

delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

$\pi=3,141592\dots$

NR 3 (586) 2023

CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

**Permutacje
i kostka Rubika**

str. 1






UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

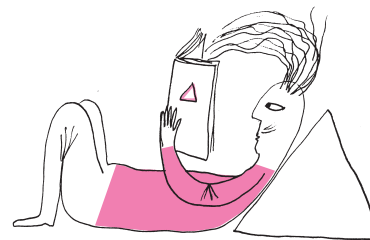


Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (586)

Permutacje i kostka Rubika <i>Karol Gryszka, Adrian Kołcz</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Z butelki Kleina i Salomon nie należy? <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 4
36 splełanych oficerów z Petersburga <i>Grzegorz Rajchel-Mieldzioc, Wojciech Bruzda, Adam Burchardt, Karol Życzkowski</i>	str. 6
AdaBoost: Mądrość tłumu <i>Artur Jeż</i>	str. 10
 Oko – narząd do zbadania <i>Magdalena Fikus</i>	str. 13
Modele Wszechświata dla początkujących Część 3: Mrówki w punkcie przegięcia <i>Szymon Charzyński</i>	str. 14
Co kryją w sobie łącznościacy? <i>Robert Szafarczyk</i>	str. 17
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Odkrycia z JWST Makrofotografia wypływów pochodzących z aktywnych jąder galaktyk	str. 22
Niebo w marcu	str. 22
Aktualności Jak zostałem królem Internetu	str. 24
 Wszystko w porządku <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze: sprawdzimy,
jak pan Marek wybierał gospodarza.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Permutacje i kostka Rubika

Karol GRYSZKA*, Adrian KOŁCZ**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
** Student Matematyki,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kostka Rubika jest niezwykle popularną łamigłówką, zagościła także na łamach *Delty* (np. w artykule *Kostka Rubika – wspomnienia z dawnych lat z Δ_{11}^5* ; tam też Autorzy pokazali metodę jej układania). W tym artykule zajmiemy się jednym z matematycznych sposobów opisu kostki oraz jego konsekwencjami. W kostce Rubika dokonuje się mieszania jej elementów, dlatego naturalnym narzędziem do jej opisu są **permutacje**. Przypomnijmy – permutacja zbioru n -elementowego to dowolny n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Inaczej, jest to bijekcja σ pewnego skończonego zbioru S w siebie. Jeśli permutujemy litery A, B, C, D , **postacią macierzową** permutacji σ jest

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \sigma(A) & \sigma(B) & \sigma(C) & \sigma(D) \end{pmatrix}, \text{ na przykład } \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

Permutacja σ jest cyklem, o ile istnieje taki zbiór $S_c = \{a_1, \dots, a_k\} \subset S$, że $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{k-1}) = a_k$ i $\sigma(a_k) = a_1$ oraz $\sigma(a) = a$ dla $a \in S \setminus S_c$.

Specjalnym rodzajem permutacji są **cykle**, czyli takie permutacje, w których pewne elementy nie ruszają się, pozostałe zaś wymieniają się między sobą... cóż, cyklicznie (na marginesie podajemy formalną definicję cyklu). Podana wcześniej permutacja nie jest cyklem, ale

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix}$$

nim jest i zapisywana jest krótko jako $(B C D)$. W tym zapisie każda kolejna litera przechodzi na następną, to jest $\sigma(B) = C, \sigma(C) = D$ oraz $\sigma(D) = B$. Wśród permutacji wyróżniamy jeszcze tak zwaną **permutację identycznościową** I , czyli taką permutację, że $I(a) = a$ dla każdego $a \in S$.

Każda permutacja posiada swój **rząd**, który jest definiowany jako minimalna liczba powtórzeń tej permutacji prowadząca do permutacji identycznościowej. Na przykład cykl $(A B C)$ ma rząd równy 3, gdyż

$$(A B C) \circ (A B C) \circ (A B C) = I.$$

Symbolem \circ oznaczamy składanie permutacji (permutacje to funkcje, a te potrafimy składać). Z definicji cyklu wynika, że jego rząd jest równy liczbie jego elementów. Fakt ten będziemy wykorzystywać wielokrotnie w obliczeniach.

Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn cykli **rozłącznych** (czyli takich, które nie zawierają wspólnych elementów). Na przykład

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \\ B & I & A & F & D & E & C & J & G & H \end{pmatrix} = (A B I G C) \circ (D F E) \circ (H J).$$

Znając rozkład permutacji na cykle rozłączne, jesteśmy w stanie znacznie łatwiej obliczyć jej rząd. Wystarczy w tym celu obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność rządów z rozkładu. Cykle z powyższego rozkładu są odpowiednio rzędu 5, 3 i 2, stąd cała permutacja jest rzędu $\text{NWW}(5, 3, 2) = 30$.

Kostka Rubika. W tej części artykułu zostawimy na chwilę wątek permutacji i opowiemy o kostce Rubika. Zmiana ta jest uzasadniona, gdyż naszym dalszym celem będzie zapisanie ruchów na kostce w języku specjalnych permutacji.

Kostka Rubika została wynaleziona przez Ernő Rubika w 1974 roku, do Polski trafiła w 1982 roku. Jest to łamigłówka w kształcie sześcianu $3 \times 3 \times 3$, w której zadaniem jest takie ułożenie mniejszych kosteczek, aby układ tworzył 6 ścian jednolitego koloru (w standardowym układzie barw: biały, żółty, zielony, niebieski, czerwony i pomarańczowy). Dwukolorowe kosteczki nazywać będziemy **krawędziami**, a trójkolorowe kosteczki – **rogami**. Nieruchome względem siebie jednokolorowe elementy nazywamy **środkami**.

Wprowadzimy teraz pewne oznaczenia. Zaczniemy od przypisania ścianom liter jak na rysunku na marginesie: **U, D, L, R, F, B**. Oznaczenia te są zgodne z pierwszymi literami angielskich nazw ścian. Dana litera będzie również oznaczać obrót odpowiadającą jej ścianą o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara (a więc **F** oznacza ruch przednią ścianą o kąt prosty w prawo). Ponadto wprowadzamy dodatkowe oznaczenia. Jeżeli obok litery ustawimy znak $'$, obrót wykonujemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (na przykład **R'** oznacza obrót prawej ściany o 90° w kierunku **przeciwnym** do ruchu wskazówek zegara). Zwyczajowo obrót danej ściany o 180° oznacza się przez dodanie dwójki



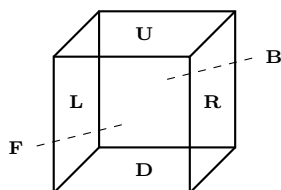
Rozwiązanie zadania M 1738.

Odpowiedź: 120.

Łącznie jest 210 sum, czyli po 105 każdego znaku. Oznaczmy przez x liczbę liczb dodatnich, a przez y liczbę liczb ujemnych. Zminimalizujemy liczbę ujemnych iloczynów xy . Przy ustalonej sumie, iloczyn liczb jest tym mniejszy, im bardziej są od siebie oddalone. Żadna z liczb x i y nie może być większa niż 15 (w przeciwnym razie liczba sum odpowiedniego znaku będzie większa niż $(15 \cdot 14)/2 = 105$), więc optymalny wynik będzie przy $x = 15, y = 6$ (lub odwrotnie). W takim przypadku liczba ujemnych iloczynów wynosi 90, co dowodzi, że nie możemy uzyskać więcej niż 120 dodatnich iloczynów.

Z drugiej strony, taką liczbę osiągniemy, biorąc na przykład piętnaście liczb równych 1, a sześć równych -2 .

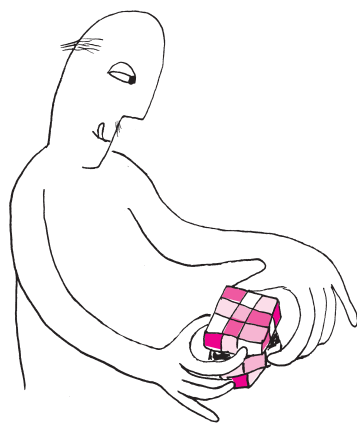
Ernő Rubik (ur. 13 lipca 1944 w Budapeszcie) – węgierski architekt i rzeźbiarz. Ciekawostką jest fakt, że wynalazca kostki po raz pierwszy układał ją przez miesiąc.



Up, Down, Left, Right, Front i Back.

	ULB	UB	UBR	
	UL	U	UR	RUB
	UFL	UF	URF	RU
FLU	FU	FUR	RFU	RU
FL	F	FR	RF	R
FDL	FD	FRD	RDF	RD
				RBD

Opis pól narożnych moglibyśmy ujednoznaczyć np. poprzez ustalenie, że kolejne litery czytamy zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół narożnika (a więc mamy pole FUR, ale również pola FLU, FDL i FRD – cztery pola na przedniej ścianie).



Załóżmy, że ruch Ψ ma rząd N . Wtedy zaczynając od ułożonej kostki i powtarzając na niej ruch Ψ , dojdziemy do ułożonej kostki dopiero po N ruchach. Jeśli nie wyczerpaliśmy w ten sposób wszystkich ustawień, możemy rozważyć takie, którego jeszcze nie zaobserwowaliśmy, i to na nim wykonywać ruch Ψ – dostaniemy kolejnych N ustawień, różnych od poprzednich. Kontynuujemy tę procedurę, dopóki nie wygenerujemy w ten sposób wszystkich ustawień – za każdym razem powiększamy grono zaobserwowanych o N nowych, w związku z czym N musi być dzielnikiem liczby wszystkich ustawień.

Grupą nazywamy zbiór G , w którym określone dwuargumentowe działanie $*$: $G \times G \rightarrow G$ jest łączne, posiada element neutralny e i każdy element x posiada taki element \bar{x} (nazywany odwrotnym), że $x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$. Więcej o grupach można przeczytać w artykule Joachima Jelisiejewa z Δ_{19}^4 .

po jej nazwie (np. **R2**). Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować notację potęgową na powtarzające się ruchy lub całe sekwencje, na przykład sekwencja **RU** powtórzona 6 razy może zostać zapisana jako **(RU)⁶**. Zaznaczmy ponadto, że sekwencje wykonujemy w kolejności, w jakiej je czytamy – od lewej do prawej.

Permutacje i kostka Rubika. Na potrzeby dalszej części tekstu przyda nam się nazwać konkretne pola występujące na ścianach kostki Rubika (każda ma ich dziewięć). Nazwy będą jedno-, dwu- lub trzyliterowe, przy czym pierwsza litera będzie nazwą ściany, na której dane pole się znajduje. Kolejne litery to nazwy wszystkich ścian, z którymi dane pole sąsiaduje (o ile nie mamy do czynienia z polem centralnym). Przyjmijmy ponadto, że pola narożne mają dwie różne, pełnoprawne nazwy (np. FUR i FRU). Dla odróżnienia od nazw ruchów i ich układów, nazwy pól nie będą wykorzystywały pogrubionej czcionki.

Każdy z opisanych wcześniej ruchów odpowiada pewnej permutacji pól. Przedstawienie tej permutacji jako złożenia rozłącznych cykli nazwiemy **postacią rozszerzoną** danego ruchu. Pomimo takiej nazwy pozwolimy sobie na pewien skrót. Zauważmy, że jeśli pole XY przechodzi na pole PQ, to pole YX musi przejść na pole QP. Podobnie, jeśli XYZ przechodzi na PQR, to YZX i ZXY przechodzą na QRP i RPQ. Zatem cykle pól o dwuliterowych nazwach moglibyśmy połączyć w pary, a cykle pól o trzyliterowych nazwach – w trójki. Dla zwiększenia czytelności będziemy wybierać z nich po jednym reprezentancie. Dla przykładu rozważmy R. Obrót ten w postaci rozszerzonej prezentuje się następująco:

$$(FRU \ URB \ BRD \ DRF) \ (FR \ UR \ BR \ DR).$$

W powyższym zapisie celowo pominęliśmy zatem cykl (RF, RU, RB, RD) oraz (RUF, RBU, RDB, RFD) i (UFR, BUR, DBR, FDR). Z postaci rozszerzonej natychmiast wynika, że jest to permutacja rzędu $NWW(4, 4) = 4$, co nas nie zaskakuje – czterokrotne wykonanie **R** faktycznie powoduje powrót do konfiguracji wyjściowej.

Zobaczmy to na jeszcze innym przykładzie – sekwencji **RU**. Postać rozszerzona tych dwóch obrotów prezentuje się następująco:

$$(FR \ UF \ UL \ UB \ UR \ BR \ DR) \ (FUR \ URF \ RFU) \\ (FUL \ LUB \ BUR \ DBR \ FDR \ ULF \ UBL \ URB \ BRD \ DRF \ LFU \ BLU \ RBU \ RDB \ DFB).$$

Zgodnie z wiadomościami z pierwszej części, rząd takiej permutacji jest równy $NWW(7, 3, 15) = 105$. Cierpliwym Czytelnikiem posiadającym kostkę Rubika może sprawdzić na ułożonej kostce, że wykonanie sekwencji **RU** 105 razy przywraca ją do pozycji pierwotnej.

Bazując na powyższych przykładach, możemy zadać pytanie o istnienie konkretnego rzędu permutacji występującego na kostce. Można uzasadnić, że potencjalne rzędy muszą być dzielnikami liczby wszystkich możliwych układów (skrótowe wytłumaczenie na marginesie obok). Wyznaczenie tej liczby nie jest zupełnie trywialne, nie jest też jednak ekstremalnie trudne. Okazuje się, że wszystkich możliwych ustawień kostki jest

$$43 \ 252 \ 003 \ 274 \ 489 \ 856 \ 000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

czyli ponad 43 tryliony możliwości. Chociaż każdy potencjalny rząd musi być dzielnikiem powyższej liczby, zależność odwrotna nie jest prawdziwa – nie każdy dzielnik jest rzędem pewnego elementu. Okazuje się jednak, że dzielniki pierwsze mają tę własność, co jest treścią wywodzącego się z teorii grup twierdzenia Cauchy'ego, które w pełnym brzmieniu przytaczamy poniżej:

Twierdzenie Cauchy'ego. *Jeżeli G jest skończoną grupą z działaniem $*$ i p jest liczbą pierwszą będącą dzielnikiem rzędu grupy G , to w G istnieje element rzędu p . Oznacza to, że istnieje $x \in G$ taki, że $x^p := \underbrace{x * \dots * x}_p = e$ oraz $x^k \neq e$ dla $k < p$.*

Ruchy wykonywane na kostce Rubika tworzą grupę, zatem zasadne jest korzystanie z powyższego twierdzenia, które prowadzi nas do następującego wniosku:

Wniosek. Na kostce Rubika istnieją permutacje rzędu 2, 3, 5, 7, 11.

Wskażemy teraz przykłady takich permutacji, oczywiście są one jednymi z wielu możliwych występujących na kostce.

Permutacją rzędu 2 jest na przykład obrót dowolnej ściany o 180° . Ponieważ rząd \mathbf{RU} jest równy 105, rzędy permutacji $(\mathbf{RU})^{35}$, $(\mathbf{RU})^{21}$, $(\mathbf{RU})^{15}$ są odpowiednio równe 3, 5, 7. Permutacją rzędu 7 jest również permutacja $\mathbf{RU}'\mathbf{F}'\mathbf{U}$. Permutacja $\mathbf{RL}'\mathbf{F}'\mathbf{U}$ jest rzędu 33, zatem permutacja $(\mathbf{RL}'\mathbf{F}'\mathbf{U})^3$ jest rzędu 11, a permutacja $(\mathbf{RL}'\mathbf{F}'\mathbf{U})^{11}$ jest rzędu 3.

Znana jest pełna lista możliwych rzędów sekwencji na kostce Rubika. W kolejności od najrzadszych do najpopularniejszych (w sensie liczby permutacji o danym rzędzie) są to: 1, 11, 2, 3, 5, 7, 22, 4, 55, 110, 80, 15, 33, 14, 21, 1260, 9, 10, 35, 280, 28, 315, 44, 99, 720, 112, 6, 16, 495, 990, 77, 154, 45, 20, 165, 330, 140, 105, 504, 840, 336, 63, 8, 70, 231, 462, 630, 66; 240, 126, 18, 360, 132, 56, 252, 144, 42, 198, 48, 420, 168, 40, 210, 72, 84, 90, 120 30, 12, 180, 36, 24, 60.

Przyglądając się powyższemu ciągowi liczb, możemy dostrzec, że największym rzędem permutacji jest 1260.

Jedną z wielu permutacji o takim rzędzie jest $(\mathbf{R F 2 B' U B'})$. Permutacja w postaci rozszerzonej prezentuje się następująco:

(FU FD LU BR DR FL FR) (RU LB UR BL) (UB DB)
 (FRU DLB BRD RBU LUB UFR BDL DBR URB BLU
 RUF LBD RDB BUR UBL)
 (LFU RFD LDF FUL FDR DFL ULF DRF FLD).

Rzędy cykli są odpowiednio równe: 7, 4, 2, 15, 9, zatem rząd permutacji jest faktycznie równy $\text{NWW}(7, 4, 2, 15, 9) = 1260$. Nie jest to oczywiście jedyna permutacja o takim rzędzie – jest ich w ogólności dokładnie 51 490 480 088 678 400 (z drugiej strony jest to permutacja o takim rzędzie wymagająca najmniejszej liczby ruchów w sekwencji). Innym przykładem jest $(\mathbf{U F' U' D 2 U 2 R'})$; zachęcamy Czytelnika do sprawdzenia tego faktu (oczywiście w sposób teoretyczny, a nie empiryczny!).

Powyższe rozważania pokazują, że odpowiedni opis matematyczny pozwala czasem na wysnuć wniosków, które trudno jest uzyskać na drodze czysto doświadczalnej. O ile wyznaczenie rzędu przez postać rozszerzoną okazało się bardzo proste, to wykonanie algorytmu 1260 razy może być bardzo uciążliwe, a jeden błąd może całkowicie zniweczyć „ręczne” sprawdzenie rzędu. Zauważmy jednocześnie, że z artykułu wiemy również, że dowolna sekwencja ruchów powtarzana dostatecznie wiele razy w końcu przywróci kostkę do pozycji ułożonej, choćby nie wiadomo jak bardzo „trudna” była to sekwencja.

Mamy nadzieję, że po przeczytaniu tego artykułu kostka Rubika skrywa nieco mniej tajemnic, niemniej jest to w dalszym ciągu bardzo obszerny temat, do którego zgłębiania mocno zachęcamy.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1738. Danych jest 21 niezerowych liczb. Dla każdej pary liczb obliczono ich sumę oraz iloczyn. Okazało się, że połowa wszystkich sum jest dodatnia, a połowa ujemna. Jaka jest największa możliwa liczba dodatnich iloczynów?
 Rozwiązanie na str. 1

M 1739. Cięciwy AB i CD okręgu Ω przecinają się w punkcie E tak, że $AD = AE = EB$. Niech F będzie punktem na odcinku CE takim, że $ED = CF$. Dwusieczna kąta AFC przecina łuk DAC okręgu Ω w punkcie P . Udowodnić, że punkty A, E, F i P leżą na jednym okręgu.
 Rozwiązanie na str. 6

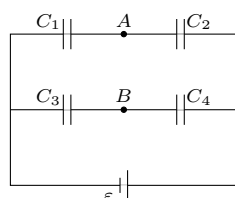
M 1740. Dana jest liczba całkowita dodatnia n , która jest równa sumie $k \geq 3$ swoich dzielników (parami różnych). Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n . Uzasadnić, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+k-1} \geq 1.$$

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1067. Jaki warunek muszą spełniać pojemności C_1, C_2, C_3 i C_4 w obwodzie przedstawionym na rysunku, żeby napięcie między punktami A i B wynosiło $U_{AB} = 0$?
 Rozwiązanie na str. 11



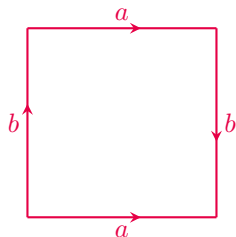
F 1068. Długi, cienki, poziomy przewód jest równomiernie naładowany ładunkiem λ na jednostkę długości. Przewód znajduje się na wysokości h nad powierzchnią ziemi. Ile wynosi powierzchniowa gęstość ładunku, σ , na powierzchni ziemi w odległości x od prostej otrzymanej jako pionowy rzut przewodu na powierzchnię ziemi?

Wskazówka: powierzchnię ziemi należy traktować jak powierzchnię przewodnika.
 Rozwiązanie na str. 12

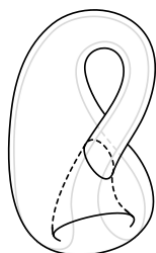
Z butelki Kleina i Salomon nie należy?

Michał MIŚKIEWICZ*

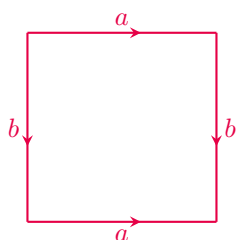
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW; Instytut Matematyczny PAN



Rys. 1. Diagram opisujący butelkę Kleina przez sklejenie a z a oraz b z b



Rys. 2. Poglądowa (nieco ułamna) ilustracja butelki Kleina. Nieszczelność takiej butelki pokazuje filmik *How to fill a Klein bottle* dostępny na kanale Numberphile: youtu.be/dfhiVaJj9UY



Rys. 3. Diagram opisujący torus przez sklejenie

Podana definicja została przyjęta jedynie na potrzeby niniejszego artykułu, a nie jest terminem zaczerpniętym z fachowej literatury. Zdecydowanie nie jest też jedyną możliwą definicją i zachęcam Czytelnika do zbadania innych – być może bardziej naturalnych – możliwości.

Butelka Kleina to bardzo dziwna butelka. Otrzymuje się ją poprzez sklejenie boków kwadratu z rysunku 1 zgodnie ze strzałkami. Dla topologa opis taki będzie wystarczający – domyśli się on, że przez *sklejenie* rozumiemy tu abstrakcyjną operację *utożsamienia* odpowiednich par punktów – ale dla lepszego obrazu sytuacji prześledźmy krok po kroku, jak takie sklejenie mogłoby wyglądać. Korzystając z trzeciego wymiaru, możemy wygiąć kwadrat i skleić strzałki a , otrzymując powierzchnię boczną walca. Deformując materiał jeszcze bardziej, możemy zgiąć walec niczym podkowę, by zbliżyć jego podstawy do siebie i... przekonać się, że strzałki b wskazują w złą stronę!

Znana ilustracja z rysunku 2 prezentuje jedno z rozwiązań tego problemu. Żeby zetknąć strzałki b w zgodzie z zadaną orientacją, wycinamy mały otwór w walcu, a następnie jedną z części podkowy przeprowadzamy przez ten otwór na spotkanie drugiej części, niejako *od środka*. W ten sposób strzałki b spotykają się w prawidłowy sposób.

Warto samodzielnie wykonać eksperyment myślowy: **co stanie się, gdy napelnimy butelkę Kleina wodą?** Czy będzie ona szczelnie zamknięta? A najlepiej zacząć od refleksji: **co to znaczy, że woda znajduje się we wnętrzu butelki Kleina?**

Patrząc na rysunek 2, można zauważyć, że wodę umieszczoną w baniastej części butelki łatwo wylać, odpowiednio obracając całą butelkę. Jest to związane z *jednostronnością* butelki Kleina. Cecha ta – wspólna ze znaną szerzej *wstęgą Möbiusa* – oznacza, że małą kulkę umieszczoną na powierzchni zawsze możemy przetoczyć tak, by znalazła się w tym samym miejscu powierzchni, ale po drugiej stronie.

Przypomnijmy jednak, że nasza ilustracja nie przedstawia prawdziwej butelki Kleina, a jedynie butelkę z wyciętą dziurą, co tłumaczy zauważoną nieszczelność. Dziurę tę możemy załatać, na powrót dodając brakujący dysk. Otrzymana powierzchnia ma wtedy samoprzecięcie. Jest to tzw. *immersja* butelki Kleina i dobrze oddaje jej geometrię, jeśli tylko będziemy pamiętali, że samoprzecięcie jest tylko cechą naszej ilustracji, a sama butelka tego przecięcia nie ma. Pozostaje jednak problem *jednostronności* i wydaje się on skutecznie uniemożliwiać wyróżnienie wnętrza i zewnątrz butelki.

A z czego da się nalać? Żeby lepiej zrozumieć, gdzie leży problem, wskaźmy pewne przykłady pozytywne. Problemu ze szczelnością nie ma na przykład sfera. Przedmioty umieszczone wewnątrz niej – czyli w kuli – nie wydostaną się na zewnątrz.

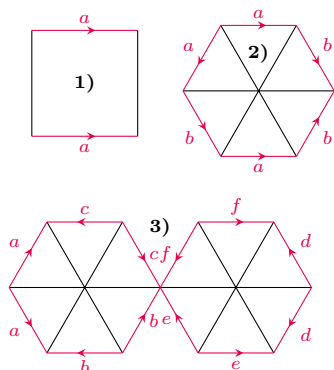
Szczelny jest też bliski kuzyn butelki Kleina – torus – zdefiniowany jako kwadrat skleiony zgodnie z diagramem pokazanym na rysunku 3. Kiedy przystępujemy do przestrzennego sklejanego, nie napotykamy na problem niezgodności i otrzymujemy znajomy kształt dętki rowerowej. Przykładowym opisem tego kształtu w \mathbb{R}^3 będzie zbiór punktów

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Podobnie jak dla sfery, łatwo znajdujemy jego wypełnienie – jest to zbiór opisany tą samą formułą, tylko z równością $=$ zamienioną na znak nierówności \leq .

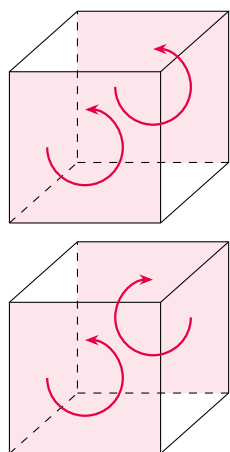
Dotychczasowa opowieść o *szczelności* jest nieściśła, więc może się wydawać jałowa. Żeby tego uniknąć, na podstawie powyższych trzech przykładów zaproponuję następującą definicję wypełnienia powierzchni:

Definicja. Umówimy się, że powierzchnię \mathcal{S} da się wypełnić, jeśli istnieje figura trójwymiarowa \mathcal{M} , dla której *brzegiem* jest powierzchnia \mathcal{S} .

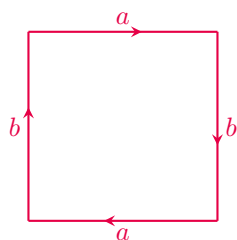


Rys. 4. Przykłady opisów sklejeń, które nie zadają powierzchni zgodnie z definicją:

- 1) walec ma niesparowane krawędzie (należące do tylko jednego wielokąta),
- 2) trąbka Borsuka ma krawędzie należące do trzech wielokątów,
- 3) bukiet dwóch sfer ma wierzchołek należący do sześciu wielokątów, które jednak nie są kolejno połączone krawędziami (za to układają się w dwa cykle)



Rys. 5. Trójwymiarowe diagramy opisujące, odpowiednio, wypełnienie torusa oraz butelki Kleina



Rys. 6. Płaszczyzna rzutowa – trzecia możliwość sklejenia kwadratu w zamkniętą powierzchnię

Od razu wyjaśnijmy kilka terminologicznych niejasności:

- Jako powierzchnię \mathcal{S} dopuszczamy nie tylko powierzchnię w \mathbb{R}^3 , ale każdą powierzchnię opisaną przez sklejenie pewnej liczby wielokątów, o ile po sklejeniu każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch wielokątów, a każdy wierzchołek należy do pewnej liczby wielokątów kolejno połączonych krawędziami (warunki te wykluczają istnienie brzegu oraz różne niepożądane osobliwości).
- Podobnie, za dopuszczalną figurę trójwymiarową \mathcal{M} uznamy efekt sklejenia pewnej liczby wielościanów, przy czym ponownie wymagamy, by przepis ten wykluczał osobliwości.
- Dopuszczamy jednak, że niektóre ściany w opisie sklejenia \mathcal{M} nie są sklezione z żadną inną ścianą. Powierzchnię opisaną przez sklejenie samych niesparowanych ścian (z pominięciem reszty) będziemy nazywać *brzegiem* \mathcal{M} . W definicji żądamy, by brzeg ten był tożsamy z powierzchnią \mathcal{S} .
- *Nie żądamy*, by sklejenie było fizycznie wykonalne w przestrzeni trójwymiarowej; dopuszczamy więc w szczególności butelkę Kleina jako prawidłowo określoną powierzchnię.

A jednak się da! W świetle przyjętej definicji da się znaleźć wewnątrz dla butelki Kleina. Zaczniemy jednak od przykładów.

Figurą o brzegu będącym sferą jest na przykład pojedyncza kostka jednostkowa (sześcian) $[0, 1]^3$, bez potrzeby sklejan. Brzegiem jest tutaj oczywiście powierzchnia sześcianu, jednak jeśli przyjmiemy – tak jak do tej pory – tolerancyjne podejście do deformowania powierzchni, to po pewnym napompowaniu otrzymamy sferę.

W przypadku torusa możliwość wypełnienia można zauważyć już na etapie sklejan, gdy mamy do czynienia z walcem; walec ma przecież wypełnienie! Rozważmy więc znowu kostkę $[0, 1]^3$ (po napompowaniu odpowiadającą pełnemu walcowi), jednak tym razem ze sklejonymi dwiema przeciwległymi ścianami jak na rysunku 5. Jest to przykład figury, o jakiej mowa w definicji. A brzeg? Niesparowane ściany po dokonaniu sklejenia (przepis nakazuje sklejenie dwóch zamkniętych łamanych) tworzą torus.

Z tej perspektywy nie jest trudno znaleźć wypełnienie również dla butelki Kleina – wystarczy na poprzednim diagramie zmodyfikować przepis sklejan przeciwległych ścian. Zachęcam do samodzielnego przekonania się, że otrzymany przepis nie powoduje powstania osobliwości, a sklejenie brzegu daje właśnie butelkę Kleina.

Z wielu możliwych refleksji, jakie pociąga za sobą zarysowane wyżej abstrakcyjne spojrzenie, chciałbym wyróżnić jedną. Mianowicie również **jednostronność nie jest cechą powierzchni, a jedynie jej przestrzennej reprezentacji**. Przykładem tego jest butelka Kleina, ale prostszy przykład można zauważyć już wymiar niżej. Otóż każdy okrąg na płaszczyźnie ma dwie strony (po jednej z nich jest koło), ale już okrąg poprowadzony wzdłuż wstęgi Möbiusa ma tylko jedną, o czym łatwo się przekonać, rozcinając wstęgę Möbiusa wzdłuż takiej krzywej na dwa kawałki (no właśnie! czy na pewno dwa?). Może to naprowadzić Czytelnika na słuszny trop łączący jednostronność powierzchni z orientowalnością zarówno jej samej, jak i otaczającej przestrzeni.

Ciąg dalszy. Wielu Czytelników *Delty* zna jeszcze jednego kuzyna butelki Kleina i torusa – płaszczyznę rzutową. Niestety, płaszczyzna rzutowa wypełnienia nie posiada.

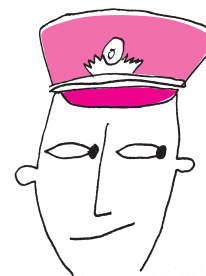
Po poznaniu tylu pozytywnych przykładów ta negatywna odpowiedź może zaskakiwać. Tym bardziej, że jak mielibyśmy wykazać niemożliwość znalezienia wewnątrz? Wszak możliwych przepisów sklejeń jest nieskończenie wiele. Czytelnik odpowiednio doświadczony zapewne przeczuwa, że odegra tu rolę pewien niezmiennik. I słusznie! Będzie nim charakterystyka Eulera. Nie wnikając w szczegóły, dla powierzchni złożonej z F wielokątów, E krawędzi i V wierzchołków jest to liczba $\chi = V - E + F$; okazuje się, że nie zależy ona

$$\begin{aligned}\chi(\text{sfera}) &= 2 \\ \chi(\text{torus}) &= 0 \\ \chi(\text{but. Kleina}) &= 0 \\ \chi(\text{pl. rzut.}) &= 1\end{aligned}$$

od wybranego podziału powierzchni na wielokąty, i właśnie dlatego nazywamy ją niezmiennikiem. Charakterystyki Eulera interesujących nas powierzchni podałem na marginesie – polecam wyliczyć je samodzielnie. Płaszczyzna rzutowa wyróżnia się na naszej liście tym, że jej charakterystyka jest nieparzysta. Pozostaje nam więc przekonać się, że:

Twierdzenie. *Jeśli powierzchnię \mathcal{S} da się wypełnić, to jej charakterystyka Eulera $\chi(\mathcal{S})$ jest liczbą parzystą.*

Twierdzenie to nie jest łatwe. Zachęcam więc Czytelnika do samodzielnego zbadania wybranych przypadków, a pełny dowód będzie można przeczytać już za miesiąc.



36 splątanych oficerów z Petersburga

Grzegorz RAJCHEL-MIELDZIOĆ^{1,2}, Wojciech BRUZDA³,
Adam BURCHARDT^{3,4}, Karol ŻYCZKOWSKI^{2,3}

¹ ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques, The Barcelona Institute of Science and Technology,

² Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska Akademia Nauk,

³ Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński,

⁴ QuSoft, CWI and University of Amsterdam

Kwadraty magiczne oraz kwadraty grecko-łacińskie zna każdy Czytelnik *Lilāvati* [1] oraz *Śladami Pitagorasa* [2]. Takie obiekty są z jednej strony wdzięcznym przedmiotem rozważań matematyki rozrywkowej, ale też powiązane są z istotnymi problemami kombinatorycznymi, jak również ułatwiają optymalne planowanie eksperymentów.

Rozważmy konstrukcję znaną co najmniej od XIII wieku [3], kwadrat łańciski. Jest to tablica o wymiarze d na d , wypełniona d elementami (np. literami alfabetu łańciskiego) w ten sposób, że elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie. Przykład wymiaru 3 przedstawia rysunek 1. Przykład ten stworzony został z pierwszego wiersza (A, B, C) poprzez translację – drugi wiersz przesuwamy o jeden, otrzymując (B, C, A). Z kolei trzeci wiersz jest przesunięty o dwa elementy, (C, A, B). Nietrudno zauważyć, że konstrukcja poprzez translację ma swoje uogólnienie na kwadrat o dowolnym wymiarze d , co dowodzi, że kwadraty łańciskie istnieją dla dowolnego d .

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Rys. 1. Kwadrat łańciski o wymiarze 3. Elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie

Oczywiście kiedy zamienimy litery na dowolne inne symbole, nowy kwadrat łańciski nie będzie się różnił od wyjściowego (można powiedzieć, że są w tej samej klasie równoważności ze względu na zamianę symboli), jak w przykładzie na rysunku 2, gdzie użyjemy symboli stosowanych w kartach do gry.

Czy jednak wszystkie kwadraty łańciskie o danym wymiarze są *takie same* i należą do tej samej klasy równoważności? Odpowiedź brzmi: nie! Skoro tak, to które kwadraty są od siebie najbardziej różne? By odpowiedzieć na to pytanie, najprościej *dodać* je do siebie, dołączając greckie litery dla odróżnienia kolejności kwadratów.

Zacznijmy od dwóch takich kwadratów, które z całą pewnością nie są różne, ponieważ drugi powstaje z pierwszego poprzez zastąpienie liter łańciskich greckimi.

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	\equiv	A♥	K♠	Q♦
$B\beta$	$C\gamma$	$A\alpha$		K♠	Q♦	A♥
$C\gamma$	$A\alpha$	$B\beta$		Q♦	A♥	K♠

Rys. 2. Po lewej stronie równości: dwa identyczne, dodane do siebie kwadraty łańciskie o wymiarze 3, gdzie w drugim kwadracie zamieniliśmy litery łańciskie na greckie: $A \rightarrow \alpha$, $B \rightarrow \beta$ oraz $C \rightarrow \gamma$. Po prawej stronie: równoważny układ, w którym rolę liter łańciskich przyjęły figury karciane, a litery greckie zastąpiono symbolami kolorów. Zauważmy, że każda figura występuje zawsze w tym samym kolorze

Każdy element na rysunku 2 jest parą liter – możliwości stworzenia różnych par jest $3 \times 3 = 9$. Skoro jednak dodawaliśmy takie same kwadraty łańciskie, to w tym przykładzie występują tylko 3 różne: $A\alpha$, $B\beta$ i $C\gamma$.



Rozwiązanie zadania M 1739.

Ponieważ AED jest trójkątem równoramiennym, to BCE jest również równoramienny. Wobec tego $DF = CE = CB$ i $\sphericalangle ADF = \sphericalangle EBC$, ponadto $AD = BE$, skąd AFD jest przystającym do trójkąta równoramiennego BCE . Wobec tego $PF \parallel AD$, zatem $\sphericalangle PFD = 180^\circ - \sphericalangle ADF = \sphericalangle AEF$, czyli AE i PF są symetryczne względem symetralnej odcinka FE , będącego średnicą Ω . Zatem P i A są również symetryczne względem tej średnicy, a stąd czworokąt $AEPF$ jest trapezem równoramiennym – w szczególności można na nim opisać okrąg.

Co ciekawe, kwadraty grecko-lacińskie są powiązane z innymi popularnymi obiektami matematyki rozrywkowej – kwadratami magicznymi (w których każdy wiersz i kolumna sumuje się do stałej wartości). Leonhard Euler zauważył, że zamieniając parę (a, b) z kwadratu grecko-lacińskiego o rozmiarze d na liczbę $ad + b + 1$, dostajemy kwadrat magiczny. Czytelnikowi można nawet pozostawić sprawdzenie obserwacji Eulera dla dowolnego d . Nie jest to trudne, a pozwala lepiej zrozumieć, czym jest kwadrat grecko-laciński. Poniżej przykład tej konstrukcji dla kwadratu magicznego o sumie 27:

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

↓

5	9	13
10	11	6
12	7	8

Według legendy problem został sformułowany w nawiązaniu do rozkazu dotyczącego ustawienia 36 oficerów z sześciu rodzajów sił zbrojnych, każdy reprezentowany przez sześciu oficerów różnego stopnia, przed dworem carycy Katarzyny w Petersburgu.

Wektory opisujące stany kwantowe, podobnie jak te znane ze szkoły, mogą być do siebie prostopadłe, czyli *ortogonalne*. Wtedy są perfekcyjnie rozróżnialne – jednak w fizyce kwantowej często dysponujemy stanami nieortogonalnymi, a wówczas nie ma doświadczenia, które jest w stanie je zawsze odróżnić!

Stan kwantowy to narzędzie matematyczne pozwalające obliczać prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku w pomiarze kwantowym. W najprostszym przypadku to znormalizowany wektor $|\psi\rangle$ w przestrzeni zespolonej, określony z dokładnością do fazy. W notacji Diraca ta relacja równoważności przyjmuje postać $e^{i\phi}|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$, a warunek normalizacji to $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Inaczej mówiąc, umawiamy się, że dwa niezerowe wektory, które są do siebie proporcjonalne, opisują ten sam stan. Wymiar przestrzeni odpowiada liczbie rozróżnialnych wyników pomiaru i wynosi $d = 2$ dla rzutu monetą (dwie strony monety) oraz $d = 6$ dla rzutu kostką (sześć ścianek kostki). W przypadku kubitu (bit kwantowy) – czyli dla $d = 2$ – stany kwantowe tworzą zbiór zwany *Sferą Blocha*. Ponieważ stanowi kwantowemu odpowiada kierunek w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej, to zbiór stanów kwantowych jest zbiorem kierunków, który okazuje się właśnie sferą. Stan reprezentujący punkt na sferze Blocha jest dany przez $|\psi\rangle = (\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi})$, gdzie kąt polarny $\vartheta \in [0, \pi]$, a kąt biegunowy $\varphi \in [0, 2\pi)$.

A α	B β	C γ
B γ	C α	A β
C β	A γ	B α

 \equiv

A♥	K♠	Q♦
K♦	Q♥	A♠
Q♠	A♦	K♥

 \equiv

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

Rys. 3. Przykład kwadratu grecko-lacińskiego w wymiarze 3. Zauważmy, że w środkowym kwadracie każda figura występuje w innym (karcianym) kolorze. Zamiast dwóch liter możemy także używać dwóch cyfr – w nawiasach, by uniknąć nieporozumień (A i $\alpha \rightarrow 1$; B i $\beta \rightarrow 2$; C i $\gamma \rightarrow 3$)

W związku z tym możemy wprowadzić miarę rozróżnialności dwóch kwadratów lacińskich rozmiaru d jako liczbę różnych par w tablicy utworzonej jako ich suma. Jeśli par jest d , to kwadraty były identyczne (należały do tej samej klasy równoważności). Drugi ekstremalny przypadek nazywamy kwadratem **grecko-lacińskim**, gdy zawiera d^2 różnych par.

W przeciwieństwie do kwadratów lacińskich kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją dla każdego wymiaru d . Najprostszym przykładem jest $d = 2$. Czytelnik szybko zauważy, że nie da się skonstruować tablicy 2×2 złożonej ze wszystkich par $A\alpha, A\beta, B\alpha$ i $B\beta$ w ten sposób, aby żadna litera, zarówno grecka, jak i lacińska, nie powtarzała się w wierszach ani w kolumnach.

Rozpatrując większe wymiary d , da się skonstruować kwadraty grecko-lacińskie dla liczb nieparzystych oraz parzystych podzielnych przez 4. Pierwszą liczbą, której nie da się zakwalifikować do żadnego z tych zbiorów, jest $d = 6$, odpowiadające słynnemu problemowi Eulera:

36 oficerów z 6 oddziałów, z których każdy składa się z żołnierzy 6 różnych stopni, ustaw w kwadrat w ten sposób, by we wszystkich wierszach i kolumnach występowały oficerowie każdego stopnia i oddziału.

Jak nietrudno zobaczyć, w języku kombinatoryki jest to dokładnie problem znalezienia kwadratu grecko-lacińskiego o wymiarze $d = 6$. Leonhard Euler był pierwszym, który zauważył że właśnie dla $d = 6$ jest niezwykle ciężko znaleźć odpowiedni kwadrat grecko-laciński, gdyż proste metody nie działały. Sądząc, że podobne problemy wystąpią dla niektórych, wyższych wymiarów, w 1779 roku sformułował hipotezę, że nie istnieją kwadraty grecko-lacińskie dla wymiarów $d = 4k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną [4].

Mimo iż Euler był bez wątpienia jednym z najwybitniejszych matematyków wszech czasów, nie udało mu się udowodnić tej hipotezy. Zawilość problemu sprawiła, że dopiero 121 lat później francuski matematyk-amator Gaston Tarry zdołał udowodnić nieistnienie kwadratów grecko-lacińskich o wymiarze $d = 6$, potwierdzając hipotezę Eulera w kolejnym przypadku (po $d = 2$). Wyczyn ten na tyle zaimponował matematykom, że zaproponowano mu członkostwo we Francuskiej Akademii Nauk.

W roku 1959, dość niespodziewanie, R.C. Bose, S.S. Shrikhande i E.T. Parker udowodnili, iż w każdym wymiarze $d = 4k + 2 \geq 10$ da się znaleźć kwadrat grecko-laciński [5]. Oznacza to, że jedynymi wymiarami, dla których taka konstrukcja nie jest wykonywalna, są $d = 2$ i $d = 6$.

Podejście kwantowe. Gdzież tu jest fizyka? Jak się okazuje, fizyka kwantowa często korzysta ze zdobyczy kombinatoryki. Ale po kolei, zacznijmy od układów klasycznych. . .

Jeden bit (*binary unit*) informacji możemy przedstawić jako wektor znajdujący się w jednym z dwóch położen: „0” („w górę”) lub „1” („w dół”), podobnie jak podrzuczona moneta, która może upaść jedynie orłem lub reszką do góry, albo prąd w przewodniku, który płynie lub nie. Te dwa stany da się zawsze od siebie rozróżnić.

Natomiast w teorii kwantowej dozwolone są wszystkie stany superpozycji; znany kot Schrödingera może być trochę martwy, a trochę żywy. Bardziej ściśle – stany układu dwupoziomowego odpowiadają dowolnemu punktowi sfery, zwanej sferą Blocha. Dwa stany kwantowe są rozróżnialne, gdy opisujące je wektory w pewnej zespolonej przestrzeni są ortogonalne (więcej na marginesie).

Splątanie kwantowe to szczególnie typ korelacji pomiędzy podukładami, a jego miarą może być niepełność informacji o podukładzie, gdy znany jest stan całego układu.

Stany maksymalnie splątane dwóch kubitów to takie, w których pomiar pojedynczego kubitów daje wynik losowy niezależnie od pomiaru, ale jednocześnie określa wynik pomiaru drugiego kubitów. Przykładem stanu maksymalnie splątanego jest *stan Bella* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, gdzie pierwsza cyfra oznacza stan pierwszego kubitów, a druga cyfra drugiego podukładu.



Rys. 5. Wykonując operacje na 4 kwantowych podukładach o sześciu poziomach (odpowiednikach klasycznych kości), można utworzyć silnie splątany stan AME opisany w tym artykule. Przygotowując układ w takim stanie splątaniem i wykonując pomiar na dowolnie wybranej parze kości, można jednoznacznie określić wyniki uzyskane dla pozostałej pary. Stworzenie analogicznego układu czterech klasycznych kości do gry jest niemożliwe, gdyż nie istnieje rozwiązanie problemu 36 oficerów Eulera – kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$

Jak wiemy z rozważań dotyczących kubitów, dwa stany superpozycji też mogą być rozróżnialne, o ile są ortogonalne, np. $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ i $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, gdyż

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z ortogonalności stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

Takiej parze odpowiada para różnych stanów klasycznych, na przykład dwa wektory wodzące skierowane w górę i w dół.

Superpozycja nie jest jedyną niezwykłą własnością układów kwantowych. Szczególnie ciekawym aspektem są również nielokalne korelacje, zwane też *splątaniem* kwantowym. Mówiąc krótko, splątanie dwóch podukładów oznacza, że wykonanie operacji na jednym jest w stanie zmienić drugi – a wszystko to natychmiast, bez przesłania klasycznej informacji! Splątanie wielocząstkowe jest jeszcze bardziej intrygującym zjawiskiem, gdyż w wypadku kwantowych korelacji pomiędzy np. czterema podukładami (mogą to być cztery laboratoria, każde posiadające jeden kubit) nie istnieje *porządek* splątania wśród stanów. Oznacza to, że potrafimy powiedzieć, czy stan jest splątany, czy nie, ale nie zawsze potrafimy powiedzieć, który z dwóch konkretnych stanów jest bardziej splątany (inaczej niż dla dwóch podukładów, gdzie zawsze potrafimy porównać stopień splątania stanów).

Mimo to korzystając ze splątania dwucząstkowego, można zdefiniować stany, które są najbardziej splątane także w przypadku większej liczby podukładów. Stan AME (*absolutely maximally entangled*) jest maksymalnie splątany przy każdym symetrycznym podziale układu czterocząstkowego, jak pokazano w tabeli na rysunku 4.

i	ii	i	ii	i	ii
iii	iv	iii	iv	iii	iv

Rys. 4. Dysponując czterema laboratoriami: i, ii, iii oraz iv, można je równo podzielić na trzy sposoby – obie części wyróżnione kolorem tła. Stan jest AME, jeśli będzie maksymalnie splątany przy każdym z tych dwucząstkowych podziałów

Stany AME indeksowane są dwoma parametrami: liczbą podukładów N oraz lokalnym wymiarem d każdego z podukładów. Istnienie stanu AME o zadanych parametrach N i d jest dalece nietrywialnym problemem, ciekawym z punktu widzenia fizyki teoretycznej oraz teorii informacji kwantowej.

Płątanie kombinatoryczne. Co ciekawe, dysponując kwadratem grecko-lacińskim, możemy skonstruować stan AME dla układu składającego się z czterech laboratoriów. Rozmiar kwadratu grecko-lacińskiego d odpowiada lokalnemu wymiarowi stanu AME, innymi słowy liczbie możliwych wyników pomiaru w jednym laboratorium. Każda komórka kwadratu grecko-lacińskiego koduje wyniki pomiarów w czterech laboratoriach, ponieważ komórka zawiera informację o czterech parametrach: numer kolumny, numer wiersza, litera łacińska, litera grecka. Jeśli ustalimy dowolne dwa z tych parametrów (np. numery kolumny i wiersza), to wartość pozostałych dwóch (np. para liter) jest już wyznaczona jednoznacznie (bo każda para liter występuje dokładnie jeden raz).

Jednak kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją przecież w każdym rozmiarze! Ponieważ takie konfiguracje nie istnieją dla wymiarów $d = 2$ oraz 6 , nie da się w taki sposób skonstruować stanu AME dla układu 4 cząstek, każda z d poziomami. Co więcej, w roku 2000 pokazano, że nie ma także innej konstrukcji stanu AME czterech kubitów [6] (czyli $d = 2$), natomiast przypadek $d = 6$ pozostawał otwarty.

Dopiero w roku 2022 skonstruowano taki stan AME, odpowiadający rozwiązaniu kwantowej wersji zagadnienia 36 oficerów Eulera – Docieklivego Czytelnika odsyłamy do kolorowych rysunków zdobiących prace [7, 8].

Do czego taki stan może się przydać? Jak wiadomo, mechanika kwantowa pozwala na uzyskanie niecodziennych efektów – teleportacja kwantowa, kodowanie supergęste i wiele innych. Większość z nich wykorzystuje kwantowe splątanie, co pozwala nam praktycznie zastosować znaleziony stan AME (rys. 5).

36 splątanych oficerów. Jednak nie tylko kombinatoryka ma wpływ na fizykę – oddziaływanie zachodzi także w drugą stronę. Przytoczony stan maksymalnie splątany pozwala na konstrukcję *kwantowego* kwadratu grecko-lacińskiego o wymiarze 6. Jak to możliwe, skoro kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją? Otóż, jak to zwykle bywa w matematyce, wszystko zależy od założeń.

Dla Czytelnika Zorientowanego Matematycznie: klasyczny kwadrat grecko-laciński w rozmiarze d jest równoważny macierzy permutacji (o odpowiednich własnościach) w wymiarze d^2 , zaś kwantowe kwadraty grecko-lacińskie pozwalają na wykorzystanie macierzy unitarnych (o tych samych własnościach). Nietrudno zauważyć, że skoro macierze permutacji są podzbiorem macierzy unitarnych, to każdy klasyczny kwadrat jest szczególnym przykładem kwadratu kwantowego.

Zasady konstrukcji kwadratu grecko-lacińskiego rozważane przez Eulera wymagają, by każdy element w wierszu (kolumnie) był różny na obu miejscach. W języku informatyki oznacza to, że informacje zawarte w elementach pozwalają je odróżnić idealnie – wynik pomiaru wyznacza miejsce. Tę zasadę możemy uogólnić na przypadek kwantowy, dzięki czemu superpozycje stanów bazowych $\{|i\rangle\}$ też mogą być perfekcyjnie rozróżnione.

Ostatecznie, można zdefiniować kwantowy kwadrat grecko-laciński o wymiarze 6, który jest odpowiednikiem wcześniej opisanego stanu absolutnie maksymalnie splątanego. Uogólniony problem Eulera ma więc rozwiązanie, w przeciwieństwie do jego klasycznej wersji. Dochodzimy zatem do wniosku, że w celu właściwego ustawienia na paradzie w Petersburgu rosyjscy oficerowie muszą być *splątani* [8] (nie mylić z medycznym splątaniem, czyli typem zaburzenia świadomości). Nieprzekonanym Czytelnikom polecamy próbę uzupełnienia kwadratu na rysunku 6.

A♥	K♠	Q♣	J♦	10♣	9*
9♣	10♦	K♣	A*	Q♠	J♥
K*	A♣	?	?	9♦	10♣
J♣	Q*	?	?	A♣	K♦
10♠	9♥	A♦	K♣	J*	Q♣
Q♦	J♣	10*	9♣	K♥	A♠

Rys. 6. Niepełny kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$ utworzony przy użyciu zestawu kart rozszerzonego o dwa dodatkowe kolory: ♣ oraz *. Dwie cechy charakteryzują każdego oficera: symbol oraz kolor. Czytelnik zechce sprawdzić, czy można tak uzupełnić powyższą tabelę, aby w żadnym wierszu ani kolumnie nie powtarzał się żaden symbol {A, K, Q, J, 10, 9} ani kolor {♥, ♦, ♠, ♣, ♣, *, *}, oraz aby żadne dwa pola nie zawierały takiej samej pary symboli

K♠	A♦	10♣ 10*	10♠ 10♣	Q♦ Q♥	Q♣ Q*
A♣	K♥	9♣ 9*	9♠ 9♣	J♦ J♥	J♣ J*
9♠	10♦	Q♣ Q*	Q♠	A♣ A♥	A♣ A*
10♣	9♥	J♣ J*	J♣	K♦ K♥	K♣ K*
Q♣	J♠	K♦	A♣ A*	10♠	10♦ 10♥
J*	Q♣	A♥	K♣ K*	9♣	9♦ 9♥
A♣ A*	A♣ A♣	10♦ 10♥	10♣ 10*	Q♣ Q♣	Q♦ Q♥
K♣ K*	K♣ K♣	9♦ 9♥	9♣ 9*	J♣ J♣	J♦ J♥
9♦	9♣	Q♣ Q♣	Q♦	A♣ A*	A♣
10♥	10*	J♣ J♣	J♥	K♣ K*	K♣
J♦	J♣	A♣ A♣	A♦ A♥	10♣	10♠ 10♣
Q♥	Q*	K♣ K♣	K♦ K♥	9*	9♠ 9♣

Rys. 7. Pełny kwantowy kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$ – reprezentacja stanu AME. Stan AME można zapisać jako superpozycję stanów bazy (a więc oficerów). Wkład każdego z nich jest dany poprzez liczbę zespoloną, która charakteryzuje się amplitudą i fazą (czyli modulem i argumentem liczby zespolonej). Wielkość liter na rysunku obrazuje amplitudę: od największego (duży symbol) poprzez średni (symbol z kreską górną) do najmniejszego (mały symbol). Fazę pominięto dla czytelności. W odróżnieniu od klasycznego kwadratu ten przykład zawiera stan superpozycji dwóch lub czterech oficerów w każdym elemencie kwadratu. Oznacza to, że dopuszczamy splątanie w domenie symboli lub kolorów. Więcej szczegółów można znaleźć w [7, 8]

Literatura

- [1] S. Jeleński, *Lilāvati*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (1954).
- [2] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (1956).
- [3] Ahmad al-Buni, średniowieczny grymuar *Shams al-Ma'arif al-Kubra* (przed 1225).
- [4] L. Euler, „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques”, *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 9*, Middelburg, 85–239 (1782) oraz *Commentationes Arithmeticae 2*, 302–361 (1849). Patrz *The Euler Archive*: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E530.html>.
- [5] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker, „Further results on the construction of mutually orthogonal Latin Squares and the falsity of Euler’s conjecture.” *Can. Jour. Math.* **12**, 189–203 (1960).
- [6] A. Higuchi, A. Sudbery, „How entangled can two couples get?” *Phys. Lett. A* **272**, 213 (2000).
- [7] S. A. Rather, A. Burchardt, W. Bruzda, G. Rajchel-Mieldzióć, A. Lakshminarayan, K. Życzkowski, „Thirty-six entangled officers of Euler: Quantum solution to a classically impossible problem”, *Phys. Rev. Lett* **128**, 080507 (2022).
- [8] K. Życzkowski, W. Bruzda, G. Rajchel-Mieldzióć, A. Burchardt, S. A. Rather, A. Lakshminarayan, „ $9 \times 4 = 6 \times 6$: Understanding the quantum solution to the Euler’s problem of 36 officers”, *arXiv:2204.06800*, (2022).

Podsumowując: matematyka rozrywkowa prowadzi do odkrywania nietrywialnych problemów. Te zaś można spróbować alternatywnie rozwiązać, wykorzystując uogólnienie, tak jak kwantowe kwadraty grecko-lacińskie są rozszerzeniem klasycznych.

Rozwiązanie kwantowej wersji problemu Eulera znaleziono 121 lat po dowodzie Tarry’ego, że nie istnieje klasyczny kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$. A w chwili sformułowania tego dowodu hipoteza Eulera o jego nieistnieniu również miała 121 lat, co pokazuje złożoność obu zagadnień.

Znaleziony stan maksymalnie splątany jest ciekawy także z punktu widzenia testowania przyszłych komputerów kwantowych. Urządzenia te, aby były rzeczywiście skuteczne, muszą być w stanie tworzyć stany wysoce nieklasyczne – nie ma zaś lepszych na to kandydatów niż stany maksymalnie splątane. Otwarte pozostaje pytanie, jak szybko zobaczymy implementacje tych abstrakcji matematycznych w domu zwykłego Kowalskiego, na prawdziwej maszynie kwantowej...

*Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Wrocławski

Swoje wyniki Galton opublikował w artykule „Vox Populi”, *Nature*, 7 marca 1907 roku. Średnia z oddanych głosów była dokładną wagą. Wydaje się, że Galton wybrał medianę ze względu na prostsze rachunki. Więcej o analizie Galtona: „Revisiting Francis Galton’s forecasting competition”, *Statistical Science* 29(3), 420–424, 2014.

Wybór wartości $\{-1, 1\}$ okaże się przydatny już za chwilę. Często używa się też $\{0, 1\}$ lub $\{\text{TAK}, \text{NIE}\}$. Zauważmy, że przybliża to wiele naturalnych problemów: Sprzedać czy kupić akcje? Będzie padać czy nie? Wybory wygrają demokraci czy republikanie?

Dla przykładu niech $\mathcal{X} = \{1, \dots, 7\}$, a funkcja f zwraca 1 dla liczb pierwszych i -1 dla pozostałych. Dla $t = 3$ i rozkładu jednostajnego $p(i) = 1/7$ wylosowane zostały liczby 2, 3, 7. Przykładowy uczeń na podstawie próbek $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(7, 1)$ zwrócił funkcję stałą równą 1: $h(i) = 1$ dla $i \in \mathcal{X}$. Błąd tej funkcji wynosi $\text{err}_p(h) = 3/7$.

Używamy uproszczonej definicji PAC learning, w ogólności trzeba jeszcze wziąć pod uwagę efektywną konstruowalność funkcji, zależność t_0 od δ , ograniczyć klasę funkcji, do której f należy. Jednak z punktu widzenia tego artykułu to uproszczenie całkowicie wystarcza.

Co prawda nie pozwalamy, by zwrócona przez ucznia funkcja losowała, ale przyjęcie za punkt odniesienia błędu $1/2$ jest dość naturalne.

Pytanie to postawili oryginalnie M. Kearns, L. Valiant: „Cryptographic Limitations on Learning Boolean Formulae and Finite Automata”, *STOC* 1989: 433–444.

Y. Freund, R. Schapire: „Game Theory, On-Line Prediction and Boosting”, *COLT* 1996: 325–332.
Nazwa AdaBoost to akronim *Adaptive Boosting: boosting* od wzmocniania słabych uczniów, a *adaptive*, bo uczeń dopasowuje się do kolejnych wyników.

W 1906 roku statystyk Francis Galton był świadkiem konkursu, w którym uczestnicy mieli określić wagę mięsa uzyskanego z prezentowanego wołu. Galton przeanalizował 787 oddanych głosów i odkrył, że ich mediana była odległa od prawdziwego wyniku o niecałe 0,8%. Podobne zjawiska, w których wysokiej jakości odpowiedź wypracowana jest na podstawie wielu odpowiedzi słabej jakości, zaobserwowano wielokrotnie i są one określane mianem *mądrości tłumu* (*wisdom of the crowds*); są one różnorodnie interpretowane z punktu widzenia psychologii, teorii ewolucji, teorii gier... W tym artykule spojrzymy na nie z formalnego punktu widzenia i przełożymy na praktykę uczenia maszynowego.

Uczenie

Sformalizujmy nasz problem: *Uczeń* to algorytm, który stara się skonstruować pewną ustaloną funkcję $f : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$ na podstawie próbek $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_t, f(x_t))$, gdzie x_1, \dots, x_t są wybrane losowo według pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Oznaczmy przez $H[p, t]$ funkcję zwróconą przez ucznia H na podstawie t próbek, w których x_1, \dots, x_t są wylosowane niezależnie rozkładem p .

Błąd funkcji h zwróconej przez ucznia dla ustalonego rozkładu p definiujemy jako

$$\text{err}_p(h) = \sum_{x \in \mathcal{X}: h(x) \neq f(x)} p(x),$$

czyli frakcję złych odpowiedzi funkcji h ważoną rozkładem p . Rozkład p może odpowiadać prawdziwej częstotliwości występowania elementów z \mathcal{X} , ale może być inny – wówczas błąd będzie większy, jeżeli złe odpowiedzi wystąpią przy odpowiedziach, którym przypisaliśmy wyższe prawdopodobieństwa.

Dobry uczeń, dla każdego rozkładu p , z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1 zwróci funkcję o bardzo małym błędzie, o ile ma dostęp do wielu próbek, formalnie:

$$\forall \epsilon > 0 \forall p \forall \delta > 0 \exists t_0 \forall t > t_0 \mathbb{P}[\text{err}_p(H[p, t]) < \epsilon] \geq 1 - \delta,$$

przy czym \mathbb{P} jest prawdopodobieństwem liczonym po x_1, \dots, x_t niezależnie wylosowanych rozkładem p . Uczeń jest słaby, gdy jedyne, co o nim potrafimy powiedzieć, to to, że jego błąd jest mniejszy niż błąd losowej odpowiedzi, tj. $1/2$:

$$\exists \epsilon > 0 \forall p \forall \delta > 0 \exists t_0 \forall t > t_0 \mathbb{P}[\text{err}_p(H[p, t]) < 1/2 - \epsilon] \geq 1 - \delta.$$

Zwróćmy uwagę na różną kwantyfikację po ϵ : uczeń dobry jest „dowolnie dobry”, uczeń słaby jest „trochę lepszy” od losowego.

Chcemy wiedzieć, czy jeśli potrafimy coś „trochę”, to możemy nauczyć się tego „dobrze”? Formalnie: czy z funkcji zwróconych przez słabego ucznia potrafimy skonstruować odpowiedź ucznia dobrego? Na przykład czy zamiast konstruować skomplikowane i mało efektywne drzewo decyzyjne możemy użyć drzew prostych i szybkich?

Dość szybko pokazano, że odpowiedź jest twierdząca, ale konstrukcje były skomplikowane i nie miały praktycznego zastosowania. Zmienił to algorytm AdaBoost autorstwa Y. Freunda i R. Schapire’a, który miał prosty dowód poprawności i dobrze działał w praktyce. W 2003 roku za AdaBoost przyznano jego autorom nagrodę Gödla – jedną z najważniejszych nagród w informatyce teoretycznej.

Algorytm AdaBoost

Funkcja skonstruowana przez AdaBoost będzie postaci:

$$(1) \quad \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i H[p_i, t] \right)$$

dla z góry ustalonego t i zdefiniowanych w kolejnych krokach algorytmu współczynników $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ i rozkładów prawdopodobieństwa p_1, \dots, p_m . Rozkład p_1 jest dowolny (zwykle: jednostajny). Z kolei sgn jest funkcją znaku zwracającą -1 dla liczb ujemnych, a 1 dla liczb dodatnich oraz zera (nie chcemy zwracać 0 , żeby funkcja zgadzała się ze specyfikacją).

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
   $h_i \leftarrow H[p_i, t]$ 
   $e_i \leftarrow \text{err}_{p_i}(h_i)$ 
   $\alpha_i \leftarrow \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-e_i}{e_i}\right)$ 
   $Z_i \leftarrow e_i \cdot e^{\alpha_i} + (1 - e_i) \cdot e^{-\alpha_i}$ 
  for  $x \in \mathcal{X}$  do
     $p_{i+1}(x) \leftarrow \begin{cases} p_i(x) \cdot e^{\alpha_i} / Z_i & \text{jeśli } h_i(x) \neq f(x) \\ p_i(x) / (e^{\alpha_i} \cdot Z_i) & \text{jeśli } h_i(x) = f(x) \end{cases}$ 
return  $\text{sgn}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i h_i\right)$ 

```

Dla niektórych wartości nasz pseudokod „nie działa” – jeśli $e_i = 0$, to α_i wychodzi $+\infty$. Ma to jednak intuicyjne wyjaśnienie: skoro $e_i = 0$, to $h_i = f$ i chcemy zwrócić h_i , i w pewnym sensie to się dzieje: skoro $\alpha_i = +\infty$, to znak zwracanej przez AdaBoost sumy jest równy znakowi h_i .

Pseudokod algorytmu znajduje się obok. W i -tym kroku AdaBoost oblicza (w praktyce: przybliża) błąd e_i funkcji $h_i = H[p_i, t]$. Następnie na podstawie e_i definiuje wagę α_i oraz tworzy rozkład p_{i+1} : punkty x , dla których h_i daje dobry wynik (tj. $h_i(x) = f(x)$), mają prawdopodobieństwo dzielone przez e^{α_i} , zaś te, dla których wynik jest niepoprawny, mnożone przez e^{α_i} . Tak określone prawdopodobieństwa p_{i+1} mogą nie sumować się do jedynki, dlatego dzielone są przez ich sumę Z_i :

$$Z_i = \sum_{x:h_i(x) \neq f(x)} p_i(x) \cdot e^{\alpha_i} + \sum_{x:h_i(x) = f(x)} p_i(x) \cdot e^{-\alpha_i} = (e_i \cdot e^{\alpha_i} + (1 - e_i) \cdot e^{-\alpha_i}).$$

Intuicyjnie, zależy nam tu na tym, aby funkcja h_{i+1} dała dobry wynik dla tych punktów, dla których h_i dała wynik zły. Co okaże się kluczowe w analizie błędów, w wykładniku e^{α_i} pojawia się to samo α_i , które jest współczynnikiem w zwracanej przez algorytm kombinacji liniowej (1).

Dla zilustrowania, spróbujemy nauczyć się przy użyciu AdaBoost rozpoznawać liczby parzyste ze zbioru $1, 2, 3, 4$. Mamy więc $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, a funkcja $f: \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$ jest zdefiniowana tak: $f(i) = 1$ dla $i \in \{2, 4\}$ oraz $f(i) = -1$ dla $i \in \{1, 3\}$. Wykonamy cztery iteracje algorytmu, więc funkcję f skonstruujemy na podstawie czterech odpowiedzi słabego ucznia.

Początkowo wszystkim liczbom z \mathcal{X} przypisujemy prawdopodobieństwo $p_1(i) = 1/4$. Załóżmy, że funkcja h_1 zwrócona przez ucznia dla rozkładu p_1 myli się tylko na 1. Jej błąd to zatem $e_1 = 1/4$, czyli $\alpha_1 = \log(\sqrt{3})$, $e^{\alpha_1} = \sqrt{3}$ i $Z_1 = \sqrt{3}/2$. Definiując p_2 , prawdopodobieństwo dla 1 mnożymy więc przez $\sqrt{3}/(\sqrt{3}/2) = 2$, zaś dla 2, 3, 4 przez $(1/\sqrt{3})/(\sqrt{3}/2) = 2/3$. W ten sposób mamy większą szansę, że funkcja zwrócona przez ucznia będzie poprawna dla 1.

Niech teraz funkcja h_2 zwrócona dla rozkładu p_2 myli się tylko na 2. Jej błąd wynosi $e_2 = 1/6$, co daje $\alpha_2 = \log(\sqrt{5})$, $e^{\alpha_2} = \sqrt{5}$ i $Z_2 = \sqrt{5}/3$, a zatem definiując p_3 , prawdopodobieństwo dla 2 mnożymy przez 3, a dla pozostałych przez $3/5$ itd:

i	$h_i(1)$	$h_i(2)$	$h_i(3)$	$h_i(4)$	$p_i(1)$	$p_i(2)$	$p_i(3)$	$p_i(4)$	e_i	e^{α_i}	Z_i	$\widehat{\text{err}}$
1	<u>1</u>	1	-1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	0,866
2	-1	<u>-1</u>	-1	1	1/2	1/6	1/6	1/6	1/6	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/3$	0,645
3	-1	1	<u>1</u>	1	3/10	1/2	1/10	1/10	1/10	3	3/5	0,387
4	-1	1	-1	<u>-1</u>	1/6	5/18	1/2	1/18	1/18	$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}/9$	0,177

Błędne wartości zwrócone przez ucznia są podkreślone: funkcja h_i myli się jedynie na i . Zwrócone funkcje są oczywiście przykładowe i mocno wpływają na działanie algorytmu. Na przykład mogłoby się zdarzyć, że funkcja h_2 też zwraca błędną wartość dla 1. Szansę na to staramy się jednak minimalizować, dostosowując prawdopodobieństwa.

Po czterech iteracjach zwracamy funkcję

$$\text{sgn}(\log(\sqrt{3})h_1 + \log(\sqrt{5})h_2 + \log(3)h_3 + \log(\sqrt{17})h_4).$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta jest równa funkcji f , której staraliśmy się nauczyć, np. dla $i = 1$ mamy: $\text{sgn}(\log(\sqrt{3}) - \log(\sqrt{5}) - \log(3) - \log(\sqrt{17})) = -1$.

Ostatnia kolumna zawiera górne oszacowanie błędów dotychczas skonstruowanej funkcji dla jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa, które zaraz zdefiniujemy. Zauważmy, że po czwartej rundzie to oszacowanie jest mniejsze niż $1/4$, co pokazuje, że zwracana funkcja musi być poprawna (funkcja zwrócona po trzeciej iteracji też jest już poprawna).

Analiza błędów

Chcemy oszacować z góry błąd $\text{err}_p(\text{sgn} \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i)$. Takie funkcje trudno szacować, trudno też konstruować algorytm, który stara się ją minimalizować. Zamiast tego często używa się ograniczeń górnych i konstruuje algorytmy tak, by minimalizowały takie ograniczenie górne, zwyczajowo nazywane wówczas funkcją kosztu. My skorzystamy z $\widehat{\text{err}}_p$, zadanego jako:

$$\widehat{\text{err}}_p(g) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \exp(-f(x)g(x)) \geq \sum_{x \in \mathcal{X}: f(x) \neq \text{sgn } g(x)} p(x) = \text{err}_p(\text{sgn } g),$$



Rozwiązanie zadania F 1067.

Suma napięć na kondensatorach C_1 i C_2 równa jest napięciu baterii \mathcal{E} , tak samo jak suma napięć na kondensatorach C_3 i C_4 . Ładunek zgromadzony na kondensatorze C_1 jest równy ładunkowi na kondensatorze C_2 . W związku z tym potencjał U_A w punkcie A wynosi:

$$U_A = \frac{1/C_1}{1/C_1 + 1/C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że potencjał U_B w punkcie B wynosi:

$$U_B = \frac{1/C_3}{1/C_3 + 1/C_4} = \frac{C_4}{C_3 + C_4}.$$

Napięcie $U_{AB} = 0$, gdy $U_A = U_B$. Po prostych przekształceniach otrzymujemy, że poszukiwanym warunkiem jest $C_2/C_1 = C_4/C_3$.



Rozwiązanie zadania F 1068.

Wewnątrz przewodnika (pod powierzchnią ziemi) natężenie pola elektrycznego wynosi zero. Po zewnętrznej stronie powierzchni przewodnika pole elektryczne ma tylko składową prostopadłą do tej powierzchni. Takie cechy na płaskiej powierzchni (zakładamy oczywiście, że h jest znacznie mniejsze od promienia Ziemi) ma superpozycja pól pochodzących od naładowanego przewodu i jego „obrazu”, tj. równoległego doń przewodu znajdującego się na głębokości h pod powierzchnią i równomiernie naładowanego ładunkiem λ na jednostkę powierzchni. Pole elektryczne wytwarzane przez jednorodny, liniowy rozkład ładunku jest prostopadłe do przewodu, a jego wartość zależy wyłącznie od odległości od naładowanego przewodu. Tę wartość wyznaczamy, posługując się prawem Gaussa. Zamykamy odcinek l przewodu w walcu o promieniu r i osi symetrii pokrywającej się z przewodem. Strumień pola przez powierzchnię takiego walca wynosi $2\pi Erl$ i jest równy ładunkowi zawartemu w walcu dzielonemu przez przenikalność elektryczną próżni ϵ_0 : $2\pi Erl = \lambda l/\epsilon_0$, a więc:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Na powierzchni ziemi, w odległości x od pionowego rzutu przewodu, składowa E_n pola prostopadła do tej powierzchni jest sumą składowych od przewodu i jego „obrazu” i wynosi:

$$E_n = \frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0(h^2 + x^2)}.$$

Powierzchniową gęstość ładunku, σ , otrzymujemy, znowu stosując prawo Gaussa – zamykamy niewielki element powierzchni ziemi w walcu i obliczamy strumień pola. Tym razem strumień przez powierzchnię boczną (pole jest prostopadłe do powierzchni) i „denko” walca znika (zerowe pole wewnątrz ziemi-przewodnika). Wynik:

$$\sigma = \frac{\lambda h}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

Dane są zwykle wielowymiarowe i \mathcal{X} jest zbiorem nie liczb, a krotek, w których cechy odpowiadają kolejnym pozycjom. Przykład można było zobaczyć w poprzednim numerze *Delty*, w artykule o czarnej skrzynce, która groźność zwierzęcia oceniała na podstawie trzech cech (Δ_{23}). AdaBoost użyłby tu trzech funkcji h_i , po jednej dla każdej cechy.

Liniowe kombinacje drzew decyzyjnych są między innymi stosowane w lasach losowych (*random forest*).

gdzie $\exp(\cdot)$ oznacza funkcję wykładniczą. Istotnie: jeśli $f(x) = \text{sgn } g(x)$, to x wnosi 0 do $\text{err}_p(\text{sgn } g)$, zaś do $\widehat{\text{err}}(g)$: liczbę nieujemną; jeśli $f(x) \neq \text{sgn } g(x)$, to x daje $p(x)$ w $\text{err}_p(\text{sgn } g)$, zaś w $\widehat{\text{err}}(g)$: $p(x) \exp(-f(x)g(x)) \geq p(x)$.

Postać funkcji zwracanej przez AdaBoost jest tak dobrana, by łatwo było obliczyć dla niej funkcję kosztu $\widehat{\text{err}}_p$. Aby to pokazać, zauważmy najpierw, że mnożenie/dzielenie przez e^{α_i} w zależności od tego, czy zachodzi $h_i(x) = f(x)$, można zwięźle wyrazić, korzystając z tego, że $f(x), h_i(x) \in \{-1, 1\}$:

$$\exp(-\alpha_i f(x)h_i(x)) = \begin{cases} e^{\alpha_i} & \text{jeśli } h_i(x) \neq f(x) \\ e^{-\alpha_i} & \text{jeśli } h_i(x) = f(x). \end{cases}$$

Zależność na p_{i+1} można więc zapisać jako $p_{i+1}(x) = p_i(x) \exp(-\alpha_i f(x)h_i(x))/Z_i$. Teraz przyjmując $p = p_1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \widehat{\text{err}}_p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i h_i\right) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \exp\left(-f(x) \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(x)\right) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_1(x) \prod_{i=1}^m \exp(-\alpha_i f(x)h_i(x)) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} p_1(x) \prod_{i=1}^m \frac{p_{i+1}(x)}{p_i(x)} Z_i = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{m+1}(x) \prod_{i=1}^m Z_i = \prod_{i=1}^m Z_i \cdot \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{m+1}(x) = \prod_{i=1}^m Z_i. \end{aligned}$$

Zauważmy też, że zależność ta jest prawdziwa dla *dowolnych* wartości $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ i zdefiniowanych dla nich Z_1, \dots, Z_m . Teraz wiadomo, dlaczego $\alpha_i = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-e_i}{e_i}\right)$: jest to wartość, dla której $Z_i(\alpha) = e_i e^\alpha + (1-e_i) \cdot e^{-\alpha}$ jest najmniejsze, o czym można się przekonać, używając rachunku różniczkowego.

Pozostają nam proste rachunki: podstawiając $\alpha_i = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-e_i}{e_i}\right)$ do Z_i , dostajemy

$$Z_i = 2\sqrt{e_i(1-e_i)} = \sqrt{1 - 4\left(e_i - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \exp\left(-2\left(e_i - \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

przy czym nierówność wynika z nierówności $1-x \leq e^{-x}$, prawdziwej dla każdego rzeczywistego x . Pozwala nam to oszacować błąd AdaBoost:

$$\text{err}_p\left(\text{sgn} \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i\right) \leq \widehat{\text{err}}_p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i h_i\right) = \prod_{i=1}^m Z_i \leq \prod_{i=1}^m \exp\left(-2\left(e_i - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Przeanalizujemy dokładniej oszacowanie $\exp(-2(e_i - \frac{1}{2})^2)$. Jeśli $e_i = 1/2$, to wynosi ono 1, co ma naturalną interpretację: jeśli h_i myli się w 1/2 przypadków, to analiza daje takie samo ograniczenie błędu, jak bez h_i . Jeśli błąd jest duży: $e_i > 1/2$, to wciąż zyskujemy: $(e_i - 1/2)^2 > 0$. Co też ma interpretację: możemy h_i zamienić na $-h_i$, którego błąd jest mniejszy niż 1/2; łatwo sprawdzić, że AdaBoost poprawnie zmienia prawdopodobieństwa, gdy $e_i > 1/2$.

Z definicji słabego ucznia mamy $\frac{1}{2} - e_i > \epsilon$ z prawdopodobieństwem przynajmniej $1 - \delta$ dla pewnego stałego $\delta > 0$. Czyli „oczekujemy” błędu wykładniczo malejącego wraz z m . Używając standardowych metod rachunku prawdopodobieństwa, można uzasadnić, że implikuje to warunek silnego ucznia (dla odpowiedniej liczby t_0 zależnej od δ).

Praktyka: uczenie maszynowe

W praktyce dokładne określenie błędu e_i jest trudne (musimy mieć informację o wszystkich wartościach f oraz h_i). Ale nawet przybliżona wartość, którą można obliczyć przez losowe próbkowanie, prowadzi do przybliżonej wartości α_i i sensownej wartości Z_i , która też gwarantuje zmniejszenie błędu.

W implementacji AdaBoost za h_i przyjęto warunki biorące pod uwagę tylko jedną cechę – nie zawsze spełniają one warunek bycia słabym uczniem, ale działają dobrze w praktyce. Taka implementacja jest bardzo szybka i bardzo dobrze sobie radzi w praktyce.

AdaBoost zapoczątkował nowe podejście w uczeniu maszynowym, znane jako *boosting*: zamiast próbować skonstruować bardziej skomplikowany, dokładny model, używamy wielu prostszych modeli, których odpowiedzi (jakoś) uśredniamy (być może z wagami). Warianty boostingu zaimplementowane są praktycznie w każdym narzędziu do uczenia maszynowego.

Oko – narząd do zbadania

Oko jest dość regularną kulą o średnicy 25 mm, waży 7–8 g, dostarcza 80% informacji o otoczeniu, angażuje 10% neuronów człowieka. Zbudowane jest z trzech warstw składających się z wielu kolejnych błon. Jego ruchami kieruje 6 mięśni. Receptory światła siatkówki przekazują sygnały elektryczne do mózgu przez nerw wzrokowy i tam dochodzi do ich transformacji w obrazy.

Pierwsze struktury światłoczułe dojrzano w skamieniałościach trylobitów sprzed 0,5 mld lat, co sugeruje, że musiały istnieć wcześniejsze formy reagowania na światło. Zresztą niektóre obecnie żyjące pierwotniaki posiadają grupy światłoczułych komórek. Postuluje się, że komórki światłoczułe przekształciły się w toku ewolucji w narząd, czyli właśnie oko. Ewolucja była szybka i doprowadziła do powstania wielu wersji, zależnie od wymagań środowiska w danym etapie rozwoju: „wyjście na ląd”, potrzeba widzenia stereoskopowego, widzenia barw, rodzaj konkretnego środowiska. I tak różne rozwiązania doprowadziły do oka głowonoga, owada, ślimaka, ptaka, ssaka. Warto zauważyć, że rejestracja światła nastąpiła w historii życia wcześniej niż pojawił się mózg. Są też organizmy, których oczy są większe od mózgu.

Oczy większości żywych stworzeń odbierają promieniowanie słoneczne (widzą) w zakresie fal 380–780 nm; krótsze (rentgenowskie, gamma) są dla materii żywej niszczące, dłuższe (radiowe) – zbyt niskoenergetyczne. Niewielkie odchylenia (pszczoły w kierunku nadfioletu, żółwie błotne w kierunku podczerwieni) nie zmieniają ogólnej charakterystyki odbioru fal elektromagnetycznych. Łączy się to również z powszechnie występującymi receptorami chemicznymi światła – białkami – opsynami, a w szczególności rodopsyną. Receptory znajdują się w tkance łączącej oko z mózgiem, siatkówce, można nawet uznać, że jest to wypustka mózgu ku światu zewnętrznemu.

Nawet Darwin w swoim dziele „O powstawaniu gatunków” napisał, że założenie, iż ewolucja oka nastąpiła dzięki doborowi naturalnemu, wydaje się na pierwszy rzut (oka !) nieprawdopodobne – później z tego poglądu się wycofał.

Nie budzi zdziwienia, że tak wyjątkowa budowa i funkcja oka musiała od dawna interesować ludzi. Pierwsze wzmianki znajdujemy już u starożytnych Greków 300 lat p.n.e., ale prawdziwy rozkwit takich badań zaczął się, gdy fizycy skonstruowali instrumenty pozwalające na nieinwazyjne zagłębienie do przezroczystej gałki, na analizę warstwa po warstwie otaczających ją zewnętrznych błon i złożonej struktury wyścielającej dno oka (siatkówki), decydującej o widzeniu kształtów i kolorów. W wielu polskich instytucjach okulistycznych stosuje się w tych celach przyrządy rejestrujące i analizujące takie struktury (OCT, optical coherence tomography, koherencyjna tomografia optyczna).

Dzięki podobnym przyrządom zaczęto lepiej rozumieć istotę takich chorób, jak retinopatie siatkówki (choroby genetyczne, nowotwory, zmiany cukrzycowe

i miazdżycowe), zwyrodnienie żółtej plamki, nocna ślepotą, jaskra, odwarstwienie siatkówki. Takie badania także często sugerują, lub umożliwiają, nowe terapie dotychczas nieuleczalnych schorzeń. Myślenie o oku jako oknu do wnętrza ciała przywiodło niektórych badaczy do wkraczania do tego obiektu z komórkami macierzystymi. Doświadczenia laboratoryjne na myszach i rybach sugerowały racjonalność takiego podejścia. Niestety grupa neurologów i okulistów polskich podjęła przedwcześnie próby kliniczne, które zakończyły się dramatycznie dla pacjentów.

Budzą nadzieje konstrukcje przyrządów umożliwiających pomiar z wysoką rozdzielczością spontanicznych ruchów gałki ocznej. Opisano przyrząd (FreezEYE Tracker) rejestrujący 1240 obrazów

siatkówki na sekundę. Więcej – badacze z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu oraz Uniwersytetu Karoliny Północnej wykazali, że tak szybkie ruchy oka są cechą charakterystyczną dla każdego człowieka (optyczny „odcisk palca”), która zmienia się specyficznie w okresie początkowym chorób Parkinsona i Alzheimerera. Obie choroby, wciąż nieuleczalne i słabo rozumiane, warto obserwować, gdy jeszcze jawnych objawów klinicznych nie dają.

Trzeba zatem patrzeć w oczy nie tylko w powodów romantycznych – a co tam zobaczymy, będzie bez wątpliwości coraz częściej i dokładniej analizowane.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Modele Wszechświata dla początkujących

Część 3: Mrówki w punkcie przegięcia

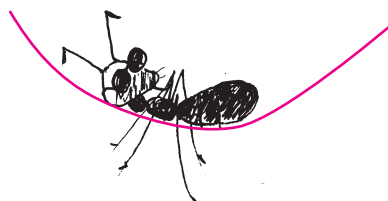
Szymon CHARZYŃSKI*

*Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego

Przypominamy równania Einsteina
omówione w poprzedniej części:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{geometria}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{materia}}$$

Część *geometria* stanowi matematyczny opis mierzenia odległości, upływu czasu i zakrzywienia czasoprzestrzeni. Po prawej stronie mamy część podpisaną *materia*, czyli matematyczny opis rozkładu materii i energii w czasoprzestrzeni razem z oddziaływaniami innymi niż grawitacyjne. Znaczeniem niepodpisanego członu, w którym występuje stała Λ zwana *stałą kosmologiczną*, zajmiemy się w tym artykule.



O ciemnej materii pisaliśmy w *Delcie* wielokrotnie. Polecamy między innymi artykuły Klaudii Kowalczyk (Δ_{18}^3) Macieja Bilickiego (Δ_{18}^{12}) i Wojciecha Hellwinga (Δ_{19}^7 i Δ_{19}^8).

W poprzednim numerze omówiliśmy listę założeń, jakie przyjmuje się przy konstruowaniu modeli Wszechświata. W wielkim skrócie można je podsumować stwierdzeniem, że całą geometrię czasoprzestrzeni opisuje się tylko jedną funkcją czasu, oznaczaną $a(t)$, czyli tzw. *funkcją skali*, spełniającą równanie Friedmana:

$$(1) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{c^2}{3}\Lambda,$$

które otrzymuje się z równań Einsteina w wyniku odpowiedniego podstawienia. Zajmiemy się teraz analizą parametrów występujących w tym równaniu, a następnie własnościami rozwiązań dla różnych kombinacji wartości tych parametrów.

Parametry modeli kosmologicznych. Czas, który jest „teraz”, tradycyjnie oznacza się przez t_0 i przyjmuje się, że $a(t_0) = 1$. Aktualną wartość parametru Hubble’a oznacza się przez H_0 , czyli $H_0 = H(t_0)$. Możemy też oznaczyć aktualną wartość średniej gęstości materii we Wszechświecie przez $\rho_0 = \rho(t_0)$. Wstawiając do równania (1) $t = t_0$, otrzymujemy równanie wiążące występujące w nim parametry:

$$(2) \quad H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{c^2}{3}\Lambda.$$

Gdyby $\Lambda = 0$, to powyższe równanie wyrażałoby ścisły związek pomiędzy aktualnymi wartościami parametru Hubble’a i średniej gęstości materii. Istnienie takiego jednoznacznego związku jest konsekwencją przyjętego przez nas założenia, że krzywizna przestrzeni jest równa zero (dlatego nie ma w tym równaniu członu związanego z krzywizną). Tradycyjnie wartość gęstości, która spełnia to równanie dla $\Lambda = 0$, nazywa się *gęstością krytyczną* i oznacza ρ_c . Jak łatwo obliczyć (wstawiając $\Lambda = 0$ do równania (2)), $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Dzielimy równanie (2) przez H_0^2 i wykorzystując wprowadzone oznaczenie ρ_c , otrzymujemy:

$$1 = \frac{\rho_0}{\rho_c} + \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}.$$

Mamy dwie bezwymiarowe stałe sumujące się do 1. Standardowo oznacza się je $\Omega_m = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ oraz $\Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}$. Pierwsza z nich opisuje materię. Nie robiliśmy tutaj rozróżnienia między materią barionową (taką, z której jesteśmy zbudowani) i tzw. *ciemną materią*, czyli naszą stałą Ω_m uwzględnia oba rodzaje materii. Czasami rozdziela się wkład od obu tych rodzajów materii i zamiast jednego parametru Ω_m występują dwa parametry: Ω_b (materia barionowa) i Ω_c (ciemna materia). Jeżeli model uwzględnia promieniowanie (i jego ciśnienie), to pojawia się także parametr Ω_r . Uwzględnienie promieniowania jest istotne wtedy, kiedy chcemy opisywać wczesny, gorący Wszechświat. Gdybyśmy dopuszczali niezerową krzywiznę, to występowałby parametr za nią odpowiedzialny – Ω_k . Możemy więc mieć więcej sumujących się do 1 parametrów odpowiadających za różne „składniki” Wszechświata. My zostaniemy przy prostym przypadku z dwoma parametrami: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, który z jednej strony stosunkowo łatwo jest rozwiązać, a z drugiej dobrze opisuje ewolucję Wszechświata od czasów, kiedy jego wiek wynosił około kilka milionów lat, do teraz.

Zmiana gęstości w czasie. Przyjeliśmy, że aktualna (w chwili t_0) wartość gęstości to $\rho(t_0) = \rho_0$. Żeby obliczyć, jak zmienia się gęstość w czasie, zauważmy, że objętość zmienia się proporcjonalnie do $a(t)^3$, bo funkcja $a(t)$ mówi nam, jak skalują się wszystkie długości. Ponieważ gęstość to masa podzielona przez objętość, więc jeżeli chcemy, aby masa zawarta w jakiejś części Wszechświata się nie zmieniała wraz z jego rozszerzaniem, to gęstość musi się zmieniać

według równania $\rho(t) = \rho_0/a(t)^3$. Zgodnie z naszą intuicją, gdy Wszechświat puchnie, to jego gęstość maleje – i dokładnie taką zależność gęstości od czasu dostajemy dla pyłu (czyli materii, która oddziałuje tylko grawitacyjnie). Równanie (1) przyjmuje zatem postać:

$$(3) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a(t)^3} + \frac{c^2}{3}\Lambda.$$

Wygodnie jest je zapisać przy użyciu wprowadzonych wcześniej parametrów:

$$(4) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a(t)^3} + \Omega_\Lambda \right).$$

Powyższe równanie można również zapisać, używając definicji parametru Hubble'a: $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. W takiej postaci można je znaleźć w wielu źródłach:

$$(5) \quad \left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^2 = \frac{\Omega_m}{a(t)^3} + \Omega_\Lambda.$$

Pamiętając, że $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, rozważmy najpierw szczególne przypadki, kiedy jeden z parametrów jest równy 1, a drugi 0, a na koniec przypadek ogólny: $\Omega_m \neq 0, \Omega_\Lambda \neq 0$.

1) Wszechświat zdominowany przez materię, czyli $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$. W tym przypadku równanie (4) sprowadza się do postaci:

$$\dot{a}(t) = \frac{H_0}{\sqrt{a(t)}}.$$

Jego rozwiązaniem (spełniającym warunek $a(t_0) = 1$) jest

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 (t - t_0) + 1 \right)^{2/3},$$

co można łatwo sprawdzić. Funkcja skali $a(t)$ jest rosnąca, $\dot{a}(t) > 0$, czyli opisuje rozszerzający się Wszechświat. Zauważmy jednak, że funkcja ta rośnie coraz wolniej – nachylenie stycznej do jej wykresu maleje, $\ddot{a}(t) < 0$. Oznacza to, że ekspansja tego Wszechświata zwalnia. Łatwo też sprawdzić, że parametr Hubble'a $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$. Jest to model bardzo podobny do Wszechświata mrówki Karoliny (opisanego w Δ_{23}^1 , w pierwszej części tego artykułu). Model ten opisywałby nasz Wszechświat, gdyby $\Lambda = 0$, a gęstość byłaby równa gęstości krytycznej.

2) Wszechświat zdominowany przez stałą kosmologiczną, czyli $\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1$. Tym razem równanie ewolucji (4) sprowadza się do

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t).$$

Rozwiązanie, czyli funkcja

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)},$$

jest dokładnie takie samo, jak opisany w Δ_{23}^1 Wszechświat mrówki Ksymeny, który nie tylko się rozszerza ($\dot{a}(t) > 0$), ale także przyspiesza w nim ekspansja ($\ddot{a}(t) > 0$) – odległości pomiędzy galaktykami rosną coraz szybciej, a parametr Hubble'a $H(t) = \dot{a}(t)/a(t) = H_0$ nie zależy od czasu.

3) Przypadek ogólny: $\Omega_m \neq 0, \Omega_\Lambda \neq 0$. W tym przypadku rozwiązaniem równania (4) jest funkcja:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} \left(\sinh \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} (t - t_0) + A \right) \right)^{2/3},$$

gdzie stałą A wyliczamy tak, aby $a(t_0) = 1$, co daje $A = \ln \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + 1} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right)$. Wygląda to może trochę skomplikowanie, ale po pierwsze należy docenić fakt, że w ogóle mamy analityczne rozwiązanie równania różniczkowego, które nie jest łatwe do rozwiązania.

Po drugie w rozwiązaniu występują kombinacje stałych, które trochę zaciemniają obraz. To, co jest najważniejsze, to: jaka jest zależność czynnika skali a od czasu. Kiedy przymknijemy oko na wszystkie stałe, to widzimy, że czynnik skali jest opisywany funkcją $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$.

Porównanie trzech typów rozwiązań. Jeżeli we wszystkich trzech przypadkach pominiemy na chwilę występujące w nich stałe i skupimy się tylko na tym, jakiego typu zależności od czasu występują w rozwiązaniach, to otrzymamy następującą listę:

1. $a(t) \sim t^{2/3}$,
2. $a(t) \sim e^t$,
3. $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$.

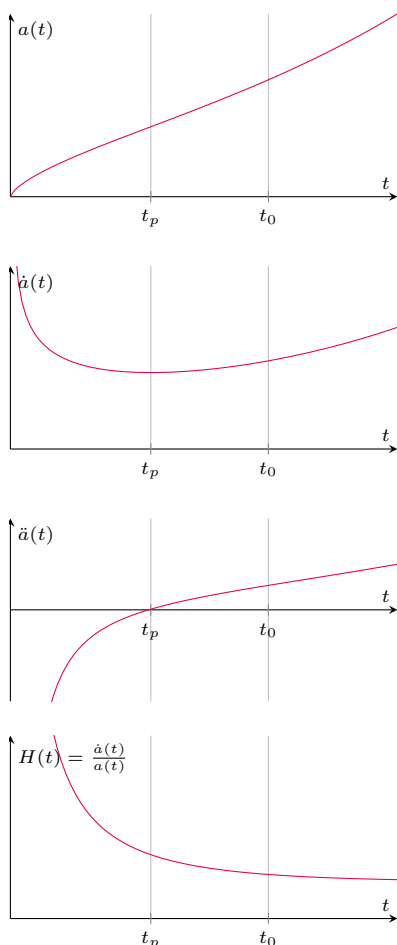
Wzory funkcji, które wcześniej wypisaliśmy w poszczególnych przypadkach, powstają z tych wymienionych powyżej poprzez pomnożenie argumentu funkcji przez stałą, przesunięcie o stałą i przemnożenie wartości funkcji przez jakąś stałą. Można zauważyć, że funkcja typu 3 jest w pewnym sensie czymś pośrednim pomiędzy typem 1 i 2. Otóż funkcja sinus hiperboliczny to po prostu kombinacja funkcji wykładniczych: $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Można pokazać, że dla małych argumentów t (podobnie jak zwykła funkcja sinus) sinus hiperboliczny jest dobrze przybliżany przez argument t (czyli $\sinh(t) \approx t$ dla $t \ll 1$). Natomiast dla dużych t dominuje człon z dodatnim wykładnikiem (ten z ujemnym wykładnikiem bardzo szybko dąży do 0), czyli $\sinh(t) \approx \frac{1}{2}e^t$, dla $t \gg 1$. Widzimy zatem, że rzeczywiście rozwiązanie typu 3 jest czymś pośrednim: dla małych t zachowuje się jak rozwiązanie typu 1, a dla dużych t jak rozwiązanie typu 2.

Przyspieszenie ekspansji i znaczenie stałej kosmologicznej. Przypadek 1 nazwalibyśmy *Wszechświatem zdominowanym przez materię*, bo przyjęliśmy $\Lambda = 0$, więc ewolucja Wszechświata zależała tylko od gęstości materii. Widzimy, że gdyby $\Lambda = 0$, to rozszerzanie byłoby coraz wolniejsze, a parametr Hubble'a dążyłby do zera. Wszechświat, w którym $\Lambda \neq 0$, na początku (dla małych t) zachowuje się właśnie tak, czyli ekspansja w nim zwalnia. Dzieje się tak jednak do pewnego czasu. Jak widać na rysunku 1, funkcja $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$ ma punkt przegięcia, w którym jej druga pochodna $\ddot{a}(t)$ zmienia znak. Ekspansja przestaje zwalniać (co jest opisywane przez $\ddot{a}(t) < 0$) i zaczyna przyspieszać (czyli $\ddot{a}(t) > 0$), czyli dla dużych t zarządzanie ewolucją Wszechświata przejmuje Λ , dlatego rozwiązanie typu 2 nazwalibyśmy *zdominowanym przez stałą kosmologiczną*.

Tę zmianę na stanowisku „zarządzającego ewolucją” można też dostrzec, przyglądając się równaniu Friedmana w postaci (4) lub (5). Po jego prawej stronie mamy sumę dwóch składników. Ten pochodzący od stałej kosmologicznej Ω_Λ jest stały. Natomiast ten pochodzący od gęstości materii zależy od czynnika skali – jest proporcjonalny do $1/a(t)^3$. Jest to oczywiście

konsekwencją zależności, że gdy Wszechświat się rozszerza, to gęstość materii maleje (gdyby się kurczył, to gęstość by rosła). Kiedy Wszechświat jest młody (dla małych t), gęstość jest duża i w równaniu po prawej stronie mamy $\Omega_m/a(t)^3 \gg \Omega_\Lambda$, czyli dominuje

materia. Kiedy natomiast Wszechświat wchodzi w wiek coraz bardziej zaawansowany, to gęstość maleje i jeżeli poczekamy wystarczająco długo, to może być dowolnie mała. Wtedy prawą stronę równania rządzi stała kosmologiczna i mamy $\Omega_m/a(t)^3 \ll \Omega_\Lambda$.



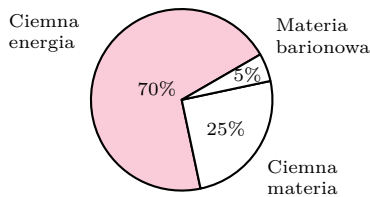
Rys. 1. Trzy pierwsze wykresy przedstawiają zależność od czasu czynnika skali $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$, jego pochodnej (czyli prędkości ekspansji) i jego drugiej pochodnej (czyli przyspieszenia ekspansji). t_0 to chwila obecna, a t_p to chwila, w której przyspieszenie zmieniło znak z ujemnego na dodatni (ekspansja przestała zwalniać i zaczęła przyspieszać), co widać na trzecim wykresie. W chwili t_p prędkość ekspansji osiągnęła minimum (drugi wykres), a wykres funkcji $a(t)$ ma w t_p punkt przegięcia. Warto przy okazji podkreślić, że przyspieszenie ekspansji nie oznacza, że parametr Hubble'a rośnie. Nawet w naszym przyspieszającym Wszechświecie parametr Hubble'a $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ maleje, co widać na czwartym wykresie. Nie dąży jednak do 0, jak we Wszechświecie zdominowanym przez materię, ale dąży do pewnej niezerowej stałej. Czyli dla dużych czasów ewolucja coraz bardziej przypomina zachowanie Wszechświata zdominowanego przez stałą kosmologiczną.

Parametry naszego Wszechświata. Powszechnie używany obecnie model kosmologiczny, zwany Λ -CDM, w odniesieniu do opisu tej części ewolucji (od chwili, kiedy Wszechświat miał kilka milionów lat, do teraz) jest właśnie taki, jak tu opisaliśmy. Λ odnosi się do stałej kosmologicznej, a CDM (*Cold Dark Matter* – zimna ciemna materia) oznacza, że ciemna materia zachowuje się właśnie tak, jak wcześniej założyliśmy. Bardziej skomplikowany w tym modelu jest oczywiście opis wczesnych etapów ewolucji, czyli pierwszych kilku milionów lat. Z dopasowania do danych obserwacyjnych otrzymujemy wartości parametrów $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ oraz $\Omega_m \approx 0,3$. Warto przypomnieć, że parametr Ω_m charakteryzuje łącznie materię barionową oraz ciemną materię, której jest około 7 razy więcej niż barionowej. Widać, że żyjemy w okresie przejściowym, kiedy to dominację w zarządzaniu ewolucją przejmuje stała kosmologiczna. Punkt przegięcia na wykresie funkcji $a(t)$ nastąpił około 6,2 miliarda lat temu. Jednocześnie wiek Wszechświata szacuje się na około 13,8 miliarda lat, co oznacza, że tempo ekspansji malało przez więcej niż połowę czasu istnienia Wszechświata, a potem zaczęło powoli przyspieszać. Wykresy ilustrujące zachowanie się naszego modelu dla wartości parametrów $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ oraz $\Omega_m \approx 0,3$ przedstawione są na rysunku 1.

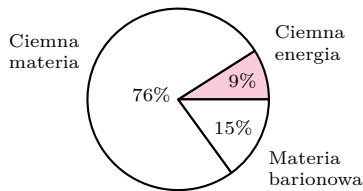
Wartości parametrów Ω_Λ i Ω_m są oczywiście wyznaczane z pozycji bardzo antropocentrycznej – ich definicja zawiera odniesienie do gęstości krytycznej mierzonej *teraz*, kiedy my, ludzie z planety Ziemia, ją wyznaczamy (rys. 2). Cywilizacja, która istniała być może w przeszłości, kiedy czynnik skali $a(t)$ był dwa razy mniejszy (rys. 3), wyznaczyłaby wtedy gęstość krytyczną 8 razy większą niż my teraz, a więc parametry wyznaczone przez nią miałyby wartości $\Omega_\Lambda \approx 0,1$ oraz $\Omega_m \approx 0,9$ (co można łatwo przeliczyć). Z kolei cywilizacja, która ewentualnie istniała, kiedy czynnik skali był 3 razy mniejszy (gęstość 27 razy większa), wyznaczyłaby $\Omega_\Lambda \approx 0,025$ oraz $\Omega_m \approx 0,975$ (rys. 4). Obserwacje wykonane przez obie te cywilizacje wypadają przed osiągnięciem punktu przegięcia przez czynnik skali $a(t)$. Czy astrofizycy tamtych cywilizacji wpadliby na pomysł, żeby dodawać do równań Einsteina stałą kosmologiczną? Czy byliby w stanie odróżnić $t^{2/3}$ od $(\sinh(t))^{2/3}$? Bardzo wątpliwe.

Nasi astrofizycy właśnie dlatego wprowadzili stałą kosmologiczną do równań Einsteina, żeby otrzymać model kosmologiczny pasujący do obserwacji, z których wynika, że ekspansja naszego Wszechświata przyspiesza.

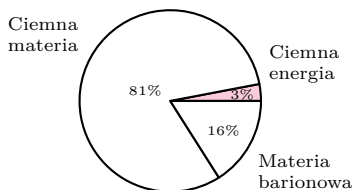
Ciemna energia? Jaka jest interpretacja fizyczna stałej kosmologicznej? Nie jest łatwo odpowiedzieć na to pytanie. Często używa się w odniesieniu do niej nazwy *ciemna energia*. Jednak już spojrzenie na równanie Friedmana pozwala zrozumieć, że jest to coś bardzo dziwnego. O ile człon związany z gęstością materii (i tej barionowej, i ciemnej) zachowuje się proporcjonalnie do $1/a(t)^3$, czyli jak ucziwa gęstość, to człon związany ze stałą kosmologiczną (jak sama nazwa wskazuje) jest stały. Gdyby uznać ją jako formę energii, to natrafiamy na pewien problem interpretacyjny: objętość rośnie, a gęstość tej energii się nie zmienia. Czy to oznacza, że ilość tej energii w zadanym obszarze rośnie? Problemów interpretacyjnych jest więcej i nie będziemy ich tu wszystkich wyliczać. Pokazaliśmy, że dodanie stałej kosmologicznej do równań Einsteina pozwala w prosty sposób wygenerować model kosmologiczny, w którym mamy zmianę charakteru ekspansji – ze zwalniającej na przyspieszającą, co pozwala dopasować model kosmologiczny do obserwacji. Jednak ten prosty zabieg matematyczny prowadzi do jednego z najbardziej fundamentalnych pytań, przed jakimi stoi dziś fizyka: czym jest ta stała kosmologiczna. Nazwanie jej ciemną energią nie przybliży nas do odpowiedzi. Sprawy, niestety, nie ułatwia fakt, że nie jesteśmy w stanie zmierzyć wartości stałej kosmologicznej w żadnym doświadczeniu laboratoryjnym, tak jak mierzymy wszystkie inne fundamentalne



Rys. 2. Diagram ilustrujący wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5), często pojawiający się w publikacjach. Rysunek przedstawia stan, który obserwujemy teraz, czyli kiedy Wszechświat ma około 13,8 miliarda lat. W naszych rozważaniach wkład od materii barionowej i ciemnej materii opisujemy łącznie jednym parametrem: $\Omega_m = 0,3$



Rys. 3. Wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5) w chwili, kiedy Wszechświat był „dwa razy mniejszy”, czyli kiedy wartość parametru skali $a(t)$ była równa $\frac{1}{2}$. Wiek Wszechświata wynosił wtedy około 5,9 miliarda lat, a gęstość krytyczna była wtedy $2^3 = 8$ razy większa niż teraz



Rys. 4. Kiedy parametr skali $a(t)$ był równy $\frac{1}{3}$, Wszechświat liczył sobie 3,3 miliarda lat, a gęstość krytyczna była $3^3 = 27$ razy mniejsza, wkład od ciemnej energii wynosił $\Omega_\Lambda = 0,025$

stałe. Jedynym źródłem naszej wiedzy o wartości Λ jest dopasowanie modelu całego Wszechświata do obserwacji.

Wczesny Wszechświat i inflacja. Jak już podkreślaliśmy, nie podejmujemy się tutaj modelowania Wszechświata od samego jego początku. Wszechświat na wczesnych etapach ewolucji był bardzo gorący i gęsty. Do opisanie tej fazy jego ewolucji konieczne jest uwzględnienie wszystkich oddziaływań pomiędzy składnikami materii, nie tylko grawitacyjnych. Jest to więc temat na zupełnie inną opowieść. Warto tutaj jednak zwrócić uwagę na to, że obecnie najpowszechniej uznawany model młodego Wszechświata zawiera etap zwany *kosmiczną inflacją*. Inflacja oznacza po prostu wykładniczą ekspansję, dokładnie taką jak opisuje rozwiązanie typu 2, czyli rozszerzanie jak we Wszechświecie mrówki Ksymeny. Model przewiduje, że etap ten trwał bardzo krótko, od około 10^{-36} s do około 10^{-32} s po Wielkim Wybuchu. W tym czasie czynnik skali zwiększył wartość co najmniej 10^{26} razy. W takim wykładniczo rozszerzającym się Wszechświecie występują efekty, które analizowaliśmy w pierwszej części artykułu w Δ_{13}^2 : oddalające się od siebie obiekty tracą możliwość komunikowania się. Taki właśnie efekt występuje w modelu inflacyjnym – obszary, które mogły się ze sobą komunikować, tracą tę możliwość. Po zakończeniu fazy inflacji tempo ekspansji zwalnia i wtedy (jak opisywaliśmy to we Wszechświecie mrówki Karoliny) objętość dostępna obserwacjom wybranego obserwatora zaczyna się powiększać i obszary, z którymi możliwość komunikacji została utracona, powoli tę możliwość odzyskują.

Co nas czeka w przyszłości? Model z różną od zera stałą kosmologiczną przewiduje, że po etapie zwalnijącej ekspansji, w którym obszar dostępny naszym obserwacjom rósł, wchodzimy znowu w etap wykładniczego tempa rozszerzania. Co za tym idzie, będziemy tracić możliwość komunikowania się z dalszymi obszarami Wszechświata, a część dostępna naszym obserwacjom będzie coraz bardziej pusta. Czy ten czarny scenariusz na pewno się ziści? Możliwe, że uratują nas jakieś nowe odkrycia. O tym, że nie wszystko jeszcze rozumiemy, świadczą chociażby rozbieżności w pomiarach parametru Hubble’a różnymi metodami, o czym pisał Krzysztof Turzyński w Δ_{19}^2 i Δ_{19}^{11} . Tymczasem za miesiąc w ostatniej części tego cyklu wrócimy do początku, czyli do tematu rozchodzenia się sygnałów w rozszerzającym się Wszechświecie i tego, jak z analizy tych sygnałów ekstrahować informacje o odległościach w Kosmosie i jak rozumieć odległości, które podają nam astronomowie.

Co kryją w sobie łączności?

Robert SZAFARCZYK*

* Unité de Formation et de Recherche de Mathématiques, Université Paris-Cité

Na pewno każdy z nas nie raz już słyszał, że mnożenie jest *łączne* (niektórzy mówią: *asocjatywne*), czyli czy pomnożymy $(2 \cdot 3) \cdot 4$, czy też $2 \cdot (3 \cdot 4)$, to w wyniku i tak dostaniemy 24. Niestety matematyka robi się coraz bardziej skomplikowana, matematycy mnożą przez siebie coraz to dziwniejsze rzeczy i nie każde działanie może pochwalić się byciem łącznym.

Na przykład topolog mógłby w taki oto sposób mnożyć odcinki jednostkowe:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \underline{b}$$

Zauważmy, że to działanie nie jest łączne. Mianowicie $(ab)c \neq a(bc)$, jak widać na rysunku.

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} \neq \underline{a} \underline{b} \underline{c}$$

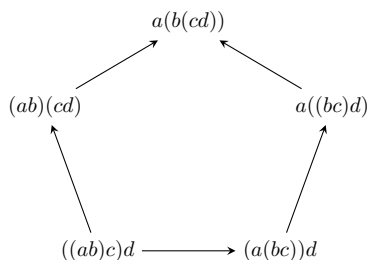
Sytuacja nie jest jednak beznadziejna, ponieważ oba wyniki są do siebie bardzo podobne. Wystarczy odpowiednio przeskalować każdy z odcinków, by dostać bijekcję $(ab)c \rightarrow a(bc)$, zachowującą porządek wszystkich punktów. Takie przekształcenie nazywa się asocjatorem. Działanie to nie jest więc łączne, ale posiada (odwrotną) regułę pozwalającą zamienić wyrażenie $(ab)c$ na $a(bc)$.

Zastanówmy się teraz, co się dzieje, gdy mamy do czynienia nie z trzema, lecz czterema argumentami naszego mnożenia. Wówczas istnieje dokładnie pięć

Wspomnianą bijekcją może być funkcja kawałkami liniowa, określona wzorem

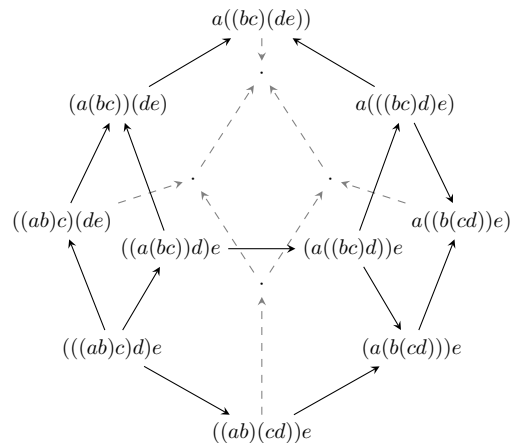
$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{4}), \\ x + \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

możliwych kolejności wykonywania działań. Używając wcześniej zdefiniowanego asocjatora, możemy je wszystkie połączyć w taki oto pięciokąt.



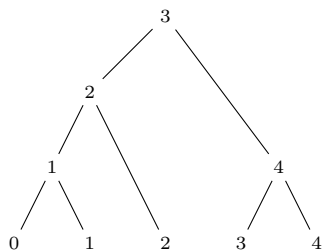
W szczególności otrzymujemy dwie *a priori* różne reguły pozwalające zamieniać $((ab)c)d$ na $a(b(cd))$ (górną i dolną ścieżkę w pięciokącie). Należy więc zadać sobie pytanie, czy są one takie same. W przykładzie z odcinkami rzeczywiście tak będzie, obie funkcje będą identyczne. Jednakże pojawiają się w matematyce działania, dla których i to nie jest prawdą. Na szczęście, pomimo że w pewnych przypadkach równości nie ma, często znajduje się jakaś (tym razem dwuwymiarowa) reguła łącząca oba sposoby. Taką dwuwymiarową regułę możemy sobie wyobrazić jako wypełnienie dla pięciokąta.

Teraz, mając działanie z ustalonym asocjatorem i regułą pięciokąta, możemy zbudować poniższy wielościan odpowiadający działaniu z pięcioma argumentami i znowu zapytać, czy istnieje dla niego (tym razem trójwymiarowe) wypełnienie. Wszystkie dwuwymiarowe ściany tej bryły uzupełnimy regułą pięciokąta lub „kwadratem” asocjatora.



(Grafika pochodzi z Wikimedia Commons)

Abstrakcyjne działania, dla których wybrano odpowiednie reguły dla wszystkich możliwych łączności, nazywa się \mathbb{A}_∞ -operadami. Analogicznie jak z łącznością, można też postąpić z przemiennością działania, wówczas mówi się o \mathbb{E}_∞ -operadach.



W powyższym przykładzie mamy: $(a_i) = (1, 2, 3, 1)$, $(b_i) = (1, 1, 2, 1)$. Temu drzewu odpowiada zatem punkt $(1, 2, 6, 1) \in \mathbb{R}^4$

Możemy tę zabawę ciągnąć w nieskończoność, rozważając coraz to większą liczbę argumentów i dostając coraz to bardziej skomplikowane kształty. Wielowymiarowy wielościan, który otrzymalibyśmy przy użyciu $n + 1$ liter, będziemy oznaczać przez \mathcal{K}_n i będziemy nazywać *n*-tym łącznościaniem (*associahedron*).

Dla małych n łącznościany są dosyć proste: \mathcal{K}_1 to punkt, \mathcal{K}_2 to odcinek (tzn. $(ab)c \rightarrow a(bc)$), \mathcal{K}_3 to przedstawiony wcześniej pięciokąt. Skomplikowanie robi się później; już \mathcal{K}_4 nie jest łatwe do opisanego, a co dopiero pozostałe, które nie mieszczą się nawet w trzech wymiarach.

Opisanie w ogólności, jak zrealizować \mathcal{K}_n w przestrzeni euklidesowej, jest zupełnie nieoczywiste, choć istnieje na to wiele różnych sposobów. Przedstawimy teraz jeden z najprostszych, zaproponowany przez Jeana-Louisa Lodaya (2004). Przypomnijmy, że drzewo jest *regularne*, jeśli wszystkie jego wewnętrzne wierzchołki mają ten sam stopień. Dla każdego regularnego drzewa binarnego (czyli takiego, gdzie każdy wierzchołek wewnętrzny ma dwoje dzieci) o $n + 1$ liściach (ponumerowanych od lewej do prawej $0, 1, \dots, n$) numerujemy jego wierzchołki wewnętrzne od 1 do n (wierzchołek o numerze i to ten, którego lewa odnoga zawiera liść numer $i - 1$, a prawa liść numer i). Następnie oznaczamy przez a_i (odpowiednio b_i) liczbę liści w lewej (odpowiednio w prawej) odnodze i -tego wierzchołka. Wówczas n -ty łącznościany to otoczka wypukła wszystkich otrzymanych w ten sposób punktów $(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$ w \mathbb{R}^n .

Ciekawe jest to, że każda ściana n -tego łącznościany powstaje przy użyciu łącznościany niższego wymiaru. Tu pisząc ściany, mamy na myśli wszystkie wierzchołki, krawędzie, ściany dwuwymiarowe, trójwymiarowe itd. Na przykład każdy wierzchołek to \mathcal{K}_1 , każda krawędź to \mathcal{K}_2 , każda ściana dwuwymiarowa jest albo pięciokątem, czyli \mathcal{K}_3 , albo kwadratem, czyli $\mathcal{K}_2 \times \mathcal{K}_2$. Ogólnie mówiąc, skoro mnożenie przez punkt, czyli \mathcal{K}_1 , nic nie zmienia, to każdą ścianę łącznościany \mathcal{K}_n możemy – być może nieco sztucznie – zapisać w postaci $\mathcal{K}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{K}_{n_i}$, gdzie $n_1 + \dots + n_i = n$.

Łącznościany mają też powiązania z kombinatoryką. Zauważmy, że każdy wierzchołek łącznościany \mathcal{K}_n odpowiada pewnemu rozstawieniu nawiasów w działaniu o $n + 1$ argumentach. Wiadomo, ile jest takich rozstawień (więc i wierzchołków \mathcal{K}_n): $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Jest to tak zwana *n*-ta liczba Catalana, którą oznaczamy przez C_n .

Liczby Catalana dość regularnie są przywoływane na łamach *Delty*, ostatnio w artykule Wojciecha Przybyszewskiego w Δ_{22}^9 , a miesiąc wcześniej Bartłomieja Bzdęgi (Δ_{22}^8).

Dochodzimy teraz do najbardziej zadziwiającego z faktów dotyczących łączności. Okazuje się, że ich struktura geometryczna ma bliski związek z problemem odwracania szeregów formalnych.

Szeregiem (formalnym) nazywamy napis postaci $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, gdzie a_i są liczbami rzeczywistymi. Szeregi można dodawać i odejmować zupełnie tak samo jak wielomiany. Mnożenie też jest analogiczne, dla Czytelnika Nieprzekonanego zamieszczamy wzór na marginesie. Jedyny problem jest ze składaniem. Jeśli mamy dwa szeregi, $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ oraz $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, to napis $A(B(x))$ niestety nie ma sensu. Jest tak choćby dlatego, że aby obliczyć wyraz wolny powstałego szeregu, musielibyśmy zsumować nieskończony ciąg $a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \dots$, co zwykle jest niemożliwe.

Istnieje jednak klasa szeregów, dla których wszystko świetnie działa. Są to szeregi postaci $x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$. Nie dość, że dla dowolnych dwóch szeregów tej postaci ich złożenie jest dobrze zdefiniowane (każdy współczynnik nowo powstałego szeregu jest wyrażony przez skończoną sumę), to jeszcze dla dowolnego szeregu $A(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$ istnieje szereg $B(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$ spełniający $A(B(x)) = x = B(A(x))$, czyli będący odwrotnością A . Współczynniki B dla zadanych współczynników A mogą zostać wyznaczone następująco:

$$(1) \quad b_n = \sum_{\substack{\mathbf{m}=(m_1, m_2, \dots): \\ m_1+2m_2+3m_3+\dots=n}} (-1)^{|\mathbf{m}|} \frac{(n+|\mathbf{m}|)!}{(n+1)!m_1!m_2!\dots} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots$$

(sumujemy po wszystkich ciągach $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ takich, że $\sum_{i=1}^k im_i = n$; przyjmujemy $|\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^k m_i$). Okazuje się, że istnieje również piękny wzór, wykorzystujący geometrię łączności.

Twierdzenie. *Odwrotnością szeregu $A(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$ jest szereg $B(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$ zadany wzorem*

$$b_n = \sum_{F \in S(\mathcal{K}_n)} (-1)^{n - \dim F} a_F,$$

gdzie dla ściany F postaci $\mathcal{K}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{K}_{n_i}$ piszemy $a_F = a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_i}$.

Jako przykład zastosowania rozważmy szereg $A(x) = x - x^2$. Wówczas wszystkie współczynniki a_k są zerowe oprócz współczynnika a_1 , który wynosi -1 .

Oznacza to, że a_F nie jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy ściana F jest postaci $\mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_1$, czyli gdy jest wierzchołkiem (w tym przypadku a_F jest równy $(-1)^n$). Teraz: skoro \mathcal{K}_n ma C_n wierzchołków, a wymiar punktu $\dim \mathcal{K}_1 = 0$, to powyższe twierdzenie mówi, że szeregiem odwrotnym do A jest $B(x) = x + C_1x^2 + C_2x^3 + \dots$. A skoro C_0 wynosi 1, to możemy go zapisać w skróconej formie $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1}$.

Otrzymaliśmy więc funkcję tworzącą dla ciągu liczb Catalana! Pamiętając, skąd się ona wzięła, możemy wysnuć poniższy wniosek.

Wniosek. *Dla wszystkich x z przedziału $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ zachodzi tożsamość*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Dowód. Jak już wiemy, szeregiem odwrotnym do szeregu $A(x) = x - x^2$ jest szereg $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1}$. Na przedziale $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ szereg B jest zbieżny. Jest tak dlatego, że liczby Catalana spełniają poniższe oszacowanie asymptotyczne:

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

Oznacza to, że na przedziale $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ funkcja $B(x)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $x - x^2$ (zbieżność pozwala nam przejść od szeregów do funkcji). Z drugiej strony, za pomocą prostego rachunku (margines) możemy uzasadnić, że na tym samym przedziale funkcja $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$ również jest funkcją odwrotną do $x - x^2$. Stąd dostajemy równość

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

którą można łatwo przekształcić w dowodzoną tożsamość. □

Iloczyn szeregów formalnych
 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ oraz
 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ to szereg formalny
 $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, którego wyrazy są
określone wzorem $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

Dowód wzoru (1), jak również przytoczonego twierdzenia, można odnaleźć w pracy Marcelo Aguiara i Federico Ardila *Hopf monoids and generalized permutahedra* (2017).



Rozwiązanie zadania M 1740.
Niech $d_1 > d_2 > \dots > d_k$ będą dzielnikami liczby n takimi, że

$$n = \sum_{i=1}^k d_i. \text{ Ponieważ } d_1 < n, \text{ to } \frac{n}{d_1} \geq p.$$

Jako że $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_k}$ jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych, to

$$\frac{n}{d_i} \geq p + i - 1 \text{ dla } i = 1, \dots, k.$$

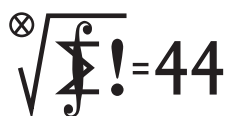
Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+k-1} &\geq \\ &\geq \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \dots + \frac{d_k}{n} = \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

Dla $x \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4(x - x^2)}}{2} = \frac{1 - (1 - 2x)}{2} = x.$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2023

Zadania z matematyki nr 857, 858

Redaguje Marcin E. KUCZMA

857. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y , dla których liczby $x^2 - 4y$ oraz $y^2 - 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

858. W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC . Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Zadanie 858 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

849. Rozwiązać równanie $4^x + 4^y + 1 = z^4$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .

850. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku BC . Punkt P leży na odcinku AM . Proste BP i CP przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Te same proste przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X i Y , różnych od B i C . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXD i AYE przecinają się w punkcie różnym od A , leżącym na odcinku AM .

849. Niech trójka (x, y, z) będzie jednym z rozwiązań. Liczba z jest nieparzysta. Przyjmijmy, że $x \leq y$. Z równania widać, że $z^4 > 4^y$; zatem $z^2 \geq 2^y + 1$, skąd przez podniesienie do kwadratu i ponowne skorzystanie z równania dostajemy $4^x \geq 2 \cdot 2^y$, czyli $y \leq 2x - 1$.

Przepiszmy teraz równanie tak:

$$(1) \quad 4^x + 4^y = (z^2 - 1)(z^2 + 1).$$

Ponieważ $x \leq y$, lewa strona dzieli się przez 2^{2x} . Po prawej stronie czynnik $z^2 + 1$ jest niepodzielny przez 4, wobec czego czynnik $z^2 - 1$ musi dzielić się przez 2^{2x-1} . Stąd $z^2 - 1 \geq 2^{2x-1}$ i dalej:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) \geq 2^{2x-1}(2^{2x-1} + 2) = 4^{2x-1} + 4^x,$$

co w połączeniu z (1) pokazuje, że $y \geq 2x - 1$.

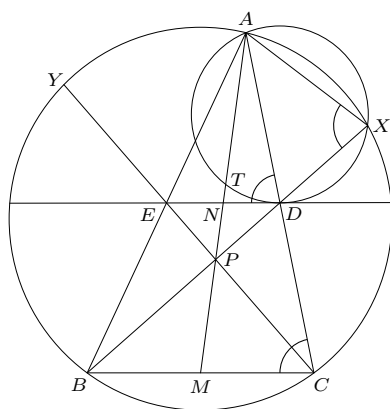
Wcześniej wykazaliśmy, że $y \leq 2x - 1$. Tak więc $y = 2x - 1$, czyli $x = (y + 1)/2$. Wstawiamy to do równania (w wyjściowej postaci):

$$(2) \quad 2^{y+1} + 4^y + 1 = z^4.$$

Lewa strona (2) to kwadrat liczby $2^y + 1$, która wobec tego jest równa z^2 .

Otrzymujemy $2^y = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$. Każdy z czynników musi być potęgą dwójki; różnią się o 2, czyli wynoszą 2 i 4. Stąd $z = 3$, $y = 3$, $x = (y + 1)/2 = 2$.

Odrzucając założenie, że $x \leq y$, stwierdzamy, że równanie ma dwa rozwiązania: $(x, y, z) = (2, 3, 3)$ oraz $(3, 2, 3)$.



Rysunek do zadania 850

850. Ponieważ $AE \cdot BM \cdot CD = EB \cdot MC \cdot DA$ (Ceva), zaś $BM = MC$, więc ma miejsce proporcja $AE : BE = AD : CD$, z której wynika, że $ED \parallel BC$. Zatem punkt N , w którym przecinają się proste AM i ED , jest środkiem odcinka ED . Dzięki tej równoległości (oraz położeniu punktów A, B, C, X na jednym okręgu) mamy równość

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AXD,$$

która mówi, że kąt między prostą ED i cięciwą AD okręgu AXD jest równy kątowi wpisanemu w ów okrąg. Stąd wniosek, że prosta ED jest styczna do okręgu AXD . Analogicznie, jest ona też styczna do okręgu AYE .

Przyjmijmy, że prosta AM przecina okrąg AXD w punktach A i T , zaś okrąg AYE w punktach A i U (gdy jest styczna do któregoś z nich, przyjmujemy

$T = A$ bądź $U = A$). Oba te okręgi leżą po tej samej stronie prostej ED co punkt A , zatem punkty T i U leżą na półprostej NA^{\rightarrow} . Odcinek ND jest styczny do okręgu AXD , więc

$$(3) \quad NA \cdot NT = ND^2; \quad \text{podobnie} \quad NA \cdot NU = NE^2.$$

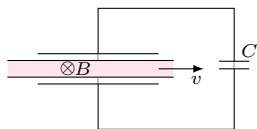
A skoro $ND = NE$, wynika stąd, że T i U to ten sam punkt – ten, o który chodzi w zadaniu. Pozostaje uzasadnić, że leży on na odcinku AM ; w tym celu wystarczy pokazać, że $NT < NA$.

Gdyby było inaczej ($NT \geq NA$), to wobec związków (3) mielibyśmy też $ND \geq NA$, $NE \geq NA$. Dałoby to nierówności $\sphericalangle NAD \geq \sphericalangle NDA$, $\sphericalangle NAE \geq \sphericalangle NEA$; po dodaniu stronami (i uwzględnieniu podobieństwa trójkątów AED i ABC) otrzymalibyśmy: $\sphericalangle CAB \geq \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC$, wbrew założeniu, że trójkąt ABC jest ostrokątny. To kończy rozwiązanie.

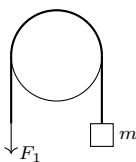
Klub 44 F



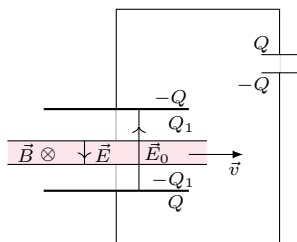
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2023



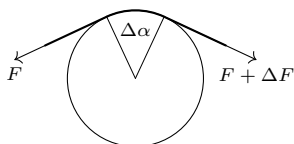
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
742 (WT = 2,91), 743 (WT = 3,1)
z numeru 9/2022

Sławomir Buć	Mystków	1-44+2,81
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4-36,59
Jan Zambrzycki	Białystok	3-36,35
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2-33,14

Zadania z fizyki nr 754, 755

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

754. Okładki kondensatora płaskiego o pojemności C naładowano do potencjałów φ i $(-\varphi)$ względem ziemi. Każda z okładek tworzy z ziemią kondensator o pojemności C_1 . Znaleźć stosunek natężeń pola elektrycznego między okładkami kondensatora o pojemności C na początku i po uziemieniu jednej z okładek.

755. Zamknięte naczynie całkowicie wypełnione jest wodą. Tuż nad dnem naczynia znajduje się pęcherzyk powietrza. Jak zmieni się ciśnienie na poziomie dna, gdy pęcherzyk wypłynie?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

746. Między okładkami kondensatora płaskiego odległymi o d , których powierzchnia wynosi S , porusza się z prędkością v płaskorównoległa, przewodząca płyta o grubości $d/2$. Wektor v jest równoległy do okładek kondensatora, rozmiary płyty są dużo większe od rozmiarów okładek. Równoległe do powierzchni płyty i prostopadłe do v działa stałe pole magnetyczne o indukcji B (rys. 1). Znaleźć napięcie na kondensatorze o pojemności C połączonym z okładkami pierwszego kondensatora jak na rysunku.

747. Przez nieruchomą, poziomą belkę przerzucony jest sznurek (rys. 2). Aby utrzymać ciężar o masie $m = 6$ kg zawieszony na końcu sznurka, trzeba ciągnąć drugi koniec minimalną siłą $F_1 = 40$ N (rys. 2). Jaką minimalną siłą F_2 trzeba ciągnąć sznurek, aby ciężar zaczął się podnosić?

746. Podczas ruchu płyty wewnątrz kondensatora na swobodne elektrony działa siła Lorentza $-e\vec{v} \times \vec{B}$ skierowana w dół, siła $-e\vec{E}$ od ładunków na powierzchni płyty skierowana w górę oraz siła $-e\vec{E}_0$ skierowana w dół (rys. 3). Siły te równoważą się:

$$(1) \quad vB + E_0 - E = 0.$$

Ładunki na połączonych okładkach mają taką samą wartość bezwzględną Q , zatem

$$(2) \quad Q = CU = \epsilon_0 S E_0,$$

gdzie U jest szukanym napięciem. Napięcia między okładkami połączonych kondensatorów są jednakowe:

$$(3) \quad U = Ed/2 - E_0 d.$$

Rozwiązując układ równań (1) – (3), otrzymujemy

$$U = \epsilon_0 v B S / (C + 2\epsilon_0 S / d).$$

747. Rozważmy mały element Δl sznurka na belce oparty na kącie $\Delta\alpha$ (rys. 4). Sąsiednie odcinki liny działają na ten element siłami napięcia F i $F + \Delta F$. Różnica wartości tych sił spowodowana jest siłą tarcia ΔT . Dla małego elementu zwoju $\Delta F/F \ll 1$. Wartość siły nacisku elementu sznurka na belkę $\Delta N = F\Delta\alpha$. Siła tarcia $\Delta T = \mu\Delta N = \mu F\Delta\alpha$, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Uwzględniając, że $\Delta F = \Delta T$, otrzymujemy równanie

$$dF/d\alpha = \mu F(\alpha).$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja proporcjonalna do swojej pochodnej, czyli

$$F(\alpha) = F(0)\exp(\mu\alpha).$$

Dla ustalonego kąta α zachodzi $F(\alpha)/F(0) = \text{const}$. W naszym przypadku, kiedy chcemy podnieść ciężar, siła tarcia jest skierowana przeciwnie do siły F_2 i już nie pomaga, a przeszkadza: $mg/F_1 = F_2/mg$. Stąd

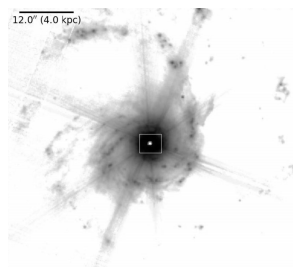
$$F_2 = (mg)^2 / F_1 = 90\text{N}.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Odkrycia z JWST Makrofotografia wpływów pochodzących z aktywnych jąder galaktyk



Zdjęcie galaktyki spiralnej NGC 7469 wykonane za pomocą instrumentu średniej podczerwieni (MIRI) JWST. Obszar zaznaczony prostokątem został zbadany w omawianej pracy U i inni, 2021. Źródło: Bohn et al., arXiv: 2209.04466

galaktyka NGC 7469. Główna badaczka tego projektu, Vivian U, zastanawiała się, czy wpływy energii z aktywnego jądra galaktyki (AGN) znajdującego się w NGC 7469 hamują, czy też przyspieszają tworzenie się gwiazd w ośrodku międzygwiazdowym. O pozytywnym (przyspieszanie), a także negatywnym (hamowanie) wpływie AGN na tempo tworzenia się gwiazd w galaktyce dyskutuje się już od dawna. Jednak ze względu na zapylenie AGN do tej pory badanie wpływu było niezwykle utrudnione (pył przesłaniał światło w zakresie widzialnym). Teraz, gdy mamy do dyspozycji JWST, uchylenie rąbka kurtyny pyłowej i podejrzenie procesów zachodzących w jej chmurze staje się nareszcie możliwe.

Supermasywne czarne dziury są klasycznie definiowane jako czarne dziury o masie od 0,1 miliona do 10 miliardów mas Słońca.

W miarę jak supermasywne czarne dziury gromadzą materię, często jako efekt uboczny *wydmuchują* nieco energii w postaci tzw. wpływów (*outflow*). Uważa się, że supermasywne czarne dziury zasilają aktywne jądra galaktyk, które są często niewidoczne bezpośrednio, bo są przesłonięte przez pył galaktyki. NGC 7469 jest idealnym obiektem do przestudiowania zjawiska wpływów z jądra galaktyki ich potencjalnego oddziaływania z ośrodkiem międzygalaktycznym. Galaktyka ta zawiera tzw. jądro galaktyki Seyferta otoczone chmurą aktywnie tworzących się gwiazd. Dzięki spektroskopii z JWST Vivian U wraz ze współpracownikami mogła przyjrzeć się, jak tworzony jest gaz i pył w NGC 7469 przez wpływy pochodzące z AGN.

Galaktyka Seyferta to rodzaj galaktyki, spiralnej bądź nieregularnej, charakteryzującej się jądrem o dużej jasności. Źródłem promieniowania takiego jądra jest najprawdopodobniej materia spadająca na czarną dziurę, a jego jasność może być większa od całej otaczającej je galaktyki.

W swojej pracy autorzy używają pomiarów kilku linii emisyjnych, takich jak [Fe II], H2, [Ar II] czy [Mg V],

Niebo w marcu

W trzecim miesiącu roku Słońce wspina się po niebie jeszcze szybciej niż w drugim. Nasza gwiazda znacznie miesiąc na południe od równika niebieskiego, by na jego koniec wejść kilka stopni w głąb półkuli północnej nieba. Przez 31 dni marca Słońce zwiększy wysokość górowania w środkowej Polsce do 42°, a wraz z tym długość dnia zwiększy się do 13 godzin. Słońce przetnie równik niebieski w drodze na północ 20 marca o 22:25 naszego czasu i tym samym na naszej półkuli Ziemi znacznie się astronomiczna

Budzące zachwyt zdjęcia wykonane przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba (*James Webb Space Telescope*, JWST) widzieli już chyba wszyscy – bez względu na to, czy są zainteresowani astronomią, czy też nie. Podziwialiśmy już gromadę galaktyk SMACS 0723 (pierwsze tzw. głębokie pole JWST), Kwintet Stephana, obszar gwiazdotwórczy NGC 3324 w Mglawicy Carina czy Filary Stworzenia znajdujące się w Mglawicy Orzeł. Wykonane w podczerwieni zdjęcia nie tylko zachwycają, ale równocześnie weryfikują wiele teorii naukowych, pozwalają na głębsze zrozumienie ewolucji galaktyk, a także całej wielkoskalowej struktury Wszechświata.

Dzięki obserwacjom JWST jesteśmy też w stanie badać niezauważone do tej pory procesy zachodzące w znanych nam dosyć dobrze obiektach. I tak w ramach projektu *The Great Observatories All-sky LIRG Survey* (GOALS), z pomocą instrumentu Mid-InfraRed (MIRI) zainstalowanego na pokładzie JWST, sprawdzono, jak dokładnie wygląda pobliska (odległa od nas o około 200 000 000 lat świetlnych)

do badania, czy/gdzie występują wpływy i czy/jak oddziałują z ośrodkiem międzygwiazdowym. I tak H2 jest skoncentrowany głównie wokół jądra galaktyki, natomiast [Fe II] i [Ar II], zakazane linie emitowane ze zjonizowanego gazu, są najjaśniejsze w pierścieniu wokół AGNu NGC 7469. Dodatkowo linia [Mg V], wymagająca dużej ilości energii do jej wytworzenia, jest wyraźnie przesunięta w kierunku krótszych długości fal (tzn. *blueshifted*) w stosunku do regionu centralnego, co oznacza, że obszar, z którego jest emitowana, porusza się w naszą stronę. Ta kombinacja linii i ich położenia to dowód na to, że w NGC 7469 ma miejsce wpływ gazu i jest on skorelowany z właściwościami obszaru gwiazdotwórczego. Dodatkowo Vivian U zbadała własności pyłu skupionego w centralnej części galaktyki w stosunku do linii H2. Ta analiza wskazuje na to, że pył nie jest jednorodnie rozłożony, lecz występują pewne zagęszczenia związane z falą uderzeniową pochodzącą z wpływu z AGN.

Dzięki nowym, wykonanym w wysokiej rozdzielczości obrazom z JWST autorzy pracy przeanalizowali geometrię gazu i pyłu wokół jądra NGC 7469 i odkryli, że wpływ AGN wydaje się oddziaływać z ośrodkiem międzygwiazdowym tej galaktyki. Jest to pierwsza tego typu praca. Z pewnością z teleskopem JWST w niedalekiej przyszłości zdobędziemy więcej informacji dotyczących roli AGN w regulacji formowania się gwiazd.

Katarzyna MAŁEK

Departament Badań Podstawowych, Zakład Astrofizyki,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Oparte na artykule Vivian U i inni „GOALS-JWST: Resolving the Circumnuclear Gas Dynamics in NGC 7469 in the Mid-Infrared” przyjętym do publikacji w czasopiśmie *The Astrophysical Journal Letters* (arXiv:2209.01210).

wiosna, a kilka dni wcześniej – półroczny okres, gdy dzień jest dłuższy od nocy. W nocy z soboty 25 marca na niedzielę 26 marca nastąpi zmiana czasu na letni. Należy pamiętać o przestawieniu zegarów o godzinę do przodu.

Noce w pierwszej połowie marca rozświetli jasna tarcza Księżyca, który rozpocznie miesiąc w fazie ponad 70% na pograniczu gwiazdozbiorów Bliźniąt i Woźnicy, górując wieczorem na wysokości aż 65° – obecnie jego orbita jest wychylona maksymalnie na północ i na południe.

Rano 3 marca zachodząca tarcza Księżyca oświetlona w 83% przejdzie 2,5° od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Trzy dni później, znowu nad ranem, już prawie pełna księżycowa tarcza zbliży się na 3,5° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Pełnię blasku Srebrny Glob osiągnie 7 marca po południu naszego czasu, świecąc wciąż na tle Lwa, choć przy granicy z Panną.

Po drodze do ostatniej kwadry naturalny satelita Ziemi w nocy z 9 na 10 i 10 na 11 marca spotka się najpierw ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny. Podczas obu nocy dystans między tymi ciałami niebieskimi wyniesie około 7°, a księżycowa tarcza pokaże fazę najpierw 93%, a potem 88%. Rano 12 marca Srebrny Glob przejdzie niewiele ponad 2° od Zuben Elgenubi w Wadze.

Ostatnią kwadrę Księżyc osiągnie 15 marca na pograniczu gwiazdozbiorów Wężownika, Skorpiona i Strzelca, a ze względu na to, że przebywa wtedy ponad 6° pod ekliptyką, pojawi się na nieboskłonie dopiero po godzinie 2 i przetnie południk lokalny 3 godziny później na wysokości zaledwie 12°. Dobę wcześniej jego tarcza wszędzie niecały stopień od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Potem Księżyc podaży ku nowiu, przez który przejdzie 21 dnia miesiąca, prawie 24 godziny po przecięciu przez Słońce równika niebieskiego. Jednak ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki naturalny satelita Ziemi zniknie w zorzy porannej już kilka dni wcześniej, ale można próbować go dostrzec tuż przed wschodem Słońca na jasnym już niebie kilka stopni nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu.

Jednym z ciekawszych wydarzeń astronomicznych marca jest spotkanie **Wenus** z **Jowiszem** na początku miesiąca. Do największego zbliżenia obu planet dojdzie 2 marca około godziny 8 rano naszego czasu, gdy Wenus zbliży się do Jowisza na 30', czyli tyle, ile wynosi średnica kątowa Słońca lub Księżyca. Niestety wtedy obie planety giną w blasku dnia. Wieczorem w dniach bezpośrednio przed i po koniunkcji obie planety przedzieli odległość o 10' większą.

Wenus w marcu jest widoczna coraz lepiej. Jej elongacja od Słońca się zwiększa i jednocześnie planeta zbliża się do Ziemi, stąd zmniejsza się faza i rośnie rozmiar kątowy jej tarczy. Jowisz przeciwnie: dąży do kwietniowego spotkania ze Słońcem i oddala się od nas (a raczej my od niego). Na początku miesiąca o zmierzchu Wenus wraz z Jowiszem zajmują pozycję na wysokości ponad 15° nad zachodnią częścią nieboskłonu. Jowisz jeszcze w marcu zniknie w zorzy wieczornej, Wenus natomiast zwiększy wysokość nad widnokregiem do ponad 20°. Największa planeta Układu Słonecznego do końca widoczności utrzyma jasność na poziomie -2^m i średnicę kątową tarczy 34". Tarcza Wenus także zmieni się niewiele: jej jasność wyniesie -4^m , średnica kątowa zwiększy się do 14", faza zaś spadnie z 86% do 78%. Planeta przejdzie niewiele ponad 1° od Urana 30 marca.

Jowisz na pożegnanie spotka się z bardzo cienkim sierpem Księżyca i planetą Merkury. Srebrny Glob zacznie pojawiać się na wieczornym niebie zaraz po nowiu 21 marca. Już 22 dnia miesiąca można próbować dostrzec księżycowy sierp w fazie 1% (24 godziny po nowiu). W czasie 30 minut po zachodzie Słońca pokaże się on 3° pod Jowiszem

i zajdzie niewiele ponad pół godziny później. Ze względu na jasne jeszcze tło nieba warto w poszukiwaniach Księżyca wspomóc się lornetką. Dwie doby później już znacznie lepiej widoczny Księżyc w fazie 11% pokaże się 3° od Wenus. O tej samej porze zdąży się wznieść na wysokość 30°.

Do końca miesiąca Srebrny Glob spotka się jeszcze z Plejadami 25 i 26 marca w fazie odpowiednio 18% i 27% (drugiego z wymienionych dni przejdzie 8° na północ od Aldebarana). Księżycowa tarcza w fazie 38% 27 marca zbliży się na 2° do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka, kolejną dobę zaś ma zarezerwowaną na spotkanie z planetą Mars. Wieczorem oba ciała Układu Słonecznego przedzieli dystans 3°, a Księżyc osiągnie I kwadrę. W przedostatnią noc miesiąca, 30 marca, zwiększając fazę do 65%, Księżyc minie Polluksa w odległości 5°.

Planeta **Merkury** 17 marca przejdzie za Słońcem, a następnie podaży ku maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie 11 kwietnia. Niestety oddali się wtedy tylko na odległość 19°. Merkurego można zacząć szukać przez lornetkę gdzieś od 27 dnia miesiąca, gdy 30 minut po zachodzie Słońca razem z Jowiszem zajmie pozycję na wysokości 6°, tworząc parę o rozpiętości 1,5". W tym momencie jasność Merkurego osiągnie $-1,4^m$. W kolejnych dniach Merkury stopniowo zwiększy wysokość do 12° w dniu maksymalnej elongacji. Do 31 marca jasność planety spadnie do $-1,1^m$, a jej tarcza zwiększy średnicę do 6" i zmniejszy fazę do 80%.

Czerwona Planeta w marcu pokona 14° na tle gwiazdozbiorów Byka i Bliźniąt. **Mars** 9 marca przejdzie 3° na południe od El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka, a 26 dnia miesiąca zawita do Bliźniąt i 3 dni później minie jasną gromadę otwartą M35 w odległości niewiele przekraczającej 1°. Przez cały miesiąc jasność planety zmniejszy się z $+0,4^m$ do $+1^m$, a średnica jej tarczy spadnie do 6". Warunki obserwacyjne Marsa nadal są bardzo dobre. Na początku nocy astronomicznej planeta przebywa po południowej stronie nieba, choć już po minięciu południka lokalnego, na wysokości przekraczającej 50°, znikając za widnokregiem około godziny 3.

21 marca w opozycji do Słońca znajdzie się planeta karłowata (1) Ceres, która zacznie miesiąc na granicy Panny i Warkocza Bereniki, jakieś 5,5° na północny zachód od gwiazdy 3. wielkości Vindemiatrix (ϵ Vir), czyli najbardziej na północ wysuniętej gwiazdy głównej figury Panny. Planeta ta i w kolejnych dniach podaży na północny zachód w głąb tego drugiego gwiazdozbioru. Przez cały miesiąc Ceres pokona ruchem wstecznym łuk o długości ponad 6° i 11 marca zbliży się na 4' do galaktyki spiralnej M91, a 15 dni później – na zaledwie 2' do jądra kolejnej jasnej galaktyki spiralnej M100. Obie, jako mgiełki, można dostrzec już przez nieduży teleskop. Ceres w marcu osiągnie jasność nieco poniżej $+7^m$, czyli do jej zaobserwowania potrzebna jest przynajmniej lornetka i bezksiężycowa noc. Planeta karłowata przecina południk lokalny po północy na wysokości przekraczającej 50°.

Ariel MAJCHER

Jak zostałem królem Internetu

Napisałem pracę naukową. Nie sam, zresztą, bo z dwoma dobrymi kolegami, bardzo zdolnym doktorantem jednego z nich oraz z jeszcze jednym współpracownikiem, którego nie miałem nigdy okazji poznać, ale który pracuje z jednym z kolegów. Nic nowego pod słońcem, tak wygląda często zespół badawczy.

Napisałem pracę naukową. W sumie tego właśnie społeczeństwo oczekuje od naukowca, podobnie jak od piekarza, by piekł chleb, od lekarza, by zwalczał choroby, a od kierowcy, by sprawnie i bezpiecznie przewoził ludzi lub towary. Jednak specyfiką pracy naukowca jest to, że społeczeństwo – słusznie! – oczekuje odeń, by w przystępnych słowach opowiedział w szerszym i wobec, co jest owocem jego pracy. Bardzo proszę!

Jak widzieliby nasz świat obserwatorzy poruszający się z prędkością większą niż światło w próżni? Byłby to obraz wyraźnie różny od tego, z czym stykamy się na co dzień. Można byłoby spodziewać się nie tylko zjawisk dziejących się spontanicznie bez żadnej przyczyny ale i cząstek podróżujących jednocześnie wieloma drogami, czyli tego, co znamy z teorii kwantowej – przekonują polscy i angielscy fizycy. Całkowitemu przenicowaniu uległaby także sama koncepcja czasu i przestrzeni – świat opisywany byłby trzema wymiarami czasowymi i jednym przestrzennym, a żeby nadać takiemu opisowi sens, trzeba by posługiwać się językiem teorii pola, który świetnie znamy.

Przytoczony tekst to materiały prasowe przygotowane w związku z publikacją pracy w czasopiśmie naukowym. Ich autorką jest niezastąpiona Agnieszka Fiedorowicz z sekcji promocji mojego macierzystego Wydziału Fizyki.

Zostały one zamieszczone na stronie internetowej Wydziału, w jego mediach społecznościowych oraz rozesłane do serwisów zajmujących się publikacją notek o najnowszych badaniach naukowych. I wtedy się zaczęło.

Nie bez znaczenia jest, oczywiście, fakt, że jeden z autorów pracy, Andrzej Dragan, ma bardzo silną pozycję w mediach społecznościowych, zbudowaną zarówno bezpośrednio przez przekaz, jak i wieloletnią, cierpliwą pracę popularyzatora nauki, plus parę innych zasług. W chwili pisania tego tekstu praca została pobrana ze strony czasopisma prawie dwadzieścia tysięcy razy, napisały o niej 42 serwisy informacyjne, od Stanów Zjednoczonych po Australię, i była bohaterką 121 wzmianek na Twitterze, co dało jej miejsce w górnym 1% porównywalnych prac w kategorii uwagi ze strony społeczeństwa. Przez krótką chwilę czułem się jak król Internetu.



Potem zacząłem zaś czytać artykuły prasowe przygotowane na podstawie notki. Serwis popularmechanics.com opatrzył swoje doniesienie tytułem: *Grzebiąc w wymiarach czasoprzestrzeni, możemy osiągnąć w końcu prędkość warp*, dodając w podtytule, że wymyśliłoby sztuczkę matematyczną, która ucięszylaby nawet Galileusza. A możliwość przeczytania, że amerykańskie publikatory rozpoczynają swoje relacje frazą: *Polscy naukowcy udowodnili, że...* była po prostu bezcenna. Reakcje udostępniających nasz artykuł Twitterati wahały się zaś od: *Nadświatlne obiekty wyglądałyby jak cząstki rozszerzające się na podobieństwo pęcherzyków, trochę podobnie do fali przechodzącej przez pole* do: *Oni tak na poważnie?*

Mogłoby się wydawać, że pozwalam sobie teraz, zstąpiwszy w otchłań występku, na biadolenie nad utraconą cnotą. Nic bardziej mylnego. Przecież od początku wiedziałem, że tak właśnie będzie. Naukowiec nie ma możliwości przebiccia się do głównego nurtu informacyjnego bez pośredników, którzy tu nieco uproszczą przekaz, a ówdzie coś dodadzą

od siebie, żeby się lepiej czytało. Jest to cena, jaką płacimy za możliwość podzielenia się wynikami swojej pracy ze społeczeństwem... I nie zawsze wiadomo, gdzie przebiega granica między hiperbolą a hucpą, co sygnalizowałem w poprzednim odcinku pt. *Ciemność w tunelu*. Alternatywą byłoby wyniosłe zamknięcie się w wieży z kości słoniowej i ograniczenie się do wymiany myśli w czasopismach naukowych, do których dostęp jest często płatny dla użytkowników niezatrudnionych w instytucjach badawczych.

Muszę się jednak przyznać, że przyjemnie było spojrzeć, jak wielu ludzi interesuje się fizyką i dzieli obserwacjami i myślami dotyczącymi tej dziedziny nauki. Czy powtórzyłbym to doświadczenie? Oczywiście! Trzeba zatem znowu wziąć się do roboty.

Krzysztof TURZYŃSKI

[1] A Dragan, K. Dębski, S. Charzyński, K. Turzyński, A. Ekert, „Relativity of superluminal observers in 1+3 spacetime” *Classical and Quantum Gravity* **40** (2022) 025013



Można się przekonać, że ciągi spełniające prostszy warunek: $a_i \geq a_j \iff b_i \geq b_j$ zawsze są dobrze uporządkowane. W przypadku ciągów równoważnościowych ten warunek jest równoważny przedstawionej definicji.

W polskiej literaturze często można napotkać inną pisownię nazwiska Pafnutija Lwowicza Czebyszowa („Czebyszew”). Na poniższym znaczku pocztowym wyraźnie widać dwie kropki nad „E”, co oznacza samogłoskę „jo”, którą po spółgłoskach szeleszczących czyta się „o”. Wymowa „Czebyszew” wzięła się stąd, że przy tłumaczeniu z języka rosyjskiego te dwie kropki często znikają, a i sami Rosjanie rzadko je rysują, bo, podobnie jak w przypadku wymowy „o” i „a”, wiedzą, gdzie stawia się akcenty. Co jest zatem silniejsze – zakorzeniony w tradycji „Czebyszew” czy prawidłowy – przynajmniej w języku rosyjskim – „Czebyszow”?



Wszystko w porządku

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ciągi liczb rzeczywistych (a_1, a_2, \dots, a_n) i (b_1, b_2, \dots, b_n) nazywamy *zgodnie uporządkowanymi*, jeśli

nie istnieją takie $i, j \leq n$, że $a_i < a_j$ oraz $b_i > b_j$.

Oznacza to, że ciągi (a) i (b) mają na tym samym miejscu największą liczbę, na tym samym drugą co do wielkości, trzecią i tak dalej aż do ostatniej.

W analogiczny sposób definiujemy ciągi *przeciwnie uporządkowane*. Spełniają one warunek: nie istnieją takie $i, j \leq n$, że $a_i < a_j$ oraz $b_j < b_j$.

Na potrzeby niniejszego artykułu będziemy stosować oznaczenie

$$(a) \star (b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Interesuje nas wartość wyrażenia $(a) \star (b')$, w którym $(b') = (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \dots, b_{\sigma(n)})$ dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Twierdzenie 1 (o ciągach zgodnie uporządkowanych). *Przy powyższych założeniach wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ jest największa wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi (a) i (b') są zgodnie uporządkowane.*

Dowód. Jeżeli ciągi (a) i (b') nie są zgodnie uporządkowane, to istnieją takie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, że $a_i < a_j$ oraz $b'_i > b'_j$. Jeśli zamienimy w ciągu (b') wyrazy b'_i i b'_j miejscami, to wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ wzrośnie o

$$a_i b'_j + a_j b'_i - a_i b'_i - a_j b'_j = (a_j - a_i)(b'_i - b'_j) > 0.$$

Ponieważ permutacji σ jest skończenie wiele, wynika z tego, że maksimum wyrażenia $(a) \star (b')$ istnieje i jest osiągnięte dla pewnego ciągu (b') zgodnie uporządkowanego z (a) . W drugą stronę, jeśli $(b'') = (b_{\tau(1)}, b_{\tau(2)}, \dots, b_{\tau(n)})$ również jest ciągiem zgodnie uporządkowanym z (a) , to $(b') = (b'')$ (choć niekoniecznie $\tau = \sigma$), więc wartość $(a) \star (b')$ jest taka sama dla wszystkich (b') zgodnie uporządkowanych z (a) .

W analogiczny sposób można udowodnić

Twierdzenie 2 (o ciągach przeciwnie uporządkowanych). *Przy powyższych założeniach wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ jest najmniejsza, gdy ciągi (a) i (b') są przeciwnie uporządkowane.*

Z powyższymi nierównościami wiąże się bezpośrednio

Nierówność Czebyszowa. Dla ciągów (a) i (b) zgodnie uporządkowanych mamy:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Jeśli ciągi (a) i (b) są uporządkowane przeciwnie, to nierówność zachodzi w drugą stronę.

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{1+k} + a_2 b_{2+k} + \dots + a_n b_{n+k} \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym przyjmujemy $b_j = b_{j-n}$ dla $j > n$. Sumując powyższe nierówności, a następnie dzieląc obie strony przez n^2 , otrzymamy tezę. Dowód dla ciągów przeciwnie uporządkowanych jest analogiczny.

Zadania

1. Udowodnić, że $a + b + c \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ dla $a, b, c > 0$.
2. Wykazać, że $a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$ dla $a, b, c > 0$.
3. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, a α, β, γ miarami kątów (wyrażonymi w stopniach) naprzeciw nich. Wykazać, że $a\alpha + b\beta + c\gamma \geq 60^\circ \cdot (a + b + c)$.
4. Dowieść, że $x_1^{m+k} + x_2^{m+k} + \dots + x_n^{m+k} \geq x_1^m x_2^k + x_2^m x_3^k + \dots + x_{n-1}^m x_n^k + x_n^m x_1^k$ dla liczb całkowitych dodatnich k i m oraz rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.
5. Udowodnić, że $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ dla $a, b, c > 0$ (nierówność Nesbitta).
6. Udowodnić, że $\frac{x_1}{s-x_1} + \frac{x_2}{s-x_2} + \dots + \frac{x_n}{s-x_n} \geq \frac{n}{n-1}$ dla liczb dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n , przy czym $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Wskazówki do zadań

1. Ciągi (a^2, b^2, c^2) i $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ są przeciwnie uporządkowane.
2. Po obustronnym zlogarytmowaniu i wyłączeniu największego boku.
3. W trójkącie największy kąt leży naprzeciw największego boku.
4. Jeśli x_1, x_2, \dots, x_n to każdy ciąg postaci $(x_1^{\frac{1}{n}}, x_2^{\frac{1}{n}}, \dots, x_n^{\frac{1}{n}})$ (dla $a > 0$ jest uporządkowany zgodnie z x).
5. Ciągi $(a^{\frac{1}{n}}, b^{\frac{1}{n}}, c^{\frac{1}{n}})$ i $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ są zgodnie uporządkowane.
6. Poprzeźnięte zadanie jest szczególnie przydatnym.

delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

$\pi=3,141592\dots$

NR 3 (586) 2023

CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

**Permutacje
i kostka Rubika**

str. 1



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.