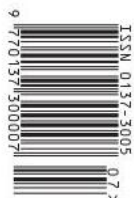


Źródło: FlyWire.ai, wyrenderował dr Philipp Schlegel



Nakład: 2700 egz.

50 największych neuronów

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Jak stworzyć
mapę mózgu?
str. 4

75 tysięcy neuronów w układzie
wzrokowym

8 tysięcy neuronów projekcji
wzrokowej łączących układ wzrokowy
z mózgiem centralnym

Wizualizacje mózgu
muszki owocówki

Rekonstrukcja wszystkich
140 tysięcy neuronów

h=6,63·10⁻³⁴ J·s T=3,141592

NR 7 (614) 2025
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 TNR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (614) 2025

O znanych i lubianych nierównościach
(w niecodziennych okolicznościach)

Sławomir Dinew

str. 1



Zadania

str. 3

Jak stworzyć mapę mózgu?

Dominik Krzemiński

str. 4



Masowe mikrowymieranie
Marta Fikus-Kryńska

str. 5



Napoleon, Thébault, Barlotti
i wielokąty foremne

Bartłomiej Pawlik

str. 7

Dlaczego elektrony nie spadają na
jądra atomowe? Czyli o związku fizyki
kwantowej z analizą funkcjonalną

Bartłomiej Bąk, Norbert Mokrzański

str. 8

Wyniki olimpiad 2024/2025

str. 11



Aktualności

Powabny rozpad

str. 15

Tabliczka mnożenia

Andrzej Dąbrowski

str. 16

Klub 44

str. 20



Prosto z nieba: Czy JWST właśnie
odkrył życie na innej planecie?

str. 22



Niebo w lipcu

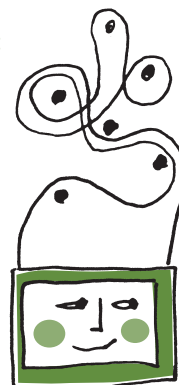
str. 23



Tertium non datur
Bartłomiej Bzdega

str. 25

W następnym numerze:
O najgorszym
sposobie
wieszania
obrazków



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub
zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

O znanych i lubianych nierównościach (w niecodziennych okolicznościach)

Sławomir DINEW*

* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński

„Szok! Piosenkarz X zmienił fryzurę. Musisz to zobaczyć!”. „Mamy to! Aktorka Y sfotografowana bez makijażu. Wygląda niesamowicie!”. Tego typu tytuły coraz częściej spotykamy w Internecie. Okazuje się, że zwiększają one tak zwaną *klikalność*. Pokazują także nasze zainteresowanie zmianami, choćby i powierzchownymi. W tym tekście, idąc za modą, wprowadzimy pewną modyfikację do klasycznych nierówności matematycznych i przeanalizujemy, co z niej wynika.

Czytelnik obeznany z literaturą nierównościową z pewnością zauważył, że gros tychże wyników zaczyna się mniej więcej tak: *Niech $x_1, \dots, x_n$ będą dodatnimi*. . . Otóż wszelkie nierówności pomiędzy średnimi (oraz wiele, wiele innych) zachodzą **wyłącznie** dla liczb nieujemnych. No właśnie. . .

W tym tekście anonsonowana modyfikacja będzie polegać na zamianian liczb dodatnich na pewną klasę **macierzy** – ograniczymy się tylko do macierzy wymiaru 2 na 2. *Ale jak porównać dwie macierze?* – zapyta pewnie Czytelnik. Po kolei.

Zacznijmy od podstawowych operacji i własności. Mając dwie macierze: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, można je dodać (bądź odjąć) *komórka po komórce*, czyli symbolicznie:

$$A \pm B := \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}.$$

Mnożenie jest nieco trudniejsze. Stosowny wzór wygląda następująco:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

A nie lepiej wymnażać komórka po komórce? – zapyta Czytelnik. Otóż takie, a nie inne reguły gry narzuca nam dział matematyki o nazwie *algebra liniowa*.

Mamy już trzy z czterech podstawowych działań arytmetycznych. Co z dzieleniem? Tak samo jak w przypadku liczb, nie zawsze da się je wykonać. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia *macierzy odwrotnej* do macierzy $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ jest, by wyznacznik macierzy A , dany wzorem $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, był niezerowy. Wtedy

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(mnożenie macierzy przez liczbę wykonujemy, mnożąc każdą komórkę przez tę liczbę).

Jak łatwo zauważyć, $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: I$. Macierz I odgrywa w naszym świecie rolę jedynki, pomnożenie przez nią (z każdej strony) nic nie zmienia.

No dobrze, ale póki co mamy samą algebrę. Gdzie tu nierówności? Aby przejść już do meritum, będziemy rozpatrywać wyłącznie macierze **symetryczne**, czyli takie A , dla których $a_{12} = a_{21}$.

Definicja: Mówimy, że symetryczna macierz A jest dodatnio określona (i piszemy $A > 0$), jeżeli $a_{11} + a_{22} > 0$ oraz $\det A > 0$.

Mówimy, że macierz jest nieujemnie określona (i piszemy $A \geq 0$), gdy w powyższej definicji nierówności ostre $>$ zamienimy na nieostre $\geq$. Ogólniej mamy $A > B$, gdy $A - B > 0$, oraz $A \geq B$, gdy $A - B \geq 0$.

Inny (równoważny) sposób zdefiniowania nierówności $A > 0$ wykorzystuje tzw. *formy kwadratowe*: $A \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma kwadratowa związana z A , czyli przekształcenie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 =: Q_A(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

Macierzą nazywamy tabliczkę wypełnioną liczbami, np. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Reguła dla mnożenia jest następująca: aby dostać element na pozycji (i, j) , mnożymy skalarnie i -ty wiersz A z j -tą kolumną B . **Uwaga:** mnożenie **nie musi** być przemienne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ale } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W algebrze liniowej macierz A interpretujemy jako **odwzorowanie liniowe** z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$, które przekształca wektor (x, y) w wektor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$. Wtedy zdefiniowane tutaj mnożenie macierzy odpowiada *składaniu* odpowiadających im odwzorowań.

Dla miłośników tekstów zawierających *mądre słowa*: oznacza to, że macierze 2 na 2 tworzą *pierścień z jedynką*.

W świecie macierzy jest tak jak i w naszym: kamery skierowane są tylko w kierunku nielicznego grona celebrytów. . .

Korzystając z symetrii A , wzór na $Q_A(x, y)$ można zapisać oszczędniej jako $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, ale wzór przywołany w tekście czytelniej wskazuje na związek z *formą dwuliniową*: $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$.

Jak Czytelnik zapewne zauważył, dodatnia określoność jest niezwykle podobna do własności iloczynu skalarnego. Można więc powiedzieć, że $A > 0$, o ile A zadaje uogólniony iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$. Sprawdzenie równoważności definicji $A > 0$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Ogólniej, dla funkcji f o wartościach rzeczywistych macierz $f(A)$ **definiujemy** wzorem znajdującym się w tekście obok, o ile tylko A_1 oraz A_2 należą do dziedziny f .



spełnia dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nierówność $Q_A(x_1, x_2) \geq 0$. Jeżeli ponadto równość zachodzi tylko dla $(x_1, x_2) = (0, 0)$, to $A > 0$. Łatwo stąd wywnioskować, że suma dodatnio określonych macierzy jest dodatnia.

W praktyce przydatny jest następujący standardowy zestaw faktów z algebry liniowej, który Czytelnik Zaciekawiony może potraktować jako ambitne zadanie:

Zestaw faktów

1. Dla dowolnej macierzy symetrycznej A wymiaru 2 na 2 istnieje kąt $\alpha \in [0, 2\pi)$ oraz takie liczby A_1, A_2 , że A ma przedstawienie

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ta groźnie wyglądająca formułka mówi nam, że A jest *diagonalna* z dokładnością do obrotu.

2. Zachodzi $A > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy we wzorze powyżej $A_1, A_2 > 0$. Podobnie $A \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1, A_2 \geq 0$.

3. Dla dowolnego wielomianu $p(x)$ zachodzi

$$p(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(A_1) & 0 \\ 0 & p(A_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

przy czym wartość $p(A)$ definiujemy, wstawiając macierz A w miejsce zmiennej x i zwyczajne mnożenie zamieniając na mnożenie macierzy. Uff, dość już definicji! Przejdźmy do czegoś konkretnego. Zastanówmy się, wzorując się na liczbach, czy dla dowolnej macierzy symetrycznej 2 na 2 zachodzi $A^2 \geq 0$. Można to sprawdzić z definicji (Czytelnik zechce potraktować to jako kolejne ćwiczenie) lub skorzystać z podanych faktów. Mianowicie, biorąc rozkład A podany powyżej, otrzymujemy

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Skoro więc wyrazy na przekątnej macierzy pośrodku są nieujemne jako kwadraty, to mamy $A^2 \geq 0$.

A jak będzie z e^A ? Czy zawsze zachodzi $e^A \geq 0$? TAK, z tego samego powodu! A czy $\ln(A) \geq 0$, o ile $A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$? Odpowiedź znowu jest pozytywna, ale po drodze trzeba skorzystać z równości zachodzącej dla każdego kąta α

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wygląda na to, że półtorej strony dotychczasowych modyfikacji doprowadziło tylko do znanych nam z analizy nierówności. Trochę to nudne... ale nie poddajemy się! Weźmy na warsztat odpowiednik znanej liczbowej nierówności $A^2 \geq B^2$, o ile $A \geq B \geq 0$. Czy jest ona prawdziwa? Otóż... NIE! Weźmy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2025 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2024 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{ale} \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2026 \\ 2026 & 4050 \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

bo $2 \cdot 4050 - 2026^2$ jest (bardzo) ujemne.

Oznacza to, że $A \mapsto A^2$ nie jest funkcją monotonicznie rosnącą dla macierzy nieujemnie określonych. A jak to wygląda dla innych potęg? Częściowej odpowiedzi na to pytanie dostarcza **nierówność Löwnera–Heinza**:

$$\forall p \in (0, 1], \quad A \geq B \geq 0 \implies A^p \geq B^p.$$

Nierówność Löwnera–Heinza nie posiada (znanego mi) krótkiego i jednocześnie elementarnego dowodu. Główna trudność wynika oczywiście z tego, że kąt α dla A i odpowiedni kąt dla B nie muszą być tożsame.

Przejdźmy wreszcie do deseru, czyli do klasycznych nierówności pomiędzy średnimi. Czy na przykład dla $A, B \geq 0$ zachodzi

$$\frac{1}{2}(A + B) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(A^2 + B^2)}?$$

Policzmy:

$$\frac{1}{2}(A^2 + B^2) - \left(\frac{1}{2}(A + B)\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - AB - BA) = \frac{1}{4}(A - B)^2 \geq 0$$

i nierówność Löwnera–Heinza dla $p = \frac{1}{2}$ da nam (pozytywną) odpowiedź.

Warto też zastanowić się nad sytuacją jednowymiarową: jaka jest najmniejsza wartość funkcji $f(x) = ax^2 + b(1-x)^2$ dla dodatnich a oraz b ?

Dla przykładu: iloczyn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ nie jest symetryczny.

A jak będzie z nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną? Pytamy o nierówność

$$\forall A, B \geq 0, \quad 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

Okazuje się, że również i ta nierówność jest prawdziwa. Aby to wykazać, potrzebujemy następującego wzoru:

$$Q_{(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) = \min \{Q_A(x_1, x_2) + Q_B(y_1, y_2)\},$$

gdzie minimum brane jest po wszystkich możliwych wektorach $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ spełniających $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2)$. Uzbrojeni w tę tajemną wiedzę zauważmy, że wystarczy pokazać nierówność

$$\forall (z_1, z_2), \quad Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_{(A+B)}(z_1, z_2).$$

Ale rozkładając (z_1, z_2) jako sumę $\frac{1}{2}(z_1, z_2) + \frac{1}{2}(z_1, z_2)$, dostaniemy

$$Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_A(z_1, z_2) + Q_B(z_1, z_2) = Q_{A+B}(z_1, z_2),$$

co kończy dowód.

Na koniec ciekawostka (a właściwie to ploteczka): znana nam celebrytka w krainie nierówności – średnia geometryczna – jest niezwykle kapryśna w naszym nowym świecie. Problem polega na tym, że iloczyn AB dwóch symetrycznych macierzy wcale symetryczny być nie musi.

Problem ten można rozwiązać na różne sposoby, dostając różne *średnie geometryczne*. Jednym ze sposobów jest wzięcie

$$\exp\left(\frac{\ln A + \ln B}{2}\right).$$

Da nam to macierz symetryczną (dlaczego?), niestety z pewnymi mankamentami. Okazuje się, że *najlepszym* wyborem (dla $A, B > 0$) jest średnia

$$A \sharp B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}.$$

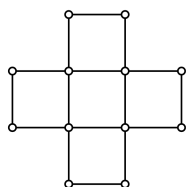
Ten wzór, uczciwie pisząc, nie wygląda elegancko – na pocieszenie warto wspomnieć, że dla trzech czy więcej macierzy ich średnia geometryczna wygląda dużo, dużo gorzej... Za to brak urody nadrabia innymi walorami, np. zachodzą jakże oczekiwane nierówności:

$$2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq A \sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

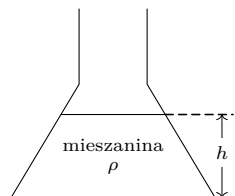
Informacje o tym i o wielu innych wynikach dotyczących analizy na macierzach Czytelnik znajdzie w książce F. Hiai, D. Petz: *Introduction to Matrix Analysis and Applications*. Życzę miłej dalszej lektury!



Zadania



Rys. 1



Rys. 2

Przygotował Dominik BUREK

M 1822. Rozstrzygnąć, jaka jest największa możliwa liczba rozłącznych pentomino w kształcie plusa (rys. 1), które można położyć na szachownicy 8×8 tak, by boki pentomino były równoległe do boków szachownicy.

M 1823. Udowodnić, że dowolny wielokąt wypukły można podzielić na trapezy równoramienne.

M 1824. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowany przez warunki $a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = a_n$ i $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że każda liczba wymierna dodatnia występuje dokładnie raz w ciągu $(\frac{a_n}{a_{n+1}})_{n \geq 1}$.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1123. W naczyniu o kształcie ściętego stożka (rys. 2) początkowo znajduje się jednorodna mieszanina dwóch cieczy o różnych gęstościach. Po pewnym czasie cieczy rozdzielają się i lżejsza (o mniejszej gęstości) zbiera się w górnej części naczynia. Czy w wyniku tego procesu zmienia się ciśnienie na dno naczynia? Przyjmujemy, że całkowita objętość cieczy przed i po ich rozdzieleniu pozostaje niezmienną. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

F 1124. Oszacuj, jakiej średnio energii, ε , potrzeba do „wyrwania” pojedynczej cząsteczki z powierzchni (ciekłej) wody. Ciepło parowania wody wynosi $L = 2257 \text{ J/g}$, masa atomowa wodoru $\mu_H = 1 \text{ g}$, masa atomowa tlenu $\mu_O = 16 \text{ g}$, a stała Avogadro: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.

Rozwiązania na str. 24

Jak stworzyć mapę mózgu?

*Uniwersytet Cambridge

Dominik KRZEMIŃSKI*

W październiku ubiegłego roku na okładce magazynu *Nature* pojawiła się mucha. Nie dla wszystkich może to być oczywiste, bo widzimy tam coś, co wygląda jak płatanina niezliczonej ilości kolorowych kabli; na czarnym tle przypomina raczej wizualizację zderzenia ciał niebieskich, a nie organ tego niepozornego owada. Tytuł ogłaszał zakończenie ambitnego projektu, który pozwolił skonturować kompletną mapę mózgu muszki owocówki z gatunku *Drosophila melanogaster*. Dlaczego owad, którego z utrapieniem odganiamy od naszych jabłek i bananów, zasłużył na wyróżnienie w prestiżowym magazynie naukowym?

Wyjaśnienie rozpoczniemy od banalnego stwierdzenia, że aby nie zgubić się w obcym mieście, dobrze jest mieć mapę. Aby trafić pod konkretny adres, najlepiej, jeśli mapa ta jest dobrze oznaczona. Analogicznie neuronaukowcy, chcąc zrozumieć szczegółowe działanie mózgu, potrzebują dokładnej mapy jego struktur. Typowy neuron w ludzkim mózgu ma około 12 mikrometrów średnicy, a komórek tych jest około 86 miliardów, sprawa zatem nie jest prosta. Tym bardziej, że do tej pory jedyna kompletna mapa układu nerwowego organizmu żywego pochodziła z małego robaczka *C. elegans*, który ma dokładnie 302 neurony. Przeskok ilościowy wydaje się zatem ogromny.

Naukowcy zainteresowali się więc wspomnianą *Drosophilą*. Chociaż muszek owocówek nie lubimy w naszej kuchni, okazują się one bardzo przydatne w laboratorium biologicznym, szczególnie w badaniach genetycznych. Ich mózg liczy około 140 000 neuronów, co czyni problem istotnie trudnym, lecz nie niemożliwym do zaatakowania przy użyciu współczesnej technologii. Zrzeszeni w konsorcjum badacze z ośrodków Cambridge, Harvard, Princeton i Centrum Badań Janelia zakasali rękawy i rozpoczęli intensywne prace w celu stworzenia, przy współpracy z kilkoma firmami, szczegółowej mapy neuronów oraz ich połączeń; tak zwanego *konektomu*.

Wróćmy do metafory mapy. Aby stworzyć od zera mapę geograficzną, warto zacząć od topografii terenu, na przykład zdjęć satelitarnych. Zamiast satelity do obrazowania neuronów będziemy potrzebować mikroskopu elektronowego, dzięki któremu możemy uzyskać obrazy o wysokiej rozdzielczości. Działo elektronowe wytwarza strumień ujemnie naładowanych cząstek, które są przyspieszane i skupiane w wąską wiązkę. Dodatkowe soczewki magnetyczne skupiają wiązkę elektronów na próbce tkanki biologicznej. Na podstawie stopnia penetracji elektronów przez tkankę można stworzyć obraz organelli komórkowych. Tkanke trzeba wcześniej odpowiednio przygotować: często przy użyciu laserów, które precyzyjnie tną ją na ultracienkie fragmenty (o grubości około 60 nanometrów). Po przeskanowaniu rozłącznych fragmentów tkanek konieczna jest ich ponowna integracja, czyli połączenie w trójwymiarową strukturę (czasem wymaga to dodatkowego przekształcania obrazów, np. skalowania czy ściśnięcia).

W kolejnym kroku na zdjęciach satelitarnych warto zaznaczyć poszczególne obiekty, takie jak ulice, rzeki, budynki, tereny zielone. W przypadku konektomu jesteśmy głównie zainteresowani kształtem neuronów oraz połączeniami między nimi. Do efektywnej analizy olbrzymiego zbioru danych niezbędne są narzędzia sztucznej inteligencji, które pomagają w szybkiej segmentacji struktur neuronowych z obrazów mikroskopowych poprzez identyfikację granic tkanek i rekonstrukcję trójwymiarowych morfologii, tzw. „szkieletów”. W szczególności pomocny w tym procesie jest algorytm wypełniania konturowego (ang. *flood-filling*) wspomagany przez konwolucyjne sieci neuronowe. Ta unikalna architektura umożliwia sieciom neuronowym iteracyjne rozszerzanie poszczególnych fragmentów tkanek biologicznych w jednolite trójwymiarowe obiekty. Inne algorytmy, również oparte na sieciach konwolucyjnych, pozwalają w szybki i dokładny sposób wykryć synapsy, czyli połączenia pomiędzy neuronami (biologicznymi), oraz związane z nimi neuroprzekazniki (chemiczne transmitery kontrolujące przesyłanie informacji).

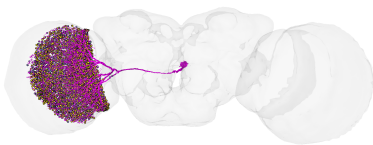
Współczesna biologia pełna jest -omów (czyli szczegółowych baz danych): genomów, proteomów, regulomów etc.



Rekonstrukcja struktury 3D neuronu (tzw. mesh) wraz z fragmentem obrazu z mikroskopu elektronowego

Metoda segmentacji struktur 3D neuronów została zaproponowana w pracy Michała Januszewskiego i in. "High-precision automated reconstruction of neurons with flood-filling networks". (*Nature methods*, 2018)

W ostatnim etapie konstrukcji mapy wszystkie rozpoznane obiekty warto opisać lub innymi słowy *zaanotować*, tzn. nanieść poszczególne nazwy ulic, parków, rzek. W neuronauce anotacje zapewniają niezbędny kontekst do interpretacji wzorców połączeń neuronalnych. Znajomość typu komórki i neuroprzekaźnika neuronu pomaga badaczom zrozumieć jego rolę w obwodach neuronowych i funkcjonowaniu mózgu. Ogromna większość anotacji, obejmująca około 100 tysięcy neuronów, była wykonywana manualnie przez małą grupę ekspertów. Do opisu pozostałej części neuronów wykorzystano właściwości symetrii oraz modularności mózgu – struktury analogiczne do zaanotowanych wcześniej łatwiej było opisać na podstawie dotychczasowej pracy. Przy wykrywaniu tych podobieństw w budowie używano algorytmów dopasowywania grafów, wyszukujących takie przyporządkowanie ich wierzchołków, które optymalizuje zgodność krawędzi między nimi. W tym przypadku wierzchołki reprezentowały neurony z dwóch obszarów mózgu, a krawędzie określone były na podstawie liczby połączeń synaptycznych. Tak sformułowane zadanie okazuje się analogiczne do jednego z podstawowych problemów optymalizacji kombinatorycznej: problemu przypisania kwadratowego. Mimo że jest to problem NP-trudny, istnieją jednak efektywne rozwiązania przybliżone dla obu zagadnień, których zastosowanie ułatwiło pracę ekspertom.



Obrys mózgu muszki owocówki z zaznaczoną rekonstrukcją neuronu wewnętrznego płata wzrokowego. Zrzut ekranu z narzędzia Codex dostępnego na flywire.ai

W rezultacie, poprzez kombinację narzędzi biologicznych, informatycznych oraz matematycznych, z sukcesem ukończono projekt FlyWire, o którym pisano w *Nature*, czyli największą i najdokładniejszą do tej pory mapę mózgu. Skrupulatnie zaanotowano 139 255 neuronów organizmu żeńskiego muszki owocówki, tworzących razem ponad 50 milionów połączeń synaptycznych. Zestaw danych FlyWire zawiera dwa kluczowe zasoby: morfologie wszystkich neuronów i wykres sieciowy pokazujący, w jaki sposób łączą się one ze sobą. Co najważniejsze, projekt jest otwarto-źródłowy, tzn. każdy może zobaczyć rezultat pracy naukowców na stronie flywire.ai.

Mapa ta przyda się w zrozumieniu funkcji struktur mózgowych u muszki owocówki, z których część ma odpowiedniki w mózgu ludzkim, a wypracowane techniki obrazowania i anotacji pomogą przy tworzeniu map mózgu innych, bardziej rozwiniętych organizmów. Ostatecznym celem jest zbudowanie mapy ludzkiego mózgu, do której przechowania (przy precyzji takiej jak FlyWire), jak się szacuje, potrzeba będzie zettabajtów (przedrostek *zetta* oznacza 10^{21}) pamięci!

Aby film nagrany w standardzie 4K zajmował jeden zettabajt, musiałby trwać około 10 milionów lat.



Masowe mikrowymieranie

Pamiętacie „Zaginiony świat” Arthura Conana Doyle’a, o wyprawie grupy naukowców do płaskowyżu, na którym przetrwały gatunki sprzed milionów lat, w tym dinozaury i ludzie pierwotni? Fikcja. A gdyby powiedziała, że jest takie miejsce na Ziemi, gdzie żyją relikty z czasów kredy?

W centralnej części pustyni Chihuahua w Meksyku znajduje się rezerwat Cuatro Cienegas, co po hiszpańsku oznacza „cztery bagna”. Teren wyniesiony na 750 m nad poziom morza otoczony jest wysokimi górami. Z obrazu uzyskanego okiem satelity z szaroburego tła wybija się turkusowa wstążka. To oaza, miejsce wielkiej różnorodności biologicznej, z długą listą gatunków endemicznych. Źródła, strumienie, jeziora, wysychające okresowo laguny tworzą bezdopływowy system. Woda w nim jest wymagająca dla życia: uboga w chlorek sodu (NaCl), ma w zasadzie niewykrywalne stężenia fosforanów, jest za to bogata w magnez, wapń, węglany i siarczany. W takiej wodzie nie rozwijają się glony ani rośliny wyższe. W tych ekstremalnych warunkach podstawą sieci pokarmowej są mikroorganizmy.

Ekstremalne warunki życia przyciągają badaczy. W piśmie PNAS z 2005 roku grupa meksykańskich uczonych opisuje wyniki badań przeprowadzonych na 10 próbkach wody i 3 próbkach osadów dennych z Cuatro Cienegas. Naukowcy częściowo zastosowali masową analizę DNA z próbek wody, część pobranych ze środowiska mikroorganizmów udało im się też wyhodować w laboratorium. Mieszane metody biologii molekularnej i klasycznej hodowli pozwoliły naukowcom sprawdzić pokrewieństwo mikroorganizmów z Cuatro Cienegas z tymi żyjącymi w innych rejonach Ziemi. Potwierdziło się, że ubogie wody kryją wyjątkowo duże bogactwo gatunków bakterii. Zdecydowanie zaskakujące było to, że ponad 50% z nich okazało się spokrewnione z bakteriami morskimi. Tymczasem dolina, gdzie znajduje się rezerwat, jest oddalona o 750 m w pionie i ponad 850 km w poziomie od najbliższego morza.

Naukowcy postawili więc hipotezę, że w czasie tworzenia się warstw skał w mezozoiku woda morska została uwieczniona w ich wnętrzu i po wypiętrzeniu się kontynentu, stosunkowo niedawno, w miarę postępujących procesów krasowych, wydostała się na powierzchnię. Zmiany te rozpoczęły się kilkadziesiąt milionów lat temu, w czasach, kiedy po lądach maszerowały dinozaury. Uwiecznione mikroorganizmy musiały dostosować się do zmian zachodzących w wodzie: rozpuszczania się niektórych minerałów i zmniejszania się stężenia soli. Hipotezę podtrzymują wyniki kolejnych prac, między innymi publikacji z PNAS z 2008 roku. Autorzy zsekwencjonowali i opisali genom jednego z wolno żyjących gatunków bakterii w wodach Cuatro Cienegas, *Bacillus coahuilensis*. Sekwencja jednoznacznie wskazuje na pokrewieństwo z morskimi gatunkami *Bacillus*, odkryto jednak szereg niezbędnych dla przetrwania modyfikacji. Dla przykładu genom *B. coahuilensis* w porównaniu do innych gatunków *Bacillus* okazał się bardzo mały. Ponieważ cząsteczki DNA zawierają dużo fosforu, w środowisku, gdzie go brakuje, redukcja genomu jest korzystna. Dodatkowo odkryto geny, które pozwalają zamienić główny składnik błon komórkowych, fosfolipidy, w ich odpowiednik zawierający zamiast fosforu siarkę. Geny te nie są jednak typowe dla *Bacillus*, bakterie musiały je uzyskać od sinic na drodze tak zwanego poziomego transferu genów, czyli procesu, w którym mikroorganizmy, nawet różnych gatunków, przekazują sobie fragmenty DNA.

Turkusowe jeziora na środku meksykańskiej pustyni kryją wiele tajemnic. Unikatywne w skali Ziemi gigantyczne zbiorowiska komórek różnych gatunków wchodzić ze sobą w interakcje. To relikty epoki schyłku kredy, po którym nastąpiło piąte w historii Ziemi wielkie wymieranie gatunków. Tymczasem spokój badających je mikrobiologów od wielu lat jest naruszany z powodu zachodzących obecnie lawinowych zmian środowiska.

W maju 2025 roku biolodzy – specjaliści od ochrony gatunków zebrali się w Scripps Institution of Oceanography w San Diego, by omówić plan utworzenia grupy do spraw mikroorganizmów w ramach Komisji Ochrony Gatunków Międzynarodowej Unii Ochrony Przyrody (IUCN). IUCN odpowiada za prowadzenie czerwonej listy gatunków zagrożonych wyginięciem,

śledzącej ryzyko wyginięcia zwierząt, roślin i grzybów (ale tylko tych, które można zobaczyć gołym okiem). Dotąd nikt na serio nie zajmował się losem mikroorganizmów.

Jeden ze współorganizatorów spotkania, Kent Redford, opowiada redaktorowi z magazynu „Science” o zagrożeniach miejsc cennych ze względu na mikroorganizmy, takich jak gorące źródła czy kominy hydrotermalne na dnach oceanów. Także o rezerwacie Cuatro Cienegas, którego egzystencja narażona jest przez wielkoobszarową uprawę lucerny w sąsiednich dolinach. Woda do podlewania pobierana jest z miejsc, które zasilają mokradła, a rezerwat zaczyna wysychać. Rząd Meksyku nie współpracuje. „Chcemy ocalić to miejsce, ponieważ odzwierciedla historię życia na Ziemi, odmienną od znanej z innych części świata. Organizmy tam żyjące mogą być spokrewnione z tymi, które skolonizowały ląd”.

Pracujący w tej samej grupie Jack Gilbert szacuje, że na Ziemi żyje 10^{31} bakterii, wirusów, archeonów, protistów i grzybów. „Produkują one większość tlenu na świecie, kolonizują nasze jelita, są źródłem informacji o początkach życia na Ziemi, powodują choroby i leczą je, wytwarzają wino i ser oraz pomagają roślinom rosnąć. Dzięki bioinżynierii umożliwiają tworzenie nowych leków, wykrywanie toksyn, zmniejszanie zapotrzebowania na nawozy i poprawianie plonów”. Musimy je chronić.

Wstępnym działaniem grupy byłoby stworzenie listy szczególnie cennych mikrobiologicznie miejsc, podobnie do już istniejącej czerwonej listy ekosystemów. Założenia tego działania naukowcy chcą przedstawić w październiku 2025 roku na najbliższym Światowym Kongresie IUCN.

Kiedy wybrałam na studiach specjalizację z mikrobiologii, mój kolega ukuł prześmiewkę: „Kto to jest mikrobiolog? Bardzo mały biolog”. Faktycznie „małość” tego zawodu nieraz mi dokuczała. Większość ludzi albo nie wierzy, że bakterie istnieją, albo uznaje wszystkie mikroorganizmy za coś, czego trzeba się pozbyć za wszelką cenę. A chronić?! Jak ustrzec przed wyginięciem coś, czego nie widać? – Nigdy nie wiadomo, czy właśnie gdzieś obok nie ginie ostatnia z bakterii X – A jednak trzeba. . . Ponieważ przy obecnym tempie zaniku naturalnych siedlisk te mikrotragedie mogą się stać sprawą całkiem makro.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

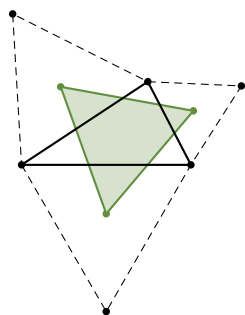


Bartłomiej PAWLIK*

*Politechnika Śląska

Jednym z twierdzeń niemających żadnego udokumentowanego związku z Napoleonem Bonaparte jest tzw. *twierdzenie Napoleona*:

Środki trójkątów równobocznych zbudowanych na zewnątrz boków danego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

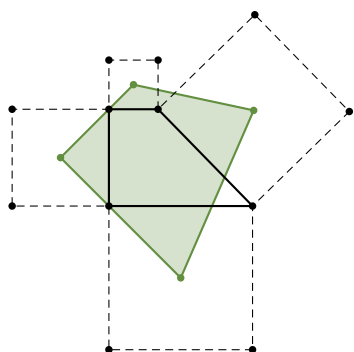


Pierwszy znany zapis tego twierdzenia pojawił się kilka lat po śmierci francuskiego cesarza – w 1826 roku przedstawił je angielski matematyk William Rutheford, jednak nie powołał się na żadne źródło.

Zarówno w powyższym twierdzeniu, jak i w całym tekście, za *środek* wielokąta foremnego uznajemy punkt równoodległy od wszystkich jego wierzchołków.

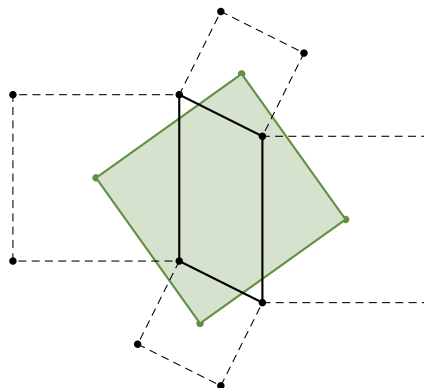
Twierdzenie Napoleona niejednokrotnie było przytaczane na łamach *Delfty* – wspominają o nim Joanna Jaszuńska w Δ_{09}^5 i w Δ_{15}^{12} oraz Bartłomiej Bzdęga w Δ_{19}^9 . Tym razem przyjrzymy się jednemu z możliwych kierunków uogólnień tego twierdzenia: na zewnątrz boków n -kąta będziemy budować n -kąty foremne.

Czy prawdą jest, że łącząc środki kwadratów budowanych na zewnątrz boków dowolnego czworokąta, otrzymamy kwadrat? Okazuje się, że niekoniecznie: wystarczy rozpatrzyć dowolny trapez prostokątny o różnych podstawach:



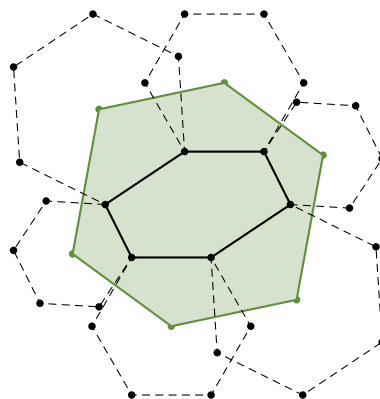
Czy można zatem sformułować interesujące nas uogólnienie twierdzenia Napoleona dla czworokątów? Z pomocą przychodzi nam Victor Thébault, żyjący w pierwszej połowie XX wieku matematyk francuski, znany przede wszystkim ze sformułowania setek oryginalnych problemów z zakresu teorii liczb i geometrii (publikowanych przeważnie w *American Mathematical Monthly*). Thébault jest autorem następującego spostrzeżenia:

Środki kwadratów zbudowanych na zewnątrz boków danego równoległoboku są wierzchołkami kwadratu.



Obserwacja Thébaulta nie daje pełnego obrazu sytuacji dla figur z czterema bokami. Czy istnieją czworokąty niebędące równoległobokami, mające rozpatrywaną własność? Okazuje się, że nie – potraktujemy ten fakt jako wniosek z dużo ogólniejszego twierdzenia Napoleona–Barlottiego:

Środki n -kątów foremnych zbudowanych na zewnątrz boków n -kąta F są wierzchołkami n -kąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy F jest afinicznym obrazem n -kąta foremnego.



Przekształcenie afiniczne to, z grubsza, przekształcenie zachowujące równoległość prostych oraz proporcje między długościami odcinków na bokach równoległych. Przykładowo afinicznym obrazem kwadratu może być jedynie równoległobok.

Na koniec dodajmy, że oczywiście nie jest to jedyne możliwe uogólnienie twierdzenia Napoleona. Można na przykład, jak Jha-Savaran czy Dao Than Oai, budować trójkąty równoboczne na bokach sześciokątów (które w zdegenerowanym przypadku stają się trójkątami, dając twierdzenie Napoleona). Szczególnie pięknym uogólnieniem jest twierdzenie Petra–Douglassa–Neumanna. Jednak są to zagadnienia na zupełnie inną opowieść...

Znakomity materiał dotyczący twierdzenia Petra–Douglassa–Neumanna można zobaczyć na youtube'owym kanale Mathologer: *Petr's miracle: Why was it lost for 100 years?*

Dlaczego elektrony nie spadają na jądra atomowe?

Czyli o związku fizyki kwantowej z analizą funkcjonalną

Bartłomiej BĄK, Norbert MOKRZAŃSKI

Doktoranci na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Dlaczego elektrony nie spadają na jądra atomowe? – to pytanie było jednym z ważniejszych zagadnień fizyki XX wieku. Jak wiadomo, elektrony mają ładunek ujemny, zaś jądra atomowe (dzięki protonom) ładunek dodatni, więc zgodnie z prawem Coulomba bardzo chętnie się przyciągają, a jednak nie łączą się i nie tworzą (w bardzo spektakularny sposób) neutronów. Jedną z prób odpowiedzi na pytanie, dlaczego tak się dzieje, był zaproponowany przez Ernesta Rutherforda, a udoskonalony i rozpowszechniony przez Nielsa Bohra „model planetarny”, według którego elektrony krążyły wokół jądra niczym planety wokół Słońca. Niestety ta propozycja była wadliwa z następującego powodu: ładunek, okrążając jądro, podlega sile dośrodkowej, a więc porusza się z przyspieszeniem, co zgodnie z prawem Larmora oznacza, że musi promieniować, tzn. przerabiać energię na fotony. Co najciekawsze, Niels Bohr był w pełni świadom tego problemu, ponieważ Joseph Larmor opublikował swój wzór wiążący emisję promieniowania z przyspieszeniem ładunku pod koniec XIX wieku, a więc kilkanaście lat wcześniej. Aby rozwiązać ten problem, Bohr dodał następujący postulat: owszem, przyspieszane elektrony promieniują, ale wokół jądra atomowego istnieją „specjalne” orbity, na których elektron pozostaje stabilny i nie

promieniuje, natomiast gdy zmienia tę orbitę, to musi albo wypromieniować energię równą różnicy energii odpowiadającym orbitom (gdy przechodzi z wyższej orbity na niższą), albo zaabsorbować energię równą wspomnianej różnicy (gdy przechodzi z niższej orbity na wyższą). Tym sposobem zostało upieczonych kilka pieczeni na jednym ogniu. Po pierwsze, domknięto model planetarny atomu, uwzględniając istnienie jedynie określonych, stabilnych orbit elektronów – co zresztą Bohr już wcześniej przeczuwał. Po drugie, w pewnym sensie udało się pogodzić ten model z opisanym przez Einsteina efektem fotoelektrycznym, który dotyczył przekazywania energii elektronom poprzez oświetlanie ich światłem. Wszystko pięknie i ładnie, ale czy powyższe obserwacje i założenia dają się włożyć w jakieś matematyczne ramy i czy możliwe jest uzyskanie tych samych rezultatów „na papierze”? Był to dość poważny problem, który udało się rozwiązać za pomocą nowo powstałej gałęzi fizyki: mechaniki kwantowej, której formalizm jest ściśle związany z również świeżo upieczoną analizą funkcjonalną – warto wspomnieć, że jednym z ojców tej ostatniej był wybitny polski matematyk Stefan Banach. Co więcej, rozwój mechaniki kwantowej był motywacją do rozwoju wielu aspektów analizy funkcjonalnej, np. teorii operatorów.

Dla wyjaśnienia, jak cały ten problem wygląda z teoretycznego punktu widzenia, trzeba parę słów napisać o samej mechanice kwantowej. Otóż w mikroświecie bardzo trudno jest mówić np. o położeniu, dlatego używa się pojęcia *prawdopodobieństwa* znalezienia danej cząstki w danym miejscu. Informacja o prawdopodobieństwie zakodowana jest w tzw. *funkcji falowej*. Właściwą funkcję opisującą dany układ fizyczny znajduje się, rozwiązując równanie Schrödingera. Niestety nie jest to wcale takie proste, niemniej w przypadku atomu wodoru, którego jądro jest po prostu protonem, daje się ten problem rozwiązać ściśle. Znalezione w ten sposób rozwiązania (funkcje falowe) numerowane są liczbami naturalnymi i odpowiadają pewnym wyróżnionym (dyskretnym) poziomom energetycznym. Funkcje te opisują więc coś w rodzaju wyróżnionych orbit (zwanymi *orbitalami*). Na tym można by skończyć cały wywód, ale okazuje się, że sprawa jest o wiele ciekawsza. Przede wszystkim dlatego, że tylko dla atomu wodoru równanie Schrödingera daje się analitycznie rozwiązać, gdyż dołożenie dodatkowych protonów i elektronów (by opisać choćby atom helu, który ma dwa protony i dwa elektrony) diametralnie komplikuje całą sytuację, zatem trzeba spróbować ugryźć ten problem inaczej. Jak już było wspomniane, w przypadku atomu wodoru mamy dopuszczalne orbity i odpowiadające im energie, a dokładniej, im niższa orbita, tym niższa energia. Warto wspomnieć, że wartość tych energii jest ujemna, co odpowiada za fakt „związania” elektronu z jądrem. Pierwszej orbicie odpowiada energia $E_1 = -13,6\text{ eV}$, natomiast n -tej orbicie odpowiada energia $E_n = E_1/n^2$. Czyli w miarę wzrostu n energia zbliża się do zera. Oznacza to, że gdyby elektronowi będącemu na pierwszej orbicie dostarczyć energię $+13,6\text{ eV}$ (lub większą), to stałby się swobodny (lub „uciekłby”) i pozostałoby samo jądro. Z punktu widzenia problemu stabilności atomów najistotniejszy jest fakt istnienia skończonej minimalnej energii E_1 , nazywanej *energiją stanu podstawowego*.

Rozwiązanie równania Schrödingera dla atomu wodoru znajduje się w każdym podręczniku wprowadzającym do mechaniki kwantowej, np. R.L. Liboff, *Wstęp do Mechaniki Kwantowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1987.

Jednostka „eV” oznacza „elektronowolt”, czyli wartość energii, jaką uzyskalby pojedynczy elektron przyspieszony napięciem jednego wolta.

Zjawisko „wyrwania” elektronów z atomów nazywa się „elektryzowaniem” lub „jonizacją”. Uwalnianie elektronów z sieci krystalicznej poprzez świecenie, czyli de facto dostarczanie energii za pomocą fotonów, to właśnie wspomniany wcześniej efekt fotoelektryczny.

Czytelników zainteresowanych matematycznymi niuansami tego problemu zachęcamy do zapoznania się z dodatkowymi materiałami, które udostępniamy na stronie deltami.edu.pl. Opisane są tam pewne dodatkowe szczegóły, które pozwolą na większe uściślenie naszych rozważań.

Operator A działa na funkcję falową i w wyniku zwraca również funkcję falową. Wartość oczekiwana operatora A na funkcji ψ jest zdefiniowana jako:

$$\langle A \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi} A \psi \, dx dy dz.$$

Dla zaspokojenia ciekawości Czytelnika Dociekliwego dodamy, że $T = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$, gdzie Δ oznacza laplasjan, $\hbar$ to zredukowana stała Plancka, zaś m jest stałą o wymiarze masy.

Rzecz jasna znalezienie konkretnej wartości infimum zdefiniowanego w (4) to problem znacznie trudniejszy niż wykazanie jego istnienia. Znajdowanie tego typu infimów to ważny temat badawczy współczesnej analizy funkcjonalnej.

Bardziej konkretnie, można sprawdzić, że $\langle H \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V |\psi|^2 \right) dx dy dz$. To wyrażenie dla „dostatecznie porządnym” (czyli spełniającym pewne warunki) potencjałów jest dobrze określone dla funkcji ψ należącej do przestrzeni Sobolewa $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Właśnie ten aspekt jest kluczowy w opisie bardziej skomplikowanych układów, gdy niemożliwe jest ściśle wyznaczenie rozwiązania, natomiast daje się stwierdzić, że energia nie może być mniejsza od pewnej skończonej wartości. Istnienie takiego ograniczenia gwarantuje istnienie stanu podstawowego, co nierozdzielnie wiąże się z tym, że elektrony nie mogą zejść niżej i spaść na jądro atomowe.

Dalsza część tego artykułu będzie poświęcona matematycznemu sformułowaniu problemu stabilności materii i szczególnie polecamy ją osobom znającym podstawy mechaniki kwantowej i analizy matematycznej, aczkolwiek osoby niewtajemniczone również zachęcamy do zapoznania się z tym zagadnieniem.

W mechanice kwantowej stan układu jest opisany wspomnianą wcześniej funkcją falową $\psi = \psi(x, y, z)$ (w dalszej części będziemy pomijać zapis argumentów) o wartościach w liczbach zespolonych. Kwadrat modułu tej funkcji jest rozkładem prawdopodobieństwa znalezienia elektronu. Całka z tego rozkładu po całej przestrzeni musi być równa jeden, stąd żądanie, aby funkcja falowa spełniała równanie:

$$(1) \quad \|\psi\|_2 = \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 \, dx dy dz \right]^{1/2} = 1,$$

$\|\psi\|_2$ nazywamy *normą* funkcji ψ , przestrzeń wszystkich funkcji o skończonej normie oznaczamy $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nadmienimy tutaj, że taka norma jest szczególnym przypadkiem normy $\|\psi\|_p$, w której to funkcja ψ jest całkowana z potęgą p , a z wyniku wyciągany jest pierwiastek p -tego stopnia, dla p niekoniecznie równego 2. Łada chwila zobaczymy, że takie normy dla odpowiednio wybranych wartości p będą bardzo użyteczne.

Przestrzeń wszystkich funkcji o skończonej normie to zbiór wszystkich możliwych stanów układu kwantowego. W mechanice kwantowej mówimy o operatorach na tej przestrzeni i ich wartościach oczekiwanych. Mierzalnym wielkościom fizycznym w rozpatrywanym układzie (*obserwabłom*) odpowiadają tzw. *operatory hermitowskie* na tej przestrzeni. Bez wnikania w szczegóły, do naszych rozważań wystarczy wiedzieć, że wartość oczekiwana operatora hermitowskiego jest zawsze liczbą rzeczywistą (pomimo tego, że funkcje falowe mają wartości zespolone). Wartość oczekiwaną możemy uważać za uśrednioną wartość wielu pomiarów tej samej wielkości w tym samym stanie układu. Szczególnie będzie nas interesowała wartość średnia energii, czyli wartość oczekiwana operatora energii H zwanego *hamiltonianem*. Najbardziej powszechną jego postać jest

$$(2) \quad H = T + V,$$

gdzie T jest energią kinetyczną, z kolei V jest energią potencjalną. W przypadku atomu wodoru jest to potencjał Coulomba:

$$(3) \quad V = -\frac{\alpha}{r},$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, zaś α to dodatnia stała o jednostce $[J \cdot m]$.

Możemy teraz matematycznie sformułować problem stabilności materii: pytamy, czy energia, zdefiniowana jako wartość oczekiwana hamiltonianu w stanie ψ (oznaczana jako $\langle H \rangle_\psi$), jest ograniczona z dołu. Równoważnie możemy zapytać, czy posiada skończone *infimum*, zwane też *kresem dolnym*:

$$(4) \quad E_0 = \inf_{\psi} \langle H \rangle_\psi > -\infty.$$

Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie, a nawet na nieco ogólniejsze (tzn. dla szerszej klasy potencjałów niż potencjał Coulomba (3)), jest twierdząca i można ją uzasadnić już za pomocą kilku narzędzi prezentowanych podczas niektórych kursów z analizy matematycznej, co pokażemy poniżej.

Zgodnie ze wzorem (2) możemy rozdzielić wartość oczekiwaną $\langle H \rangle_\psi$ na część kinetyczną i potencjalną jako

$$(5) \quad \langle H \rangle_\psi = \langle T \rangle_\psi + \langle V \rangle_\psi.$$

Faktem jest, że energia kinetyczna jest nieujemna, co oznacza, że główna przeszkoda w rozwiązaniu problemu dotyczy energii potencjalnej. Analiza upraszcza się jeszcze bardziej, ponieważ każdy potencjał możemy rozdzielić na część dodatnią V_+ i ujemną V_- w następujący sposób:

$$(6) \quad V = V_+ + (-V_-),$$

gdzie V_+ i V_- są funkcjami nieujemnymi. Nie będzie wielkim zaskoczeniem stwierdzenie, że energia pochodząca od V_+ jest nieujemna, co oznacza, że zasadnicza część problemu ogranicza się do badania wartości oczekiwanej odpowiadającej części ujemnej potencjału $\langle V_- \rangle_\psi$.

Jak już było wspomniane, energia kinetyczna jest nieujemna, jednak możemy uzyskać bardzo specyficzne i użyteczne jej oszacowanie, wykorzystując *nierówność Sobolewa*. W efekcie dostajemy oszacowanie

$$(7) \quad \langle T \rangle_\psi \geq c \|\psi\|_6^2,$$

gdzie $c > 0$ jest pewną stałą, zaś $\|\psi\|_6$ znowu oznacza *normę* funkcji ψ , lecz inną niż poprzednio rozważana norma $\|\psi\|_2$. Musimy więc znaleźć sposób, żeby oszacować wartość oczekiwaną ujemnej części potencjału tak, aby również i w tym oszacowaniu pojawiła się norma $\|\psi\|_6$. Z pomocą przychodzi nam *nierówność Höldera*. Dzięki niej otrzymujemy oszacowanie

$$(8) \quad \langle V_- \rangle_\psi \leq \|V_-\|_{3/2} \|\psi\|_6^2,$$

a więc oszacowanie z taką normą funkcji ψ , jaką chcieliśmy. Aby wykorzystać powyższą nierówność, musimy jednak wiedzieć, że norma $\|V_-\|_{3/2}$ jest skończona, co nie jest prawdą dla wielu potencjałów. Co gorsza, nie jest to prawdą dla wspomnianego przez nas potencjału Coulomba (3), więc powyższe rozważania nie pozwalają uzasadnić stabilności nawet atomu wodoru. Musimy więc działać sprytniej.

Remedium na tę bolączkę okazuje się następująca sztuczka, która, co ciekawe, pozwoli znacząco zredukować założenie o funkcji V_- . Załóżmy mianowicie, że funkcja V_- może być przedstawiona jako suma:

$$(9) \quad V_- = V_1 + V_2,$$

gdzie V_1 ma skończoną normę $\|V_1\|_{3/2}$, a funkcja V_2 jest ograniczona przez pewną stałą $M > 0$. Potencjał Coulomba (3) daje się przedstawić w powyższej postaci, co można sprawdzić, biorąc V_1 jako część tego potencjału leżącą w otoczeniu zera, a jako V_2 dopełnienie tej części. Co więcej, powyższy rozkład funkcji V_- można wykonać tak, że norma $\|V_1\|_{3/2}$ będzie tak mała, jak tylko chcemy. Odbędzie się to kosztem oszacowania stałej ograniczającej funkcję V_2 , lecz dla naszego problemu nie będzie to stanowiło przeszkody w jego rozwiązaniu. W ostatecznym rozrachunku, biorąc normę $\|V_1\|_{3/2}$ mniejszą niż stała c w oszacowaniu energii kinetycznej, otrzymujemy nierówność:

$$(10) \quad \langle H \rangle_\psi \geq \langle T \rangle_\psi - \langle V_- \rangle_\psi \geq (c - \|V_1\|_{3/2}) \|\psi\|_6^2 - M \geq -M,$$

a zatem $E_0 \geq -M$. Tym sposobem dowód stabilności materii został zakończony.

Warto nadmienić, że z matematycznego punktu widzenia istnienie skończonego infimum E_0 wcale nie implikuje istnienia konkretnej funkcji falowej związanej z tą energią! Może okazać się, że jest cała rodzina rozwiązań, dla których występuje ta sama energia (stan zdegenerowany), lub że takie rozwiązanie w ogóle nie istnieje, a znalezione infimum pełni rolę wartości granicznej.

Powyższe rachunki dotyczyły dość prostych modeli materii, jak choćby atomu wodoru. Pozostaje pytanie, czy można procedurę badania stabilności materii uogólnić do bardziej skomplikowanych układów, jak atomy inne niż wodór (gdzie trzeba uwzględnić odpychanie się elektronów), kryształy (gdzie pojawia się więcej jąder atomowych), a nawet materii relatywistycznej (gdzie energia ma bardziej skomplikowaną formułę). Okazuje się, że jest to możliwe, niemniej trzeba wprowadzić bardziej egzotyczne narzędzia matematyczne i bardziej zawiłe nierówności, o czym autorzy mają nadzieję opowiedzieć w niedalekiej przyszłości.

W wymiarze $d = 3$ nierówność Sobolewa głosi, że $\|\nabla\psi\|_2 \geq C\|\psi\|_6$ dla pewnej stałej $C > 0$.

Nierówność Höldera mówi nam, że $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ dla p i q spełniających $1/p + 1/q = 1$. Tutaj wybieramy $p = 3/2$ i $q = 3$.

Dla potencjału Coulomba rozkład (9) o żądanych własnościach dostajemy, biorąc dostatecznie mały wycinek przestrzeni wokół zera. Dla ogólnego potencjału możemy odwołać się do twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej.



Wyniki Olimpiad 2024/2025



LXXVI Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1883 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 732 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 183.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 4 kwietnia br. postanowił przyznać 59 tytułów laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

Magdalena Pudełko (36) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Mateusz Wawrzyniak (36) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Nagrody stopnia drugiego

Stanisław Lada (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Antoni Mazur (30) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Mateusz Miernik (30) – LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach
Aleksander Misterski (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Wiktor Proć (30) – I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie
Jakub Świczak (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Michał Wolny (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Igor Grauer (29) – XXXIII LO Dwujęzycznego im. Mikołaja Kopernika w Warszawie
Jakub Pieczonka (29) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Robert Rościzak (29) – I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi

Nagrody stopnia trzeciego

Maksymilian Czyżewski (26) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Julian Zbigniew Kuryłowicz-Kaźmierczak (26) – Niepubliczna Szkoła Podstawowa Verum et Bonum w Poznaniu
Antoni Łuczak (26) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Łucja Łyziak (26) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Antoni Nowosielski (26) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Patryk Rosół (26) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie
Bartłomiej Tomasz (26) – VIII LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Jan Dorosiński (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Michał Fronczek (24) – II LO im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach
Jakub Hawryluk (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Krzysztof Karwik (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Michał Kaźmierczak (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Daria Lobas (24) – LO Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we

Wrocławiu

Stanisław Mocny (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Tadeusz Rylski (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Borys Wawrzynów (24) – IV LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Stanisława Staszica w Sosnowcu
Milena Jaroszewicz (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Jan Micyk (23) – VIII LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Jakub Wasilewski (23) – VIII LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Stanisław Kozłowski (22) – II LO im. księżnej Anny z Sapiechów Jabłonowskiej w Białymstoku
Antoni Wagner (22) – XIII LO w Szczecinie

Nagrody stopnia czwartego

Tomasz Banaszczyk (20) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
Wojciech Malinowski (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Mikołaj Piatek (20) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Szymon Urban (20) – Zespół Szkół Ponadpodstawowych w Kleszczowie
Rafał Żebruń (20) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu
Kazimierz Chomicz (19) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
Karol Szczygieł (19) – III LO im. Bohaterów Westerplatte w Gdańsku
Wiktoria Bazan (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Piotr Dybich (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Jakub Gaj (18) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu
Wiktoria Gąsior (18) – I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku
Jakub Graczykowski (18) – VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy
Wojciech Kisała (18) – IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie
Marek Konieczny (18) – uczeń klasy ósmej Szkoły Podstawowej Stowarzyszenia Rodzin Katolickich Archidiecezji Katowickiej w Chorzowie
Adam Kurzyński (18) – VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Jakub Michał Kusz (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Igor Malinowski (18) – VIII LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Mateusz Pawlata (18) – LO im. Marszałka Stanisława Małachowskiego w Płocku
Tymoteusz Stępkowski (18) – Uniwersyteckie LO w Toruniu
Karol Synowiec (18) – V LO w Bielsku-Białej
Kamil Szmurło (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Michał Wojkiewicz (18) – VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Maciej Wrona (18) – CLV LO z Oddziałami Dwujęzycznymi Imienia Bohaterów Powstania Warszawskiego w Warszawie
Jan Ząbkiewicz (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Ignacy Kramarski (17) – VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
Miłosz Piekot (17) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Pełną treść komunikatu prasowego można odnaleźć na stronie om.sem.edu.pl

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXXVI OM otrzymały następujące osoby:

Grzegorz Kaczmarek – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (za rozwiązanie zad. 1)

Rafał Żebruń – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu (za rozwiązanie zad. 2)

Magdalena Pudęko – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (za rozwiązanie zad. 6)

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali finalistom w przygotowaniach do zawodów. Komitet Główny OM pragnie również podziękować: firmie Wincent, mFundacji, Urzędowi Miasta Białystok, Bankowi PKO BP, Województwu Podlaskiemu oraz II Liceum Ogólnokształcącemu im. Księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku za pomoc w organizacji finału oraz finansowanie nagród dla laureatów.



XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 7117 uczniów z 1159 szkół, do zawodów stopnia drugiego przystąpiło 1306 uczniów z 769 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 150 uczniów ze 126 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów na posiedzeniu w dniu 15 marca br. postanowił przyznać 56 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w obrębie każdej grupy laureatów kolejność jest alfabetyczna):

Laureaci I stopnia (30 punktów)

Marek Marcin Konieczny,
 Julian Zbigniew Kuryłowicz-Kaźmierczak.

Laureaci II stopnia (19–29 punktów)

Zuzanna Andruszkiewicz, Mateusz Bąk, Dawid Natan Bociąga, Zuzanna Urszula Czubińska, Aleksander Dembny, Dominik Findeisen, Antoni Glinka, Benedykt Piotr Kaczmarek, Karol Kaczmarek, Adam Kapka, Michał Marek Kołodziejczyk, Antoni Jerzy Literski, Aleksandra Agata Mazur, Szymon Michalik, Grzegorz Motylewski, Patryk Niewczas, Krzysztof Ryszard Pietruszka, Adam Jakub Rowiński, Krzysztof Rzońca, Piotr Słabicki, Artur Smoleński, Mateusz Tomasz Sobański, Rafał Sobolewski, Viktoriya Viarenich, Krzysztof Tomasz Witkowski, Michał Świętopełk Zabrocki.

Laureaci III stopnia (13–18 punktów)

Szymon Balcerzak, Tymoteusz Barcicki, Mikołaj Kazimierz Cichoń, Ignacy Karol Gałek, Andrzej Karaś, Mikołaj Szymon Kasprzowicz, Mateusz Łukasz Kaźmierczak,

Wojciech Leszek Klich, Maksymilian Kręciwilk, Jakub Władysław Kręt, Dawid Leńczowski, Maksymilian Leśniak, Oleksandra Lysakova, Katarzyna Marewicz, Jan Szymon Mika, Tomasz Miłkowski, Karol Minodzki, Adam Mroczkowski, Konstanty Opas, Filip Pawicki, Filip Piaskowski, Mateusz Pszona, Mateusz Michał Rybka, Jerzy Słowik, Łukasz Józef Sulowski, Michał Szczurek, Piotr Świdorski, Michał Paweł Waleron.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów pragnie serdecznie podziękować nauczycielom finalistów i laureatów tegorocznych zawodów. Ponadto Komitet Główny pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, która ufundowała stypendia dla najlepszych laureatów XX OMJ, a także Wydziałowi Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Politechnice Warszawskiej za udostępnienie sal na przeprowadzenie zawodów finałowych.

Pełną treść komunikatu prasowego można odnaleźć na stronie omj.edu.pl



LXVIII Olimpiada Astronomiczna

Finał 68. Olimpiady Astronomicznej odbył się w Planetarium – Śląskim Parku Nauki w Chorzowie. Przez dwa dni od 14 marca 19 finalistów rozwiązywało zadania teoretyczne, z analizy danych, a także zadania obserwacyjne przeprowadzane pod kopułą Planetarium Śląskiego dysponującego jednym z najnowocześniejszych systemów projekcyjnych na świecie. Wyniki tych zmagania młodych miłośników astronomii były następujące:

I miejsce: **Dawid Chudzik**, uczeń XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

II miejsce: ex-aequo: **Jasmina Nurković** z XIII LO w Szczecinie oraz **Artur Ziółkowski** z Uniwersyteckiego Liceum Ogólnokształcącego w Toruniu

IV miejsce: ex-aequo: **Kinga Wysocka** z III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni oraz **Antoni Gazda**

Pierwszych 5 Laureatów będzie reprezentować Polskę podczas 18. Międzynarodowej Olimpiady z Astronomii i Astrofizyki, która w tym roku odbędzie się w Bombaju w Indiach.

z I Liceum Ogólnokształcącego z Oddziałami Dwujęzycznymi im. M. Kopernika w Krośnie

VI miejsce: **Jakub Rakoca** – Uniwersyteckie LO w Toruniu
 VII miejsce: **Adam Sienkiewicz** – II LO im. Księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku

VIII miejsce: **Zofia Lamęcka** – III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni



XIX Olimpiada Informatyczna Juniorów

Finał XIX OIJ odbył się w dniach 11–13 kwietnia 2025 roku w Warszawie. Wystartowało w nim 110 zawodniczek i zawodników.

Zwycięzcami XIX OIJ zostali **Artur Smoleński** oraz **Krzysztof Witkowski** reprezentujący SP nr 221 w Warszawie. Obaj zawodnicy zdobyli komplet punktów. Poniżej lista laureatów (kolejność według zajętego miejsca). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie oij.edu.pl.

Laureaci I stopnia

Artur Smoleński, Krzysztof Tomasz Witkowski, Filip Pawicki, Szymon Czesław Krzywda, Marek Konieczny, Wiktor Gatner, Konstanty Opas, Kyril Leksiunin, Rafał Sobolewski, Miłosz Popowicz.

Laureaci i laureatki II stopnia

Aliaksei Pauliuchenka, Tobiasz Szymański, Zuzanna Czubińska, Filip Bracjewski, Antoni Glinka, Wojciech Klich, Szymon Warsiński, Michał Szarata, Antoni Zakarczemny, Sebastian Czajka, Filip Ziajka, Robert Borowski, Jan Pydych, Paweł Raszka, Jan Małafiejski, Tymofii Hamaliia.

Laureaci i laureatki III stopnia

Dominik Findeisen, Stanisław Gozdałik, Artur Brzeziński, Karol Kulczycki, Szymon Kondratek, Grzegorz Tabor, Grzegorz Zdobylak, Volodymyr Osaulenko, Sebastian Bułyszko, Karol Kaczmarek, Kamil Winczaszek, Aleksander Dembny, Ignacy Jaśkowski, Jan Gonczaryk, Miłosz Rakoczy, Tymon Ziółkowski, Magdalena Krzywicka, Jakub Targowski, Karol Janicki, Wojciech Drozd, Mateusz Skład, Igor Zieliński, Mikołaj Elert, Mieszko Fus, Karol Minodzki, Anna Oueiski, Paweł Biernacki, Artur Chmielewski, Mikołaj Waliś.



XXXII Olimpiada Informatyczna

W dniach 25–28 marca 2025 roku w Warszawie odbyły się zawody III stopnia XXXII Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 104 zawodników i zawodniczek. W ciągu dwóch dni zawodów III stopnia zawodnicy rozwiązywali w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Ceremonia zakończenia XXXII Olimpiady Informatycznej odbyła się 28 marca. Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca oraz wyróżnionego finalisty zgodnie z poniższą listą (w nawiasach liczba zdobytych punktów, szkoła oraz klasa). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie oi.edu.pl.

Laureaci I miejsca

1. **Franciszek Szymba** (442, V LO, Kraków, kl. 3)
2. **Jerzy Olkowski** (409, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
3. **Michał Piotr Wolny** (407, XIV LO, Warszawa, kl. 2)
4. **Artur Smoleński** (356, SP nr 221, Warszawa, kl. 8)
5. **Kacper Jonak** (338, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
6. **Piotr Dybich** (335, V LO, Kraków, kl. 1)
7. **Patryk Grabowski** (331, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
8. **Stanisław Lada** (322, XIV LO, Warszawa, kl. 3)

Laureaci i laureatki II miejsca

9. **Piotr Krzysztof Michalik** (319, Katolickie LO, Garwolin, kl. 4)
10. **Jakub Marcin Kussowski** (316, III LO, Gdynia, kl. 3)
11. **Krzysztof Tomasz Witkowski** (312, SP nr 221, Warszawa, kl. 8)
12. **Daria Lobas** (309, LO nr XIV, Wrocław, kl. 2)
13. **Milena Jaroszewicz** (295, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
14. **Marcin Rymkiewicz** (289, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
15. **Paulina Żeleźnik** (284, LO nr XIV, Wrocław, kl. 4)
16. **Mateusz Wawrzyniak** (265, Akademickie LO, Wrocław, kl. 4)
17. **Tomasz Pływacz** (262, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
18. **Wojciech Grzela** (260, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
19. **Adam Maleszka** (259, XIII LO, Szczecin, kl. 4)
20. **Szymon Pilipczuk** (258, XIV LO, Warszawa, kl. 1)
21. **Franciszek Jurkowski** (248, Technikum Łączności nr 14, Kraków, kl. 5)
22. **Michał Adam Roguz** (240, I LO, Łódź, kl. 1)
23. **Mateusz Jurach** (234, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
24. **Kamil Szmurło** (231, V LO, Kraków, kl. 3)

Laureaci i laureatki III miejsca

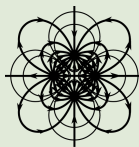
- 25.–27. **Jakub Biekionis** (228, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
- Tymon Durlej** (228, LO nr III, Wrocław, kl. 2)

Tymoteusz Stępkowski (228, Uniwersyteckie LO, Toruń, kl. 4)

28. **Filip Dawidziuk** (226, I LO, Białystok, kl. 3)
29. **Mikołaj Kazimierczak** (224, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
30. **Michał Olgierd Masny** (222, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
31. **Sebastian Dominik Paszkowski** (220, LO nr III, Wrocław, kl. 2)
32. **Szymon Czesław Krzywda** (218, Publiczna SP nr 10, Opole, kl. 8)
33. **Marek Grabarski** (215, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
34. **Jakub Woźniak** (213, I LO, Świdnica, kl. 2)
35. **Bartosz Olizarowski** (206, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
- 36.–37. **Tomasz Kośnikowski** (202, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
- Antoni Pus** (202, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
38. **Jakub Maciej Żyto** (201, XIV LO, Warszawa, kl. 2)
39. **Maciej Anioł** (200, V LO, Kraków, kl. 4)
40. **Magdalena Pawicka** (198, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
- 41.–42. **An Son Nguyen** (197, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
- Magdalena Pudełko** (197, V LO, Kraków, kl. 4)
43. **Michał Kaźmierczak** (195, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
44. **Łukasz Ganczarek** (194, LO nr III, Wrocław, kl. 3)
45. **Krystian Szumlas** (192, III LO, Gdynia, kl. 2)
46. **Samuel Juszkiewicz** (191, Technikum Łączności nr 14, Kraków, kl. 2)
47. **Julian Ryszard Tasior** (189, V LO, Kraków, kl. 4)
48. **Mateusz Wesołowski** (187, XIV LO, Warszawa, kl. 4)

Finaliści z wyróżnieniem

Jan Sikora, Aleksander Olszewski, Samuel Maj, Franciszek Czaplewski, Szymon Szymański, Wojciech Jankowski, Mikołaj Zawisławski, Piotr Dominik Grądziel, Jan Kosiorowski, Konrad Pajewski, Witold Józef Milewski, Karol Radek.



OLIMPIADA FIZYCZNA

LXXIV Olimpiada Fizyczna

Tak jak od wielu lat, w kwietniu zakończyła się kolejna Olimpiada Fizyczna. Była to już 74. edycja, w przyszłym roku będzie obchodzona okrągła 75 rocznica jej narodzin. Olimpiada to kuźnia kolejnych pokoleń zawodowych fizyków, aż trudno zliczyć, ilu fizyków zaczęło od niej swoją karierę. Mam głęboką nadzieję, że tak będzie dalej i kolejni olimpijczycy staną się wkrótce wybitnymi naukowcami.

Tegoroczny finał Olimpiady Fizycznej odbył się w dniach 12–15 kwietnia w Warszawie, uczestniczyło w nim 87 uczniów szkół średnich.

Pierwszego dnia (sobota) uczestnicy rozwiązywali zadanie doświadczalne, drugiego (niedziela) – trzy zadania rachunkowe. Trzeciego dnia uczestnicy mieli wykłady ze współczesnych problemów fizyki oraz, wieczorem, omówienie rozwiązań zadań olimpijskich. Ponadto program obejmował wizytę w Muzeum Historii Polski, zwiedzanie laboratoriów Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz... grę w kregle.

We wtorek, 15 kwietnia, w auli Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego ogłoszona zastała lista finalistów i laureatów. Komitet Główny Olimpiady Fizycznej przyznał 34 osobom tytuł laureata, pozostali uczestnicy finału otrzymali tytuł finalisty. Dyplomy oraz nagrody rzeczowe i pieniężne wręczyli: Joanna Mucha, wiceminister Edukacji Narodowej, prof. Teresa Rząca-Urban, Prezes Polskiego Towarzystwa Fizycznego oraz prof. Andrzej Wysmołek, przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej.

Laureaci i finaliści mają ułatwiony wstęp na wiele wyższych uczelni, również uzyskują najwyższą ocenę z fizyki na maturze, bez konieczności zdawania egzaminu z tego przedmiotu.

Tradycyjnie zadania na finale Olimpiady były trudne. Zadanie doświadczalne polegało na wyznaczeniu modułu Younga przezroczystej folii poliestrowej. Na folii nadrukowane były ciemne paski, tak wąskie, że gołym okiem nie dało się ich zobaczyć. Zmiana długości paska mierzonej folii była tak mała, że nie można jej było określić za pomocą linijki. Wydłużenie folii pod wpływem danego ciężaru można było określić, porównując układ cienkich pasków na rozciągniętej folii z takim samym układem pasków na folii nierozciągniętej. Nakładając folie na siebie można zauważyć tak zwane prążki mory (zwane przez niektórych prążkami Moire), łatwe do zmierzenia za pomocą linijki. Pomiar wydłużenia folii wymagał jeszcze wyznaczenia odległości między ciemnymi nadrukowanymi na folii paskami. Można to było zrobić, nakładając na siebie folie skrecone pod niewielkim kątem. Zadanie okazało się bardzo trafione – rozwiązania dobrze różnicowały uczestników. Zadania rachunkowe dotyczyły kilku działów fizyki. Pierwsze zadanie polegało na zbadaniu ruchu stacji kosmicznej, która w wyniku wybuchu rozpadła się na dwie części. Drugie zadanie dotyczyło efektu Dopplera, w sytuacji dość typowej w codziennym życiu, ale rzadko występującej w zadaniach z fizyki; chodzi tu o przejazd samochodu przez tory kolejowe. To zadanie okazało się stosunkowo łatwe, większość uczestników Olimpiady podała poprawne rozwiązanie. Ostatnie zadanie dotyczyło elektromagnetyzmu, polegało na wyznaczeniu siły elektrodynamicznej działającej na przewodnik w kształcie fragmentu rury ze strony uzupełniającego fragmentu tej rury; przez oba fragmenty płynie prąd elektryczny. Rozwiązanie tego zadania wymagało niebanalnego pomysłu. Zadanie okazało się bardzo trudne i tylko kilku zawodników podało poprawne rozwiązanie.

Pełne teksty zadań i ich rozwiązania znajdują się na stronie Olimpiady: www.kgof.edu.pl.

Wszystkim laureatom i finalistom składamy serdeczne gratulacje.

Laureaci pierwszych 10 miejsc wezmą udział w tegorocznych zawodach międzynarodowych – pięć z nich

w Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej w Paryżu, a pozostali pięciu – w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej w Sofii.

A oto lista laureatów 74. Olimpiady Fizycznej, w kolejności zajętych miejsc:

Mikołaj Litwin, III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie, Lublin

Adam Gocel, Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej, Wrocław

Borys Wawrzynów, IV LO z oddziałami dwujęzycznymi im. S. Staszica, Sosnowiec

Bołko Wieleba, XXI LO im. Stanisława Kostki, Lublin

Miłosz Jurczak, I LO im. Stefana Żeromskiego, Jelenia Góra

Jan Dąbrowski, XIII LO, Szczecin, Krzysztof Kopecki, II LO im. płk. Leopolda Lisa-Kuli, Rzeszów

Adam Wójcik, III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie, Lublin

Jan Nowakowski, CXXII LO im. Ignacego Domeyki w Warszawie, Warszawa

Sasha Matkowski, Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej, Wrocław

Jakub Miłkowski, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni, Gdynia

Jakub Jagielski, I LO im. Ziemi Kujawskiej, Włocławek

Bartłomiej Sandecki, Uniwersyteckie LO, Toruń

Adam Sienkiewicz, II LO im. Anny z Sapiechów

Jabłonowskiej w Białymstoku, Białystok

Jacek Winiarczyk, I LO im. Stanisława Staszica, Lublin

Tymon Pitucha, Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu, Wrocław

Adam Ben Saad, I LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Mikołaja Kopernika w Krośnie, Krosno

Michał Remisz, II LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego, Rybnik

Stanisław Pisarski, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Piotr Sobczyński, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie z Oddziałami Dwujęzycznymi, Katowice

Sebastian Bednarek, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa

Mateusz Tokarski, Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu, Wrocław

Natalia Sosna, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Rafał Mazur, II LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego, Rybnik

Stanisław Piasecki, XIII LO, Szczecin

Maksymilian Słowik, V LO, Bielsko-Biała

Konrad Radziejewski, IV LO z oddziałami dwujęzycznymi im. S. Staszica, Sosnowiec

Michał Machlański, III LO im. Adama Mickiewicza, Wrocław

Piotr Rybarz, Akademickie LO Politechniki Śląskiej w Rybniku, Rybnik

Mateusz Nowicki, VIII LO im. A. Mickiewicza, Poznań

Michał Iwanicki, IX LO im. Klementyny Hoffmanowej, Warszawa

Maciej Stepuch, V LO im. Ks. Józefa Poniatowskiego, Warszawa

Dominik Borowski, III LO im. Adama Mickiewicza, Wrocław

Mariusz Bałkota, IX LO im. Klementyny Hoffmanowej, Warszawa



Powabny rozpad

Nie licząc odkrycia bozonu Higgsa, triumfalnie ogłoszonego 13 lat temu, badania prowadzone przy akceleratorze LHC w CERN zdają się nie zaprzętać zbytnio uwagi opinii publicznej. Można wręcz odnieść wrażenie, że wieści o każdej, bardziej lub mniej poważnej, próbie obalenia teorii względności Einsteina rozchodzą się w przestrzeni informacyjnej szybciej i bardziej skutecznie niż doświadczalne zgłębianie struktury Modelu Standardowego cząstek elementarnych.

Można to zresztą tłumaczyć pokutującym wciąż w zbiorowej wyobraźni mitem geniusza, samotnego naukowca, który dzięki niezwykle natężeniu pracy umysłowej doznaje iluminacji i w stanie tym potrafi pozarozumowo pojąć istotę rzeczywistości i fundamentalne prawa nią rządzące. Opisem doświadczenia takiej jasności rozpoczyna się „Iluminacja” Krzysztofa Zanussiego, niezwykle filmowy esej o nauce i naukowcach. Od kiedy obejrzałem go po raz pierwszy, kilkadziesiąt lat temu, byłem przekonany, że prześmiewczy charakter tego wywodu powinien być oczywisty, przynajmniej dla każdego widza z doświadczeniem badawczym.

Bozon Higgsa wyprodukowano, ogłoszono to czcionką *Comic Sans*, strzeliły korki od szampana, ważne osoby otrzymały nagrody, w tym Nagrodę Nobla. Tymczasem zespoły doświadczalne musiały czekać na poważne docenienie trochę dłużej, ale wiosną tego roku *Breakthrough Prize in Fundamental Physics* powędrowała nominalnie do ogółu naukowców pracujących przy detektorach w LHC. Jednak ze względu na liczbę nagrodzonych i wysokość nagrody trudno byłoby oczekiwać, że każdy laureat odczułby jej obecność w portfelu. Uradzono zatem, aby stosowne środki przeznaczyć na fundusz, w ramach którego doktoranci z państw członkowskich CERN mogliby przyjeżdżać do ośrodka naukowego pod Genewą i prowadzić badania „u źródła”. Nie oznacza to lepszego dostępu do danych, ten jest zapewniony protokołem znanym jako WWW, chętnie wykorzystywanym w szczególności przez marudy utyskujące na bezużyteczność badań podstawowych. Zaletą pobytu w CERN jest bowiem możliwość pracy w innym środowisku ekspertów, prowadzenie ciekawych rozmów z osobami spoza macierzystej instytucji i nawiązanie nowych kontaktów badawczych.

I co dalej? Bozon Higgsa się rozpada. Niektóre sposoby jego rozpadu można względnie łatwo wychwycić. (Fizycy cząstek elementarnych powiedzieliby „kanały” zamiast „sposoby”, o ile uprzednio nie obraziliby się za zasugerowanie, że ich praca jest względnie łatwa). Większość rozpadów bozonu Higgsa wymyka się jednak detekcji. Kiedy mówimy, że bozon Higgsa oddziałuje z kwarkami u i d , z których zbudowane są protony i neutrony, mamy na myśli dociekania pośrednie, nie ma bowiem, na przykład, jakichkolwiek dowodów, że bozon Higgsa może rozpadać się na jedną z takich par kwark-antykwar – i wedle obecnej wiedzy nigdy nie zobaczymy tego w LHC. A co z cięższymi kwarkami, takimi jak kwark c , niekiedy dla lepszego efektu określany jako powabny? Ostatecznie według Modelu Standardowego prawdopodobieństwo oddziaływania bozonu Higgsa z podstawowymi składnikami materii powinno być jakoś proporcjonalne do masy tych składników.

Tutaj wieści są umiarkowanie optymistyczne. Chociaż obecność kwarków c może być również dowiedziona jedynie pośrednio, dzięki obecności wiązek cząstek

wytworzonych w oddziaływaniach tych kwarków, to wiązki takie są trudne do odróżnienia od innych wiązek powstających w zderzeniach protonów. Jest jednak postęp, którego można było dokonać dzięki rozwojowi sztucznej inteligencji. Skoro algorytmy analizy obrazów potrafią rozpoznać, kiedy do telefonu komórkowego podchodzi jego właściciel, i odblokować wtedy ekran, to nie powinno dziwić, że udało się także zmusić komputery do identyfikacji oddziaływań z udziałem kwarków c . Kiedy zatem będziemy mogli powiedzieć, że bozon Higgsa rozpada się „powabnie”? Trudno snuć tu jakieś przypuszczenia, nie od rzeczy będzie jednak zauważyć, że program badawczy zaplanowany na prawie dwie dekady udało się właśnie zrealizować w trzy lata.

Przełomy i rewolucje, także naukowe, generują zainteresowanie publiczności przekładające się na wyświetlenia, udostępnienia i lajki, a w dalszej perspektywie – także na priorytetowe finansowanie. Jednak wiele, a może i większość wartościowych badań lokuje się gdzieś na uboczu głównego wrzasku.

Krzysztof TURZYŃSKI

Tabliczka mnożenia

Andrzej DĄBROWSKI

Inspiracją do napisania niniejszego artykułu była fascynująca historia tablic matematycznych przedstawiona w [1]. Zainteresowanym tablicami liczb losowych polecam również lekturę [2].

Tablice trygonometryczne, logarytmiczne, astronomiczne czy tablice liczb losowych w czasach przedkomputerowych pełniły rolę swoistej konserwy, w której zakumulowano wysiłek wielu rachmistrzów. Kopciuszkiem w tym gronie była tabliczka mnożenia. Okazało się, że w XX wieku sławne tablice przestały być potrzebne, a tabliczkę mnożenia czekała całkiem nowa i nieoczekiwana rola.

Tabliczka mnożenia. Kwadratowa tabliczka mnożenia – taka, jaką znamy,

1	2	...	9	1
2	4	...	18	2
...	...	...	...	...
9	18	...	81	9
1	2	...	9	

zawiera wyniki mnożenia przez siebie liczb od 1 do 9. Dzięki jej zapamiętaniu (to ta konserwa rachunkowa, która pozostaje w głowie na całe życie) można opanować mnożenie pisemne dwóch dowolnych liczb. I nie wydaje się, aby do czegoś więcej można było takiej tabliczki użyć.

Będziemy interesować się tablicami $T = [t_{ij}]$ o I wierszach i J kolumnach, składającymi się z liczb rzeczywistych dodatnich. Powiemy, że tablica T jest *tabliczką mnożenia* $TM(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ o czynnikach: wierszowym $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_I]$ i kolumnowym $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_J]$, gdy

$$t_{ij} = w_i k_j \text{ dla } i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J.$$

Nietrudno zauważyć, że tablica

$T_1 =$	14	28	56	112	210	700	1400
	13	26	52	104	195	650	1300

jest tabliczką mnożenia:

14	28	56	112	210	700	1400	0,14
13	26	52	104	195	650	1300	0,13
100	200	400	800	1500	5000	10 000	

Liczyby w powyższej tabliczce zostały wybrane nieprzypadkowo. Tabliczka mnożenia T_1 okazuje się przyzwoitym przybliżeniem tabeli aktualnych rekordów świata kobiet i mężczyzn w biegach (wyrażonych w sekundach):

$T_0 =$

10,49	21,34	47,60	113,28	230,07	846,62	1741,03	kobiety
9,58	19,19	43,03	100,91	206,00	755,36	1571,00	mężczyźni
100 m	200 m	400 m	800 m	1500 m	5000 m	10 000 m	

Związek tablic T i $TM(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ wygodnie jest przedstawić w postaci *reprezentacji resztowej* T względem $TM(\mathbf{w}, \mathbf{k})$:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{w} \\ \mathbf{k} & \end{bmatrix}$$

Elementy r_{ij} tablicy resztowej $R = R(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ wyznaczone są z warunku $t_{ij} = r_{ij} w_i k_j$.

Reprezentacja resztowa T_0 względem T_1 ma, z dokładnością do 0,001, postać

0,749	0,762	0,850	1,011	1,096	1,209	1,244	0,14
0,737	0,738	0,828	0,970	1,056	1,162	1,208	0,13
100	200	400	800	1500	5000	10000	

Rzecz jasna, nie każda tabela jest tabliczką mnożenia. Z definicji wynika, że dowolne dwa jej wiersze muszą być proporcjonalne, czyli stosunek odpowiadających wyrazów tych wierszy musi być stały (i równy stosunkowi odpowiednich wyrazów czynnika kolumnowego). W takim wypadku mówimy o *jednorodności wierszy*. Gdyby w tabeli rekordów w biegach T_0 występowała jednorodność wierszy, to wyniki mężczyzn byłyby proporcjonalne do wyników kobiet. W rzeczywistości wiersze są *prawie* jednorodne. Stosunek czasu mężczyzn do czasu kobiet jest niemal równy na wszystkich dystansach:

0,913	0,899	0,904	0,891	0,895	0,892	0,902
100 m	200 m	400 m	800 m	1500 m	5000 m	10 000 m

Tabeli rekordów nie możemy zatem przedstawić jako tabliczki mnożenia. Jednorodność wierszy jest jednocześnie warunkiem dostatecznym – jeśli występuje, jesteśmy w stanie dobrać czynniki wierszowy i kolumnowy, by uzyskać daną tablicę jako tabliczkę mnożenia. W analogiczny sposób możemy zdefiniować *jednorodność kolumn*, która również jest warunkiem koniecznym i dostatecznym do tego, by dana tablica była tabliczką mnożenia.

Przedstawimy teraz nieco bardziej skomplikowane kryterium, któremu jednak będziemy mogli nadać pewien statystyczny charakter. Oznaczmy:

$$t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{iJ} = t_{i+},$$

$$t_{1j} + t_{2j} + \dots + t_{Ij} = t_{+j},$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} = t_{++}.$$

Można pokazać, że tabela T jest tabliczką mnożenia wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \quad t_{ij} = \frac{t_{i+} t_{+j}}{t_{++}} \text{ dla każdego } i, j.$$

Warunek ten nazwiemy *kryterium multiplikatywnym*. Prześledźmy je na następującym przykładzie. Wylosowano 600 studentów Uniwersytetu Delaware i zanotowano ich kolor oczu i włosów.

WŁOSY	OCZY			
	brązowe	niebieskie	szare	zielone
czarne	68	20	15	5
szatynowe	119	84	54	29
rude	26	17	14	14
blond	7	94	10	16

Gdyby to była tabliczka mnożenia, to musiałaby zachodzić równość (1), równoważna równości

$$(2) \quad \frac{t_{ij}}{t_{++}} = \frac{t_{i+}}{t_{++}} \frac{t_{+j}}{t_{++}} \quad \text{dla każdego } i, j.$$

Zwróćmy uwagę, że $\frac{t_{i+}}{t_{++}}$ jest oszacowaniem prawdopodobieństwa wystąpienia i -tego koloru włosów, $\frac{t_{+j}}{t_{++}}$ oszacowaniem prawdopodobieństwa wystąpienia j -tego koloru oczu, zaś $\frac{t_{ij}}{t_{++}}$ – prawdopodobieństwa jednoczesnego wystąpienia kolorów i oraz j .

Warunek (2) oznacza, że prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia koloru włosów i oraz koloru oczu j jest iloczynem ich prawdopodobieństw. W rachunku prawdopodobieństwa taki warunek oznaczałby niezależność koloru oczu i włosów. W tym przypadku warunek ten nie jest spełniony – nie mamy zatem do czynienia z tabliczką mnożenia.

Jak daleko od tabliczki mnożenia? Tabela rekordów w biegach i tabela koloru oczu i włosów nie są tabliczkami mnożenia. Wszystkie symptomy wskazują jednak, że tabela rekordów jest bardzo podobna do jakiejś tabliczki mnożenia – tabela kolorów nie wydaje się podobna do żadnej. Jak to zmierzyć?

Zróźnicowanie $z(T, U)$ tabel T i U o tych samych rozmiarach $I \times J$ zdefiniujemy jako średnie zróźnicowanie $z(t_{ij}, u_{ij})$ ich elementów. Naturalną średnią w tym przypadku jest średnia geometryczna. Wynika to z faktu, że mnożenie jest działaniem naturalnym dla tabliczek mnożenia, a średnia geometryczna g liczb $x_1, \dots, x_n$ spełnia $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = g^n$.

Samo zaś **zróźnicowanie** $z(a, b)$ dwóch liczb dodatnich a i b powinno spełniać warunki:

1. **Symetria:** $z(a, b) = z(b, a)$;
2. **Niezależność od wyboru jednostek:** dla każdego $s > 0$, $z(a, b) = z(sa, sb)$;
3. **Monotoniczność:** funkcja $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(a) \stackrel{df}{=} z(a, 1)$ jest rosnącą.

Funkcję f z warunku 3 będziemy nazywać *funkcją skalującą*. Łatwo jest wykazać, że zróźnicowanie $z(a, b)$ wyraża się wzorem

$$z(a, b) = f\left(\max\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)\right).$$

Oczywistym, najprostszym wyborem funkcji skalującej f jest $f(a) = a$. Wtedy

$$z(a, b) = \max\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right).$$

Liczba $z(a, b)$ jest wówczas wielkością korygującą a tak, aby przez pomnożenie lub podzielenie przez nią otrzymać b . Właśnie takie określenie zróźnicowania $z(a, b)$ przyjmujemy w dalszej części tekstu.

Zróźnicowanie $z(T, TM(\mathbf{w}, \mathbf{k})) = (\prod_i \prod_j z(t_{ij}, w_i k_j))^{1/IJ}$ można wyrazić poprzez tabelę resztową

$$z(T, TM(\mathbf{w}, \mathbf{k})) = z(R(\mathbf{w}, \mathbf{k}), \mathcal{J}) = \left(\prod_i \prod_j z(r_{ij}, 1)\right)^{1/IJ},$$

gdzie $\mathcal{J}$ jest tablicą jedynek rozmiaru $I \times J$, a $z(r_{ij}, 1) = \max(r_{ij}, r_{ij}^{-1})$.

Zróźnicowanie tablic T_0 i T_1 z pierwszego przykładu jest równe

$$z(T_0, T_1) = \sqrt[14]{0,749^{-1} \cdot 0,762^{-1} \cdot \dots \cdot 1,208} \simeq 1,19,$$

co oznacza, że średnia korekta elementów T_1 , aby otrzymać T_0 , wynosi 19%.

W naszej tabeli $t_{11} = 68$, $t_{1+} = 108$,
 $t_{+1} = 220$, $t_{++} = 592$ oraz

$$\frac{68}{592} \neq \frac{108}{592} \frac{220}{592}.$$

Liczba y jest średnią (średnią De Morgana) zbioru liczb $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ względem łącznego i przemienne działania $\otimes$, jeśli $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n = y \otimes y \otimes \dots \otimes y$ (n razy). Średnia geometryczna jest zatem średnią względem mnożenia.

Dla logarytmicznej funkcji skalującej

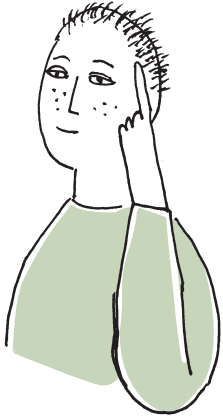
$$\begin{aligned} z(a, b) &= \log\left(\max\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)\right) \\ &= |\log(a) - \log(b)|. \end{aligned}$$

$$7 \times 7$$

$$9 \times 6$$

$$6 \times 8$$

$$7 \times 8$$



Metodę przekształcenia tabeli danych tak, aby spełniła ten warunek, zwaną wygładzaniem medianowym (ang. *median polish*), wykorzystał w analizie statystycznej John Tukey (1915–2000). Analiza ta prowadzona jest w języku addytywnym, a nie multiplikatywnym, jak w naszym przypadku.

Reprezentacja optymalna. Tabliczkę mnożenia najbardziej podobną do danej tabeli T nazywamy **optymalną reprezentacją** T .

Innymi słowy, reprezentacja optymalna tabeli T jest tabliczką mnożenia $TM(w_0, k_0)$ spełniającą warunek

$$z(T, TM(w_0, k_0)) \leq z(T, TM(w, k)),$$

równoważnie

$$z(R(w_0, k_0), \mathcal{J}) \leq z(R(w, k), \mathcal{J}),$$

dla dowolnych w i k . Liczbę $\text{Ind}(T) \stackrel{\text{df}}{=} z(T, TM(w_0, k_0))$ nazywamy **indeksem tabeli** T .

Tablica resztowa optymalnej reprezentacji T jest najbardziej podobna do tablicy jedynek $\mathcal{J}$ spośród wszystkich reprezentacji T .

Optymalna reprezentacja resztowa tabeli T_0 rekordów w biegach to

0,992	1,000	0,997	1,005	1,002	1,004	0,998	21,340
1,008	1,000	1,003	0,995	0,998	0,996	1,002	19,190
0,495	1,000	2,236	5,283	10,758	39,517	81,725	

Indeks tabeli T_0 jest równy 1,0033. Rekordy kobiet i mężczyzn na wszystkich dystansach są praktycznie takie same z dokładnością do „efektu płci” $21,34/19,19 \approx 1,1120$. Efekt ten oznacza, że kobiety mają dłuższy średnio o 11% czas biegu na każdym dystansie.

Powstaje naturalne pytanie, jak rozpoznać optymalną reprezentację danej tabeli? Do sformułowania warunku koniecznego potrzebne jest pojęcie *mediany*.

Mediana ciągu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest liczbą m o tej własności, że co najmniej połowa elementów x spełnia warunek $x_i \leq m$ i co najmniej połowa – warunek $x_i \geq m$. Gdy liczba n jest nieparzysta, to mediana jest wyznaczona jednoznacznie, gdy parzysta – możliwe wartości mediany tworzą przedział domknięty.

Można pokazać, że dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ średnia geometryczna $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ osiąga wartość minimalną tylko wtedy, gdy m jest medianą zbioru. Obserwacja ta jest podstawą poniższego twierdzenia.

Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym na to, by tabliczka mnożenia $TM(w_0, k_0)$ była optymalną reprezentacją T , jest to, aby liczba 1 należała do mediany każdego wiersza i każdej kolumny tabeli resztowej $R(w_0, k_0)$.*

Warunek ten nie jest dostateczny. Tabela

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 15 & 4 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ma dwie reprezentacje spełniające warunek konieczny:

$$T = \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 & 1 \\ 1 & 3/4 & 3/2 & 2/3 \\ 15 & 4 & 4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że w tym wypadku druga reprezentacja jest optymalna.

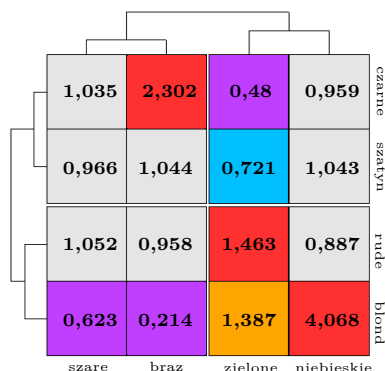
Zróznicowanie pierwszej reprezentacji T , równe $\sqrt[9]{\frac{32}{9}}$, jest większe od zróznicowania $\sqrt[9]{\frac{24}{9}}$ drugiej reprezentacji. Tak więc pierwsza nie jest reprezentacją optymalną.

Warunek konieczny jest również dostateczny, gdy T lub jej transpozycja jest rozmiaru $2 \times n$, 3×4 , 4×4 , 4×5 lub 4×6 . Dla pozostałych rozmiarów warunki dostateczne sformułował Johannes Kemperman [3].

WEŹMY
TABLICZKĘ
CZEKOLADY



Wartości indeksu większe od 1,10 można uznać za umiarkowanie istotne, większe od 1,16 za istotne, a większe od 1,22 za bardzo istotne.



Dla tabeli koloru oczu i włosów tabela resztowa optymalnej reprezentacji ma następującą postać:

WŁOSY	OCZY			
	brązowe	niebieskie	szare	zielone
czarne	2,302	0,959	1,035	0,480
szatynowe	1,044	1,043	0,966	0,721
rude	0,958	0,887	1,052	1,463
blond	0,214	4,068	0,623	1,387

Jej indeks równy 1,486 świadczy o bardzo wysokiej zależności między tymi kolorami. Prominentnymi oznakami tej zależności są pary **włosy blond–oczy brązowe** o wskaźniku zróżnicowania $0,214^{-1} = 4,673$ i **włosy blond–oczy niebieskie** o wskaźniku 4,068.

Analiza statystyczna tabeli danych. Dane zapisane w tabeli opisują relację pomiędzy zmiennymi w jej wierszach i w kolumnach. Jeżeli tabela jest tabliczką mnożenia, to w zależności od sposobu zbierania danych możliwe są dwie interpretacje tej relacji:

- Jeśli wiersze odpowiadają pewnym rozkładom prawdopodobieństwa a kolumny – ich możliwym do uzyskania wartościom (lub odwrotnie), to wnioskujemy o równości tych rozkładów;
- Jeśli wiersze odpowiadają możliwym wartościom jednej zmiennej, a kolumny – drugiej, to wnioskujemy o ich niezależności.

Gdy tabela danych *istotnie* różni się od *każdej* tabliczki mnożenia, to hipotezy te powinny być odrzucone. Aby to się stało, wystarczy, by tabela istotnie różniła się od jej optymalnej reprezentacji, czego miarą jest indeks tabeli. Indeks ten ma interpretację statystyczną, podobnie jak wartości zróżnicowań $z(r_{ij}, 1)$ tabeli resztowej. Ich istotnie duże wartości wskazują na związek między poziomem i zmiennej wierszowej i poziomem j zmiennej kolumnowej.

Infografika. Tabelę resztową R można zabarwić według statystycznej istotności jej elementów. Kolory zimne, od fioletowego do jasnoniebieskiego, oznaczają małe reszty, a ciepłe – od czerwonego do żółtego – duże. Kolor szary odpowiada nieistotnie różniacej się od 1 wartości w tabeli R . Relacje łączące czynniki wierszowe czy kolumnowe ujawnia algorytm klasyfikacji, który porządkuje wiersze i kolumny tabeli R tak, aby sąsiadami były podobne wiersze/kolumny, a istotność różnicy między grupami można odczytać z długości gałęzi dendrytu, umieszczonego u góry i z lewej strony tabeli.

Przeanalizujmy w ten sposób tabelę dotyczącą koloru oczu/włosów.

Przedstawiona na marginesie tabela szybko prowadzi nas do następujących wniosków:

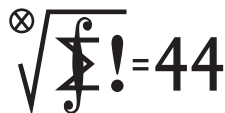
- Kolor włosów tworzy dwie grupy: włosy jasne (rude i blond) oraz ciemne (czarne i szatyn).
- Kolor oczu tworzy dwie grupy (oczy niebieskie i zielone oraz brązowe i szare).
- Oczy niebieskie w sposób bardzo istotny ($r = 4,068$) są nadreprezentowane wśród blondynów; z pozostałym kolorem włosów nie są istotnie powiązane.
- Włosy czarne są nadreprezentowane ($r = 2,302$) wśród osób o brązowym kolorze oczu, a wyjątkowo rzadko ($r = 0,48$) występują wśród osób o zielonych oczach.
- Włosy jasne kojarzą się z oczami niebieskimi i zielonymi, a nie kojarzą się z oczami czarnymi i brązowymi.

Wspomnijmy na koniec, że te obserwacje znajdują częściowe biologiczne wytłumaczenie. Kolory oczu i włosów zależą od typu melaniny. Ciemne włosy często kojarzą się z ciemnymi oczami w populacjach, w których przeważa eumelanina. Feomelanina odpowiada za jasny kolor oczu i włosów.

Literatura

- [1] Campbell-Kelly, M. (edytor) i inni, *The history of mathematical tables*, Oxford University Press, Oxford 2007.
- [2] Dąbrowski, A., *Przypadek – wróg czy sojusznik?*, Wiad. Mat. 56(2) 2020, 241–255.
- [3] Kemperman, J.H.B., *Least absolute value and median polish*, Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lecture Notes – Monograph Series, vol. 5 (1964), 84–103.

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
891 ($WT = 1,36$) i 892 ($WT = 2,14$)
z numeru 12/2024

Krzysztof Zygan	Lubin	43,39
Andrzej Kurach	Ryjewo	43,21
Janusz Olszewski	Warszawa	40,67
Michał Warmuz	Żywiec	40,04
Marcin Kasperski	Warszawa	39,14
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Grzegorz Wiączkowski		36,58
Marek Spychała	Warszawa	35,24
Marian Łupieżowiec	Gliwice	34,85
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,36
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,97
Krzysztof Maziarz	Londyn	33,32

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2025

Przypominamy treść zadań:

897. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości p oraz przekątne długości m i n . Punkt E jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $DE \leq p - m - n$.

898. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m, n \geq 1$, dla których wielomian $W(x) = x^m + x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $T(x) = x^2 + x + 1$.

897. Na płaszczyźnie zespolonej punkty A, B, C, D, E są reprezentowane przez liczby a, b, c, d, e (położenie punktu 0 nie ma znaczenia). Mamy udowodnić nierówność $p \geq m + n + DE$, czyli

$$(1) \quad |a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| \geq |a - c| + |b - d| + |d - e|.$$

Przyjmijmy oznaczenia: $a - b = x, b - c = y, c - d = z$. Wówczas

$$a - d = x + y + z; \quad a - e = y$$

(skorzystaliśmy z założenia, że $ABCE$ to równoległobok);

$$e - d = (a - d) - (a - e) = x + z.$$

Wprowadzamy te oznaczenia do (1) i dostajemy do udowodnienia nierówność

$$(2) \quad |x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

Wobec jednorodności można przyjąć, że $x + y + z = 1$ (ta suma nie może być zerowa, bo $a \neq d$). To sprowadza nierówność (2) do postaci

$$|x| + |y| + |z| + 1 \geq |1 - z| + |1 - x| + |1 - y|.$$

Obie strony są nieujemne. Podnosząc je do kwadratu, uzyskamy (do dowodu) nierówność równoważną:

$$(3) \quad \sum |x|^2 + 2 \sum |xy| + 2 \sum |x| + 1 \geq \sum |1 - x|^2 + 2 \sum |(1 - x)(1 - y)|$$

(symbol $\sum$ oznacza sumowanie cykliczne w zmiennych x, y, z). Zauważając, że $(1 - x)(1 - y) = xy + z$, przekształcamy (3) do postaci kolejno równoważnych:

$$\sum |x|^2 + 2 \sum |xy| + 2 \sum |z| + 1 \geq \sum (1 - 2\operatorname{Re} x + |x|^2) + 2 \sum |xy + z|;$$

$$2 \sum (|xy| + |z|) + 1 \geq 3 - 2 \sum \operatorname{Re} x + 2 \sum |xy + z|;$$

$$2 \sum (|xy| + |z| - |xy + z|) \geq 2(1 - \sum \operatorname{Re} x).$$

Ostatnia nierówność jest banalnie prawdziwa: lewa strona jest nieujemna, a prawa jest równa zero, bo $\sum x = 1$. To dowodzi słuszności nierówności we wszystkich wcześniejszych postaciach, więc i tezy (1).

[*Uwaga.* Nierówność (2) zachodzi dla *każdej* trójki liczb zespolonych, jak pokazuje przeprowadzony rachunek. Kontekst geometryczny służy jako jej interpretacja. Zbędne jest założenie wypukłości czworokąta; to może być dowolna linia łamana $ABCD$, nawet z fragmentami pokrywającymi się. Proponujemy Czytelnikom, jako ćwiczenie, rozpoznanie sytuacji, gdy (2) staje się równością.]

898. Trójmian T rozkłada się na czynniki liniowe $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$, gdzie $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Zatem W dzieli się przez T wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez $(x - \alpha)$ i $(x - \beta)$; równoważnie (tw. Bézout) – gdy

$$(4) \quad W(\alpha) = 0, \quad W(\beta) = 0.$$

Istotne są reszty z dzielenia m, n przez 3:

$$(5) \quad \alpha^m = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ \alpha & \text{gdy } m \equiv 1 \pmod{3}, \\ \beta & \text{gdy } m \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases} \quad \text{i podobnie } \alpha^n, \beta^m, \beta^n.$$

Jeśli m dzieli się przez 3, to $W(\alpha) = \alpha^m + \alpha^n + 1 = 2 + \alpha^n \neq 0$, warunek (4) nie jest spełniony; podobnie wykluczamy przypadek, w którym n dzieli się przez 3. Pozostają $m, n \equiv 1, 2 \pmod{3}$. Łatwo teraz ze wzoru (5) uzyskać ostateczną odpowiedź: warunek (4) (równoważny podzielności wielomianu W przez T) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv 1, n \equiv 2 \pmod{3}$ lub $m \equiv 2, n \equiv 1 \pmod{3}$.



Klub 44 F



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
788 ($WT = 2,37$), 789 ($WT = 1,99$)
z numeru 12/2024

Tomasz Wietecha (Tarnów) 18–44+3,02
Jacek Konieczny (Poznań) 41,11
Jan Zambrzycki (Białystok) 4–31,23
Andrzej Nowogrodzki
(Chocianów) 3–29,48

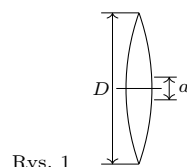
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2025

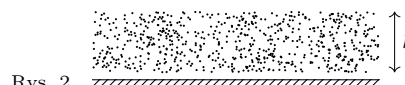
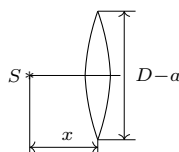
Przypominamy treść zadań:

794. Z soczewki skupiającej o ogniskowej $f = 50$ cm i średnicy $D = 5$ cm wycięto środkowy pasek o szerokości 5 mm, a pozostałe części złożono ze sobą (rys. 1). W odległości $x = 75$ cm od soczewki umieszczono punktowe źródło światła monochromatycznego S . Korzystając z przybliżenia małych kątów, znaleźć maksymalną liczbę prążków obrazu interferencyjnego, jaka może powstać na ekranie za soczewką. Długość fali świetlnej $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m.

795. Izolowaną metalową, początkowo nienaladowaną płytkę oświetlano w czasie τ światłem nadfioletowym. W wyniku tego z płytki wyleciała chmura elektronów, których prędkość początkowa była prostopadła do płytki i miała wartość v_0 . Całkowita liczba elektronów, które wyleciały z jednostki powierzchni, wynosi n , elektron ma ładunek e i masę m . Znaleźć grubość chmury h po czasie t od zakończenia naświetlania (rys. 2).

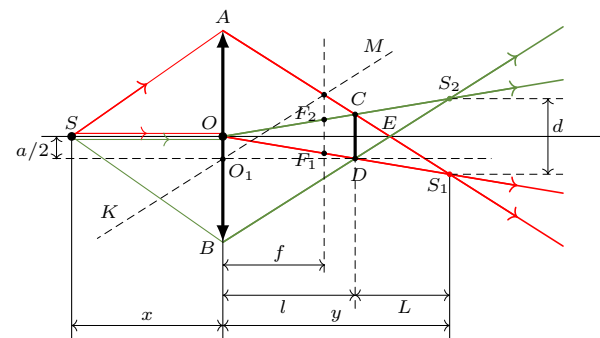


Rys. 1



Rys. 2

794. Soczewka z wyciętym paskiem dzieli światło ze źródła S na dwie wiązki. Tam, gdzie wiązki przecinają się, możemy obserwować prążki interferencyjne (rys. 3).



Górna część obciętej soczewki daje obraz S_1 źródła S (promień AS_1 przecina równoległy do SA promień KO_1 w punkcie M płaszczyzny ogniskowej). Obraz S_2 źródła w dolnej części soczewki leży po drugiej stronie osi układu i jest spójny z S_1 . Obszar przecięcia wiązek znajduje się między soczewką oraz punktem E

przecięcia promieni AS_1 i BS_2 . W odległości l od soczewki przekrój tego obszaru jest największy.

W przybliżeniu małych kątów w odległości L od odcinka S_1S_2 możemy obserwować $N = |CD|/\Delta x$ jasnych prążków, gdzie $\Delta x = \lambda L/d$ jest szerokością prążka, a d to długość odcinka S_1S_2 .

Gdy płaszczyzna obserwacji oddala się od soczewki, szerokość prążków maleje. Szerokość obszaru przecięcia wiązek rośnie przed płaszczyzną CD , a następnie maleje szybciej niż szerokość prążka. Maksymalną liczbę prążków obserwujemy więc w płaszczyźnie CD .

Z podobieństwa trójkątów OCD i OF_1F_2 :

$$|CD| = al/f, \quad N = ald/f\lambda L.$$

Z podobieństwa trójkątów S_1S_2C i AOC :

$$l/L = (D-a)/2d.$$

Szukana maksymalna liczba prążków na ekranie:

$$N = a(D-a)/2f\lambda = 450.$$

795. Płytkę i chmura elektronów tworzą kondensator płaski. Pole między okładkami ma natężenie $E = \frac{en}{\epsilon_0}$. Na górnej granicy chmury prędkość elektronów wynosi v_0 , na dolnej ich przyspieszenie ma wartość $a = \frac{eE}{m} = \frac{e^2n}{(m\epsilon_0)}$. Do chwili t górne elektrony przebędą drogę $h_1 = v_0(\tau + t)$, a dolne $h_2 = v_0t - \frac{at^2}{2}$, stąd szukana grubość chmury:

$$h = h_2 - h_1 = v_0\tau + \frac{e^2nt^2}{2m\epsilon_0}, \quad \text{gdy } t < \frac{2v_0}{a}.$$

Po czasie $t_0 = \frac{2v_0}{a}$ dolne elektrony zaczną wracać na płytkę, a górne nie zmieniają swego ruchu, zatem dla czasu $t \geq \frac{2v_0}{a}$ grubość chmury $h = v_0(t + \tau)$.

Skrót regulaminu

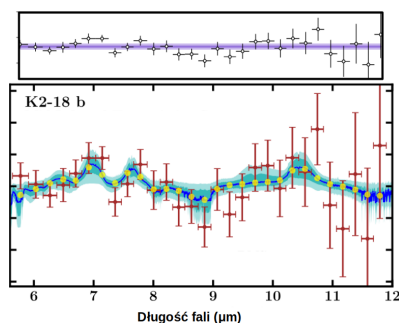
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Uściślając, gdy w tym artykule mowa jest o życiu, to mamy na myśli biologiczne życie podobne do tego, jakie znamy na Ziemi – florę i/lub faunę, która mogła się rozwinąć z podobnych związków chemicznych w sprzyjających warunkach, zbliżonych do tych, które istnieją na Ziemi. Oczywiście naukowcy nie wykluczają możliwości istnienia życia opartego na zupełnie innych związkach chemicznych, które potencjalnie mogło się rozwinąć na innych planetach w zupełnie innych warunkach. Problem w tym, że nie wiadomo, jak mielibyśmy zacząć poszukiwania czegoś, o czym nic nie wiemy. Dlatego skupiamy się jak na razie na znanych i wiadomych.

K2-18b została odkryta z wykorzystaniem Kosmicznego Teleskopu Keplera w 2015 roku. Znajduje się około 124 lata świetlne od Ziemi (więc nie mamy szans na wizytę w najbliższym czasie). Krąży wokół gwiazdy typu czerwonego karła – zdecydowanie mniejszej i chłodniejszej gwiazdy niż nasze Słońce, i okrąża swoją gwiazdę w 33 dni, a więc nie musimy długo czekać, aby ją obserwować, gdy przechodzi na tle tarczy swojej gwiazdy.



Obserwowane widmo światła przechodzącego przez atmosferę planety K2-18b (po usunięciu światła gwiazdy). Punkty oznaczają obserwacje JWST, natomiast linie to dopasowany model (u góry linia prosta, na dole siarczek dimetylu). Rysunek zaadaptowany z publikacji Madhusudhan et al. (2025) – dolny panel, i Taylor (2025) – górny panel.

O dopasowaniu modelu pisał Przemysław Biecek w Δ_{23}^1 .

Na podstawie artykułu (1) Nikku Madhusudhan et al., 2025, *New Constraints on DMS and DMDS in the Atmosphere of K2-18b from JWST MIRI*, ApJL 983:L40 oraz artykułu (2) Jake Taylor, 2025, *Are there Spectral Features in the MIRI/LRS Transmission Spectrum of K2-18b?*, arXiv:2504.15916.

Nie. Jeszcze nie. A przynajmniej nie na 100%. Wybaczcie rozczarowanie.

W połowie kwietnia Internet obiegrała wiadomość: „Naukowcy odkryli życie na planecie K2-18”. To niestety dość luźna interpretacja tego, co naprawdę się stało. A mianowicie grupa naukowców pod kierunkiem prof. Nikku Madhusudhana z University of Cambridge opublikowała wyniki obserwacji atmosfery planety K2-18b wykonanych za pomocą Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba (JWST). Autorzy publikacji twierdzą, że zaobserwowali słaby sygnał obecności siarczku dimetylu w atmosferze planety. Wynik ten jest niepewny, co sami autorzy przyznają, a do tego silnie kwestionowany przez wiele innych grup naukowych, które z równym prawdopodobieństwem są w stanie dopasować do obserwacji prostą linię (niewykazującą żadnego sygnału).

Jak to zwykle bywa, *diabeł tkwi w szczegółach*.

Siarczek dimetylu to jeden z tak zwanych biomarkerów atmosferycznych. Te związki chemiczne mogą być wskaźnikami życia, ponieważ są produkowane wyłącznie przez biologiczne formy życia na Ziemi. Wykrycie ich w atmosferze egzoplanety powinno teoretycznie oznaczać, że może na niej istnieć życie podobne do tego na naszej planecie. Jednym z celów misji Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba jest poszukiwanie takich biomarkerów. Złazszcza na planetach, które znajdują się w takiej odległości od rodzimej gwiazdy, by temperatura była odpowiednia do istnienia życia.

Jedną z takich planet jest K2-18b. Była ona obserwowana już wcześniej przy użyciu Kosmicznego Teleskopu Hubble’a. Wówczas potwierdzono istnienie pary wodnej w jej atmosferze. K2-18b jest zatem całkiem dobrym celem do poszukiwań życia. Problem w tym, że wciąż nie wiemy, jakiego typu jest to planeta. Ma masę około 8 razy większą niż Ziemia, ale tylko 3 razy większy promień. Pasuje się więc mniej więcej w połowie pomiędzy rozmiarem Ziemi a Neptuna – takich planet nie ma w naszym Układzie Słonecznym. Wciąż nie potwierdzono, czy K2-18b to super-Ziemia, czy mini-Neptun. Jeżeli ten drugi, wówczas jest to gazowa planeta, na której nie ma powierzchni. Dlatego trudno byłoby mówić o „życiu podobnym do ziemskiego”.

Ale to nie jedyny problem. Wróćmy do najnowszych obserwacji. Biomarkerów (czy ogólnie pierwiastków) w atmosferze poszukuje się, obserwując światło gwiazdy przechodzące przez atmosferę planety poruszającej się na tle tarczy gwiazdy. Linie absorpcyjne takiego światła wskazują na obecność określonych pierwiastków w atmosferze planety. Każdy pierwiastek absorbuje światło w bardzo ściśle określonych długościach fali (np. linie absorpcyjne wodoru są w innych miejscach niż azotu). Dlatego gdy sygnał jest wystarczająco silny, łatwo je zidentyfikować. Do obserwowanego sygnału dopasowuje się model laboratoryjny i jakość takiego dopasowania (stopień tego, czy model odzwierciedla dane obserwacyjne, czy nie) określa nam prawdopodobieństwo wystąpienia określonych pierwiastków w atmosferze planety. Nie inaczej jest z biomarkerami takimi jak siarczek dimetylu. Jednak kluczowe są tu sformułowania „jakość dopasowania modelu” i „wystarczająco silny sygnał”, ponieważ w przypadku najnowszych obserwacji K2-18b żaden z tych dwóch warunków nie jest spełniony.

W dolnej części rysunku na marginesie przedstawione jest dopasowanie modelu wykonane przez grupę naukową, która twierdzi, że obserwacje wskazują na obecność siarczku dimetylu. W górnej części rysunku dopasowanie wykonane przez inną grupę naukową, która twierdzi, że obserwacje jednoznacznie na nic nie wskazują, ponieważ można do nich dopasować linię prostą. Oczywiście naukowcy nie robią tego na oko. Metody statystyczne są w stanie określić rodzaj dopasowania. Współczynniki dopasowania obu modeli (siarczek dimetylu i zupełny brak sygnału) są prawie identyczne.

Niestety więc, jak to zwykle bywa, pozostaje nam czekać na lepsze obserwacje, które potwierdzą lub obalą wnioski jednej (lub obu) z tych grup.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Od początku drugiej połowy roku Słońce wędruje na południe, co skutkuje zmniejszającą się długością dnia i rosnącą długością nocy. Słońce chowa się pod horyzont coraz głębiej i noce stają się coraz ciemniejsze, stąd obszar widoczności obłoków srebrzystych przesuwa się systematycznie na północ. Z drugiej strony Słońce góruje coraz niżej, a zatem coraz bardziej na południe przesuwa się granica obszaru, z którego można próbować dostrzec łuk okołohoryzontalny. Pod koniec miesiąca oba zjawiska stają się niemożliwe do zaobserwowania z terenu Polski aż do następnego sezonu, zaczynającego się w maju przyszłego roku.

W lipcu pogarsza się nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu, polepsza się za to jej nachylenie o świcie. Dlatego przebywający na wieczornym niebie w pierwszej połowie miesiąca Księżyc jest widoczny słabo, a warunki widoczności dodatkowo pogarsza fakt, że jego orbita kieruje go na południe od ekliptyki, obniżając o kilka kolejnych stopni położenie na nieboskłonie. Dlatego do 11 dnia miesiąca wysokość Księżyca na nocnym niebie nie przekroczy 10° . 2 lipca Srebrny Glob przejdzie przez I kwadrę, zajmując pozycję 6° na południe od Porrimy, jednej z jaśniejszych gwiazd Panny, by następnej doby zbliżyć się na niecałe 2° do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy w całej konstelacji.

Jeszcze słabiej widoczny jest Mars, który w lipcu wędruje jakieś 12° pod Denebolą w Lwie, świecąc z jasnością $+1,5^m$. Na początku miesiąca około godziny 22:30 planeta zajmuje pozycję na wysokości 10° , potem jest już tylko gorzej. Mars pożegna się z nami koniunkcją z Księżycem w fazie 17% 28 lipca, gdy oba ciała przedzielią na niebie 2° . Ze względu na niskie położenie nad horyzontem i jasne tło nieba do zaobserwowania planety niezbędna może okazać się lornetka.

7 lipca faza księżycowej tarczy przekroczy 90% i dotrze ona już do gwiazdozbioru Skorpiona, gdzie zakryje m.in. gwiazdę τ Skorpionii o jasności powyżej 3^m . Zjawisko da się zaobserwować z małego obszaru Europy Środkowej, od krajów Beneluksu na zachodzie do pogranicza Rosji z Białorusią i krajami bałtyckimi na wschodzie. W Polsce gwiazda zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 23:25 i pokaże się ponownie po jej drugiej stronie jakieś 30 minut później. W tym samym czasie w odległości 2° na północny zachód towarzystwa wspomnianej parze dotrzyma Antares, najjaśniejsza gwiazda Skorpiona.

Trzy dni później naturalny satelita Ziemi przejdzie przez pełnię i przeniesie się na niebo poranne, gdzie odwiedzi kilka planet Układu Słonecznego. Pierwszymi planetami jest para Saturn – Neptun. Jednak Księżyc dotrze do niej dopiero 16 lipca w fazie 72%, zbliżając się doń na 5° . Obie planety w zaczynającym się właśnie sezonie obserwacyjnym kreślą pętlę na niebie blisko siebie, szykując się do wrześniowych opozycji. W lipcu obie planety zmieniają ruch z prostego na wsteczny (Neptun piątego dnia miesiąca, Saturn zaś czternastego), stąd obie niewiele tylko przesuną się względem gwiazd tła. Praktycznie przez cały lipiec Neptun znajduje się 1° na północ od Saturna, a zatem mieści się razem z nim w polu widzenia lornetki, a nawet teleskopu z szerokokątnym okularzem. W tym miesiącu Saturn świeci blaskiem $+0,9^m$, przy średnicy tarczy $18''$. Neptun jest o 7^m słabszy. Stosunek małej do wielkiej

półosi pierścieni Saturna osiąga maksymalną wartość w tym roku: 0,06.

W nocy z 17 na 18 lipca Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę w Rybach, a dwie kolejne noce później zbliży się do Plejad i planety Uran, przebywającej około 4° na południe od nich. Nad ranem Księżyc zbliży się do gromady gwiazd na 4° , a potem je zakryje, niestety zdarzy się to wczesnym popołudniem naszego czasu. Uran świeci blaskiem $+5,8^m$ i w drugiej części miesiąca około godziny 2:30 wznosi się ponad 15° nad wschodnim widnokregiem.

21 lipca mająca fazę zaledwie 18% tarcza Księżyca utworzy równoramienny trójkąt równoboczny z Plejadami i Aldebaranem. Dobę później, przy fazie zmniejszonej do 10%, zbliży się ona na nieco ponad 1° do gwiazdy El Nath (północny róg Byka) i jednocześnie 7° do Wenus. Niestety nie ma tu już kreślącej w zeszłym sezonie swoją pętlę w Byku planety Jowisz, która przeniosła się do Bliźniąt. Zamiast niej w lipcu przez Byka wędruje planeta Wenus, która 4 dnia miesiąca przejdzie $2,5^\circ$ na południe od Urana, 13 lipca wejdzie zaledwie $0,5^\circ$ od gwiazdy Ain (ϵ Tau), stanowiącej najbardziej na północ wysuniętą jasną gwiazdę Hiad, 17 lipca przejdzie 1° na północ od gromady otwartej NGC 1647, by 27 lipca przejść $0,5^\circ$ od gwiazdy ζ Tau, czyli południowego rogu Byka. Przez cały miesiąc Wenus świeci blaskiem około -4^m , średnica jej tarczy spadnie z $18''$ do $14''$, faza zaś urośnie z 65% do 75%.

Księżyc spotka się z powracającym na nocne niebo Jowiszem 23 lipca. Nie jest to jednak zbliżenie łatwe do obserwacji, ponieważ około godziny 4 jego tarcza w fazie jedynie 4% zdąży się wznieść na wysokość 10° , a świecący blaskiem $-1,9^m$ Jowisz znajdzie się 5° pod nią. 2° bliżej i nieco na lewo od Jowisza pokaże się Mebsuta (ϵ Gem), świecąca blaskiem $+3^m$.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 3



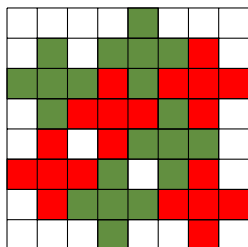
Rozwiązanie zadania M 1822.

Odpowiedź: 8.

Zauważmy, że pentomino mogą zająć jedynie 2 spośród 8 pól w dolnym rzędzie. Istotnie, każde pentomino może zająć tylko jedno pole w tym rzędzie, więc gdyby zajmowały one 3 pola w dolnym rzędzie, to w rzędzie wyżej byłoby zajętych 9 pól – sprzeczność.

Oznacza to, że w sumie mogą być zajęte co najwyżej $6^2 + 4 \cdot 2 = 44$ pola (6^2 wewnętrznych pól i po 2 na każdej z czterech krawędzi). Każde pentomino zajmuje 5 pól, czyli jest co najwyżej $\lfloor \frac{44}{5} \rfloor = 8$ pentomino.

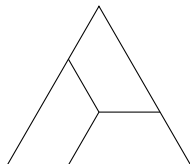
Z drugiej strony nietrudno narysować 8 rozłącznych pentomino na szachownicy 8×8 .



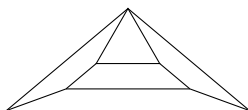
Rozwiązanie zadania M 1823.

Każdy wielokąt możemy podzielić na trójkąty, a każdy trójkąt na trójkąty równoramienne (na przykład opuszczając wysokość do najdłuższego boku trójkąta i potem łącząc spodek tej wysokości ze środkami pozostałych dwóch boków). Zatem wystarczy wskazać podział dowolnego trójkąta równoramiennego ABC ($AB = AC$) na trapezy równoramienne.

Nietrudno znaleźć żądany podział w przypadku, gdy ABC jest równoboczny. Wystarczy ze środka trójkąta poprowadzić trzy półproste równoległe do jego boków.



Jeśli $\angle BAC > 60^\circ$, to możemy go z łatwością podzielić na trójkąt równoboczny i 4 trapezy równoramienne.



Jeśli natomiast $\angle BAC < 60^\circ$, to łącząc wierzchołki tego trójkąta z jego środkiem okręgu opisanego O , uzyskujemy trzy trójkąty, z których dwa są rozwartokątne równoramienne (dla nich stosujemy podział z poprzedniego akapitu) oraz trójkąt równoramienny BOC ($OB = OC$) z kątem przy wierzchołku O równym $2\angle BAC$. Dla tego trójkąta stosujemy wielokrotnie procedurę opisaną w poprzednim lub niniejszym akapicie.



Rozwiązanie zadania M 1824.

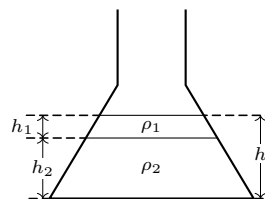
Udowodnimy najpierw, że każda liczba wymierna dodatnia występuje w tym ciągu. Przypuśćmy, że istnieją takie względnie pierwsze liczby p i q , że p/q nie ma w naszym ciągu. Wybierzmy taką parę (p, q) , że $p + q$ jest możliwe najmniejsze. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p > q$ (dowód w drugim przypadku jest analogiczny). Rozważmy parę $(p - q, q)$. Ma ona mniejszą sumę współrzędnych niż (p, q) , istnieje więc takie n , że $a_n = p - q$ i $a_{n+1} = q$. Wówczas $a_{2n+1} = (p - q) + q = p$ oraz $a_{2n+2} = q$. Oznacza to, że $a_{2n+1}/a_{2n+2} = p/q$, i otrzymujemy sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba wymierna, która występuje więcej niż raz w tym ciągu. Wybierzmy taką liczbę p/q , przy czym niech $p + q$ będzie najmniejsze. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $q > p$. Łatwo sprawdzić, że w ciągu (a_n) wyrazy o nieparzystych indeksach są większe od obu swoich sąsiadów. Możemy zatem przyjąć: $a_{2n} = p$, $a_{2n+1} = q$ oraz $a_{2m} = p$, $a_{2m+1} = q$ dla pewnych $m, n \geq 1$. Wówczas $a_n = p$, $a_{n+1} = q - p$ oraz $a_m = p$, $a_{m+1} = q - p$. Oznacza to, że liczba $p/(q - p)$ również występuje wielokrotnie w naszym ciągu oraz $p + (q - p) < p + q$, co jest sprzeczne z wyborem pary (p, q) .



Rozwiązanie zadania F 1123.

Przyjmijmy, że przed i po rozdzieleniu cieczy wypełniają naczynie do wysokości h (objętość pozostaje stała).



Po rozdzieleniu cieczy o większej gęstości, ρ_2 , wypełnia dolną część naczynia do wysokości h_2 , a nad nią powstaje warstwa o grubości h_1 cieczy o gęstości $\rho_1 < \rho_2$. Mamy oczywiście $h_1 + h_2 = h$. Przyjmijmy, że objętości cieczy wynoszą, odpowiednio, V_1 i V_2 . Gęstość mieszaniny przed rozdzieleniem wynosi:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

a ciśnienie na dno:

$$p_p = gh\rho.$$

Po rozdzieleniu cieczy ciśnienie na dno wynosi:

$$p_k = gh_1\rho_1 + gh_2\rho_2.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy:

$$p_p - p_k = g(\rho_2 - \rho_1) \frac{hV_2 - h_2(V_1 + V_2)}{V_1 + V_2}.$$

Niech promień wewnętrznego przekroju naczynia na wysokości h wynosi r , na wysokości powierzchni rozdziału cieczy $r_1 > r$, a dna $R > r_1$. Korzystając ze wzoru na objętość ściętego stożka, otrzymujemy:

$$hV_2 - h_2(V_1 + V_2) = hh_2((Rr_1 + r_1^2 - Rr - r^2) > 0,$$

a więc podczas rozdzielania cieczy (frakcjonowania) maleje ciśnienie na dno naczynia o kształcie ściętego stożka. Opisany proces ma miejsce np. podczas zbierania się śmietanki na powierzchni mleka.



Rozwiązanie zadania F 1124.

Oderwanie pojedynczej cząsteczki z powierzchni ciekłej wody wymaga zerwania jej wiązań ze wszystkimi cząsteczkami wypełniającymi półprzestrzeń na i pod powierzchnią. To połowa wiązań, jakie należałoby zerwać, „wyrwywać” cząsteczkę z obszaru głęboko pod powierzchnią. Ciepło parowania to energia potrzebna do zamienienia ciekłej wody w gaz praktycznie nieoddziałujących cząsteczek, czyli zerwania wszystkich wiązań między cząsteczkami w całej objętości wody. Ponieważ każde wiązanie łączy dwie cząsteczki, to średnio na jedną cząsteczkę przypada pół energii zerwanego wiązania. Wniosek: wyrwanie pojedynczej cząsteczki z powierzchni wody wymaga w przybliżeniu energii równej energii parowania przypadającej na jedną cząsteczkę. Masa molowa wody (H_2O) wynosi $\mu_w = (2 \cdot 1 + 16) g = 18 g$. Otrzymujemy wartość poszukiwanej energii jako:

$$\varepsilon = \frac{L\mu_w}{N_A}.$$

Liczbowo $\varepsilon \approx 6,75 \cdot 10^{-20} \text{ J/cząsteczkę} \approx 0,42 \text{ eV/cząsteczkę}$.



Tertium non datur

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ten odcinek poświęcony jest przedmiotom, które mogą występować jedynie w dwóch rodzajach.

Przykłady są liczne: liczba całkowita jest parzysta lub nieparzysta, niezerowa liczba rzeczywista jest dodatnia lub ujemna, pomiędzy dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi jest nierówność w lewą lub prawą stronę, gra bez remisu kończy się dla jednego z graczy wygraną lub przegraną, moneta ma orla i reszkę, prosta dzieli płaszczyznę na część „lewą” i „prawą”, każdy kij ma dwa końce, każdy medal ma dwie strony i tak dalej, i tak dalej.

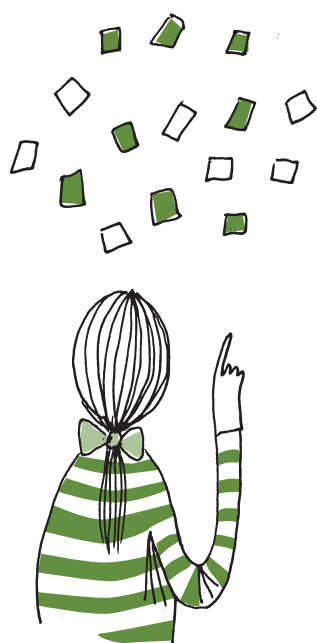
Jeśli mamy trzy przedmioty występujące w dwóch rodzajach, to pewne dwa z nich są tego samego rodzaju. Tu również można mnożyć przykłady: wśród trzech liczb całkowitych znajdują się dwie liczby tej samej parzystości, pośród trzech punktów pomalowanych na czarno lub białą pewne dwa są tego samego koloru, w trzech rzutach monetą co najmniej dwa razy

wypadnie to samo, pośród trzech osób pewne dwie są tej samej płci. . .

Powyższe prawo można uogólnić. Gdy weźmiemy nieparzystą liczbę przedmiotów występujących w dwóch rodzajach, to jeden z rodzajów dominuje – jest go więcej niż drugiego rodzaju (nie może być po tyle samo, bo liczba przedmiotów jest nieparzysta).

Zadania

- Każda z liczb rzeczywistych a, b, c jest większa od iloczynu dwóch pozostałych. Udowodnić, że co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia.
- Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. W $(2n + 1)$ -kącie foremnym pomalowano na beżowo $n + 2$ wierzchołków. Udowodnić, że istnieje co najmniej $n - 1$ par odcinków równoległych o beżowych końcach.
- Każdy punkt okręgu zabarwiono na pomarańczowo lub różowo. Udowodnić, że pewne trzy punkty jednakowego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
- Pięć wierzchołków dwudziestościanu foremnego pomalowano na czerwono, a pozostałe siedem na zielono. Udowodnić, że pewne trzy wierzchołki czerwone wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do prostej wyznaczonej przez pewne dwa wierzchołki zielone.
- Każdy z wierzchołków $3n$ -kąta foremnego, wpisanego w okrąg ω , pomalowano na żółto lub na niebiesko. Udowodnić, że można wskazać n łuków o długości $\frac{1}{3}$ obwodu okręgu ω , z których każdy ma oba końce żółte lub oba końce niebieskie.
- Dowieść, że nie można przeciąć wszystkich trzech boków trójkąta jedną prostą (prosta przecina odcinek, jeśli ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny, różny od jego końców).
- Każdy wierzchołek dwudziestościanu foremnego jest brązowy lub fioletowy. Krawędzie o końcach tego samego koloru pomalowano na seledynowo. Znajdź najmniejszą możliwą liczbę seledynowych krawędzi.
- Danych jest sześć różnych liczb dodatnich: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Niech P_1 będzie prostopadłościanem o wymiarach $a_1 \times b_1 \times c_1$, a P_2 – prostopadłościanem o wymiarach $a_2 \times b_2 \times c_2$. Wykazać, że w jednym z tych prostopadłościanów można wydrążyć tunel, przez który przejdzie drugi prostopadłościan.



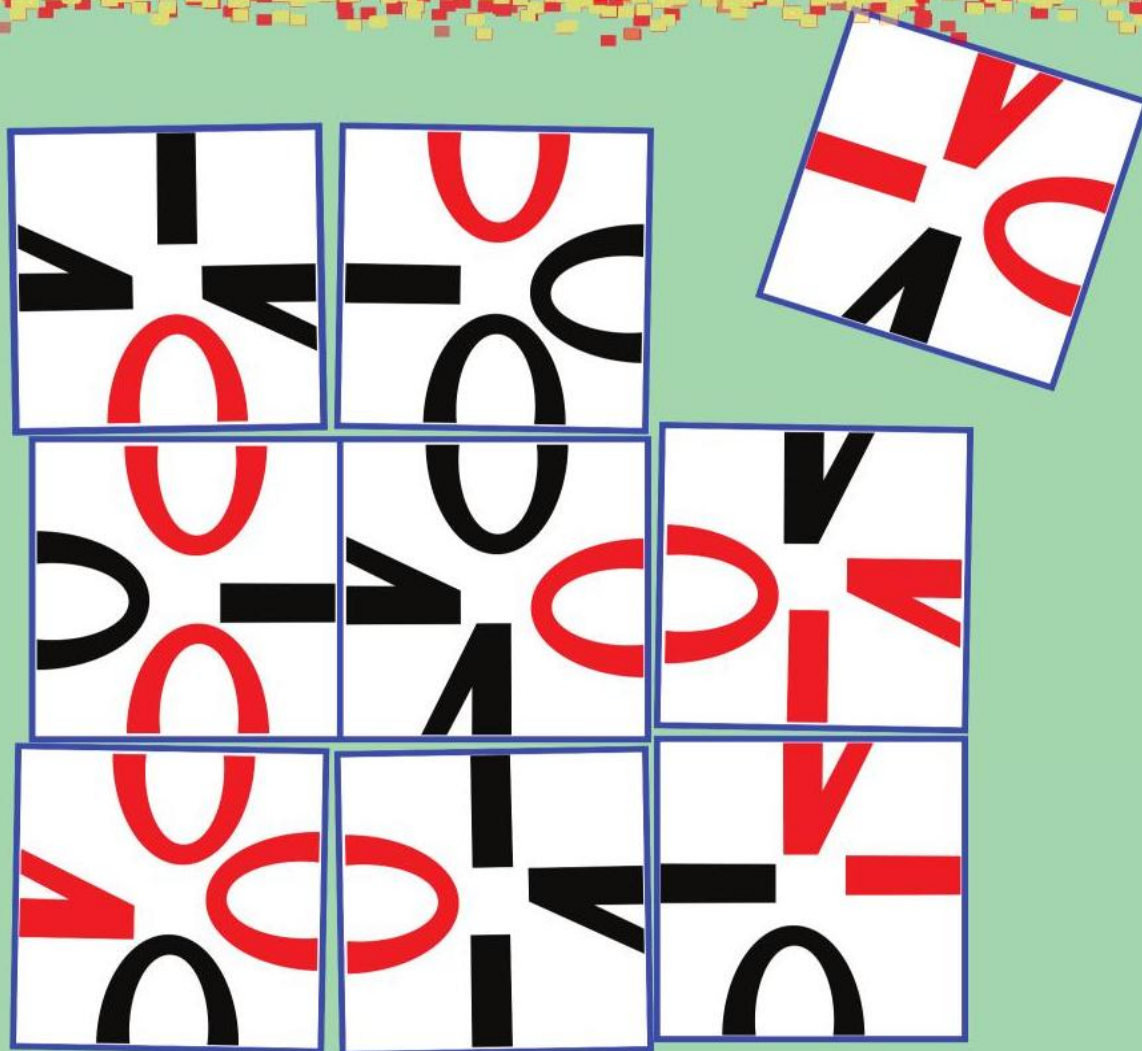
4. Pewna główna przekątna dwudziestościanu ma oba końce zielone. Pięć wierzchołków czerwonych rozmieszczonych jest na dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej przekątnej.
5. Rozważmy trójkąty równoboczne, których wierzchołkami są kolorowe punkty. Każdy z nich ma parę wierzchołków jednakowego koloru.
6. Prosta dzieli płaszczyznę na dwie części.
7. Każda ściana dwudziestościanu ma co najmniej jeden seledynowy bok, a każda seledynowa krawędź należy do dwóch ścian.
8. Rozważmy nierówności $a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2$ (w miejscach * jest < lub >). Pewne dwie z nich są w tę samą stronę.

1. Jeżeli któraś z liczb a, b, c jest zerem, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie pewne dwie z tych liczb mają ten sam znak.
2. Niech O będzie środkiem danego wielokąta. Ustalmy niepokolorowany wierzchołek A . Pozostałe $2n$ wierzchołków wyznacza n odcinków prostopadłych do OA . Pewne dwa z nich mają oba końce beżowe.
3. Każde trzy wierzchołki pięciokąta foremnego wyznaczają trójkąt równoramienny.

Wskazówki do zadań

68. SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

NA KONCU NIE ZAWSZE JEST ODPOWIEDZ



termin: 22 - 25 SIERPNIA 2025

miejsce: GLIWICE

