , które spełniają równość $x(m) + 1 = n$.

M

a

t

h

s

B

e

y

o

n

d

L

i

m

i

t

s



Maths Beyond Limits to międzynarodowy obóz matematyczny odbywający się każdej jesieni w Milówce koło Żywca. Jeśli masz 15-19 lat, interesujesz się matematyką i chciałbyś spotkać pasjonatów matematyki z innych krajów, ten obóz jest dla Ciebie! MBL jest organizowany przez grupę dawnych olimpijczyków, obecnie studentów różnych uczelni. Szósta edycja odbędzie się w dniach 13-25 września 2021. Wszystkich chętnych zapraszamy do rekrutacji, która zaczyna się 1 maja i trwa do 30 maja. Dokładne informacje można znaleźć na naszej stronie internetowej i mediach społecznościowych.

Skontaktuj się z nami!



mathsbeyondlimits.eu



[instagram.com/
maths_beyond_limits](https://www.instagram.com/maths_beyond_limits)



[facebook.com/
mathsbeyondlimits](https://www.facebook.com/mathsbeyondlimits)



mathsbeyondlimits@gmail.com