

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $E=hc/\lambda$

# delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

NR 3 (598) 2024

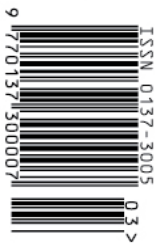
CENA 8 ZŁ - VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)







Astrofotografia  
głębokiego  
nieba  
str. 1

Autor zdjęcia: Ireneusz Nowak



Nakład: 2800 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (598) 2024

Astrofotografia głębokiego nieba. Część I – teoretyczna <i>Ireneusz Nowak</i>	str. 1
Po „stu” (np. trylion sześćset trzy) <i>Piotr Pikul</i>	str. 4
 Zadania	str. 5
Kryształy Pauliego, czyli o tym, że cząstki kwantowe lubią samotność <i>Maciej Pylak</i>	str. 6
Oszczędny listonosz <i>Łukasz Kamiński</i>	str. 9
Twierdzenie Motzkina <i>Sławomir Dinew</i>	str. 12
 Zmarszczek uniknąć się nie da <i>Magdalena Fikus</i>	str. 15
Nadprzewodniki – gdzie ich szukać? <i>Krzysztof Byczuk</i>	str. 16
Klub 44	str. 20
 Prosto z nieba: Wykrywanie zamieszkałych planet	str. 22
 Niebo w marcu	str. 22
 Aktualności Uran i Neptun – ciała naprawdę (?) niebieskie	str. 24
 Nie tylko dla płaszczaków <i>Bartłomiej Bzdega</i>	str. 25

## W następnym numerze: Jak wykryć statki kosmiczne Obcych?



**Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej;  
doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel;  
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;  
dr Wojciech Czerwiński; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;  
dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz;  
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuka;  
dr hab. Artur Jeż, prof. UW; dr hab. Bartosz Klin;  
dr Piotr Kołaczek-Szymański;  
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;  
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;  
dr hab. Krzysztof Pawłowski; dr Milena Ratajczak;  
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;  
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysłomółek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Michał Bejger,  
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,  
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek,  
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,  
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,  
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl) (tylko instytucje)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:  
[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Astrofotografia głębokiego nieba. Część I – teoretyczna

\* Autor fascynuje się astronomią od 15 lat. W astrofotografii stawia na proste, dostępne dla amatorów rozwiązania, eksperymentując przy tym i starając się pokazać wybrane obszary nieba w nowy sposób, co zostało dostrzeżone m.in. przez jury międzynarodowego konkursu AstroCamera, w którym w 2023 roku uzyskał główną nagrodę w kategorii „Obiekty głębokiego nieba”.

NASA – Narodowa Agencja Aeronautyki i Przestrzeni Kosmicznej  
ESA – Europejskie Obserwatorium Południowe

No dobrze, ale skoro galaktyki są ogromnymi obiektami wypełnionymi miliardami gwiazd, to dlaczego ich nie widzimy na nocnym niebie? Główną przyczyną, dla której niebo nad nami wydaje się wypełnione jedynie gwiazdami i poza tym samą czernią, jest bardzo mała ilość światła, jaka do nas dociera od innych obiektów astronomicznych. Cała astrofotografia obiektów tzw. głębokiego kosmosu to fotografia o długim czasie naświetlania – niezbędnym do tego, aby uchwycić słaby sygnał. Mówimy tutaj o czasach liczonych w minutach na jedną klatkę, przy dość jasnych obiektach i czułych kamerach.

Aberracja chromatyczna jest częstym problemem soczewek. Mówiąc najprościej: niebieskie światło, ze względu na większą energię, załamuje się w szkle mocniej niż światło czerwone, przez co kolory nie łączą się tak, jak powinny. Obiektów użytych w astrofotografii powinien być tak skonstruowany, aby ten efekt był jak najmniejszy.

**Na okładce zdjęcie wykonane przez autora artykułu. Niezwykle bogaty obszar nieba na pograniczu gwiazdozbiorów Skorpiona i Wężownika, położony w bezpośrednim sąsiedztwie centrum Drogi Mlecznej. W kadrze znajdują się wodorowe mgławice emisyjne, z potężną mgławicą Zeta Ophiuchi w górnej części zdjęcia, oraz mnóstwo mgławic ciemnych i refleksyjnych, z najbardziej kolorowym i urozmaiconym obszarem w dole zdjęcia, zwanym Rho Ophiuchi.**

*Ireneusz NOWAK\**

Zapewne wielu z Was nie raz spotkało się w Internecie z pełnymi żywymi kolorów zdjęciami nocnego nieba. Pierwsze skojarzenia, jakie przychodzą do głowy, gdy się na nie patrzy, to wyobrażenie aparatury potrzebnej do ich realizacji – dużych, ciężkich obserwatoriów, z potwornie drogimi i wielkimi jak autobusy teleskopami oraz przedziwnym sprzętem spełniającym kryteria „kosmicznych technologii”, do których zwykły śmiertelnik nie ma dostępu.

A jak jest naprawdę? Otóż to zależy! Zdjęcia pokazywane często w mediach, szczególnie te pochodzące z NASA czy ESA, są rzeczywiście wykonane przez astronomicznie drogie i wyspecjalizowane urządzenia. Z drugiej strony trzeba mieć świadomość, że przyrządy optyczne, za pomocą których Charles Messier w XVIII wieku stworzył pierwszy katalog obiektów mgławicowych, składały się z ręcznie szlifowanych soczewek i lusterek zrobionych z wypolerowanych ręcznie płyt srebra, które dzisiejsze lornetki dostępne za kilkaset złotych biją na głowę. Oczywiście przez taką lornetkę nie ujrzymy detali odległych galaktyk, ale na niebie jest bardzo dużo innych obiektów, które z powodzeniem można fotografować sprzętem przeznaczonym dla amatorów. Dobrze, to o jakim sprzęcie i o jakich obiektach astronomicznych będziemy tutaj mówić?

Największa galaktyka na północnym niebie (pomijając naszą Drogę Mleczną, która przez większość roku przecina niebo w poprzek), to M31, czyli Wielka Mgławica Andromedy. Ma ona wymiary około 3 stopni kątowych na 1 stopień kątowy, a to w przybliżeniu tyle co, odpowiednio, 6 i 2 średnice księżyca. Jej galaktyka satelitarna, zwana M33, ma rozmiar około 70 minut kątowych na 40 minut kątowych – czyli trochę ponad, odpowiednio, 2 i 1,3 średnice księżyca. Dużo, prawda? To teraz prawdziwy gigant, czyli obłok gazów i pyłów w gwiazdozbiorze Łabędzia, zwany Cygnus OB7. Jego rozmiar to 7 stopni kątowych na 4 stopnie kątowe – w sam raz na kadr z obiektywem ponad 100 mm.

Poniżej opiszę, jak zrobić kolorowe zdjęcie głębokiego nieba za pomocą obiektywu 50–200 mm i aparatu fotograficznego. W niniejszej, pierwszej części, którą śmiało można nazwać teoretyczną – skupię się na wymaganiach sprzętowych i ekspozycyjnych. W części drugiej, praktyczno-technicznej, która zostanie opublikowana w kolejnym numerze *Delty*, krok po kroku omówię, jakie dodatkowe ekspozycje nieba należy wykonać i jakiej obróbce należy poddać zdjęcie nieba, aby otrzymać zdjęcie zamieszczone na okładce *Delty*.

## Sprzęt

**Obiektów** to najważniejszy element zestawu, gdyż to on „narysuje” nam obraz na sensorze. Wymagań, które musi spełniać obiektów do astrofotografii, jest wiele i nie każdy obiektów da oczekiwany efekt. Podstawą są znikoma aberracja chromatyczna oraz dobrze skorygowane brzegi obrazu – tak aby gwiazdy na brzegach pola widzenia nadal były punktowe i zachowały swój kolor – jest to bardzo wymagające kryterium, ale są na rynku stałogniskowe konstrukcje, które poprawnie realizują te cele i można je nabyć w kwocie około 2 000 PLN.

**Aparat fotograficzny** to drugi najważniejszy element zestawu astrofotografii głębokiego nieba. Aparat powinien pozwalać na uzyskanie niskich szumów przy długich czasach naświetlania, umożliwiać wyłączenie funkcji automatycznego odszumiania obrazu (niektóre aparaty posiadają algorytmy odszumiające, które „pochlaniają gwiazdy”), powinien charakteryzować się wysoką czułością i możliwością rejestrowania długich czasów naświetlania (przy pomocy zewnętrznego programowalnego wężyka lub przez zewnętrzne urządzenie, takie jak laptop czy telefon). Większość topowych marek aparatów, szczególnie z tzw. pełną klatką, nadaje się do tego celu bardzo dobrze. Często w astrofotografii stosuje się tzw. aparaty modyfikowane. Otóż niemal wszystkie cyfrowe aparaty lustrzane posiadają przedni filtr przed matrycą, który wycina część

spektrum światła czerwonego. Pozwala to na tańsze projektowanie obiektywów niewykazujących aberracji chromatycznej i nie wpływa na fotografię dzienną. Niestety filtr ten przeważnie wycina także około 80% sygnału generowanego przez zjonizowany wodór (tzw. H-alfa) – co stanowi większość światła wysyłanego przez mgławice emisyjne. Usunięcie tego filtra, przy pozostawieniu filtra UV/IR, znacząco zwiększa skuteczność takiego aparatu w astrofotografii.

Astrofotografia to przede wszystkim wykonywanie zdjęć z długimi czasami naświetlania. Do kompensacji pozornego ruchu nieba służy **montaż paralaktyczny**. Jest to urządzenie z własnym napędem, obracające się precyzyjnie wzdłuż swojej osi z prędkością jednego obrotu na dobę. Oś tego urządzenia jest ustawiana dokładnie na jeden z biegunów – dla zdjęć wykonywanych z obszaru Polski na biegun północny. Ustawienia dokonuje się za pomocą specjalnie przeznaczonej do tego lunetki wskazującej, w którym miejscu w danym dniu i o danej godzinie powinna znaleźć się gwiazda polarna.

W astrofotografii bardzo przydaje się zupełnie niepraktyczny w innych okolicznościach **ciężki i stabilny statyw**. Jednym z problemów, z którymi będziemy się mierzyć w nocy, mogą być podmuchy silniejszego wiatru. Warto także, by był na tyle stabilny, aby nie zmienił swojego położenia w nocy podczas przestawiania kadru, przypadkowego otarcia czy nie wpadał zbyt łatwo w drgania.

Mało oczywistą częścią zestawu są **grzałki na obiektyw**! Redukują one parowanie szkła i ilość wilgoci skondensowanej na obiektywie. Niestety w naszym klimacie przez większość nocy króluje wilgoć, a czołowa soczewka obiektywu wydaje się ulubionym miejscem do jej osadzania się.

Mamy więc aparat z odpowiednim obiektywem, przymocowany do montażu paralaktycznego, ustawionego na biegun północny, a całość na stabilnym statywie i zabezpieczona przed wilgocią. Ustawiliśmy interesujący nas kawałek nieba w kadrze, mamy ustawioną ostrość, podłączony wąż i upewniliśmy się, że karta pamięci nie została w domu (co też się zdarza).

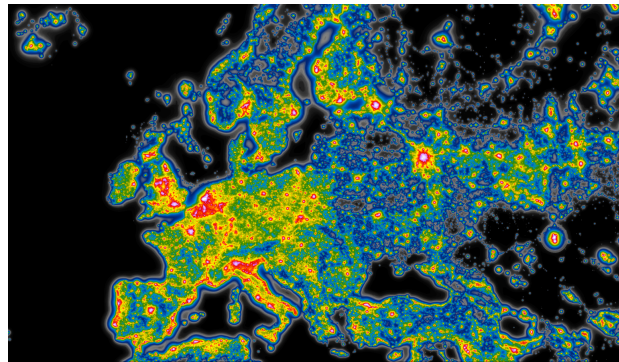
Co dalej?

## Miejsce i Czas

Wydawać by się mogło, że jest to temat trywialny – bo przecież każdy wie, że zdjęcia nieba wykonujemy w nocy przy bezchmurnym niebie. Cóż, nie do końca. Bez wątplenia największą przeszkodą w rejestracji obiektów ciemnego nieba są chmury. Te niskie i średnie należą do przeszkód oczywistych, bo po prostu przysłaniają nam gwiazdy (albo przynoszą deszcz). Jednak dużo większym problemem są ledwo dostrzegalne, szczególnie nocą, **chmury wysokie**. Odpowiadają one za efekt halo powstający na zdjęciach gwiazd, który skutecznie zniweczy jakiegokolwiek próby zebrania dobrego materiału. Warto tutaj dokładnie prześledzić prognozy pogody oraz zweryfikować pierwsze zebrane klatki, czy nie zawierają jasnych obwódek dookoła gwiazd.

Jednak największą zgorą astrofotografii jest **sztuczne zaświecenie**. Człowiek, odkąd wynalazł elektryczność, nieustannie oświetla swoje otoczenie. W Europie Zachodniej i Środkowej coraz mniej jest miejsc, gdzie panuje prawdziwa noc. Według portalu [www.lightpollutionmap.info](http://www.lightpollutionmap.info), który pokazuje poziom zanieczyszczenia nieba sztucznym światłem, obecnie nie ma w Polsce żadnego miejsca z naturalną, pierwotną ciemnością nocnego nieba. Aktualnie najlepszym miejscem do uprawiania astrofotografii są u nas Bieszczady. Kluczowa zasada to znaleźć jak najciemniejsze miejsce blisko naszego miejsca zamieszkania.

Większość dzieci (dorosłych też) w Polsce nigdy na własne oczy nie widziała Drogi Mlecznej. Jeszcze 200 lat temu na obrzeżach Paryża, a co dopiero Warszawy, nocne niebo niczym nie różniło się w swojej jasności (a raczej ciemności) od tego na Saharze. Sztuczne zaświecenie to problem nie tylko astronomów i astrofotografów, gdyż coraz więcej badań wskazuje, że brak prawdziwej ciemności



Mapa zaświecenia nieba Europy za portalem [www.lightpollutionmap.info](http://www.lightpollutionmap.info)

w nocy wpływa negatywnie na ludzki organizm, przyczyniając się także do poważnych chorób. W przypadku astrofotografii – jest tym czynnikiem, który zmusza nas do wyjazdu jak najdalej od miasta, bo światło, nawet daleko od ośrodków miejskich, będzie odpowiadać za największą część zebranego sygnału w naszym materiale.

Nasza **atmosfera** jest dodatkowym, ważnym elementem optycznym, który musimy uwzględnić w fotografii nieba. Duża zawartość wilgoci i pyłów wpływa na przejrzystość i jakość zdjęć. To nie przypadek, że największe obserwatoria są budowane wysoko w górach, gdyż im wyżej ulokujemy aparat, tym „element optyczny” atmosfery jest cieńszy i jego wpływ na zdjęcie jest mniejszy. Stąd każde podniesienie terenu (najlepiej w górach) pomoże nam w osiągnięciu lepszego zdjęcia. Podobnie kadr blisko zenitu da nam lepszej jakości obraz niż ten nisko nad horyzontem.

**Stabilność atmosfery** (tzw. *seeing*) możemy pominąć do ogniskowej około 300 mm, ale przy większych przybliżeniach zaczyna grać kluczową rolę. Ciepłe i zimne oraz wilgotne i suche powietrze oddziałują ze sobą na różnych wysokościach, mieszają się, co daje widoczny efekt „falowania” i rozmywa obraz gwiazd

i drobnych detali galaktyk. Objawem niesprzyjającego seeingu są mocno mrugające gwiazdy – i jest to czynnik, który może zdecydować o rezygnacji z sesji zdjęciowej.

Kolejnym czynnikiem wpływającym na nasze zdjęcie może być delikatna poświata generowana w wyniku spontanicznych reakcji cząsteczek gazów w górnych partiach atmosfery Ziemi, nazwana zjawiskiem

**air glow**. Są to pasma delikatnej poświaty w kolorze zielonym lub, rzadziej, czerwonym. Swoją drogą, jeżeli naszym problemem przy zdjęciach staje się air glow, oznacza to, że znaleźliśmy naprawdę ciemne miejsce.

Pozostają też **cząsteczki o wysokiej energii** (ang. *cosmic-ray*) – tak! Zdarzają się! Zostawiają krótką, prześwieconą kreskę na zdjęciu.

### Jak przeliczyć czas ekspozycji?

Mamy zatem już nasz aparat, wybraliśmy odpowiednie miejsce, pogoda jest piękna, wybraliśmy interesujący nas obiekt astronomiczny. Teraz musimy zdecydować o długości czasu ekspozycji.

Matryca składa się z elementów światłoczułych, pikseli, które, mocno upraszczając, w wyniku detekcji fotonu (efekt fotoelektryczny) zwiększają swój ładunek o wartość 1 eV. Każdy sensor posiada różną maksymalną pojemność pojedynczego piksela, którą nazywamy **studnią potencjału** (ang. *full well capacity*). Przepelnienie piksela, czyli zbyt długie jego naświetlanie, może spowodować „przelanie się” nadmiaru ładunku na sąsiednie piksele, co jest wysoce niepożądane. Po zakończonej ekspozycji zgromadzony w każdym z pikseli ładunek jest wzmacniany i zamieniany w przetworniku analogowo-cyfrowym (A/D) na liczbę.

W większości stosowanych obecnie aparatów przetworniki konwertują odczytywane wartości na liczby 12- lub 14-bitowe, co daje wartości odczytu od 0 do, odpowiednio, 4095 lub 16185. Ponieważ ze względu na duże upakowanie informacji w małym zakresie oferowanym przez pojemność piksela interesuje nas jak największa rozdzielczość pomiaru jego wartości, więc przetwornik 14-bitowy jest tutaj oczywistym wyborem.

W związku z tym interesuje nas jak najdłuższa ekspozycja, przy której nie „przypalimy gwiazd” – owszem, jeśli trafią nam się w kadrze dwie, trzy super jasne gwiazdy „Behemoty” – nic na to nie poradzimy, ale to powinny być wyjątki, gdyż oznaczają utratę części informacji i wpływają na estetykę zdjęcia. Poza samymi gwiazdami istotny wpływ na wybór **czasu naświetlania** wywiera także sztuczne zaświecenie nieba, które przyspiesza saturację gwiazd i kadru. Najbezpieczniejszą formą ustalenia odpowiedniego czasu naświetlania jest wykonanie kilku testowych zdjęć i ustalenie czasu metodą prób i błędów. W większości przypadków jednak czas naświetlania to kilka minut. Warto zaznaczyć, że w ciemnych warunkach bieszczadzkich udaje się uzyskać nawet dwa razy dłuższe ekspozycje niż kilkanaście kilometrów od miasta. No i najważniejsze – formatem zapisu powinien być bezstratny **RAW** – czyli odczyt z matrycy aparatu, bez ingerencji dodatkowych modułów oprogramowania aparatu, mających na celu upiększenie czy odszumienie zdjęcia.

### Wzmocnienie sygnału, czyli czym jest to magiczne ISO?

ISO – zwana także dawniej ASA – jest skalą opracowaną przez American Standards Association, która swoją popularnością wyparła inną, wcześniej stosowaną skalę DIN, opracowaną przez Niemiecki Instytut Normalizacji.

Uogólniając, **ISO** jest ustandaryzowaną miarą czułości aparatu na światło, która gwarantuje, że niezależnie od typu aparatu użytego do wykonania zdjęcia przy obiektywie o tej samej jasności, tym samym czasie naświetlania, w tych samych warunkach i tych samych ustawieniach ISO uzyskamy obraz wynikowy o tej samej jasności. Jako że aparaty wykorzystują różne sensory, każdy z nich w inny sposób przetwarza pochodzący z nich sygnał, aby uzyskać określone ISO. Oznacza to, że wartość ISO, która w konkretnym modelu będzie optymalna dla astrofotografii, w innym urządzeniu będzie ustawieniem mało skutecznym.

Najprościej rzecz ujmując, im niższa wartość ISO, tym aparat jest mniej wrażliwy na światło i odwrotnie. Zdjęcia robione w tych samych warunkach i o tych samych czasach naświetlania, przy np. ISO 100 będą ciemniejsze niż przy ISO 200. Niskie wartości, takie jak ISO 100, świetnie sprawdzają się w słoneczne dni. W przypadku fotografowania w mroku lub pomieszczeniach słabo oświetlonych konieczne może być stosowanie wyższych czułości ISO (jak ISO 1600 lub wyższych).

Teoretycznie więc, jeżeli obiekty, które fotografujemy, są ekstremalnie ciemne, wybór wartości ISO, dla której konieczne jest zbieranie kilku fotonów, aby uzyskać wzrost wartości piksela o 1 przy odczycie, jest gorszy niż ISO o wielkości, dla której już jeden wykryty foton daje w efekcie wzrost wartości piksela o 1 (ang. *unity gain* ISO). Ale żeby nie było zbyt różowo, wybór takiego ISO nie musi być tym najlepszym, z przyczyn ukrytych w konstrukcji matrycy, aparatu i jego oprogramowania – przyczyną może być np. ilość dodawanego szumu do zdjęcia. Poprawne ustawienie ISO jest więc wiedzą często uzyskiwaną, znów, metodą prób i błędów, wspartą różnymi amatorskimi lub specjalistycznymi analizami sprzętu fotograficznego publikowanymi w Internecie (np. przez DxO, [www.dxo.com/](http://www.dxo.com/)), na forach lub po prostu ustalane „metodą ekspercką” (np. ISO800/ISO1600).

To tyle teorii, w następnym odcinku będzie już tylko praktyka!

# Po „stu” (np. trylion sześćset trzy)

Piotr PIKUL\*

\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Jagielloński

Akurat w porównaniu z liczbami,  
o których dalej będzie mowa, 100 to  
wręcz śmiesznie mało...

Sto	100
MiliardDwa	10000000002
MiliardSto	1000000100
StoMiliardów	100000000000
BilionStoTrzy	1000000000103
BilionStoPięć	1000000000105
BilionTrzysta	1000000000300
BilionPięćset	1000000000500
DwaBilionyDwa	2000000000002
DwaBilionySto	2000000000100
CzteryBiliony	4000000000000
SześćBilionów	6000000000000
OsiemBilionów	8000000000000
StoBilionówTrzy	100000000000003
StoBilionówPięć	100000000000005
StoPięćBilionów	105000000000000
TrzystaBilionów	300000000000000
PięćsetBilionów	500000000000000
BiliardDwanaście	1000000000000012
BiliardStoCztery	10000000000000104
BiliardStoSiedem	10000000000000107
BiliardCzterysta	10000000000000400
BiliardSiedemset	10000000000000700
BiliardTysiącDwa	1000000000001002
BiliardTysiącSto	1000000000001100
BiliardMilionDwa	1000000001000002
BiliardMilionSto	1000000001000100
BiliardBilionDwa	10010000000000002
BiliardBilionSto	10010000000000100
DwaBiliardyJeden	20000000000000001
DwaBiliardySześć	20000000000000006
DwaBiliardyOsiem	20000000000000008
TrzyBiliardyTrzy	30000000000000003
TrzyBiliardyPięć	30000000000000005
PięćBiliardówDwa	50000000000000002
PięćBiliardówSto	50000000000000100
DziesięćBiliardów	10000000000000000
StoBiliardówCztery	100000000000000004
StoBiliardówSiedem	100000000000000007
StoBiliardówStoDwa	100000000000000102
StoDwaBiliardyTrzy	102000000000000003
StoDwaBiliardyPięć	102000000000000005
StoTrzyBiliardyDwa	103000000000000002
StoTrzyBiliardySto	1030000000000000100
StoSiedemBiliardów	1070000000000000000
TrzystaDwaBiliardy	302000000000000000
CzterystaBiliardy	400000000000000000
PięćsetDwaBiliardy	502000000000000000
SiedemsetBiliardów	700000000000000000
TrylionSiedemnaście	1000000000000000017
TrylionCzterdzieści	1000000000000000040
TrylionPięćdziesiąt	1000000000000000050
TrylionStoDwanaście	1000000000000000112
TrylionDwieścieTrzy	1000000000000000203
TrylionDwieściePięć	1000000000000000205
TrylionTrzystaJeden	1000000000000000301
TrylionTrzystaSześć	1000000000000000306
TrylionTrzystaOsiem	1000000000000000308
TrylionCzterystaDwa	1000000000000000402
TrylionPięćsetJeden	1000000000000000501
TrylionPięćsetSześć	1000000000000000506
TrylionPięćsetOsiem	1000000000000000508
TrylionSześćsetTrzy	1000000000000000603
:	:

Istnieje nawet koncepcja rozszerzenia  
nazw w nieskończoność. Można się z nią  
zapoznać np. na stronie [www.math.us.edu.pl](http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/faq/node45.html)  
/~pgladki/faq/node45.html lub w źródła:  
J. H. Conway, R. K. Guy, *The Book of*  
*Numbers*, Springer Verlag, 1996

To nie jest wielki ból. Proszę się nie  
martwić.

Jak to jest, że sto, choć to całkiem wiele,  
Nazwę ma tak krótką. (Już dłuższe jest „jeden”!).  
Liter tyle co cyfr. Zbieżność niemożliwa.  
Ciekawe, czy z innymi liczbami tak bywa?  
O stu to każdy słyszał, ale komu znana  
Jest inna liczba, która słownie zapisana  
Tyle samo ma liter, co i cyfr by było,  
Gdyby za ich pomocą się ją przedstawiło?

Sto jeden? Sto tysięcy? Oj, nie tędy droga!  
Same długie wyrazy. Stąd aż do... miliona.  
Siedem cyfr, choć sześć liter mamy w tym milionie.  
Ale jedną dolożyć to jest spory problem...

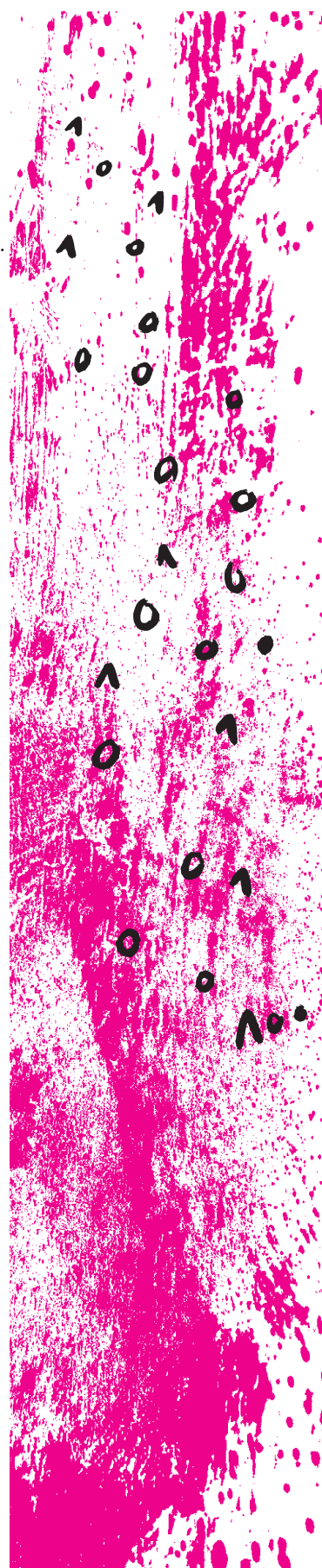
Można by wziąć „miliony” – liter będzie siedem.  
Ale ile milionów? Wszak więcej niż jeden,  
Więc znowu długi jakiś wyraz się doloży,  
I z tym nadmiarem liter nie będzie co zrobić!  
Może dziesięć milionów? Albo sto – najlepiej,  
Skoro tak mało liter występuje w setce?  
Nie, no – wciąż nie działa. Z tymi milionami  
To się raczej nie uda. Trzeba szukać dalej.

Miliard. Ten aż trzy cyfry ma ponad litery.  
Tak krótkimi liczbami już dysponujemy!  
Miliard dwa – cyfr i liter po dziesięć wychodzi.  
Setki krewny daleki został znaleziony!  
Potem miliard sto widać niedaleko,  
I już do stu miliardów trzeba znowu czekać.

Oczywiście ręczne takich liczb szukanie,  
Które niezależnie, jak są zapisane,  
Tę samą długość mają, może być męczące.  
Warto więc wprowadzić automatyzację.  
Ciekawym ćwiczeniem jest programistycznym,  
By kod stworzyć zdolny ponazywać liczby!  
Mamy tam nadmierną mnogość form odmiany,  
Bo jest pięć milionów, ale trzy miliony.  
Nam jednak inny algorytm się przyda,  
Bo miast od liczb zaczynać, a potem nazywać,  
Warto ze słów układać nazwy liczb i badać,  
Czy mnogość cyfr z liter liczebnością się zgadza.  
(Więcej programistycznych wskazówek nie będzie,  
Gdyż nazbyt trudno wyrazić je wierszem).

Proszę zwrócić uwagę, że nie uwzględniamy  
W nazwach liczb odstępów między wyrazami.  
Kto chce liczyć coś więcej niż same litery,  
Musi sam konstrukcję powtórzyć „od zera”.  
A gdyby tak kogoś fantazja nosiła,  
Aby o niedziesiątą zapis liczb zapytać,  
To zauważyć wypada, że w języku polskim  
Nazewnictwo liczb jest rdzennie dziesiętnym.  
Jego mieszanie, na przykład z zapisem binarnym,  
Byłoby czymś dalece dziwnym i nienaturalnym.

Tutaj ciekawostka: jeśli się przyjrzymy  
Standardom opisującym, jak nazywać liczby,  
To (zależnie od standardu) może być wskazana  
Największą liczbą tym kluczem nazwana!  
Gdy już ją wskażemy, to jest oczywiste,  
Że ciąg liczb z jednakią długością zapisem  
Dziesiętnym oraz słownym ma wyraz największy.  
Niestety zależy on od przyjętej konwencji.  
I z tego powodu, co przyznaję z bólem,  
Nie przytoczymy go w tym artykule.



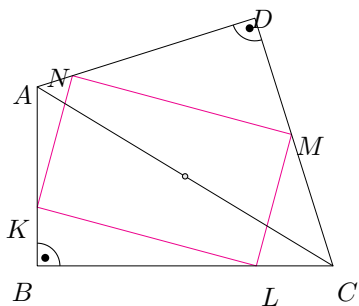
Jeśli czegoś na mojej liście brakuje, to będzie wstyd z tym 63. . .

To jeszcze na koniec ciekawostka jedna:  
 Czy może istnieje jakaś liczba pierwsza  
 O jednako długim zapisie słownym i dziesiętnym?  
 Istnieje. Na miejscu sześćdziesiątym trzecim  
 Jest trylion sześćset trzy (co ma cyfr szesnaście),  
 Który posiada dumne miano liczby pierwszej.  
 Pewnie więcej takich liczb by się dało znaleźć.  
 Sam, Drogi Czytelniku, możesz szukać dalej!

Powyższe rozważania na inne języki  
 Można przenieść – i inne dostać wyniki.  
 Dla Zainteresowanych Poliglotów to zabawy.  
 Ja tylko zwrócę uwagę na ten fakt ciekawy,  
 Że choć do matematyki przymiotów zaliczyć  
 Należy uniwersalność wielką: ludy i języki  
 Wszelkie używać arytmetyki tej samej  
 Mogą i w każdym kraju równanie  
 Kwadratowe jednakim daje się sposobem  
 Rozwiązać (choć innym nazwą je słowem),  
 Podobnie wszelkie geometrii twierdzenia  
 Prawdziwe są niezależnie od pochodzenia  
 Badaczy, którzy je udowodnili,  
 To myśmy dziś coś odmiennego zobaczyli!  
 Udało się rozważyć problem naprawdę niezwykły:  
 I *całkowicie polski*, i matematyczny.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1774.** Każda liczba ciągu  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$  jest równa 2, 5 lub 9. Ponadto  $a_1 = a_{2n+1}$  oraz dowolne dwa sąsiednie wyrazy tego ciągu są różne. Udowodnić, że

$$a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_4 - \dots + a_{2n-1} a_{2n} - a_{2n} a_{2n+1} = 0.$$

Rozwiązanie na str. 18

**M 1775.** W wypukłym czworokącie  $ABCD$  kąty  $ABC$  i  $ADC$  są proste. Punkty  $K, L, M, N$  leżą odpowiednio na bokach  $AB, BC, CD, DA$ , przy czym czworokąt  $KLMN$  jest prostokątem. Udowodnić, że środek przekątnej  $AC$  jest równoodległy od prostych  $KL$  i  $MN$ .

Rozwiązanie na str. 14

**M 1776.** Dane są liczby rzeczywiste  $a, b, c$  takie, że

$$\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right| < 2.$$

Udowodnić, że

$$\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| < 2 \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \right| < 2.$$

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1091.** Na sąsiednich, równoległych torach ustawiono tramwaj zasilany z zewnętrznej sieci elektrycznej oraz elektrowóz zasilany ze znajdujących się w nim akumulatorów i rozpoczęto „wyścig”. W chwili startu masy obu pojazdów były równe i wynosiły  $m_0 = 4,2 \cdot 10^4$  kg. Po pewnym czasie oba pojazdy osiągnęły prędkość  $v$  równą  $4/5$  prędkości światła  $c$ . Jakie masy miały w tym momencie oba pojazdy w układzie odniesienia związanym z torami?  
 Rozwiązanie na str. 6

**F 1092.** Obraz tarczy słonecznej otrzymany przy pomocy kulistego zwierciadła wklęsłego o promieniu  $r = 10$  cm i ogniskowej  $f = 1$  m pada na cienki krążek o rozmiarach identycznych z rozmiarami obrazu Słońca, wykonany z matowego materiału absorbującego światło. Oszacuj, do jakiej maksymalnej temperatury  $T$  można w ten sposób ogrzać krążek, jeśli temperatura powierzchni Słońca wynosi  $T_0 \approx 6000$  K? Wpływ efektów związanych z aberracją sferyczną należy pominąć.  
 Rozwiązanie na str. 10

# Kryształy Pauliego, czyli o tym, że cząstki kwantowe lubią samotność

Maciej PYŁAK\*

\* Zakład Fizyki Teoretycznej, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

† Wyznacza się wprawdzie przybliżone trajektorie cząstek naładowanych w komorze dryfowej. Jest to jednak nadal trajektoria w rozumieniu mechaniki klasycznej.

Potencjał harmoniczny opisuje sytuację, w której energia potencjalna cząstki jest proporcjonalna do funkcji  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Funkcja ta ma minimum w punkcie  $x = 0$ . Punkt ten nazywamy położeniem równowagi – aby wyprowadzić cząstkę z tego punktu, należy dostarczyć energię proporcjonalną do kwadratu wychylenia  $x^2$ . Taka zależność energii potencjalnej od wychylenia oznacza, że siła, która działa na cząstkę, jest proporcjonalna do wychylenia  $x$ , ale z ujemnym współczynnikiem (siła ma zwrot przeciwny do wychylenia). Czytelnik znający podstawy mechaniki klasycznej zapewne wie, że „siła równa jest minus gradientowi potencjału”, a gradient to w jednym wymiarze po prostu pochodna. W fizyce klasycznej potencjał harmoniczny opisuje układ wykonujący drgania wokół położenia równowagi, czyli tzw. *oscylator harmoniczny*.



**Rozwiązanie zadania F 1091.**  
Po osiągnięciu prędkości  $v = 0,8c$  masa tramwaju wynosiła

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{10}{6} m_0,$$

tzn.  $m_1 = 7 \cdot 10^4$  kg, a masa elektrowozu  $m_2 = m_0 = 4,2 \cdot 10^4$  kg. Tramwaj zwiększył swoją energię kinetyczną, a więc i całkowitą masę, dzięki pobieraniu energii z zewnątrz (z sieci elektrycznej). Elektrowóz natomiast rozpedzał się, zamieniając w energię kinetyczną energię potencjalną zgromadzoną w będących jego częścią akumulatorach, a zatem jego całkowita energia (i równoważna jej masa) nie uległa zmianie podczas rozpedzania.

Gdy chcemy opisywać układy wielu cząstek kwantowych, jednym z fundamentalnych problemów, jaki napotykamy, jest ich nierozróżnialność. W przypadku obiektów makroskopowych (tzn. takich, które są dobrze opisywane w języku mechaniki klasycznej), nawet gdy są one identyczne (masa, rozmiar, ładunek), możemy je odróżniać na podstawie ich trajektorii. Dla każdego z takich ciał możemy bowiem napisać dynamiczne równanie ruchu. W ten sposób każdy obiekt makroskopowy ma swoje położenie, prędkość... i staje się unikatowy. Metoda ta zawodzi w przypadku obiektów kwantowych, gdyż tu możemy operować jedynie pojęciem prawdopodobieństwa tego, że ciało znajduje się w jakimś obszarze przestrzeni. Traci zatem sens również pojęcie trajektorii takiej cząstki<sup>†</sup>. Zamiast tego posługujemy się pewnym tworem matematycznym nazywanym **funkcją falową**, oznaczaną najczęściej grecką literą  $\psi$ . Konkretną postać  $\psi$  znajdujemy jako rozwiązanie fundamentalnego dla mechaniki kwantowej równania falowego – **równania Schrödingera**. Sama funkcja falowa nie ma prostej interpretacji fizycznej, lecz już kwadrat jej modułu  $|\psi(x)|^2$  wyraża gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $x$ . Oznacza to, że zamiast mówić o położeniu cząstki czy też o jej pędzie, jesteśmy w stanie wyrokować jedynie o tym, jaki przedział położenia/pędów jest bardziej prawdopodobny od innych.

Opisując stan układu wielu cząstek kwantowych, z uwagi na ich nierozróżnialność, zobligowani jesteśmy do traktowania go jako całości. Tak samo funkcja falowa opisująca stan takiego układu musi zależeć np. od położenia wszystkich składników (możemy również używać opisu w przestrzeni pędów).

Wykonajmy pewien eksperyment (póki co myślowy). Wyobraźmy sobie dwie cząstki, które mogą poruszać się wzdłuż prostej (czyli tylko w jednym wymiarze). Na obie cząstki będzie działała siła zależna od położenia, która przyciąga cząstki do ustalonego położenia równowagi (opisywana tzw. potencjałem harmonicznym, patrz margines). Interesuje nas, jaki będzie przestrzenny rozkład tych dwóch cząstek. Gdyby chodziło o dwa ciała podlegające mechanice Newtona (np. dwie identyczne kulki), bez trudu pokazalibyśmy, że ulokują się one możliwie blisko minimum potencjału, jedynym zaś ograniczeniem są ich niezerowe promienie, stad też  $x_1 \rightarrow 0^-$ ,  $x_2 \rightarrow 0^+$ , a środek masy układu znajduje się dokładnie w zerze.

Jeśli jednak nasze cząstki przejawiają naturę kwantową, wtedy musimy szukać stanu takiego układu dwucząstkowego, który zależeł będzie od dwóch współrzędnych (położenia):  $\psi(x_1, x_2)$ . Jeśli uda nam się wyznaczyć taką funkcję, to kwadrat jej modułu wskaże, dla jakich położenia  $x_1, x_2$  gęstość prawdopodobieństwa osiąga maksimum. Jak to ma miejsce dla niezależnych zdarzeń losowych, możemy przedstawić naszą funkcję w postaci iloczynowej:  $\psi(x_1, x_2) = \phi_a(x_1)\phi_b(x_2)$ , gdzie  $\phi_{a,b}(x)$  jest tak zwaną funkcją jednocząstkową – czymś, co w naszym przykładzie odpowiada pojedynczej cząstce w pułapce. Taki opis byłby w pełni słuszny, gdyby nasze cząstki były rozróżnialne. Znaczący on bowiem, że cząstka pierwsza jest w stanie  $a$ , cząstka druga zaś w stanie  $b$ . Ów stan może oznaczać np. energię cząstki. Tak długo, jak cząstki są nierozróżnialne, trzeba wziąć pod uwagę, że możliwa jest także sytuacja odwrotna: cząstka pierwsza jest w stanie  $b$ , a druga w stanie  $a$ . Sama operacja zamiany cząstek (oznaczmy ją jako operację  $\hat{P}$ ) jest równoważna przemnożeniu funkcji falowej przez pewną stałą  $c$ :

$$\hat{P}\psi(x_1, x_2) = c \cdot \psi(x_2, x_1).$$

Gdy wykonamy tę operację dwukrotnie, wracamy do stanu początkowego:

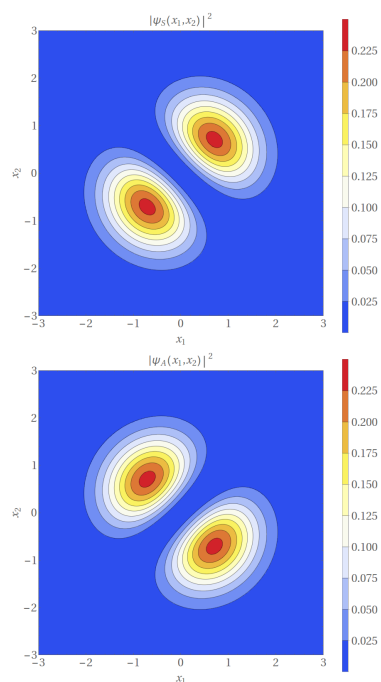
$$\hat{P}[\hat{P}\psi](x_1, x_2) = c^2 \cdot \psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2),$$

co nakłada ograniczenie:  $c = \pm 1$ . Można się było spodziewać, że  $|c| = 1$ , gdyż przestawienie nierozróżnialnych cząstek nie może zmieniać wartości prawdopodobieństwa. Mamy więc dwie możliwe sytuacje odpowiadające dwóm



Mówimy, że funkcja  $\psi_S(x_1, x_2)$  opisuje stan symetryczny, ponieważ zamiana cząstek, której odpowiada zamiana argumentów  $x_1 \leftrightarrow x_2$ , pozostawia funkcję  $\psi_S(x_1, x_2)$  niezmienną. Natomiast zamiana cząstek (czyli argumentów  $x_1 \leftrightarrow x_2$ ) funkcji  $\psi_A(x_1, x_2)$  zmienia jej znak na przeciwny, dlatego stan opisywany tą funkcją nazywamy antysymetrycznym.

Energia cząstek w potencjale harmonicznym jest skwantowana, podobnie jak energia elektronu w atomie wodoru – cząstka może znajdować się w stanach o pewnych wyróżnionych energiach. Stan o najniższej energii nazywamy podstawowym, a stany o wyższych energiach nazywamy wzbudzonymi. Podane tu funkcje  $\phi_a(x)$  oraz  $\phi_b(x)$  znajduje się jako rozwiązania wspomnianego już wcześniej równania Schrödingera z potencjałem harmonicznym, odpowiadające energii stanu podstawowego i pierwszej dozwolonej wartości energii większej od wartości najniższej.



Rys. 1. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa  $p(x_1, x_2)$  dla dwóch cząstek w polu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego. Górny rysunek: przypadek symetryczny – prawdopodobieństwo jest maksymalne dla jednakowych położenia cząstek ( $x_1 = x_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ ). Dolny rysunek: przypadek antysymetryczny – prawdopodobieństwo jest maksymalne dla przeciwnych położenia cząstek  $x_1 = -x_2 = \pm 1/\sqrt{2}$

Zakaz Pauliego jest przyczyną tego, że elektrony (które są fermionami) w atomach obsadzają kolejne coraz wyższe poziomy energetyczne. Gdyby elektrony były bozonami, to wszystkie znajdowałyby się w jednym i tym samym stanie o najniższej energii i nie byłoby chemii, jaką znamy, a zatem nas też by nie było.

możliwym wartościami stałej  $c = \pm 1$ :

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_a(x_1)\phi_b(x_2) + \phi_b(x_1)\phi_a(x_2)),$$

$$\psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_a(x_1)\phi_b(x_2) - \phi_b(x_1)\phi_a(x_2)).$$

Występujące powyżej suma i różnica mają fundamentalne znaczenie. W celu lepszego zrozumienia tego zagadnienia spójrzmy na rozkłady prawdopodobieństwa dla stanu symetrycznego  $S$  i antysymetrycznego  $A$ , gdy  $\phi_a(x)$  oraz  $\phi_b(x)$  są, odpowiednio, stanem podstawowym (stanem o najniższej energii) i pierwszym stanem wzbudzonym kwantowego oscylatora harmonicznego:

$$\phi_a(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}, \quad \phi_b(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}xe^{-x^2/2}.$$

Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa zostały przedstawione na rysunku 1. Gdy je porównamy, możemy zaobserwować pewne fundamentalne różnice. Podczas gdy funkcja  $|\psi_S(x_1, x_2)|^2$  osiąga maksimum dla  $x_1 = x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  oraz przyjmuje zerową wartość na prostej  $x_1 = -x_2$ , to w wypadku funkcji  $|\psi_A(x_1, x_2)|^2$  sytuacja jest odwrotna. Oznacza to, że jeśli nasze cząstki będą się znajdowały w stanie opisywanym funkcją symetryczną – będą chciały przebywać w tym samym miejscu, natomiast cząstki opisywane funkcją antysymetryczną „wybiorą” przeciwne zbocza pułapki, zaś prawdopodobieństwo zaobserwowania ich razem jest zerowe – jest to zdarzenie niemożliwe.

Rodzi się zatem pytanie: Który z wariantów (symetryczny czy antysymetryczny) będzie się realizował? Kluczową rolę w znalezieniu odpowiedzi odgrywa własność kwantowa zwana *spinem*, którą czasem (niezbyt słusznie) określa się jako własny moment pędu. De facto spin, będący immanentną cechą danej cząstki, pozwala wyróżnić dwa rodzaje cząstek: o spinie całkowitym (np. fotony) oraz te o spinie połowkowym (np. elektrony, protony czy neutrony). Pierwsze z nich, nazywane **bozonami** (Satyendra Nath Bose wyznaczył rozkład prawdopodobieństwa dla fotonów), opisywane są symetryczną funkcją falową. Mogą więc wszystkie znajdować się w tym samym stanie kwantowym (taki stan materii nazywamy kondensatem Bosego–Einsteina). Drugie określamy jako **fermiony** (od nazwiska Enrico Fermiego). W pewnych szczególnych warunkach bozony mogą tworzyć kondensat, natomiast fermiony są zawsze unikatowe: nie jest możliwa sytuacja, w której jakiś stan kwantowy jest obsadzony przez więcej niż jeden fermion. Zapisana powyżej własność stanowi treść **zakazu Pauliego** oraz wskazuje na niezwykle istotną korelację między cząstkami, które mu podlegają.

Powyższy przykład dwóch cząstek jest relatywnie prosty w analizie i pozwala na zrozumienie, jak wielką rolę odgrywa symetria funkcji falowej i związany z nią zakaz Pauliego. Gdy zwiększymy liczbę atomów oraz gdy nasza pułapka jest przynajmniej dwuwymiarowa, zagadnienie staje się nietrywialne. Z jednej strony mamy do czynienia z „odpychaniem” się atomów (jest to wynik wielocząstkowych korelacji, a nie żadne z podstawowych oddziaływań, gdyż atomy nie posiadają ładunku), z drugiej zaś zewnętrzny potencjał nie pozwala im zbyt blisko siebie oddalić. Pojawia się zatem pytanie: Gdzie są te atomy i jak się unikają wzajemnie w przestrzeni? To pytanie zadali sobie uczeni z Instytutu Fizyki Polskiej Akademii Nauk, przystępując do badania tego, czy są jakieś geometrycznie preferowane ustawienia cząstek oraz jak bardzo te ustawienia są preferowane w stosunku do innych [3, 7, 1, 4].

Postaram się pokrótce wyjaśnić główne założenia oraz rezultaty cytowanych prac. Niestety wraz ze wzrostem liczby atomów rośnie także stopień złożoności rozważanego zagadnienia. Dla  $N$  cząstek w 2-wymiarowej pułapce mamy już  $2N$  zmiennych, od których zależy pełna funkcja falowa, a w konsekwencji prawdopodobieństwo. Funkcja falowa może zostać przedstawiona w postaci iloczynowej, jednak należy wziąć pod uwagę wszystkie możliwe permutacje zbioru  $N$ -elementowego z uwzględnieniem zmiany znaku iloczynu przy każdorazowej zamianie cząstek. O ile było to trywialne dla  $N = 2$ , gdyż istnieją tylko  $2! = 2$  permutacje (którym odpowiadają dwa składniki w funkcji falowej  $\psi_A$ ),

Opisaną w tekście procedurę konstruowania całkowicie antysymetrycznej funkcji falowej  $N$  cząstek można zapisać w postaci tzw. *wyznacznika Slatera* (wyznacznika macierzy zbudowanej z funkcji jednocząstkowych):

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_1) & \dots & \phi_N(\vec{r}_1) \\ \phi_1(\vec{r}_2) & \phi_2(\vec{r}_2) & \dots & \phi_N(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(\vec{r}_N) & \phi_2(\vec{r}_N) & \dots & \phi_N(\vec{r}_N) \end{vmatrix}$$

Co oznacza „pełne obsadzenie” stanu energetycznego? W przypadku pułapki jednowymiarowej każdej energii odpowiada jeden stan wzbudzony. W przypadku pułapki dwu- (i więcej) wymiarowej energie wzbudzeń w różnych kierunkach się dodają, a w konsekwencji tę samą energię mogą mieć różne stany. Na przykład pierwszej wzbudzonej energii w pułapce dwuwymiarowej odpowiadają dwa stany wzbudzone – cząstka może drgać w kierunku  $x$  lub  $y$ . Oba stany mają tę samą energię, ale są to różne stany. Drugiej energii wzbudzonej odpowiadają już trzy stany, ponieważ cząstka może być w drugim stanie wzbudzonym w kierunku  $x$  i w stanie podstawowym w kierunku  $y$ , lub na odwrót, a dodatkowo może być w pierwszym stanie wzbudzonym w obu kierunkach – wtedy energie tych wzbudzeń się sumują, a jak wiadomo  $1 + 1 = 2$ , i dostajemy trzeci stan odpowiadający drugiemu poziomowi wzbudzonemu. Wyższe stany wzbudzone otrzymuje się w analogiczny sposób. Trzeciemu wzbudzonemu poziomowi energetycznemu odpowiadają 4 stany, gdyż  $3 = 3 + 0 = 2 + 1 = 1 + 2 = 0 + 3$ , a składniki sumy odpowiadają energiom drgań w kierunkach  $x$  i  $y$ , czwartemu odpowiada 5 stanów itp. Pełne obsadzenie oznacza, że mamy obsadzone na przykład dwa pierwsze stany – podstawowy i dwa odpowiadające pierwszemu stanowi wzbudzonemu, co łącznie daje trzy cząstki. Kolejne w pełni obsadzone konfiguracje powstają przez dodanie cząstek obsadzających całkowicie następne stany energetyczne, czyli możemy dodać trzy cząstki, żeby obsadzić drugi poziom wzbudzony (razem 6 cząstek), następnie dodać 4, żeby obsadzić trzeci (razem 10 cząstek), następnie 5 (razem 15 cząstek) itd.

to już dla  $N = 3$  mamy  $3! = 6$  składników. Tak jak w przypadku opisanej wcześniej funkcji  $\psi_A$  dla przypadku  $N = 2$ , w ogólnym przypadku funkcja falowa będzie sumą  $N!$  składników, z których każdy jest iloczynem  $N$  funkcji jednocząstkowych. Kolejność argumentów  $\vec{r}_i$  w każdym składniku jest inna – kolejności te odpowiadają wszystkim możliwym permutacjom, a dodatkowo każdy składnik mnożony jest przez znak permutacji. Na koniec funkcję trzeba unormować, czyli podzielić przez  $\sqrt{N!}$ , żeby kwadrat jej modułu opisywał gęstość prawdopodobieństwa.

Poszukiwanie maksimum prawdopodobieństwa z matematycznego punktu widzenia jest zdecydowanie trudniejsze, lecz ciągle wykonalne. Posłużyć się można np. metodą Monte Carlo [6]. Polega ona na tym, że rozpoczyna się od losowej konfiguracji atomów, a następnie dodaje niewielkie przesunięcia (tylko jednego w każdej iteracji), sprawdzając, czy taka modyfikacja prowadzi do wzrostu wartości prawdopodobieństwa (zachowujemy wtedy taką konfigurację), czy też do jego obniżenia (odrzucaamy taką konfigurację). Proces ten jest wielokrotnie powtarzany z coraz mniejszą amplitudą przesunięć, aż do uzyskania satysfakcjonującej zbieżności. Otrzymywane w ten sposób położenia atomów w przestrzeni dwuwymiarowej (były również prowadzone badania w trzech wymiarach [2]) tworzą struktury geometryczne, które nazywamy **kryształami Pauliego**.

Kolejny problem polega na tym, że dokonując pomiaru położenia wielu cząstek (np. przy pomocy tablicy detektorów) oraz powtarzając te pomiary wielokrotnie z uwagi na statystyczny charakter procesu (atomy wcale nie muszą przebywać w położeniach odpowiadających wcześniej wyznaczonemu maksimum), w granicy nieskończonej liczby powtórzeń otrzymamy średnią, która będzie jednocząstkowym rozkładem prawdopodobieństwa:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^N |\phi_n(x, y)|^2.$$

Informacja o korelacjach między atomami zostaje w tym wypadku utracona poprzez uśrednienie po wielu realizacjach, tj. wynikach poszczególnych pomiarów.

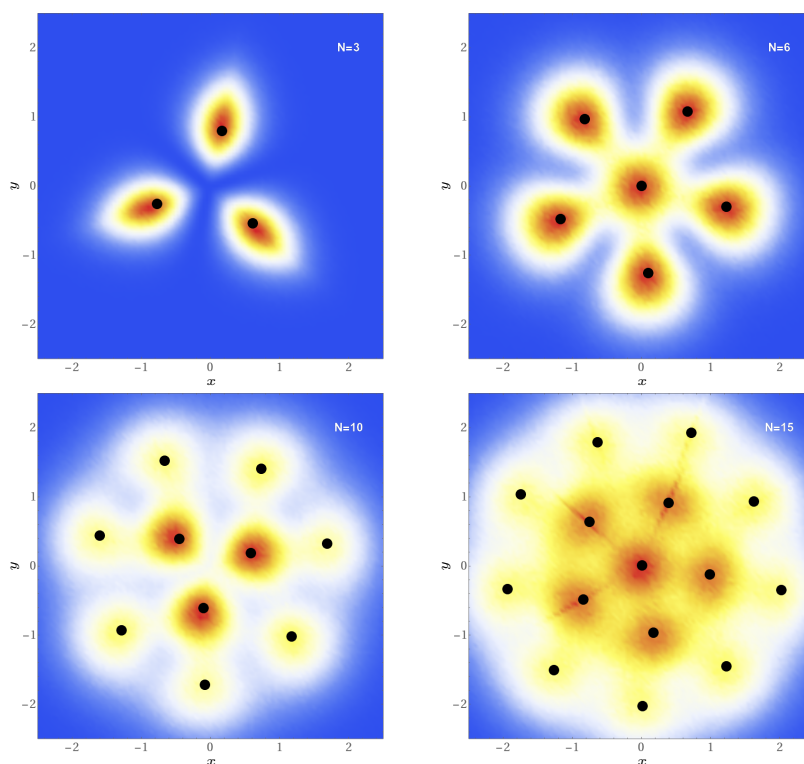
Z tego względu taki pomiar nie pozwoli na poznanie geometrycznego rozkładu atomów w pułapce. Konieczne jest sięgnięcie po narzędzie bardziej wyrafinowane niż wielokrotny pomiar położenia atomów. Narzędziem tym jest wprowadzenie rozkładu konfiguracji. W celu jego otrzymania każdy wynik uzyskany z rozkładu  $N$ -cząstkowego jest przekształcany izometrycznie – poprzez obrót o pewien kąt (z zachowaniem położenia środka masy), tak aby otrzymać rozkład położenia atomów możliwie najbliższy temu, który wynika z maksymalizacji prawdopodobieństwa opisanego tym rozkładem (przewidzianej struktury kryształu Pauliego). Dopiero takie wyniki podlegają uśrednieniu, tworząc nowy rozkład  $C(x, y)$ .

Przykłady rozkładów gęstości konfiguracji  $C(x, y)$  otrzymane dla  $N = 3, 6, 10, 15$  zostały przedstawione na rysunku 2. Wybrane liczby atomów odpowiadają sytuacjom, gdy w pełni są obsadzone kolejne stany energetyczne (patrz margines), dlatego też obserwowane struktury odzwierciedlają symetrię osiową pułapki. Nie dzieje się tak jednak dla dowolnego  $N$ , kiedy to atomy o największej energii mogą obsadzać różne stany własne pułapki. W takiej sytuacji struktura kryształu Pauliego nie jest jednoznacznie określona.

Na rysunku 2 widoczna jest wyraźna struktura powłokowa, jednakże powłoki w kryształach nie są tożsame z powłokami energetycznymi, charakterystycznymi dla elektronów w atomie. Nie są to także powłoki o określonym promieniu, gdyż w miarę wzrostu liczby atomów tworzących kryształ Pauliego pojawiają się pewne fluktuacje, zależne m.in. od rozkładu atomów na powłoce bliższej środka masy. Wszystkie te cechy dowodnie wskazują, że istnienie korelacji  $N$ -tego rzędu (bo każdy atom jest skorelowany z  $N - 1$  pozostałymi), wynikających z zakazu Pauliego, prowadzi do powstawania bardzo egzotycznych układów atomów, które

## Literatura

- [1] M. Gajda, J. Mostowski, M. Pylak, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Pauli crystals—interplay of symmetries. *Symmetry*, 12(11), 2020.
- [2] M. Gajda, J. Mostowski, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Pauli crystals: hidden geometric structures of the quantum statistics, 2015.
- [3] M. Gajda, J. Mostowski, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Single-shot imaging of trapped fermi gas. *Europhysics Letters*, 115(2):20012, aug 2016.
- [4] F. Gampel, M. Gajda, M. Załuska-Kotur, and J. Mostowski. Pauli crystals in harmonic trap and on a sphere. *Physics Letters A*, 422:127799, 2022.
- [5] M. Holten, L. Bayha, K. Subramanian, C. Heintze, P. M. Preiss, and S. Jochim. Observation of pauli crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 126:020401, Jan 2021.
- [6] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 12 1953.
- [7] D. Rakshit, J. Mostowski, T. Sowiński, M. Załuska-Kotur, and M. Gajda. On the observability of pauli crystals in experiments with ultracold trapped fermi gases. *Scientific Reports*, 7(1):15004, Nov 2017.



Rys. 2. Rozkłady konfiguracji  $C(x, y)$  dla różnej liczby atomów w pułapce ( $N = 3, 6, 10, 15$ ). Kolor czerwony na rysunkach oznacza największą wartość prawdopodobieństwa zaobserwowania atomu. Czarnymi punktami zaznaczono przewidywane położenia atomów (wyniki metody Monte Carlo, która została opisana w tekście)

wykazują jednak pewne uporządkowania – dokładnie tak, jak w strukturach krystalicznych.

W ostatnim czasie grupie badaczy z Heidelbergu udało się eksperymentalnie potwierdzić istnienie przedstawionych powyżej struktur [5]. Wykorzystano do tego celu ultrazimny i rozrzedzony gaz atomów  ${}^6\text{Li}$ . Dokonując wielokrotnych rekonstrukcji rozkładu gęstości pędów atomów poprzez pomiar tzw. czasu przelotu TOF, *time of flight*, oraz przeprowadzając analizę analogiczną do opisanej w tekście, udało się wyznaczyć rozkład konfiguracji, który okazał się całkowicie zgodny z teoretycznymi przewidywaniami.

## Oszczędny listonosz

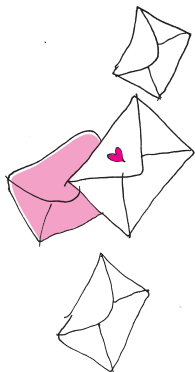
Łukasz KAMIŃSKI\*

Wyobraźmy sobie miasteczko, w którym żyje  $n$  osób. Nie dotarł tam ani Internet, ani nawet idea urzędu pocztowego. Jest jednak zatrudniony listonosz, u którego można bezpośrednio nadać lub odebrać przesyłkę. Listonosz codziennie odwiedza każdego mieszkańca dokładnie jeden raz. Niektórzy mieszkańcy korespondują z innymi, lecz niekoniecznie każdy z każdym. Jeśli kogoś odwiedzi listonosz, to osoba ta z pewnością zapyta go, do kogo się jeszcze wybiera, a następnie wyśle list do wszystkich, z którymi koresponduje, a których listonosz jeszcze tego dnia nie odwiedził. Listonosz może sam wybrać kolejność, w jakiej odwiedza mieszkańców miasteczka. Zdążył się już też zorientować, kto z kim koresponduje, i chce odwiedzić mieszkańców w takiej kolejności, żeby w żadnym momencie nie dźwigać za dużo listów. Ile listów na pewno będzie musiał w pewnym momencie zmieścić w torbie listonosz?

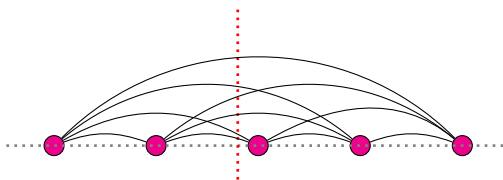
### Sami swoi

Zacznijmy od przypadku najprostszego do analizy – gdy każdy koresponduje z każdym. Wówczas niezależnie od kolejności, jaką wybrał listonosz, sytuacja

\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



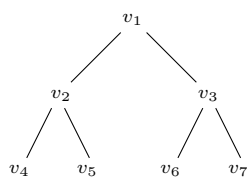
wygląda następująco: jeśli listonosz odwiedził już dokładnie  $i$  mieszkańców, to ma w torbie  $i(n-i)$  listów. Istotnie, w torbie listonosza znajdują się listy od każdego z odwiedzonych mieszkańców do każdego z  $n-i$  jeszcze nieodwiedzonych. Wykonując proste szacowanie, możemy przekonać się, że  $i(n-i)$  wynosi maksymalnie  $\frac{n^2}{4}$  dla  $n$  parzystego oraz  $\frac{n^2-1}{4}$  dla  $n$  nieparzystego, co daje nam górne ograniczenie na rozmiar torby potrzebnej listonoszowi.



Rys. 1. Graf reprezentujący miasto z pięcioma mieszkańcami, gdzie każdy koresponduje z każdym. Można dostrzec, że w pewnym momencie listonosz będzie musiał mieć przy sobie 6 listów

### Korporacja

A co, jeśli nasze miasteczko to tak naprawdę nie miasteczko, ale wielka korporacja? Naturalnie w korporacji pracownicy mają przypisany jakiś stopień awansu zawodowego. Najwyższy stopień ma oczywiście prezes, którego będziemy oznaczać  $v_1$ . Ponadto założymy, że każdy pracownik  $v_i$ , którego stopień awansu nie jest najniższy (czyli nie jest na samym dole hierarchii), ma dokładnie dwóch bezpośrednich podwładnych:  $v_{2i}$  oraz  $v_{2i+1}$ . Mają oni dokładnie o jeden mniejszy od  $v_i$  stopień awansu zawodowego. Każdy pracownik oprócz  $v_1$  ma dokładnie jednego przełożonego. W przypadku tej korporacji wiadomości będą przesyłane jedynie pomiędzy pracownikiem a jego bezpośrednim podwładnym lub odwrotnie. Jak dużą torbę musi mieć listonosz w takim przypadku?



Rys. 2. Pracownicy korporacji o trzech możliwych stopniach awansu

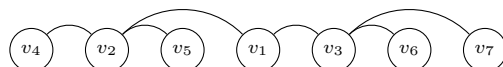
Ta sytuacja jest już nieco trudniejsza. Sformułujmy nasz problem w języku teorii grafów. Niech  $v_1, \dots, v_n$  oznaczają mieszkańców (albo pracowników, jak w przykładzie z korporacją) i niech  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Rozpatrzmy graf  $G = (V, E)$ , przy czym  $(v_i, v_j) \in E$  oznacza, że  $v_i$  i  $v_j$  korespondują ze sobą. Naszym zadaniem jest znaleźć minimalną potrzebną pojemność torby, czyli dokładnie wartość:

$$c(G) = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \max_{1 \leq k \leq n} |\{(v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)}) \in E : i \leq k < j\}|,$$

gdzie  $\Sigma_n$  oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Funkcję  $c(G)$  nazywamy *szerokością przekroju* (ang. *cutwidth*) grafu  $G$ .

Pomyślmy o tym w następujący sposób: Ustawiamy wierzchołki grafu  $G$  na prostej  $\ell$ . Wówczas  $c(G)$  to najmniejsza liczba  $k$ , dla której istnieje ustawienie wierzchołków takie że, każda prosta prostopadła do  $\ell$  przecina co najwyżej  $k$  krawędzi (patrz rys. 1). Proste prostopadłe do  $\ell$  będziemy nazywać *przekrojami*, zaś liczbę krawędzi  $G$ , które przecinają dany przekrój, będziemy nazywać jego *szerokością*.

Wróćmy do problemu listonosza zatrudnionego w korporacji. Niech  $T_h$  oznacza pełne drzewo binarne o wysokości  $h$  (czyli dokładnie graf reprezentujący korespondujących ze sobą pracowników, jeśli mamy korporację z  $h+1$  możliwymi stopniami awansu zawodowego). Oznaczmy wierzchołki tak jak poprzednio. Zauważmy, że  $T_h$  ma  $n = 2^{h+1} - 1$  wierzchołków. Nasze zadanie polega na obliczeniu  $c(T_h)$ . Warto zacząć od małych wartości  $h$ . Łatwo stwierdzić, że  $c(T_0) = 0$  oraz  $c(T_1) = 1$ . Przy odrobinie wysiłku obliczamy też, że  $c(T_2) = 2$ . Jeśli poświęcimy problemowi nieco więcej czasu i pomysłowości, to udowodnimy, że  $c(T_3) = 3$  (zachęcamy Czytelnika Dociekliwego do samodzielnego sprawdzenia).



Rys. 3. Przykład ustawienia wierzchołków grafu  $T_2$  na prostej, realizujący szerokość przekroju równą 2

Można więc wysnuć hipotezę, iż  $c(T_h) = h$  dla wszystkich  $h \in \mathbb{N}$ . Niemałym zaskoczeniem może być zatem fakt, że  $c(T_4) = 3$ . Ogólne rozwiązanie daje następujące twierdzenie:



**Rozwiązanie zadania F 1092.**  
Na potrzeby naszego oszacowania potraktujemy Słońce i krążek jak ciała doskonale czarne wypromieniowujące energię zgodnie ze wzorem (prawo Stefana-Boltzmann):

$$P = \sigma T^4 S,$$

w którym  $P$  oznacza całkowitą moc promieniowania,  $S$  powierzchnię ciała, a  $T$  temperaturę powierzchni w skali Kelwina. Wprowadźmy oznaczenia:  $R_S$  – promień Słońca,  $R$  – odległość zwierciadła od Słońca i  $\delta$  – promień krążka (i obrazu Słońca). Moc promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni zwierciadła wynosi:

$$P_Z = 4\pi R_S^2 \sigma T_0^4 \frac{\pi r^2}{4\pi R^2}.$$

Przyjmijmy dalej, że zwierciadło odbija doskonale, i cała moc  $P_Z$  „trafia” w krążek. Temperatura  $T$  krążka ustali się, gdy moc promieniowania z jego powierzchni (promieniują obie strony cienkiego krążka) będzie równa  $P_Z$ :

$$P_Z = 2\pi \delta^2 \sigma T^4.$$

Otrzymujemy związek:

$$\frac{R_S^2}{R^2} T_0^4 = \frac{2\delta^2}{r^2} T^4.$$

Ze względu na ogromną odległość Słońca od zwierciadła jego obraz powstaje praktycznie w ognisku zwierciadła. Przyrównując stosunki rozmiarów przedmiotu  $R_S$  i obrazu  $\delta$  do stosunków ich odległości od powierzchni zwierciadła, mamy  $R_S/R = \delta/f$  i ostatecznie:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 = \frac{r^2}{2f^2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $T \approx 1600$  K.

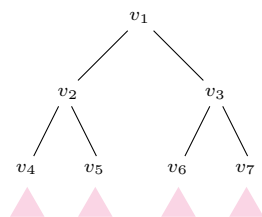
**Twierdzenie.** Dla  $h \geq 2$  zachodzi  $c(T_h) = \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ .

Aby wykazać powyższą równość, zaczniemy od udowodnienia  $c(T_h) \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$  dla  $h \geq 2$ . Dowód będzie indukcyjny. Zostawiamy jako ćwiczenie sprawdzenie przypadków  $h = 2$  i  $h = 3$ . Chcemy udowodnić tezę dla  $T_{h+2}$  przy założeniu tezy dla  $T_h$ . Rozważmy dowolną permutację  $\sigma$  wierzchołków  $T_{h+2}$ . Rozważmy też poddrzewa  $T_{h+2}$  o korzeniach odpowiednio  $v_4, v_5, v_6, v_7$ . Wśród nich na pewno znajdziemy takie poddrzewo  $P$ , które nie zawiera  $v_{\sigma(1)}$  ani  $v_{\sigma(n)}$ .

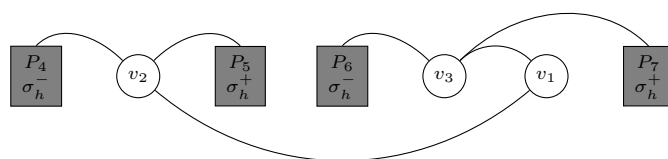
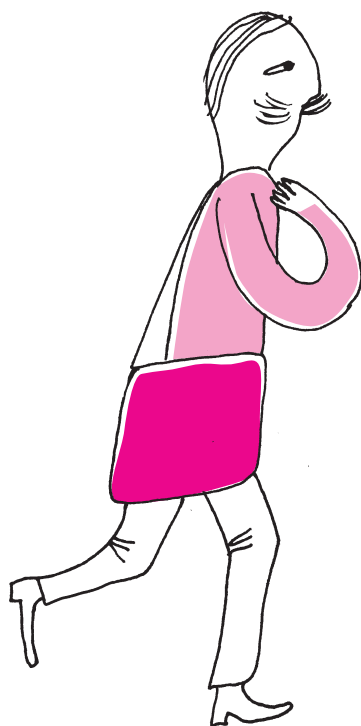
Ponieważ  $P$  wygląda tak samo jak  $T_h$  (tzn. różnią się one jedynie nazwami wierzchołków, a matematyk powiedziałaby, że są izomorficzne), więc z założenia indukcyjnego  $c(P) \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Oznacza to, że jeśli ustawimy wierzchołki  $T_{h+2}$  na prostej  $\ell$  w takiej kolejności jak w permutacji  $\sigma$ , to pewna prosta  $\ell^\perp$  prostopadła do  $\ell$  będzie przecięta przez co najmniej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$  krawędzi  $P$ . Zauważmy, że istnieje ścieżka z  $v_{\sigma(1)}$  do  $v_{\sigma(n)}$ , która nie zawiera wierzchołków z  $P$ . Oznacza to, że prostą  $\ell^\perp$  przecina też pewna krawędź z tej ścieżki, czyli łącznie co najmniej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 2 = \lceil \frac{h+2}{2} \rceil + 1$  krawędzi, co należało udowodnić.

Teraz trzeba jeszcze znaleźć dla każdego  $h \geq 2$  taką permutację  $\sigma_h$  wierzchołków  $T_h$ , która zaświadcza, że szerokość przekroju  $T_h$  faktycznie wynosi co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Zaczniemy od konstrukcji dla nieparzystych  $h$ . Teza indukcji będzie nawet nieco mocniejsza: istnieje takie ustawienie  $\sigma_h^-$  wierzchołków  $T_h$  na prostej, przy którym każdy przekrój na lewo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ , zaś każdy przekrój na prawo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ . Łatwo znaleźć takie ustawienie dla  $h = 1$ . Udowodnimy teraz tezę dla  $h + 2$  przy założeniu tezy dla  $h$ . Niech  $\sigma_h^+$  oznacza ustawienie wierzchołków  $T_h$  powstałe z  $\sigma_h^-$  przez zapisanie wierzchołków w odwrotnej kolejności (wtedy każdy przekrój na prawo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ , zaś każdy przekrój na lewo od korzenia co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ ). Zauważmy, że poddrzewa  $P_4, P_5, P_6, P_7$  drzewa  $T_{h+2}$  o korzeniach odpowiednio  $v_4, v_5, v_6, v_7$  są izomorficzne z  $T_h$ , więc ma sens powiedzieć, że ustawiamy wierzchołki któregoś z nich w kolejności  $\sigma_h^+$  lub  $\sigma_h^-$ . Ustawmy więc wierzchołki  $T_{h+2}$  w następującej kolejności: najpierw wierzchołki  $P_4$  w kolejności  $\sigma_h^-$ , potem  $v_2$ , następnie wierzchołki  $P_5$  w kolejności  $\sigma_h^+$ , wierzchołki  $P_6$  w kolejności  $\sigma_h^-$ ,  $v_3, v_1$ , a na koniec wierzchołki  $P_7$  w kolejności  $\sigma_h^+$  (rys. 5). Nietrudno sprawdzić, że tak otrzymana kolejność  $\sigma_{h+2}^-$  spełnia tezę indukcyjną, to znaczy przekroje na lewo od  $v_1$  mają szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h+2}{2} \rceil + 1$ , zaś te na prawo – co najwyżej  $\lceil \frac{h+2}{2} \rceil$ .

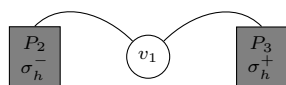
Pomysł, żeby pokazywać tezę dla  $h + 2$ , zakładając jej prawdziwość dla  $h$ , nie jest taki oczywisty, ale wydaje się w tym przypadku jedynym słusznym. Autor widział wiele prób pokazania tezy dla  $h + 1$ , przy założeniu jej prawdziwości dla  $h$ , ale wszystkie one były błędne.



Rys. 4. Drzewo  $T_{h+2}$  i poddrzewa o korzeniach  $v_4, v_5, v_6, v_7$



Rys. 5. Kolejność wierzchołków  $T_{h+2}$  w konstrukcji indukcyjnej



Rys. 6. Konstrukcja odpowiedniego porządku dla  $h$  parzystych

Mając tak wzmocnioną tezę udowodnioną dla wszystkich  $h$  nieparzystych, nietrudno już udowodnić, że dla  $h$  parzystych również mamy permutację zaświadczałą, że szerokość przekroju  $T_h$  wynosi co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Odpowiednią konstrukcję przedstawia rysunek na marginesie, a szczegóły pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika.

W ten sposób problem listonosza w korporacji został rozwiązany. Zachęcamy do pomyślenia, jak dużej torby będzie potrzebował listonosz w jeszcze innych sytuacjach, np. gdy graf pokazujący komunikowanie się mieszkańców w miasteczku jest cyklem albo pełnym grafem dwudzielnym.

Na koniec dodajmy, że w teorii grafów rozważa się wiele różnych parametrów nazywanych ogólnie szerokościami grafowymi. Typowo z każdym takim parametrem wiąże się pewna dekompozycja i jeśli graf ma *małą* wartość parametru, to możemy znaleźć odpowiednio *prostą* dekompozycję. *Cutwidth* jest uznawany za jeden z najbardziej podstawowych parametrów tego typu – dekompozycja to liniowe ułożenie wierzchołków grafu i jest ona *prosta*, jeśli przez każdy jej przekrój przechodzi *mało* krawędzi.

Inne przykłady szerokości grafowych na pewno pojawią się jeszcze nie raz w *Delcie* – przyp. red.

# Twierdzenie Motzkina

Sławomir DINEW\*

\*Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Jagielloński

Jedną z największych różnic pomiędzy matematykami współczesnymi a tymi sprzed stuleci jest wąska specjalizacja tych pierwszych. Z biografii gigantów, takich jak Euler, Gauss czy Riemann, jasno wylania się obraz matematyków wszechstronnych, zajmujących się wszystkimi dziedzinami ówczesnej królowej nauk. Ich następcy, oczywiście z pewnymi chwalebными (lecz jakże rzadkimi) wyjątkami, są tak wąsko wyspecjalizowani, że często nie potrafią zrozumieć wyników swoich kolegów z innych dziedzin.

Częściowo z tego powodu w matematyce współczesnej bardzo poczesne miejsce zajmują teorie, w których wykorzystuje się narzędzia z różnych dziedzin. Przykładem znanym ze szkoły są funkcje wypukłe, które można scharakteryzować geometrycznie, ale także, zakładając odpowiednią regularność, w sposób czysto analityczny – druga pochodna takiej funkcji musi być wszędzie nieujemna.

W tekście tym przedstawione zostanie twierdzenie dotyczące tak zwanej funkcji odległości, które także wiąże wypukłość z pewnymi faktami z analizy matematycznej. Tym razem jednak głównym aktorem będzie pierwsza pochodna zamiast drugiej. Oto i główne danie w menu:

**Twierdzenie (Motzkina).** Niech  $K$  będzie domkniętym podzbiorem płaszczyzny, a  $d_K$  funkcją mierzącą odległość od zbioru  $K$ :

$$d_K(p) = \min\{\|p - q\| \mid q \in K\} \quad (\text{zob. rys. 1}).$$

Wówczas zbiór  $K$  jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja odległości  $d_K$  jest różniczkowalna na dopełnieniu  $K$ , czyli na zbiorze  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ .

Jest to dość niezwykły fakt wiążący geometrię  $K$  z regularnością  $d_K$ . Otóż na oko wydawać się może, że za regularność funkcji  $d_K$  powinna odpowiadać gładkość brzegu  $K$ , a nie geometryczny kształt. Zanim jednak zagłębimy się w meandry tegoż twierdzenia, starannie wyjaśnimy wszystkie pojęcia, aby nie było nieporozumień. Polecam również lekturę artykułu Michała Miśkiewicza z  $\Delta_{24}^2$  pt. *Babo, babo, udaj się*.

Na początek przypomnijmy, czym jest domkniętość: intuicyjnie zbiory domknięte to te, które zawierają swój brzeg (pełna definicja widnieje obok). Do czego przyda nam się to pojęcie? Zobaczmy za chwilę.

Wytrawny Czytelnik spostrzeże w definicji funkcji  $d_K$  pewną subtelność: czemu niby wartość minimum musiałaby istnieć, skoro bierzemy ją po zbiorze, który wcale skończony być nie musi? Otóż właśnie tu interweniuje (po raz pierwszy) domkniętość – jeżeli weźmiemy ciąg punktów  $q_j$  z  $K$ , które prawie realizują minimum i są coraz bliżej tego celu, to okaże się, że pewien podciąg punktów  $q_j$  będzie zbieżny do jakiegoś punktu  $\hat{q} \in K$ . Okazuje się, że  $\hat{q}$  będzie realizował minimum! Szczegóły tego rozumowania pozostawiamy Ambitnym Czytelnikom jako ciekawe ćwiczenie.

Funkcję odległości definiuje się w miarę prosto, niestety gorzej jest z jej jawnym wyliczeniem. Na przykład dla koła domkniętego  $\overline{B}_r((0,0))$  da się to zrobić stosunkowo łatwo i wzór wygląda następująco:

$$d_{\overline{B}_r((0,0))}(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } p \in \overline{B}_r((0,0)); \\ \|p\| - r & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

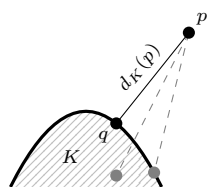
Ambitnemu Czytelnikowi pozostawiamy wyliczenie  $d_K$  dla ciekawszych geometrycznych obiektów, choćby kwadratu  $[-1,1]^2$ , który wymaga już rozpatrzenia większej liczby przypadków (rys. 2).

Musimy także przypomnieć pojęcie różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych. Niestety, znany Czytelnikowi wzór

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

nie da się zastosować, gdyż w przypadku wielu zmiennych parametr  $h$  byłby wektorem, zaś przez wektory dzielić nie wolno! Zmodyfikujmy więc nieco definicję:

Geometryczna charakterystyka funkcji wypukłych jest prosta: zbiór nad ich wykresem jest wypukły. Zbiór natomiast nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdą parą swoich punktów  $p, q$  zawiera cały odcinek łączący  $[p, q]$ .



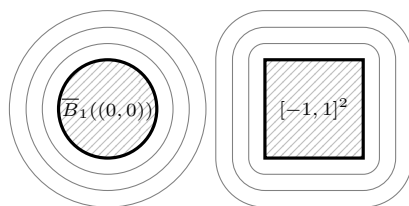
Rys. 1. Punkt  $q$  jest najbliżej  $p$  spośród wszystkich punktów zbioru  $K$

Symbolem  $\|(x_1, x_2)\|$  oznaczamy wielkość  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , dzięki czemu  $\|p - q\|$  jest długością odcinka łączącego  $p$  i  $q$ .

Aby uniknąć rozważań filozoficznych nad zbiorami pustymi, zakładamy także, że zbiór  $K$  i jego dopełnienie są niepuste.

**Definicja.** Zbiór  $K$  punktów na płaszczyźnie nazywamy **zbiorem domkniętym**, jeżeli posiada on następującą własność: dla dowolnego punktu  $p$  z dopełnienia  $K$  istnieje promień  $r > 0$  oraz koło  $B_r(p)$  (bez okręgu na brzegu) w całości zawarte w tym dopełnieniu.

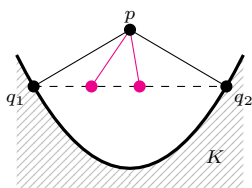
Zbieżność  $q_j \rightarrow \hat{q}$  oznacza, że obie współrzędne, traktowane jako ciągi liczbowe, są zbieżne.



Rys. 2. Poziomice funkcji  $d_K$  w przypadku, gdy  $K$  jest kołem jednostkowym  $\overline{B}_1((0,0))$  i kwadratem  $[-1,1]^2$

Na płaszczyźnie problem dzielenia przez wektory można rozwiązać, traktując punkty jako liczby zespolone. W ten sposób uzyskalibyśmy definicję czegoś, co w matematyce nazywamy C-różniczkowalnością. Ale to, jak mawiała Szeherezada, jest już temat na inne opowiadanie.

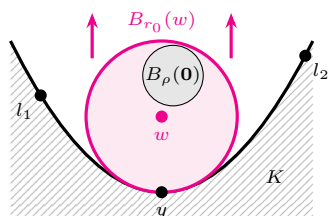
Rozróżnienie punktów różniczkowalności i nieróżniczkowalności  $d_{\overline{B}_r((0,0))}$  i  $d_{[-1,1]^2}$  staje się jasne po spojrzeniu na rysunek 2.



Rys. 3. Jeśli punkty  $q_1, q_2$  są w tej samej odległości od  $p$ , to każdy inny punkt odcinka  $[q_1, q_2]$  jest bliżej. Gdy  $K$  jest wypukły, to zgodnie z definicją zawiera cały ten odcinek

Kolejne ciekawe zadanie dla Czytelnika – dlaczego w rodzinie  $\mathcal{F}$  istnieje koło o największym promieniu? Czy gdyby warunek  $B_\rho((0,0)) \subset B_r((x,y))$  zastąpić prostszym warunkiem  $(0,0) \in B_r((x,y))$ , to coś by się zmieniło?

Znów pojawia się odwieczne pytanie: dlaczego przesunięcie  $\overline{B}_{r_0}(w)$  jest rozłączne z  $K$ ? Istotna tu jest samotność  $y$  oraz (który to już raz!) domkniętość  $K$ .



Rys. 4. Spośród kół zawierających  $B_\rho((0,0))$  i rozłącznych z  $K$  to największe musi dotykać  $K$  w co najmniej dwóch punktach, inaczej dałoby się znaleźć większe

**Definicja.** Funkcję  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy różniczkowalną w punkcie  $p = (p_1, p_2)$ , jeżeli istnieją stałe  $a_1, a_2$  takie, że

$$\lim_{h_1^2+h_2^2 \rightarrow 0} \frac{|f((p_1+h_1, p_2+h_2)) - f((p_1, p_2)) - a_1 h_1 - a_2 h_2|}{\|h\|} = 0.$$

Funkcję nazywamy różniczkowalną na zbiorze  $U$ , jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie zbioru  $U$ . Stałe  $a_1, a_2$  (oczywiście zależne od punktu  $p$ !) nazywamy pochodnymi cząstkowymi  $f$  w  $p$  i piszemy  $a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)$ ,  $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$ .

Czy jest jakaś intuicja stojąca za tą, trochę zagmatwaną, definicją? Czytelnik zechce zauważyć, że płaszczyzna  $x_3 = f((p_1, p_2)) + a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2)$  w  $\mathbb{R}^3$  będzie wtedy spełniać rolę *stycznej* do wykresu  $f$  w punkcie  $(p_1, p_2)$ . Tak więc różniczkowalność w danym punkcie jest równoważna istnieniu płaszczyzny stycznej do wykresu.

Staranne wyliczenie dla  $d_{\overline{B}_r((0,0))}$  pozwala stwierdzić, że na okręgu  $\{x^2 + y^2 = r^2\}$  funkcja  $d_{\overline{B}_r((0,0))}$  nie jest różniczkowalna, natomiast jest różniczkowalna w dopełnieniu. Jeżeli Czytelnik uporał się z wyznaczeniem  $d_{[-1,1]^2}$ , to zechce zauważyć, że brak gładkości na brzegu  $[-1,1]^2$  nie wpływa, wbrew intuicji, na różniczkowalność  $d_{[-1,1]^2}$  w dopełnieniu!

Jesteśmy już gotowi do wyjaśnienia sobie, dlaczego geometria i analiza wiążą się w twierdzeniu Motzkiina. Jak to w matematyce często bywa, powiązanie dwóch pozornie nieskorelowanych faktów najczęściej odbywa się poprzez przeformułowanie ich w nieco innym języku. Zacznijmy od strony geometrycznej:

**Lemat.** Zbiór  $K$  na płaszczyźnie jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu  $p$  z dopełnienia istnieje dokładnie jeden punkt  $q \in K$  najbliższy punktowi  $p$ .

Jedną część lematu jest trywialna: jeżeli  $q_1 \neq q_2$  są dwoma punktami z  $K$  (jednocześnie) najbliższymi do pewnego punktu  $p$ , to odcinek  $[q_1, q_2]$  miałby kłopoty z wciśnięciem się do (wypukłego!) zbioru  $K$  (rys. 3).

W drugą stronę jest ciekawiej. Przypuśćmy, że  $K$  nie jest wypukły, i weźmy dwa punkty  $q_1, q_2 \in K$ , dla których odcinek  $[q_1, q_2]$  nie jest zawarty w  $K$ . Przecięcie odcinka  $[q_1, q_2]$  z  $K$  może być skomplikowane, niemniej dzięki domkniętości  $K$  znajdziemy mniejszy odcinek  $[l_1, l_2]$  zawarty w  $[q_1, q_2]$ , którego końce leżą w  $K$ , ale wewnątrz jest już rozłączne z  $K$ .

– *To wtedy środek odcinka  $(l_1, l_2)$  da nam punkt  $p$  o dwóch najbliższych punktach do  $K$ !* – może wykrzyknąć Czytelnik. Niestety nie jest to do końca poprawne, bo punkt  $p$  może mieć najbliższego towarzysza z  $K$  gdzieś jeszcze bliżej...

Bez straty ogólności umówmy się, że tak wybrany punkt  $p$  jest początkiem układu współrzędnych. Jako że należy on do dopełnienia (domkniętego) zbioru  $K$ , to pewna kula  $\overline{B}_\rho((0,0))$  o środku w  $p = (0,0)$  jest rozłączna z  $K$ . Rozpatrzmy teraz rodzinę kół

$$\mathcal{F} = \{B_r((x,y)) \mid B_\rho((0,0)) \subset B_r((x,y)), B_r((x,y)) \cap K = \emptyset\},$$

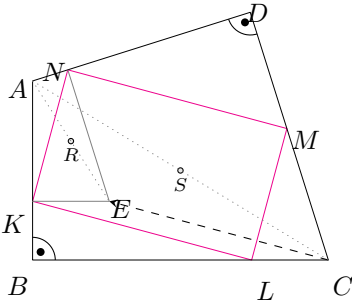
czyli rodzinę kół zawierających  $B_\rho((0,0))$ , ale nadal rozłącznych z  $K$ . Wiemy już, że jest ona niepusta. Wybierzmy teraz z rodziny  $\mathcal{F}$  koło o największym promieniu – nazwijmy je  $B_{r_0}(w)$  (rys. 4). Oczywiście na okręgu brzegowym koła  $B_{r_0}(w)$  musi być pewien punkt  $y \in K$ . Wykażemy, że nie jest on jedyny. Przypuśćmy więc przeciwnie i przesuniemy koło  $\overline{B}_{r_0}(w)$  o  $\varepsilon > 0$  w kierunku  $\vec{y}\vec{w}$ . Jeżeli  $\varepsilon$  doberzemy wystarczająco małe, to przesunięte koło będzie rozłączne z  $K$ . Jeśli ponadto nadal zawiera  $B_\rho((0,0))$ , to wystarczy je teraz nadmuchać (delikatnie – bez obawy, że pęknie, może jednak dotknąć  $K$ ...), i dostaniemy **sprzeczność** z maksymalnością  $r_0$ . W ogólnym przypadku to dodatkowe założenie może nie być spełnione, bo koło  $\overline{B}_\rho((0,0))$  może dotykać brzegu  $B_{r_0}(w)$  w jakimś punkcie  $z$  – wówczas wystarczy nieznacznie poprawić procedurę i kierunek przesuwania zmienić z  $\vec{y}\vec{w}$  na  $\vec{y}\vec{z}$ .  $\square$

Powyższy dowód jest nieco zagmatwany – można go znaleźć na przykład w książce Hörmandera [H, Th. 2.1.30]. Być może Czytelnik znajdzie prostszy? W każdym razie mamy już opis geometryczny za pomocą odległości – pozostaje analiza. Poniższy lemat zakończy dowód twierdzenia Motzkiina:

**Rozwiązanie zadania M 1775.**

Prześnujemy równoległe trójkąt  $LMC$  o wektor  $\vec{LK} = \vec{MN}$ , otrzymując trójkąt  $KNE$ . Ponieważ  $CL \perp AK$ , to  $EK \perp AK$ . Podobnie  $EN \perp AN$ . Zauważmy, że środek  $R$  odcinka  $AE$  jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie  $AKEN$ , zatem  $R$  leży na symetralnej odcinka  $KN$ .

Niech  $S$  będzie środkiem przekątnej  $AC$ . Wtedy  $RS \parallel EC \parallel KL$ , co oznacza, że  $RS \perp KN$ , a zatem  $S$  również leży na symetralnej odcinka  $KN$  – co oczywiście implikuje tezę.



**Lemat.** Niech  $K$  będzie domkniętym podzbiorem płaszczyzny. Funkcja  $d_K$  jest różniczkowalna w punkcie  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K$  wtedy i tylko wtedy, gdy najbliższy do  $p$  punkt zbioru  $K$  jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód przeprowadzimy dla  $d_K^2$  (czyli kwadratu odległości od  $K$ ) zamiast dla  $d_K$ , gdyż bez kwadratu musielibyśmy się uporać z różniczkowaniem pierwiastków, co nie jest zbyt przyjemne. Na szczęście, dla funkcji dodatnich (a taka jest  $d_K$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ ) różniczkowalność funkcji jest równoważna różniczkowalności jej kwadratu.

Także i tym razem mamy do wykazania dwie implikacje, przy czym jedna z nich jest bardzo łatwa. Przypuśćmy, że  $d_K$  jest funkcją różniczkowalną w punkcie  $p$  i niech  $q$  będzie najbliższym do  $p$  punktem z  $K$ . Chcemy wykazać, że  $q$  jest wyznaczony jednoznacznie. Do tego celu skonstruujemy funkcję

$$f(w) := \|w - q\|^2 - d_K^2(w) = (w_1 - q_1)^2 + (w_2 - q_2)^2 - d_K^2(w).$$

Jest to funkcja nieujemna (dlaczego?), a dodatkowo zeruje się ona w  $p$ , czyli ma w  $p$  minimum lokalne. Dla różniczkowalnych funkcji jednej zmiennej oznacza to zerowanie się pochodnej. A jak jest w przypadku dwóch (lub wielu) zmiennych? Przypomnijmy interpretację za pomocą płaszczyzny stycznej – w punkcie minimum płaszczyzna ta musi być pozioma, co w języku analizy oznacza, że pochodne cząstkowe są zerowe:  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 0$ . Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że te równości można zapisać następująco:

$$2(p_1 - q_1) = \frac{\partial d_K^2}{\partial x_1}(p); \quad 2(p_2 - q_2) = \frac{\partial d_K^2}{\partial x_2}(p).$$

Te wzory jednoznacznie wyznaczają punkt  $q = (q_1, q_2)$ .

I tym razem w drugą stronę jest ciekawiej. Przyda nam się także trochę notacji: przez  $\langle p, q \rangle$  oznaczmy iloczyn skalarny  $p = (p_1, p_2)$  oraz  $q = (q_1, q_2)$  (traktowanych jako wektory na płaszczyźnie), czyli  $p_1q_1 + p_2q_2$ ; zauważmy, że  $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$ .

Będziemy pisać, że jakieś wyrażenie  $l(h)$  jest  $o(h)$  (czytamy: o małe od  $h$ ) jeżeli  $\lim_{h_1^2 + h_2^2 \rightarrow 0} \frac{l(h)}{\|h\|} = 0$ .

Niech więc dla ustalonego  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K$  punkt  $q$  będzie jedynym najbliższym z  $K$ . Dowód pierwszej implikacji mówi nam, że jeśli funkcja  $d_K^2$  jest różniczkowalna w  $p$ , to jej pochodnymi cząstkowymi są  $2(p_1 - q_1)$  i  $2(p_2 - q_2)$ . Pozostaje nam więc podstawić te wartości do definicji i sprawdzić zbieżność odpowiedniego ilorazu. Przy użyciu naszej notacji zbieżność ta wyraża się następująco: wyrażenie  $d_K^2(p + h) - d_K^2(p) - 2\langle p - q, h \rangle$  jest  $o(h)$ .

Do dzieła! Funkcja  $d_K$  jest ciągła, a więc jeżeli wektor  $h$  jest wystarczająco krótki, to punkt  $p + h$  po pierwsze będzie w  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ , a po drugie będzie istniał (niekoniecznie jedyny!) punkt  $q_h \in K$  najbliższy do  $p + h$ , przy czym  $q_h$  musi zbiegać do  $q$ , gdy  $h_1^2 + h_2^2 \rightarrow 0$  (wyjaśnienie tych szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie). Dopełniając do kwadratu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d_K^2(p + h) - d_K^2(p) - 2\langle p - q, h \rangle &= \|p + h - q_h\|^2 - \|p - q\|^2 - 2\langle p - q, h \rangle = \\ &= \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)} + \underbrace{\|p + h - q_h\|^2 - \|p + h - q\|^2}_{\leq 0} \leq o(h), \end{aligned}$$

co jest połową naszej tezy. Powyżej  $\|h\|^2$  jest „ksiązkowym” przykładem wyrażu  $o(h)$ , natomiast nierówność  $\|p + h - q\|^2 \geq \|p + h - q_h\|^2$  wynika z określenia punktu  $q_h$ . Z podobnych względów prawdziwa jest nierówność  $\|p - q_h\|^2 \geq \|p - q\|^2$ , która przyda się, jeśli skorzystamy z tej samej tożsamości, ale inaczej:

$$(\dots) = \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)} + \underbrace{\|p - q_h\|^2 - \|p - q\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle h, q - q_h \rangle}_{o(h)} \geq o(h).$$

Tym razem pojawił się dodatkowy wyraz, ograniczony w module przez  $2\|h\| \cdot \|q - q_h\|$ , a więc również postaci  $o(h)$ . Okazuje się w ten sposób, że  $d_K^2(p + h) - d_K^2(p) - 2\langle p - q, h \rangle$  jest szacowane z obu stron przez  $o(h)$ , czyli samo jest wręcz postaci  $o(h)$ . To kończy dowód różniczkowalności  $d_K^2$  w  $p$ .

W dowodzie korzystamy z tożsamości  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle$ , która sprowadza się do znanego ze szkoły wzoru  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ . Obok stosujemy ją dla  $a = p - q$  i  $b = h$ , a w dalszej części dla  $a = p - q_h$  i  $b = h$ .

**Literatura**

[H] Hörmander, Lars, Notions of convexity. *Progress in Mathematics*, 127. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. viii+414 pp. ISBN: 0-8176-3799-0.

**Zamiast zakończenia.** W dowodzie Twierdzenia Motzkiina było wiele zwrotów akcji, rozumowań nie wprost czy też trickowych obserwacji. Współczesna matematyka pełna jest podobnych rozumowań i dlatego też jest niezwykle ciekawa.



## Zmarszczek uniknąć się nie da

Dziś kilka słów o najczęściej występującym u zwierząt białku strukturalnym – kolagenie. Piękna polska aktorka w reklamie telewizyjnej zjada łyżkami jakąś pomarańczową masę (nazywa ją kolagenem) i zapewnia, że jest to środek uniwersalny chroniący przed zmarszczkami. Jeżeli to takie proste, to czemu jeszcze te zmarszczki mamy? Wszyscy!

Kolagen stanowi 30% białek w ciele kręgowców. Wytwarzany jest w wielu tkankach, w wyspecjalizowanych komórkach (m.in. fibroblastach i osteoblastach). Znajduje się w skórze, kościach, ścięgnach, chrząstkach, naczyniach krwionośnych. Już to proste wyliczenie świadczy o niezwykle ważnej jego roli w utrzymywaniu kształtu i wytrzymałości tkanek i narządów. W procesie biosyntezy kolagenu uczestniczy kilkanaście genów, do syntezy używane są aminokwasy (elementarne składniki białek), konieczne są witaminy A i C, na przebieg syntezy wpływają hormony tarczycy, estrogeny, insulina, hormon wzrostu. U człowieka do 25. roku życia syntetyzowane są 3 kg (!!!) kolagenu rocznie. Nowe cząsteczki zastępują stare, częściowo zdegradowane. Na procesy syntezy wpływa aktywność fizyczna, dieta, warunki środowiskowe (temperatura, czas kontaktu z promieniowaniem słonecznym itd.). Z wiekiem intensywność syntezy spada, a od 60. roku życia ustaje. Procent degradacji kolagenu może służyć jako miernik wieku.

Kolagen jest dziwnym białkiem. Wiemy, że białka to duże cząsteczki polimerów, są to łańcuchy zbudowane ze wspomnianych już aminokwasów, których w białkach jest około 23 – tych znanych nauce. Tymczasem kolagen składa się z trzech aminokwasów: 30% to najmniejszy aminokwas, glicyna, a reszta – w większości kolagenów – prolina i hydroksyprolina (Gly-X-Y)<sub>n</sub>. Dotychczas tylko w organizmie człowieka opisano około 30 typów kolagenów, różniących się m.in. procentowym udziałem wspomnianych trzech aminokwasów. Powtarzające się odcinki trójek aminokwasów łączą się w łańcuchy (ok. 1000 aminokwasów w cząsteczce) każdy łańcuch skręca się w helisę (lewoskrętną). Podstawową cząsteczkę kolagenu stanowią 3 różne łańcuchy splecione ze sobą w prawoskrętną helisę kolejnego stopnia. Te strukturę stabilizują dodatkowo wiązania wodorowe między łańcuchami. Z tego opisu łatwo wywnioskować, jakie są mechaniczne właściwości kolagenu: helisy mogą się odwracalnie rozciągać jak sprężynki, a wiele ułożonych obok siebie cząsteczek powoduje wyjątkową elastyczność i wytrzymałość tkanki na obciążenie. To teraz już wiemy, dlaczego ta młoda kobieta z reklamy kosmetycznej ma gładziutką cerę – i to jest dobra wiadomość. Jest jednak wiadomość zła: po sześćdziesiątce pojawiają się zmarszczki, nieodwracalnie!

Osobliwości biosyntezy kolagenu mogą stanowić punkt wyjścia dla różnorodnych chorób, jest ich kilkadziesiąt, najlepiej rozpoznane to szkorbut, łamliwość kości, epidermoliza pęcherzykowa. Część znanych chorób wynika z mutacji licznych genów „COL”.

Kolagen okazał się ważną substancją w wielu technologiach: w produkcji wyrobów skórzaných, w medycynie (chirurgii) regeneracyjnej, w produkcji kosmetyków. Próbowano transplantów obcego kolagenu (procedury często prowadzące do obronnej reakcji organizmu, obecnie zaniechane). Niedawno pojawiły się wątpliwości, czy w produktach pochodzenia zwierzęcego nie przekaże się nieuleczalnej choroby prionowej bydła. W tej sprawie uczestniczyłam nawet w seminarium w podwarszawskiej wytwórni żelków, ponieważ do produkcji spożywczej używa się powszechnie żelatyny, produktu podgrzewania kolagenu. Na szczęście obaw tych nie potwierdzono.

Złożoność budowy i syntezy kolagenu, a także jego specyfika gatunkowa i indywidualna sugerują wprost, że nie jest możliwe włączanie do własnych tkanek spożywanego obcego kolagenu. Może najwyżej w wyniku trawienia w przewodzie pokarmowym wzrastać pula glicyny użytecznej do indywidualnej syntezy białek (i kolagenu też). Pocieszać się możemy wyznaniem innej znanej aktorki, że kocha swoje zmarszczki, bo świadczą o jej przeżyciach i doświadczeniu.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

W moim życiu naukowym kolagen pojawił się bardzo wcześnie: opracowanie oryginalnej metody oznaczania aktywności enzymów degradujących kolagen stanowi moją pracę magisterską.



# Nadprzewodniki – gdzie ich szukać?

Krzysztof BYCZUK\*

\* Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Jednym z gorących wspomnień naukowych ubiegłego lata jest informacja o odkryciu nadprzewodnictwa w związku LK-99 zachodzącego w temperaturach pokojowych i w normalnym ciśnieniu atmosferycznym.

Dokładnie 22 lipca 2023 roku południowokoreańscy naukowcy, pod kierunkiem Sukbae Lee i Ji-Hoon Kima, umieścili w bazie prac arXiv dwie publikacje o numerach arXiv:2307.12008 i arXiv:2307.12037. Jak wynika z ich lektury, związek o wzorze chemicznym  $\text{Pb}_9\text{Cu}(\text{PO}_4)_6\text{O}$ , nazwany LK-99 od pierwszych liter w nazwiskach tych badaczy oraz roku, w którym go zsyntetyzowali, wykazuje spadek oporności elektrycznej praktycznie do zera w temperaturach mniejszych od około 400 K ( $\sim 127^\circ\text{C}$ ). Gdyby to była prawda, byłby to pierwszy na świecie materiał przewodzący prąd elektryczny w temperaturach pokojowych, lub wyższych, bez żadnych strat.

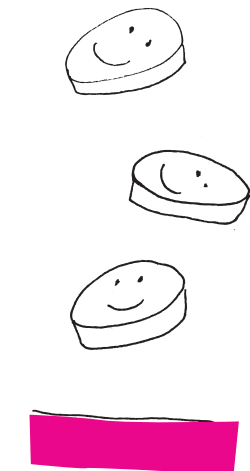
Gdyby to była prawda... Naukowcy z całego świata natychmiast ruszyli do swoich laboratoriów i komputerów, aby sprawdzić, czy rzeczywiście LK-99 ma tak unikatową własność. Do dziś, 1 listopada 2023 r., w bazie arXiv jest już 50 prac zawierających nazwę LK-99 w streszczeniu. Ale po kolei. 1 sierpnia 2023 roku pojawiło się w mediach społecznościowych nagranie z Uniwersytetu Naukowo-Technologicznego Huazhong w Chinach pokazujące lewitującą w polu magnetycznym pastylkę w temperaturze pokojowej, ponoć wykonaną z materiału LK-99. Nadprzewodniki mają właściwości diamagnetyczne, oznacza to, że wewnątrz nadprzewodnika indukcja magnetyczna jest zerowa, dlatego unosi się on nad magnesem (jest to tak zwany efekt Meissnera–Oschenfelda). Jeżeli materiał nie ma tej cechy, jest jedynie doskonałym przewodnikiem. Dalej grupy teoretyczne z USA, Chin, Austrii oraz Szwajcarii przedstawiły wyniki swoich obliczeń teoretycznych wskazujące, że związek LK-99 może faktycznie być nadprzewodnikiem w temperaturach pokojowych. Odkryto tzw. płaskie pasma w strukturze elektronowej tego materiału, co implikuje, że oddziaływania elektron-elektron mogą odgrywać istotną rolę.

W fizyce ostatnie słowo należy jednak do doświadczalników. Jeszcze w sierpniu kilka grup badawczych z USA, Niemiec i Chin zsyntetyzowało LK-99 w swoich laboratoriach. Po przeprowadzeniu szeregu eksperymentów sprawdzili, że materiał ten nie jest nadprzewodnikiem. Wręcz przeciwnie, jest bardzo dobrym izolatorem.

Nie potwierdzono w tych laboratoriach obserwacji Koreańczyków. Temat w zasadzie został zamknięty, przypominając jedynie inne gorące doniesienia prasowe w tak zwanym sezonie ogórkowym. A skoro o ogórkach mowa, to istnieje takie utarte powiedzenie wśród fizyków, że jeśli odpowiednio długo popracować, to i ogórek mógłby stać się nadprzewodnikiem. Żarty żartami, ale pytanie, jakie przychodzi nam natychmiast do głowy, jest poważne: Gdzie szukać nowych nadprzewodników?

Jako fizyk teoretyk, który zainteresował się nadprzewodnictwem ponad 30 lat temu przy okazji swojej pracy magisterskiej, muszę z przykrością przyznać, że obliczenia teoretyczne są mało skuteczne w tej materii. Trudno jest wskazać przewidywania teoretyczne oparte na złożonych obliczeniach numerycznych w ramach teorii funkcjonału gęstości, które odkryłyby nową klasę materiałów nadprzewodzących. Post factum obliczenia teoretyczne są oczywiście nieocenione w dogłębnym zrozumieniu już odkrytego nadprzewodnika przez doświadczalników.

Pozostaje metoda prób i błędów. A wszystko zaczęło się w kwietniu 1911 roku w Lejdzie w Holandii, w laboratorium Heike Kamerlingha Onnesa. Wtedy było to światowe centrum niskich temperatur. Podobno asystent profesora Onnesa umieścił rtęć (Hg) w ciekłym helu, która w niskich temperaturach jest metalem w fazie stałej, i badał zachowanie oporu elektrycznego. Zaobserwował, że opór elektryczny rtęci znika całkowicie w temperaturach poniżej 4,2 K. Jak głosi legenda, profesor był oburzony, gdy poznał ten wynik pomiaru oporności



Jak na razie nie udało się zaobserwować nadprzewodnictwa w ogórkach, ale prąd przepuszczony przez ogórek może pobudzić go do świecenia, o czym pisał Marcin Braun w  $\Delta_{22}^5$ .

W laboratorium Onnesa w Leidzie w 1908 roku udało się po raz pierwszy skroplić hel (He) w temperaturze 4,2 K ( $\sim -269^\circ\text{C}$ ). Wcześniej światowe centrum niskich temperatur znajdowało się w Krakowie, gdzie w 1883 roku Karol Stanisław Olszewski i Zygmunt Florenty Wróblewski skroplili tlen ( $\text{O}_2$ ) i azot ( $\text{N}_2$ ), odpowiednio w 90 K ( $\sim -183^\circ\text{C}$ ) i 77 K ( $\sim -196^\circ\text{C}$ ).

i ponoć nawet zwolnił swojego współpracownika. Kilka dni później sam przeprowadził eksperyment, obserwując rtęć z zerowym oporem elektrycznym.

O ile nie mamy pewności co do takiego przebiegu owych wydarzeń, to pamiętajmy, że w tamtym czasie zachowanie oporu elektrycznego metali w funkcji temperatury było zupełnie nieznaną. Spekulowano, że w temperaturze zera bezwzględnej elektrony powinny przestać się poruszać i wraz ze spadkiem temperatury opór powinien rosnąć do nieskończoności. Spekulowano też, że być może w zerowej temperaturze opór będzie skończony, ale czy będzie malejącą, czy rosnącą funkcją temperatury, było trudne do przewidzenia. Całkowity zanik oporu poniżej pewnej skończonej temperatury był jednak nie do wyobrażenia.

Odkrycie Onnesa było fundamentalnym przełomem w fizyce. Wkrótce dowiedziano eksperymentalnie, że wiele innych pierwiastków staje się nadprzewodnikami w niskich temperaturach. Wśród nich najwyższą temperaturę przejścia wykazuje niob (Nb) 9,25 K ( $\sim -266^\circ\text{C}$ ). Najniższą ma rod (Rh) 0,000325 K ( $\sim -273^\circ\text{C}$ ). Są pierwiastki, które nadprzewodzą, gdy poddamy je działaniu dużego ciśnienia. Rekordzistą jest lit (Li) z temperaturą przejścia 20 K ( $\sim -253^\circ\text{C}$ ), gdy podniesiemy ciśnienie do 50 GPa ( $50 \cdot 10^9$  Pa). Dla porównania, ciśnienie normalne, w przybliżeniu równe ciśnieniu atmosferycznemu, to 101 325 Pa  $\sim 10^5$  Pa (czyli  $10^4$  razy mniej). Spośród stu kilkunastu pierwiastków aż 55 jest nadprzewodnikami w odpowiednich warunkach fizycznych. Zaskakujące jest to, że miedź (Cu), tak powszechnie używana w przewodach elektrycznych, nie jest nadprzewodnikiem w żadnych warunkach fizycznych, w jakich była dotychczas badana.

Węgiel też nie jest nadprzewodzący w występujących kilku trójwymiarowych odmianach alotropowych: grafit, diament i sadza. Ale w 2001 roku zaobserwowano po raz pierwszy ślad nadprzewodnictwa w nanorurkach węglowych o średnicach około 4 Å (Angstrom to  $10^{-10}$  m). Atomy węgla układają się na płaszczyźnie, tworząc sieć sześciokątną, wyglądającą tak jak przekrój przez plaster miodu. Gdy taka płaszczyzna, zwana grafenem, zroluje się i połączy na brzegu, to powstają długie i cienkie nanorurki węglowe. Te najcieńsze niestety nie są mechanicznie stabilne w próżni. Jednak gdy powstają w długich porach zeolitu, minerału o długich i bardzo cienkich kanalikach, nanorurki węglowe mogą mieć bardzo małe średnice. Właśnie w takich warunkach zauważono oznaki nadprzewodnictwa, czyli spadku oporu elektrycznego nanorurek w temperaturach około 15 K ( $\sim -258^\circ\text{C}$ ). Te układy są praktycznie jednowymiarowymi drucikami wykonanymi z węgla w mineralnej osłonie dielektrycznej.

Pojedyncza warstwa grafenu na dielektrycznym podłożu jest stabilna, ale nie jest nadprzewodząca. Gdy położono dwie takie warstwy, jedna na drugiej, i skręcono względem siebie o pewien „magiczny” kąt,  $1,1^\circ$ , pojawiło się nadprzewodnictwo. Efekt ten zaobserwowano w 2018 roku w temperaturze 1,7 K ( $\sim -271^\circ\text{C}$ ).

Według teorii Waltera Kohna i Joaquina Mazdaka Luttingera oddziałujące pomiędzy sobą elektrony zawsze powinny tworzyć stan nadprzewodzący, co wynika z zasady Pauliego (dwa fermiony nie mogą być w tym samym stanie kwantowym) oraz kwantowej teorii ekranowania pola Coulombowskiego. Temperatura przejścia do takiego stanu jest jednak ekstremalnie niska. Dlatego mechanizm prowadzący do nadprzewodnictwa w znanych nam materiałach musi być inny.

Przypomnijmy, nadprzewodnik to jednocześnie doskonały przewodnik i doskonały diamagnetyk. Te dwie logicznie rozłączne cechy są zawsze (lub powinny być) sprawdzane, nim jakiś materiał uznamy za nadprzewodnik.

Przewidywania teoretyczne pokazują także, że metaliczny wodór powinien nadprzewodzić w temperaturach pokojowych. Jedyny kłopot polega na tym, że układ musi być pod ogromnym ciśnieniem 400 GPa, porównywalnym z panującym w jądrze planety Jowisz.

Z praktycznego punktu widzenia chcielibyśmy mieć nadprzewodzące druty, najlepiej w temperaturach pokojowych i normalnym ciśnieniu, aby pozbyć się strat energii i problemu z ogrzewaniem się urządzeń elektrycznych. Różne szacunki podają, że aż od 1/4 do 1/3 energii elektrycznej jest tracona w postaci ciepła pomiędzy elektrownią a odbiorcą. Jak już wiemy, taki nadprzewodzący drut nie może być zbudowany z żadnego czystego pierwiastka.

Spójrzmy na układy dwuskładnikowe. Mamy tutaj całą plejadę stopów i związków międzymetalicznych o strukturach krystalograficznych oznaczonych symbolami B1 lub A15. Okazuje się, że niob (Nb) gra tutaj pierwsze skrzypce. I tak rekord temperatury przejścia należy do  $\text{Nb}_3\text{Ge}$  i wynosi 23 K ( $\sim -250^\circ\text{C}$ ). Stop NbTi ma temperaturę tylko 9,2 K ( $\sim -264^\circ\text{C}$ ), ale to właśnie z tego materiału wykonano elektromagnesy w Wielkim Zderzaczu Hadronowym (LHC) w CERN. Do schłodzenia tej ogromnej maszyny używa się 96 ton ciekłego helu w temperaturze 1,9 K ( $\sim -271^\circ\text{C}$ ).

Gdy przez około 80 lat fizycy przyzwyczaili się do eksperymentalnego faktu, że najwyższa temperatura układów dwuskładnikowych wynosi 23 K, a nawet sformułowano coś w rodzaju teoretycznego twierdzenia na ten temat, w 2001 roku pojawiło się odkrycie nadprzewodnictwa w dwuborku magnezu ( $\text{MgB}_2$ ) z temperaturą przejścia 39 K ( $\sim -234^\circ\text{C}$ ).  $\text{MgB}_2$  można kupić w aptece lub znaleźć w każdej porządnie wyposażonej pracowni chemicznej w szkole. Świat fizyków był wtedy naprawdę poruszony figlem, jaki sprawiła nam natura i nauka.

Okazuje się też, że wodorki pod wysokim ciśnieniem stają się wysokotemperaturowymi nadprzewodnikami. Choć były badane od lat 70. zeszłego stulecia, w ostatnim okresie odkryto, że  $\text{H}_3\text{S}$  pod ciśnieniem 155 GPa nadprzewodzi w temperaturze 253 K ( $\sim -20^\circ\text{C}$ ), a  $\text{LaH}_{10}$  pod ciśnieniem 190 GPa ma temperaturę przejścia 260 K ( $\sim -13^\circ\text{C}$ ).



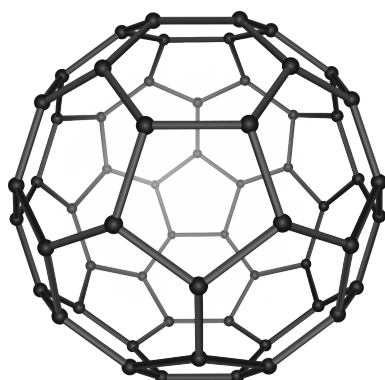
### Rozwiązanie zadania M 1774.

Ponieważ każda liczba w ciągu  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$  przyjmuje jedną z trzech wartości, a dowolne dwie sąsiednie liczby są różne, wobec tego dowolny składnik rozważanego w zadaniu wyrażenia

$a_1 a_2 - a_2 a_3 + \dots + a_{2n-1} a_{2n} - a_{2n} a_{2n+1}$  przyjmuje również (co do modulu) jedną z trzech wartości.

Wystarczy zatem pokazać, że każda wartość w danym wyrażeniu pojawia się tyle samo razy ze znakiem  $+$ , co ze znakiem  $-$ . Zauważmy jednak, że każda z wartości 2, 5, 9, odpowiednio, występuje w zbiorach par

$\{(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2n-1}, a_{2n})\}$  oraz  $\{(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2n}, a_{2n+1})\}$  tyle samo razy, oznaczmy te liczby wystąpień odpowiednio przez  $k, l$  i  $m$ . Wtedy oczywiście  $k + l + m = 2n$ . Wobec tego w każdym zbiorze par liczba par 5, 9 jest równa dokładnie  $\frac{-k+l+m}{2}$ , liczba par 2, 9 jest równa  $\frac{k-l+m}{2}$ , a liczba par 2, 5 jest równa  $\frac{k+l-m}{2}$ .



Fuleren  $C_{60}$ . Źródło: Wikipedia

Omówione związki dwuskładnikowe należą do tak zwanych nadprzewodników drugiego rodzaju. Oznacza to, że w odpowiednio silnym polu magnetycznym, powyżej tak zwanego pierwszego pola krytycznego, powstają w nadprzewodzącym układzie elektronowym obszary normalne, przez które pole magnetyczne może przechodzić. Są to tak zwane wiry, a wartość strumienia pola magnetycznego jest tam dyskretna (wielokrotnością  $h/2e$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka, a  $e$  jest wartością ładunku elektronu). Najprostsze nadprzewodniki jednoskładnikowe są pierwszego rodzaju, gdzie pole magnetyczne nie wnika do próbki, o ile nie przekracza ono pewnej wartości krytycznej, powyżej której nadprzewodnictwo całkowicie znika. W nadprzewodnikach drugiego rodzaju stan, w którym pole magnetyczne wnika w postaci wirów, nazywamy stanem mieszanym. Dopiero powyżej tak zwanego drugiego pola krytycznego nadprzewodnictwo znika.

Skoro zwiększenie liczby pierwiastków w układzie wiąże się na ogół ze wzrostem temperatury przejścia, wydaje się naturalnym zbadanie układów trójskładnikowych. Do nadprzewodników trójskładnikowych należą tak zwane fazy Chevrela. Tym razem pierwsze skrzypce odgrywa molibden (Mo). Przykładem jest związek  $PbMo_6S_8$  z dość wysoką temperaturą przejścia 15 K ( $\sim -258^\circ\text{C}$ ) i bardzo dużym drugim polem krytycznym 60 T. Inną interesującą samą w sobie rodziną są układy ciężko-fermionowe (elektrony są fermionami). Są to związki zawierające pierwiastek z grupy lantanowców lub aktynowców z walencyjnymi orbitalami typu f. Swoją nazwę zawdzięczają temu, że elektrony, odpowiedzialne za niskotemperaturowe własności termodynamiczne i transportowe, mają ogromną masę efektywną, rzędu 100–1000 mas elektronu w próżni. Jednym z nich jest związek  $URu_2Si_2$  z temperaturą przejścia 1,3 K ( $\sim -272^\circ\text{C}$ ) czy „rekordzista”  $CeCoIn_5$  z temperaturą krytyczną 2,3 K ( $\sim -271^\circ\text{C}$ ). Dodajmy dla ścisłości, że wśród nadprzewodników ciężko-fermionowych są też związki dwuskładnikowe, np.  $UBe_{13}$  czy  $UPt_3$  z temperaturami przejścia sporo poniżej 1 K.

Wśród nadprzewodników dwu- i trójskładnikowych są też zupełnie egzotyczne układy, fulereny  $C_{60}$  z wbudowanymi cząsteczkami, np.  $K_3$ ,  $K_2Rb$  czy  $RB_2Cs$ . Fulereny są to cząsteczki zbudowane z 60 atomów węgla, przyjmujące kształt piłki futbolowej uszytej z lat pięciokątnych i sześciokątnych. Tam, gdzie schodzą się „szwy”, znajdują się atomy węgla. Takie cząsteczki  $C_{60}$  układają się w regularną periodyczną strukturę, a pomiędzy nimi lokują się atomy metali alkalicznych. W zależności od podstawienia temperatura krytyczna zmienia się od 6,8 K ( $\sim -266^\circ\text{C}$ ) dla  $Sr_6C_{60}$  do maksymalnie 33 K ( $\sim -240^\circ\text{C}$ ) dla  $Cs_2RbC_{60}$ .

Geometria i niska wymiarowość także lubią nadprzewodnictwo, ale na razie w niskich temperaturach. Na granicy połączonych dwóch materiałów,  $LaAlO_3$  oraz  $SrTiO_3$ , powstaje uporządkowana magnetycznie dwuwymiarowa warstwa elektronów, których opór elektryczny spada do zera w temperaturach poniżej 0,1 K ( $\sim -273^\circ\text{C}$ ).

W roku 1985 dużej części Czytelników miesięcznika *Delta* pewnie jeszcze nie było na świecie. To wtedy dokonała się rewolucja nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego. Georg Bednorz i K. Alex Müller, pracujący w laboratorium IBM w Zurychu w Szwajcarii, odkryli nadprzewodnictwo w materiale z klasy tzw. perowskitów. W niestechiometrycznym układzie  $La_{1,85}Ba_{0,15}CuO_4$  zaobserwowano przejście do zerowego oporu w temperaturze 36 K ( $\sim -237^\circ\text{C}$ ). Niecały rok później Paul Chu odkrył nadprzewodnictwo w  $YBa_2Cu_3O_7$  w temperaturze 93 K ( $\sim -180^\circ\text{C}$ ). Pierwszy raz w historii do obserwacji nadprzewodnictwa można było używać skroplonego tlenu i azotu, a nie jak wcześniej – helu. Dziennikarze porównywali wtedy cenę litra skroplonego azotu do ceny litra mleka, a cenę litra skroplonego helu do ceny litra dobrego koniaku, pokazując doniosłość odkrycia. Czteroelementowe, niestechiometryczne związki wydawały się odpowiedzią na pytanie, gdzie szukać nadprzewodnictwa w wysokich temperaturach. Dotychczasowy rekord padł w 1993 roku w perowskicie pięcioelementowym  $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$ , który nadprzewodzi w temperaturach poniżej 138 K ( $\sim -135^\circ\text{C}$ ).



### Rozwiązanie zadania M 1776.

Zauważmy, że mnożenie dowolnej liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  przez  $-1$  nie zmienia prawdziwości żadnej z rozważanych nierówności.

Ponadto  $ab \neq 0$ . Oznacza to, że bez straty ogólności możemy założyć, że  $a > 0$ ,  $b > 0$  oraz  $c \geq 0$ .

Zapisując pierwszą z nierówności jako

$$\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| < 1,$$

widzimy, że istnieje liczba  $\gamma \in (0, \pi)$ , spełniająca równość

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Skonstruujmy trójkąt  $T$ , którego dwa boki są równe  $a$  i  $b$ , a kąt między tymi bokami jest równy  $\gamma$ . Niech trzeci bok tego trójkąta będzie równy  $c_1$ . Na podstawie twierdzenia cosinusów zastosowanego dla trójkąta  $T$  dostajemy równość

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2,$$

więc  $c = c_1$ . Niech  $\alpha$ ,  $\beta$  będą kątami między bokami  $b$ ,  $c$  oraz  $c$ ,  $a$  trójkąta  $T$ . Ponownie, korzystając z twierdzenia cosinusów, dostajemy

$$\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| = 2 |\cos \alpha| \quad \text{oraz}$$
$$\left| \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \right| = 2 |\cos \beta|,$$

więc nierówności z tezy są oczywiście spełnione.

Fax to papierowa informacja, skanowana i wysyłana połączeniem telefonicznym, na końcu którego była drukarka.

Ten artykuł miał jedynie pokazać, jak bogaty i różnorodny jest świat materiałów nadprzewodzących. Bardziej systematyczna prezentacja nadprzewodników jest dostępna np. w artykule

<https://arxiv.org/pdf/1306.0429.pdf> albo w podręczniku *Magnetyzm i nadprzewodnictwo*, A. Szewczyk, A. Wiśniewski, R. Puźniak i H. Szymczak (PWN, 2012).

Pod ciśnieniem 30 GPa temperatura przejścia wynosi nawet 165 K ( $\sim -108^\circ\text{C}$ ). Ale dalszego postępu do tej pory nie ma. Więcej szczegółów o nadprzewodnikach wysokotemperaturowych Czytelniczka i Czytelnik znajdą w doskonałym artykule autorstwa A. Wiśniewskiego w  $\Delta_{18}^{12}$ .

Wszystkie odkryte nadprzewodniki wysokotemperaturowe mają płaszczyzny miedziowo-tlenowe, układające się w równoległe warstwy, pomiędzy którymi lokują się pozostałe pierwiastki układu. W granicy stechiometrycznej, bez domieszkowania, są to układy bardzo dobrze izolujące. Należą one do grupy tak zwanych skorelowanych izolatorów Motta. Domieszkowanie, zmiana stechiometrii, sprawia, że izolator przekształca się w nadprzewodnik. Do dziś nie ma pełnego konsensusu wśród specjalistów, jaki jest powód tego nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego. Sir Mott mawiał, że istnieje tyle teorii nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego, ilu jest teoretyków tym się zajmujących, albo i jeszcze więcej. Problemem jednak są silne korelacje pomiędzy elektronami wynikające z oddziaływań Coulombowskich, których do dziś nie potrafimy opisywać teoretycznie w pełnej ogólności.

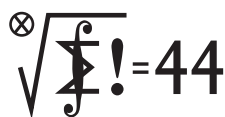
Wyścig w poszukiwaniu nadprzewodników wysokotemperaturowych był niezwykle emocjonujący i trwał ładnych kilkanaście lat. Pojawiały się co jakiś czas (*fake*)*newsy* o kolejnych nadprzewodnikach w coraz wyższych temperaturach, później dementowane przez samych autorów albo innych badaczy. Były też pewne ruchy z kategorii „nie fair”. Do dziś można znaleźć artykuł w *New York Times Magazine* opisujący historię profesora Chu, który w manuskrypcie wysłanym do *Physical Review Letters* podawał, że zaobserwował nadprzewodnictwo w temperaturze powyżej skraplania się azotu w  $\text{YtBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Dopiero dzień przed wydrukowaniem publikacji (wtedy nie było wydań Internetowych) wysłał fax do redakcji z prośbą o zamianę w całym manuskrypcie Yt na Y (iterb na itr). Chciał w ten sposób opóźnić pracę konkurencji, obawiając się (w sumie słusznie) wycieku informacji przed publikacją. Plotka mówi, że z tego powodu komitet Nagrody Nobla w 1987 roku uhonorował jedynie K.A. Müllera i G. Bednorza, pomijając P. Chu. O tym jednak być może dowiemy się dopiero po 2037 roku, gdy zostaną otwarte archiwa z 1987 roku.

W historii nadprzewodnictwa ważny był rok 2008. Wtedy odkryto nadprzewodnictwo w dość wysokich temperaturach, tzn. powyżej 20 K, w tzw. pniktydkach i chalogenkach. Ciekawe układy na bazie żelaza z maksymalną temperaturą przejścia 55 K ( $\sim -218^\circ\text{C}$ ) w  $\text{SmFeAsO}_{\sim 0,85}$ . Część z tych układów zawiera arsen, silnie trujący pierwiastek. Dlatego badania nad tymi układami nie były wcześniej podejmowane zbyt często.

Czytelniczka i Czytelnik, którzy dotrwali w lekturze do tego miejsca, domyślają się, że odpowiedzi na pytanie postawione w tytule nie ma. Nie wiadomo, gdzie szukać nadprzewodników, a szczególnie tych z pokojowymi temperaturami przejścia. Wraz ze wzrostem liczby pierwiastków w badanych układach ich liczba rośnie potęgowo. Ze 100 pierwiastków możemy stworzyć szacunkowo  $100^2$  układów dwuskładnikowych,  $100^3$  układów trójskładnikowych itd. Pomijamy możliwość, że nie wszystko, co sobie wymyślimy, jest stabilne chemicznie, czyli jest ich trochę mniej. Ale z drugiej strony zmienna stechiometria czy nie-stechiometria związków daje nam jeszcze więcej możliwych próbek do zbadania. Można też modyfikować geometrię układu i zmieniać jego efektywną wymiarowość lub tworzyć nieoczywiste konglomeraty i nowe struktury. W żaden systematyczny sposób nie jesteśmy w stanie zbadać wszystkich możliwych kandydatów do nadprzewodnictwa. Naukowcom pozostaje intuicja, ciężka praca i łut szczęścia, że w swoich laboratoriach znajdują szukany nadprzewodnik wysokotemperaturowy.

Być może kiedyś będziemy się cieszyć z odkrycia nadprzewodników w temperaturach pokojowych. Do tego czasu czeka nas wiele prób, jak i licznych kolejnych doniesień o takowych odkryciach. Nawet jeśli są one później dementowane, patrzmy na nie z uznaniem. Jeśli nie będzie prób, upragnionego odkrycia tym bardziej nie będzie.

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2024

## Zadania z matematyki nr 877, 878

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**877.** Wyjaśnić, czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja pięciu różnych punktów  $A, B, C, P, Q$ , w której zachodzą równości

$$PA = AB = BQ, \quad PB = BC = CQ, \quad PC = CA = AQ,$$

a punkty  $A, B, C$  są wierzchołkami trójkąta

- (a) ostrokątnego,
- (b) rozwartokątnego.

**878.** Znaleźć liczbę naturalną  $r > 2$ , dla której istnieje nieskończenie wiele  $r$ -elementowych zbiorów różnych liczb pierwszych  $\{p_1, \dots, p_r\}$  takich, że każda z liczb  $2^{p_i-1} - 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ) jest podzielna przez iloczyn  $p_1 \dots p_r$ . Im większa liczba  $r$ , tym cenniejsze rozwiązanie.

Zadanie 878 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna w nawiązaniu do zadania 678 (naszej ligi:  $\Delta_{14}^7$ ; omówienie:  $\Delta_{15}^2$ ), a także do zadania 8 z obozu OM (Zwardoń 2010) <om.sem.edu.pl>, zakładka Obóz naukowy.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2023

Przypominamy treść zadań:

**869.** Funkcja  $g$  przyporządkowuje każdej (uporządkowanej) parze  $x, y$  liczb rzeczywistych dodatnich wartość  $g(x, y)$ , określoną jako najmniejsza liczba z trójki  $x, 1/y, (xy + 1)/x$ . Wyznaczyć kres górny wartości  $g(x, y)$ , gdy  $x$  oraz  $y$  przebiegają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

**870.** (a) Wykazać, że z odcinków łączących dowolny punkt płaszczyzny z wierzchołkami trójkąta równobocznego (leżącego w tej płaszczyźnie) można zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

(b) Trójkąt równoboczny jest zanurzony w przestrzeni (trójwymiarowej). Wyjaśnić, czy – analogicznie – zawsze można z odcinków łączących dowolny punkt przestrzeni z wierzchołkami tego trójkąta zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

**869.** Wartości funkcji  $g$  są dodatnie. Niech  $s$  będzie dowolną jej wartością. Istnieją więc liczby  $x, y > 0$ , dla których  $s = g(x, y)$ . Zgodnie z określeniem funkcji  $g$  spełnione są jednocześnie nierówności

$$x \geq s, \quad \frac{1}{y} \geq s, \quad \frac{xy + 1}{x} \geq s$$

(jedna z nich staje się równością). Wynika z nich, że

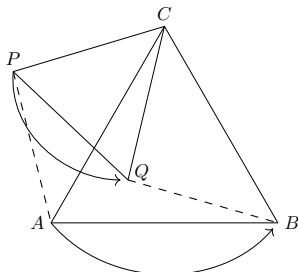
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{s}, \quad y \leq \frac{1}{s}, \quad s \leq \frac{xy + 1}{x} = y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{s}.$$

Ostatnia nierówność pokazuje, że  $s^2 \leq 2$ , czyli  $s \leq \sqrt{2}$ . Tak więc wartości funkcji  $g$  nie przekraczają  $\sqrt{2}$ . Przy tym

$$g\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \min\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1+1}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{2}.$$

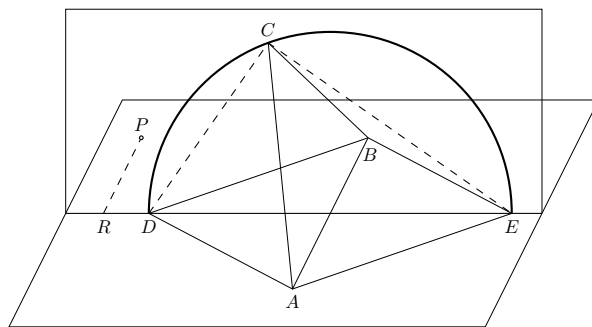
Zatem liczba  $\sqrt{2}$  jest szukanym kresem górnym wartości funkcji  $g$ .

**870.** (a) Niech  $P$  będzie dowolnym punktem w płaszczyźnie trójkąta równobocznego  $ABC$ . Rozważmy obrót płaszczyzny wokół punktu  $C$  o kąt  $60^\circ$ , przenoszący punkt  $A$  do pozycji punktu  $B$ .



Obraz punktu  $P$  nazwijmy  $Q$ . Odcinki  $CP$  i  $CQ$  są równej długości i tworzą kąt  $60^\circ$ , więc trójkąt  $CPQ$  jest równoboczny. Odcinek  $AP$  przechodzi na odcinek  $BQ$ . Trójkąt  $BPQ$  (być może zdegenerowany do odcinka) ma boki długości  $BQ = AP, BP, PQ = CP$ ; jest więc trójkątem, którego istnienie należało uzasadnić.

(b) Niech teraz  $P$  będzie dowolnym punktem w przestrzeni, leżącym poza płaszczyzną trójkąta równobocznego  $ABC$ . Wykażemy, że i teraz istnieje trójkąt o bokach długości  $AP, BP, CP$ . Przyjmijmy (b.s.o.), że najdłuższy z tej trójki jest odcinek  $CP$ . Wystarczy dowieść, że wówczas  $CP \leq AP + BP$ .



W płaszczyźnie  $ABP$  budujemy trójkąty równoboczne  $ABD$  i  $ABE$ ; dobieramy oznaczenia tak, by  $PD \leq PE$ . Wierzchołki  $C, D, E$  trójkątów foremnych o wspólnym boku  $AB$  leżą na płaszczyźnie symetrycznej odcinka  $AB$ , na okręgu o średnicy  $DE$ ; trójkąt  $CDE$  jest prostokątny. Niech  $R$  będzie rzutem punktu  $P$  na prostą  $DE$ . Płaszczyzny  $CDE$  i  $PDE$  są prostopadłe, więc  $CR \perp PR$ . Stąd  $DR = \sqrt{PD^2 - PR^2} \leq \sqrt{PE^2 - PR^2} = ER$ . To znaczy, że (w płaszczyźnie  $CDE$ ) punkty  $C$  i  $R$  leżą po jednej stronie prostej symetrycznej odcinka  $CE$  (która połowi przeciwprostokątną  $DE$ ); czyli  $CR \leq ER$ . Stąd  $CP = \sqrt{CR^2 + PR^2} \leq \sqrt{ER^2 + PR^2} = EP$ .

Z części (a), zastosowanej do trójkąta  $ABE$  i punktu  $P$  (leżącego w jego płaszczyźnie) wiadomo, że z odcinków  $AP, BP, EP$  można zbudować trójkąt. Zatem  $EP \leq AP + BP$ , więc tym bardziej  $CP \leq AP + BP$ .

[Istnieją różne rachunkowe metody rozwiązania zadania, tak w części (a), jak i (b).]

# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2024

## Zadania z fizyki nr 774, 775

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**774.** Długi klocek o podstawie kwadratowej pływa w wodzie tak, że jedna z jego powierzchni bocznych znajduje się nad powierzchnią wody i jest do niej równoległa, a klocek znajduje się w stanie równowagi trwałej. Dla jakiej gęstości materiału, z którego wykonano klocek, jest to możliwe?

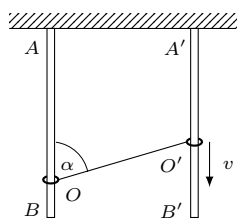
**775.** Cienki pierścień gumowy rozkręcono wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny pierścienia. Prędkość liniowa jego elementów wynosi  $v$ . Z jaką prędkością będą rozprzestrzeniać się w tym pierścieniu monochromatyczne fale poprzeczne o małej amplitudzie?

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2023

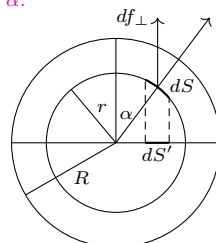
Przypominamy treść zadań:

**766.** Znaleźć siłę oddziaływania dwóch połówek nieprzewodzącej kuli o promieniu  $R$ , naładowanych ze stałą gęstością objętościową, odpowiednio,  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . Przyjąć, że kula wykonana jest z materiału o stałej dielektrycznej równej jeden.

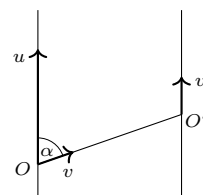
**767.** Pierścienie  $O$  i  $O'$  nasunięte są na pionowe, nieruchome pręty  $AB$  i  $A'B'$ . Nierozciągliwa nici umocowana w punkcie  $A'$  przewleczona jest przez pierścień  $O'$  i przyczepiona do pierścienia  $O$  (rys. 1). Pierścień  $O'$  porusza się w dół ze stałą prędkością  $v$ . Jaka jest prędkość pierścienia  $O$  w chwili, gdy kąt  $AOO'$  ma wartość  $\alpha$ .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**766.** W każdym punkcie półkuli o gęstości  $\rho_1$  działa siła od drugiej półkuli  $d\vec{f} = \rho_1 \vec{E} dV$ , gdzie  $\vec{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie od drugiej półkuli, a  $\rho_1 dV$  to ładunek elementarnej objętości wokół punktu. Zatem siła działająca na pierwszą półkulę jest proporcjonalna do  $\rho_1$ . Analogicznie siła działająca na drugą półkulę ze strony pierwszej jest proporcjonalna do  $\rho_2$ . Stąd wniosek, że siła oddziaływania między półkulami

$$F \sim \rho_1 \rho_2 = \rho_1^2 \rho_2 / \rho_1.$$

Na pierwszą półkulę działa również jej własne pole, którego wypadkowe działanie wynosi zero. Obliczymy więc siłę oddziaływania  $F_1$  z drugą półkulą o takiej samej gęstości, rozważając pole od całej kuli, a następnie wynik pomnożymy przez czynnik  $\rho_2 / \rho_1$ .

Zgodnie z prawem Gaussa natężenie pola wewnątrz kuli naładowanej ze stałą gęstością objętościową  $\rho_1 > 0$  w odległości  $r$  od środka kuli ma wartość  $E = \rho_1 r / 3\epsilon_0$  i jest skierowane wzdłuż promienia. Podzielmy górną półkulę na rysunku 2 na półsferyczne warstwy. Prostopadła do powierzchni rozdziału półkul składowa siły działającej na mały element warstwy o promieniu  $r$  i powierzchni  $dS$  wynosi:

$$df_{\perp} = E\rho_1 dS dr \cos \alpha = E\rho_1 dS' dr,$$

gdzie  $dr$  jest grubością warstwy, a  $dS' = dS \cos \alpha$  rzutem powierzchni  $dS$  na powierzchnię rozdziału. Wypadkowa siła działająca na półsferę o promieniu  $r$

$$dF_1 = \pi r^2 df_{\perp} = \pi \rho_1^2 r^3 dr / 3\epsilon_0.$$

Siła oddziaływania półkul o jednakowych gęstościach dana jest wzorem

$$F_1 = \int_0^R dF_1 = \frac{\pi \rho_1^2 R^4}{12\epsilon_0},$$

a szukana siła oddziaływania półkul o gęstościach  $\rho_1$  i  $\rho_2$

$$F = \pi R^4 \rho_1 \rho_2 / 12\epsilon_0.$$

**767.** W układzie odniesienia związanym z pierścieniem  $O'$ , gdy  $\sphericalangle AOO' = \alpha$ , nici wyciągana jest w górę z prędkością  $v$  (rys. 3). Ponieważ nici jest nierozciągliwa, składowa prędkości pierścienia  $O$  wzdłuż nici ma również prędkość  $v$ , a wypadkowa prędkość pierścienia w badanej chwili i w wybranym układzie wynosi:

$$u = v / \cos \alpha.$$

W nieruchomym układzie odniesienia szukana prędkość pierścienia jest równa:

$$v_O = u - v = v(1/\cos \alpha - 1).$$

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).



## Prosto z nieba: Wykrywanie zamieszkałych planet

Astronomowie odkryli dotychczas ponad 4000 układów planetarnych poza naszym Układem Słonecznym. Dzięki coraz lepszym teleskopom, na przykład takim jak Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba, można bezpośrednio zmierzyć odległość planety od jej gwiazdy oraz czas potrzebny na okrążenie gwiazdy (okres orbitalny). Pozwala to wywnioskować, czy planeta znajduje się w strefie zamieszkiwalnej, to znaczy – z naszego ziemskiego punktu widzenia – takiej, w której może przez długi czas istnieć woda w stanie ciekłym.

Jak stwierdzić obecność cieczy na innych planetach? Na pobliskich ciałach niebieskich Układu Słonecznego można obserwować odbłask światła słonecznego odbitego od powierzchni cieczy. Taki efekt zaobserwowano na przykład na największym księżycu Saturna, Tytanie, co pomogło potwierdzić istnienie dużych jezior: niestety nie wody, ale mieszaniny metanu i etanu. Wykrycie analogicznego odbłasku na planetach pozasłonecznych jest niestety poza zasięgiem obecnej technologii. Istnieją jednak inne, subtelniejsze metody stwierdzania obecności wody.

Skaliste planety wewnętrzne – Wenus, Ziemia i Mars – mają (co do rzędu wielkości) podobne rozmiary i masy, ale tylko na Ziemi znajduje się woda w stanie ciekłym. Zespół naukowców z MIT i Uniwersytetu w Birmingham zwrócił uwagę na oczywistą różnicę: Ziemia ma znacznie mniej dwutlenku węgla w swojej atmosferze niż Wenus i Mars. Przy założeniu, że planety

Cykl hydrologiczny to obieg wody obejmujący takie procesy, jak parowanie, kondensacja, opady, transport wilgoci, wsiąkanie, spływ podziemny i powierzchniowy.

Na Ziemi rośliny i niektóre mikroorganizmy przyczyniają się do pochłaniania CO<sub>2</sub>, choć nie w takim stopniu jak oceany. W ramach tego procesu materia ożywiona emituje tlen, który reaguje ze światłem gwiazdy centralnej, przekształcając się w ozon: cząsteczkę O<sub>3</sub>, która jest znacznie łatwiejsza do spektroskopowych obserwacji niż sam tlen.

Warunki nadające się do zamieszkania niekoniecznie oznaczają, że planeta jest rzeczywiście zamieszkana. Aby sprawdzić, czy życie może faktycznie istnieć, należy poszukiwać innej cechy atmosfery planety: obecności ozonu. Jeśli zatem atmosfera planety wykazuje jednocześnie obecność ozonu oraz niedobór CO<sub>2</sub>, prawdopodobnie jest to świat zamieszkały przez biomasę na skalę planetarną, podobnie jak Ziemia.

Szacuje się, że Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba byłby w stanie zmierzyć poziom CO<sub>2</sub> oraz O<sub>3</sub> w pobliskich układach planetarnych, takich jak np. TRAPPIST-1: układ siedmiu planet, który krąży wokół jasnej gwiazdy zaledwie 40 lat świetlnych od Ziemi.

Amaury H. M. J. Triaud i in., „Atmospheric carbon depletion as a tracer of water oceans and biomass on temperate terrestrial exoplanets”, *Nature Astronomy* (2023).

*Michał BEJGER*

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy



## Niebo w marcu

Marzec odznacza się jeszcze szybszą wędrówką Słońca na północ niż luty. Przez cały miesiąc zwiększy ono wysokość górowania o prawie 12°, przechodząc od środka zodiakalnej części Wodnika do środka gwiazdozbioru Ryb. 20 marca o godzinie 22:24 naszego czasu Słońce przetnie równik niebieski i na pół roku przemieści się na północną półkulę nieba, rozpoczynając astronomiczną wiosnę. 31 marca nastąpi zmiana czasu z zimowego na letni. Należy pamiętać o przestawieniu zegarów z godziny 2 na 3.

Planeta Merkury po koniunkcji ze Słońcem w ostatnich dniach lutego podąży ku maksymalnej elongacji

powstały w podobny sposób, można wnioskować, że obecność węgla jest na Ziemi regulowana w inny sposób. Jedynym procesem, który mógłby usunąć taką ilość węgla z atmosfery, jest sprawny cykl hydrologiczny wymagający udziału oceanów ciekłej wody. Ziemskie oceany odgrywają ważną rolę w pochłanianiu CO<sub>2</sub>. W ciągu setek milionów lat oceany pochłonęły ogromną ilość tego związku, prawie równą ilości, która utrzymuje się obecnie w atmosferze Wenus. Na Ziemi znaczna część atmosferycznego CO<sub>2</sub> została zmagazynowana w wodzie morskiej i litosferze w geologicznych skalach czasowych, co wpłynęło na regulację klimatu oraz oczywiście na utrzymanie warunków sprzyjających życiu.

Rozumowanie poszukiwaczy planet przebiega więc w następujący sposób: jeśli podobny jak na Ziemi niedobór CO<sub>2</sub> (w porównaniu do jej sąsiadów) został wykryty na odległej planecie byłby to wiarygodny wskaźnik obecności płynnych oceanów, a może i życia na jej powierzchni. CO<sub>2</sub> bardzo silnie pochłania światło podczerwone, i można go wykryć w atmosferach egzoplanet. Gdy już astronomowie ustalą, że w danym układzie wiele planet posiada atmosferę, będą mogli przejść do pomiaru zawartości CO<sub>2</sub>, aby sprawdzić, czy jedna planeta ma go dużo mniej niż pozostałe. Jeśli tak, planeta prawdopodobnie nadaje się do zamieszkania, co oznacza, że na jej powierzchni znajdują się znaczne ilości ciekłej wody.

Wschodniej, którą osiągnie 24 marca, oddalając się wtedy na niecałe 19° od Słońca. Mimo tak małej elongacji druga i trzecia dekada marca jest najlepszym okresem widoczności tej planety na niebie wieczornym w tym roku. Merkury zacznie pojawiać się tuż po zachodzie Słońca wraz z bardzo cienkim sierpem Księżyca po nowiu. Srebrny Glob spotka się ze Słońcem 10 marca i już następnego wieczora można próbować dostrzec jego cienki sierp w fazie 2,5% na wysokości 8° prawie dokładnie nad punktem kardynalnym w widnokregu. Merkurego należy szukać wtedy w odległości 7° na godzinie 5 względem Księżyca. Poszukiwania planety ułatwi jej duża jasność,  $-1,3^m$ .



W kolejnych dniach Srebrny Glob powędruje szybko w górę wzdłuż stromo nachylonej ekliptyki, przynosząc się dodatkowo na północ od niej. Merkury również poprawi swoje warunki obserwacyjne, choć nie tak bardzo jak Księżyc. W okolicach maksymalnej elongacji 45 minut po zachodzie Słońca planeta zajmie pozycję na wysokości prawie  $10^\circ$  nad zachodnią częścią nieboskłonu, i na pogodnym niebie jej odszukanie nie powinno sprawiać trudności. Potem planeta zacznie szybko zbliżać się do Słońca i wraz z początkiem kwietnia zniknie w zorzy wieczornej.

Jak zawsze podczas elongacji wschodniej w miarę upływu czasu Merkury zbliży się do nas, zwiększając przy tym swoją średnicę kątową i zmniejszając zarówno fazę tarczy, jak i jasność. Na początku okresu widoczności tarcza planety osiągnie średnicę  $5''$ , fazę 92% i wspomnianą jasność  $-1,3^m$ , by 1 kwietnia zmniejszyć blask do  $+1,7^m$ , ale jej średnica urośnie do ponad  $9''$ , faza zaś spadnie do 15%. Przez cały ten czas Merkury nie opuści gwiazdozbioru Ryb i zdąży zbliżyć się do Jowisza na  $20^\circ$ .

Największa planeta Układu Słonecznego tworzy coraz ciaśniejszą parę z planetą Uran. W marcu dystans między planetami zmniejszy się od  $8^\circ$  do  $3,5^\circ$ . Obie planety dążą do majowych koniunkcji ze Słońcem i na początku marca są widoczne jeszcze dość dobrze, dwie godziny po zachodzie Słońca wciąż świecąc na wysokości przekraczającej  $30^\circ$ . Niestety do końca miesiąca o tej samej porze planety zmniejszą swoją wysokość nad widnokregiem o połowę, stąd na ich obraz teleskopowy coraz większy wpływ zacznie wywierać nasza atmosfera. Przez cały miesiąc blask Jowisza spadnie od  $-2,2^m$  do  $-2^m$ , a jego tarcza skurczy się od  $36''$  do  $34''$ . W przypadku Urana zmiana odległości między nim a nami w ciągu roku stanowi znacznie mniejszy ułamek jego średniej odległości od Słońca i od nas, dlatego też ma to wyraźnie mniejszy wpływ na wygląd jego tarczy. Planeta utrzyma blask  $+5,8^m$ .

W dniach 13 i 14 marca obie planety odwiedzi cienki sierp Księżyca. Najpierw jego tarcza w fazie 16% zbliży się na  $4^\circ$  do Jowisza, a następnie przy sierpie pogrubionym do 25% pokaże się ona  $6^\circ$  nad Uranem i jednocześnie niemal tyle samo pod Plejadami w Byku. 15 marca Srebrny Glob w fazie 35% utworzy trójkąt prawie równoramienny z Plejadami i Aldebaranem, a jeszcze kolejnej nocy, już prawie oświetlony w połowie, zbliży się na  $1^\circ$  do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka. 18 i 19 marca warto odnotować bliskie spotkanie Księżyca w fazie około 70% z Polluksem, najjaśniejszą gwiazdą Bliźniąt, a 22 marca nad ranem, w fazie przekraczającej 90%, Księżyc zbliży się na mniej niż  $4^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa.

Rankiem 25 marca naturalny satelita Ziemi przejdzie przez pełnię, która jest o tyle szczególna, że nastąpi wtedy jego półcieniowe zaćmienie o głębokiej fazie 96%. A zatem księżycowa tarcza podczas pełni na około 4,5 godziny stanie się wyraźnie ciemniejsza. Niestety całe zjawisko da się dostrzec z terenu obu Ameryk i oblewających je oceanów. W Polsce zaćmienie

zacznie się o godzinie 5:53 na jaśniejącym już niebie, przy zachodzie Księżyca, i jest niewidoczne. Coś powinno dać się zobaczyć z Europy Zachodniej, gdzie Księżyc zniknie za widnokregiem nawet ponad godzinę później. Faza maksymalna nastąpi o godzinie 8:13 naszego czasu.

Po pełni do końca miesiąca Srebrny Glob rozjaśni poranne niebo, gdzie ekliptyka nie wznosi się zbyt wysoko, a wraz z nią Księżyc również zajmie niskie położenie nad horyzontem. Zwłaszcza że powędruje wtedy pod ekliptykę, co dodatkowo obniży jego wysokość górowania o kilka stopni. W tym czasie do ciekawszych spotkań Księżyca z innymi ciałami niebieskimi dojdzie 26 marca wieczorem, gdy jego tarcza w fazie 98% wzejdzie niecały stopień od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. W nocy z 29 na 30 marca i następnej Księżyc oświetlony, odpowiednio, w 80% i 70% pokaże się około  $6^\circ$  od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, najpierw na zachód, a potem na wschód od niej.

Srebrny Glob ozdobi poranne niebo również na początku miesiąca. 3 marca rano tuż przed ostatnią kwadrą zbliży się on na  $2,5^\circ$  do wspomnianej wyżej gwiazdy Antares. Na linii łączącej Antaresa z Księżycem, lecz o ponad stopień bliżej, znajdzie się jasna gromada kulista gwiazd M4. Do mającego miejsce 10 marca nowiu ciekawie zapowiada się jeszcze zbliżenie Księżyca w fazie 34% na niecały  $1^\circ$  do gwiazdy 3. wielkości Kaus Meridianalis ( $\delta$  Sgr) 5 marca.

28 marca maksimum swojej jasności osiągnie miryda R Leo. Ta gwiazda zmienia swoją jasność od  $+4,4$  do  $+11^m$  w okresie 312 dni. R Leo charakteryzuje się ciemnowiśniową barwą, widoczną już w lornetkach i małych teleskopach. Z tego względu trudno ją pomylić z inną gwiazdą. R Leo znajduje się  $5^\circ$  na zachód od wspomnianego już Regulusa. Ułatwieniem w jej szukaniu jest również para gwiazd 5. i 6. wielkości gwiazdowej 18 i 19 Leonis. R Leo jest położona  $9'$  na południe od drugiej z nich. Obie gwiazdy bardzo dobrze nadają się na tzw. gwiazdy porównania. W marcu cały układ przecina południk lokalny około godziny 22, wznosząc się wtedy na wysokość dochodzącą do  $50^\circ$ .

W tym miesiącu dużą jasność może osiągnąć kometa okresowa 12P/Pons-Brookes. Jej okres obiegu wokół Słońca wynosi 71 lat, a nachylenie do ekliptyki  $74^\circ$ . Kometa przejdzie przez peryhelium swojej orbity 21 kwietnia i może wtedy pojaśnieć do ponad  $+5^m$ . Jest zatem szansa, że da się ją dostrzec gołym okiem, a na pewno przez lornetkę. W marcu kometa pokona  $35^\circ$  na tle gwiazdozbiorów Andromedy, Ryb i Barana. Na początku miesiąca kometa przejdzie  $8^\circ$  od galaktyki M31, 22 marca znajdzie się  $3^\circ$  od galaktyki M33 w Trójkącie, by 31 marca przejść mniej niż  $0,5^\circ$  od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana. Wspomniane sąsiedztwo o tej porze roku oznacza także bliskość Słońca, ale o godzinie 20 kometa zajmuje pozycję na wysokości kilkunastu stopni nad północno-zachodnią częścią widnokregu.

*Ariel MAJCHER*



## Uran i Neptun – ciała naprawdę (?) niebieskie

Kiedy patrzy się na typową grafikę przedstawiającą Układ Słoneczny, jego dwie zewnętrzne planety – Uran i Neptun – przedstawione są jako podobne rozmiarami, ale różniące się kolorami. Uran jawi się zazwyczaj jako raczej blady, seledynowy, podczas gdy Neptun urzeka odcieniem szafiru. Atmosfery obu planet zawierają metan, który pochłania fale elektromagnetyczne odpowiadające barwie czerwonej i częściowo zielonej w promieniowaniu widzialnym. Każda z tych planet ma z grubsza podobną zawartość metanu w atmosferze. Skąd zatem ta różnica w kolorze?

Niektórzy astronomowie uważają, że istotny jest rozkład metanu w atmosferze. Postulują, że środkowa, obfita w metan warstwa atmosfery jest grubsza na Uranie, co może powodować dodatkową białawą poświatę, która sprawia, że kolor tej planety wydaje się nieco bledszy od jej dalszego sąsiada [1]. Spekulują także, że sytuacja taka może być wynikiem dawnej kosmicznej kolizji z dużym obiektem, jakiej mógł doświadczyć Uran niedługo po uformowaniu się Układu Słonecznego. Kolizja taka wpłynęła na kierunek osi obrotu planety, która leży w płaszczyźnie orbitalnej Urana, i uszczupliła jego źródła energii wewnętrznej. To wszystko sprawiło, że atmosfera Urana jest mniej aktywna od tej na Neptunie, co wiąże się z mniejszymi opadami metanowego śniegu i grubszą warstwą metanu. Nie jest to jednak powszechnie akceptowane wyjaśnienie.

Znane nam dzisiaj obrazy Urana i Neptuna pochodzą przede wszystkim z obserwacji tych planet wykonanych, odpowiednio, w 1986 i 1989 roku przez sondę Voyager 2. Z punktu widzenia takiego zewnętrznego obserwatora na Uranie nie dzieje się nic specjalnie gwałtownego. Tymczasem Neptun wykazuje wyraźne zmiany pokrywy chmurowej [2] oraz pojawiające się i znikające ciemne plamy wielkości Ziemi. Wszystko to dzieje się wśród wiatrów wiejących z prędkością ponad 1700 km/h. Aby uwypuklić te ciekawe cechy, zespół NASA nieco „podkręcił” kolory zdjęć wykonanych przez Voyagera 2, i zdjęcia te, już bez kontekstu, funkcjonują do dziś w naszej świadomości. (Oczywiście prawdziwych miłośników astronomii samodzielnie obserwujących planety nie da się w ten sposób zwieść, stanowią jednak oni raczej niewielki ułamek społeczeństwa).

Myliłby się jednak ten, kto uważałby, że w atmosferze Urana nie dzieje się nic ciekawego. Wiadomo bowiem, że obserwowany kolor tej planety zmienia się w jej cyklu rocznym – w czasie przesileni staje się ona bardziej zielonkawa, natomiast podczas równonocy przybiera odcień bardziej niebieski. Na pierwszy rzut oka wyjaśnienie jest proste: zawartość metanu w atmosferze Urana jest około dwukrotnie większa w obszarach równikowych niż na biegunie, co daje bardziej skuteczne pochłanianie nieniebieskiej części widma. Nowy model atmosfery Urana [3], wykorzystujący pół wieku systematycznych obserwacji tej planety z powierzchni Ziemi, wskazuje bowiem na rolę kryształków zestalonego metanu w środkowej części atmosfery, które dodatkowo wzmacniają różnicę w kolorach. Co ciekawe, nawet ten najnowszy model nie jest w stanie w pełni wyjaśnić zmienności koloru Urana w ciągu ostatnich 70 lat; przypuszcza się, że aby to osiągnąć, należałoby uwzględnić w modelu zmienną w czasie odległość Uran-Słońce, gdyż nawet małe zmiany w ilości energii słonecznej docierającej do powierzchni planety mogą wpływać na efektywność tworzenia się lodu metanowego w atmosferze.

Uran i Neptun leżą bardzo blisko Ziemi w porównaniu z galaktykami czy gromadami galaktyk, które uczymy się coraz lepiej obserwować i opisywać. Nie oznacza to bynajmniej, że dobrze rozumiemy tych naszych najbliższych sąsiadów. Można wręcz stwierdzić, że pomimo coraz to nowych wyników dotyczących tych planet pojawia się coraz więcej nowych pytań, na które nie umiemy udzielić odpowiedzi. Widać, że naukowcy będą jeszcze długo mieli materiał do badań na naszym okołozemskim planetarnym podwórku.

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] P. G. J. Irwin i in., *Hazy Blue Worlds: A Holistic Aerosol Model for Uranus and Neptune, Including Dark Spots*, *Journal of Geophysical Research: Planets* 127 (2022) e2022JE007189.
- [2] E. Chavez i in., *Evolution of Neptune at near-infrared wavelengths from 1994 through 2022*, *Icarus* 404 (2023) 115667.
- [3] P. G. J. Irwin i in., *Modelling the seasonal cycle of Uranus's colour and magnitude, and comparison with Neptune*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 527 (2024) 11521.



# Nie tylko dla płaszczaków

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wiele matematycznych zagadnień z geometrii przestrzennej ma swoje odpowiedniki na płaszczyźnie. Tutaj zajmiemy się właśnie takimi zadaniami. Rozwiązanie płaskiej wersji często pomaga zrozumieć problem w przestrzeni. Bywa nawet tak, że dwuwymiarowy odpowiednik jest lematem niezbędnym do rozwiązania zadania.

Jako przykład podamy tu uogólnienie następującego *twierdzenia o stycznych*: jeśli z punktu  $P$  poprowadzimy proste styczne do pewnego okręgu w punktach  $A$  i  $B$ , to  $|AP| = |BP|$ . Naturalne jest następujące uogólnienie:

**Twierdzenie 1.** Jeśli z punktu  $P$  poprowadzimy proste styczne do pewnej sfery w punktach  $A$  i  $B$ , to  $|AP| = |BP|$ .

*Dowód.* Rozważmy przekrój sfery płaszczyzną  $ABP$ . Otrzymamy w nim okrąg, do którego proste  $AP$  i  $BP$  są styczne – stąd  $|AP| = |BP|$ , na mocy twierdzenia z planimetrii.

Można jeszcze inaczej. Do sfery styczne mogą być nie tylko proste, ale również płaszczyzny.

**Twierdzenie 2.** Płaszczyzny przecinające się wzdłuż prostej  $PQ$  są styczne do pewnej sfery w punktach  $A$  i  $B$ . Wówczas trójkąty  $APQ$  i  $BPQ$  są przystające.

*Dowód.* Proste  $AP$  i  $BP$  są styczne do danej sfery, więc  $|AP| = |BP|$ , analogicznie  $|AQ| = |BQ|$ . Wobec tego trójkąty  $APQ$  i  $BPQ$  są przystające na mocy cechy (bbb).

Aby zilustrować powyższe zależności, rozwiążemy następujące

**Zadanie 3D.** Każdą ścianę pewnego wielościanu wypukłego pomalowano na czerwono lub na niebiesko, przy czym każde dwie sąsiednie ściany (ze wspólnym bokiem) mają inne kolory. Ponadto w ten wielościan można wpisać sferę. Udowodnić, że sumy pól ścian czerwonych i niebieskich są równe.

A oto jego dwuwymiarowy odpowiednik:

**Zadanie 2D.** Każdy bok pewnego wielokąta wypukłego pomalowano na czerwono lub na niebiesko, przy czym każde dwa boki sąsiednie (ze wspólnym wierzchołkiem) mają inne kolory. Ponadto w ten wielokąt można wpisać okrąg. Udowodnić, że sumy długości boków czerwonych i niebieskich są równe.

*Rozwiązanie zadania 2D.* Niech  $A_1A_2 \dots A_n$  będzie danym wielokątem.

Przez  $T_i$  oznaczmy punkt styczności okręgu wpisanego do boku  $A_iA_{i+1}$ , przy czym przyjmujemy  $A_{n+1} = A_1$  oraz  $T_{n+1} = T_1$ . Podzielmy brzeg wielokąta na pary odcinków postaci  $T_iA_{i+1}$ ,  $A_{i+1}T_{i+1}$ . Ich długości są równe na mocy twierdzenia o stycznych, ponadto mają różne kolory. Z tego wynika teza.

*Rozwiązanie zadania 3D.* Niech  $S_1, S_2, \dots, S_n$  będą ścianami danego wielościanu i niech  $T_i$  oznacza punkt styczności sfery wpisanej do ściany  $S_i$ . Niech  $S_i$  i  $S_j$  będą ścianami ze wspólną krawędzią  $AB$ . Na mocy twierdzenia 2 trójkąty  $ABT_i$  i  $ABT_j$  są przystające, więc mają równe pola. Ponadto te trójkąty są różnych kolorów. Całą powierzchnię wielościanu możemy podzielić na pary takich trójkątów, więc łączne pole czerwonej powierzchni jest takie samo jak niebieskiej.

O podobnych metodach pisał już Michał Kieza w *Kąciku Przestrzennym* (odcinek 7,  $\Delta_{11}^3$ ).

## Zadania

- Okrąg  $o$  jest częścią wspólną sfer  $s_1$  i  $s_2$ . Trzy różne punkty  $A, B, C$  leżą na okręgu  $o$ . Punkt  $P$ , leżący poza płaszczyzną okręgu  $o$ , jest dowolny. Prosta  $PA$  przecina sferę  $s_1$  w punkcie  $A_1 \neq A$  i sferę  $s_2$  w punkcie  $A_2 \neq A$ ; analogicznie określamy punkty  $B_1, B_2, C_1, C_2$ . Dowieść, że płaszczyzny  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  są równoległe.
- Dany jest wielościan wypukły  $\mathcal{P}$  o dziewięciu wierzchołkach:  $A, B_1, B_2, \dots, B_8$ . Wielościan  $\mathcal{P}_k$  jest wielościanem  $\mathcal{P}$  przesuniętym o wektor  $\vec{AB}_k$  dla  $k = 1, 2, \dots, 8$ . Dowieść, że dla pewnych  $i \neq j$  wnętrza wielościanów  $\mathcal{P}_i$  i  $\mathcal{P}_j$  przecinają się.
- W czworokącie  $ABCD$  wszystkie wewnętrzne kąty dwusieczne są ostre. Punkt  $S$  leży wewnątrz tego czworokąta, a jego odległość od każdej z płaszczyzn  $ABC, BCD, CDA, DAB$  jest większa niż 1. Dowieść, że przynajmniej dwa spośród odcinków  $AS, BS, CS, DS$  mają długość większą niż  $\sqrt{5}$ .
- Czy sześciątka można rozciąć na skończoną i większą niż 1 liczbę parami nieprzystających sześciątów?

**Wskazówki do zadań**

1. W przekroju płaszczyzną  $ABP$  mamy dwuwymiarową wersję zadania, w której dowodzimy, że  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .

2. Wygodnie jest spojrzeć na analogiczne zadanie dla pięciokąta (dlaczego akurat pięciokąta?). Wszystkie dane translacje wielokąta/wielościanu w jedną stronę mieszczą się w obrazie o współczynniku 2 względem punktu  $A$ .

3. Niech  $S'$  będzie rzutem prostopadłym  $S$  na trójkąt  $ABC$ . Odległość  $S'$  od boków trójkąta  $ABC$  są większe niż 1 – mamy więc do czynienia z analogicznym zadaniem na płaszczyźnie. Najlepszym kandydatem na dużą odległość od  $S'$  jest ten wierzchołek trójkąta, przy którym jest najmniejszy kąt (musi być nie większy od  $60^\circ$ ). Jeśli wykażemy, że  $|AS'| < 2$ , to  $|AS| \geq \sqrt{5}$ .

4. Dwuwymiarowa wersja zadania ma zupełnie inną odpowiedź – można rozciąć kwadrat na różne kwadraty, ale znaleźć taki podział jest bardzo trudno (najmniejszą możliwą liczbę kwadratów jest 21). Niemniej jednak warto pochylić się nad tym problemem i zauważyć, że najmniejszy kwadrat z tego podziału ma największą powierzchnię. Podział sześciąta na być przy brzegu. Podział sześciąta na sześciątka dałby na jego dowolnej ścianie podział kwadratu na kwadraty. Weźmy najmniejszy sześciątka, które są przy pewnej ścianie dużego sześciąta. Jest on otoczony przez większe sześciątka, więc na ścianie przeciwległej do tej, którą przylegają sześciątka, musi z nim sąsiadować mniejszy sześciątka. Kontynuując to rozumowanie, otrzymamy maliwszy nieskończony ciąg coraz mniejszych sześciątów.

# NA WYDZIALE FIZYKI UW

nie tylko zdobędziesz wiedzę,  
poćwiczysz abstrakcyjne myślenie,  
ale też rozwiniesz kompetencje społeczne,  
uczestnicząc w zespołowych projektach studenckich.

„Konkurs robotów sumo – Inercyjne Tygrysy”  
„Potencjalne przypadki mikrosoczewkowania grawitacyjnego”  
„Popularyzacja fizyki medycznej wśród licealistów”  
„Quantum combs”  
„Characterization and experimental realization of spectrometer in quantum memory”  
„Motion Capture”  
„Symulacje kwantowe na urządzeniach IBM”  
„Pomiar i kontrola parametrów wiązek laserowych”

to przykłady projektów zrealizowanych przez naszych studentów.

## ZAPRASZAMY NA STUDIA!

**WYDZIAŁ  
FIZYKI**  
UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI

### **FIZYKA**, I i II st.

Cztery ścieżki kształcenia na I st.:

**standardowa**

**indywidualna** - dostępna dla studentów,  
którzy uzyskali co najmniej 90 punktów rekrutacyjnych

**fizyka medyczna**

**neuroinformatyka**

### **NAUCZANIE FIZYKI**, I st.

### **ASTRONOMIA**, I i II st.

### **BIOFIZYKA**, I st.

### **NANOINŻYNIERIA**, I i II st.

### **EUROPEJSKIE STUDIA OPTYKI OKULAROWEJ I OPTOMETRII**, I st.

### **OPTOMETRIA**, II st.

### **ZASTOSOWANIA FIZYKI W BIOLOGII I MEDYCYNIE**, II st.

trzy specjalności do wyboru:

**biofizyka molekularna**

**fizyka medyczna**

**neuroinformatyka**

### **PHYSICS (STUDIES IN ENGLISH)**, II st.

### **QUANTUM PHYSICS AND CHEMISTRY - INDIVIDUAL RESEARCH STUDIES**, II st.

