



deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

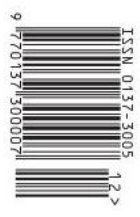
$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 12 (619) 2025

CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

O dyfemorficznym lepieniu
pierniczeków
str. 6



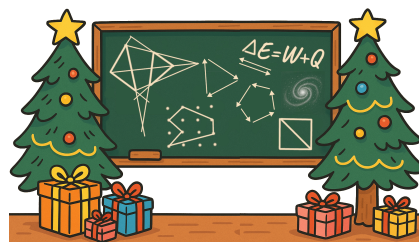
Nakład: 2700 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 12 (619) 2025

Skąd wiedzieć, że czegoś nie ma? <i>Tomasz Janiszewski</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Polując na neutrino, czyli z pamiętnika fizyka. Dzień trzeci <i>Joanna Żalipska</i>	str. 4
O dyfeomorficznym lepieniu pierniczków <i>Zofia Grochulska</i>	str. 6
Drzewo, jakie jest, każdy widzi <i>Radost Waszkiewicz i Jan Turczynowicz</i>	str. 9
O pewnej konkurencji, w której parabola nie ma równych sobie <i>Katarzyna Domańska</i>	str. 12
47. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego <i>Andrzej KomisarSKI</i>	str. 14
 Jaka suma? <i>Marta Fikus-Kryńska</i>	str. 15
Sprawiedliwe podziały grafów <i>Zbigniew Lonc, Paweł Rzążewski</i>	str. 16
 Heron, Heron, po trzykroć Heron <i>Bartłomiej Pawlik</i>	str. 20
Nietypowy wzór na pole <i>Patryk Ragan</i>	str. 21
Klub 44	str. 21
 Prosto z nieba: Ślad dawnego życia na Marsie?	str. 22
 Niebo w grudniu	str. 23
 Nierówność Muirheada <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

Zapraszamy na Świąteczny Maraton Wykładowy!



Wydział Fizyki UW, 13 grudnia 2025, godzina 16:00
szczegóły na stronie deltami.edu.pl/maraton2025

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.
www.ado.com.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Skąd wiedzieć, że czegoś nie ma?

Tomasz JANISZEWSKI

Zapewne każdy Czytelnik ma konto w jakimś systemie bądź serwisie internetowym. Czasem to systemy automatycznie nadają nam identyfikator (nazywany też *loginem*), innym razem możemy wybrać go samodzielnie. Niezależnie od metody identyfikator musi być unikatowy. Dlatego jeśli samodzielnie możemy zaproponować swój login, to system sprawdza i informuje nas, czy jest on dostępny. Z perspektywy użytkownika to nic niezwykłego – zwykle sprawdzenie, czy dany element figuruje w bazie. Co więcej, wiemy, że elementy w tej bazie są unikalne. Jednak choć proste podejście może działać w małych zbiorach, w skali globalnych sieci społecznościowych problem staje się znacznie bardziej złożony.

W 2019 roku Gmail obsługiwał ponad półtora miliarda kont. W 2023 roku Facebook raportował prawie 3 miliardy aktywnych użytkowników miesięcznie. Gdy pomyślimy, jak w takiej liczbie loginów zapewnić ich unikalność, sprawa przestaje być trywialna. Spróbujmy oszacować, ile miejsca zajmują takie dane. Zakładając, że login składa się wyłącznie ze znaków alfanumerycznych, a jego średnia długość wynosi N , to otrzymujemy $3 \times 10^9 \times N$ znaków. Przy przechowywaniu wszystkich identyfikatorów jako zwykłe ciągi znaków daje to około $3 \times N$ GB danych.

Większość informatyków zna struktury danych, takie jak drzewa czy tablice asocjacyjne, które umożliwiają wydajne zarządzanie zbiorami – odpowiadając na

pytanie, czy dany element należy do zbioru, oraz pozwalając go dodawać i usuwać. O ile takie struktury optymalizują koszt dostępu, to ceną za to jest zwiększone zapotrzebowanie na pamięć.

W zarządzaniu projektami często mówi się o triadzie: czas, zakres, koszt – z których można zoptymalizować tylko dwie wartości jednocześnie. W potocznym rozumieniu: szybko, dobrze i tanio, ale nie możemy mieć wszystkiego na raz. Typowe struktury danych najczęściej optymalizują czas i koszt, zachowując stały zakres, czyli gwarancję, że dane nie zostaną utracone. A co by było, gdybyśmy zgodzili się na niewielki kompromis: pozwolili strukturze odpowiadać na pytanie o obecność elementu z pewnym marginesem niepewności? Innymi słowy, zaakceptowali odpowiedzi w rodzaju: „na pewno nie” albo „być może tak”.

W przypadku nazw użytkowników takie podejście jest akceptowalne. Jeśli system zasugeruje, że login być może jest już używany, użytkownik po prostu wymyśli inny. Tak długo, jak poziom pewności będzie wysoki, nikt nie zauważy różnicy.

Struktury, które optymalizują czas i koszt, poświęcając zakres, nazywamy probabilistycznymi strukturami danych. Jedną z nich jest filtr Blooma, zaprojektowany w 1970 roku przez Burtona Blooma. Filtr ten odpowiada na pytanie, czy element na pewno nie znajduje się w zbiorze.

Funkcja skrótu (inaczej funkcja mieszająca lub haszująca) to funkcja, która dla zadanej wartości przyporządkowuje jej jakąś liczbę z ograniczonego przedziału – *skróót*. Na przykład ciąg znaków zamienia na liczbę naturalną mniejszą od 100. Oczekujemy przy tym, że funkcja skrótu będzie zachowywała się „losowo” – drobna zmiana wartości wejściowej powoduje „niekontrolowaną” zmianę przypisanego skrótu.

Filtr Blooma wykorzystuje tablicę bitów i zestaw funkcji skrótu. Podstawowa koncepcja przypomina tablice asocjacyjne, ale zamiast zapisywać każdy element pod wskazanym indeksem i rozwiązywać kolizje, filtr używa kilku różnych funkcji skrótu.

Formalnie, filtr Blooma składa się z tablicy bitów o rozmiarze m oraz k funkcji skrótu $(f_1, \dots, f_k)$, które zwracają wartości z zakresu $[0, m - 1]$. Na początku wszystkie bity w tablicy są ustawione na 0. Gdy dodajemy nowy element, obliczamy jego skróty i ustawiamy bity na odpowiednich pozycjach w tablicy na 1, tj. jeśli $f_i(x) = j$, to ustawiamy wartość j -tego bitu na 1. Sprawdzanie obecności elementu również zaczynamy od obliczenia wartości wszystkich k funkcji skrótu. Jeśli choć jeden z odpowiadających im bitów ma wartość 0, możemy z całą pewnością stwierdzić, że elementu nie ma w zbiorze. Jeśli wszystkie wskazane bity są ustawione na 1, nie możemy być pewni odpowiedzi – element może być obecny lub może to być wynik kolizji.

Zobaczmy przykład działania filtru Blooma – do początkowo pustego zbioru dodajemy kilka elementów.

element	f_1	f_2	f_3	filtr Blooma
				00000000000000
xyz	2	7	12	00100001000001
abc	7	4	0	10101001000001
foo	10	1	5	1110110100101
bar	12	0	7	1110110100101

Jak widzimy, powyższy algorytm jest bardzo prosty, a przy odpowiednim doborze funkcji skrótu i parametrów również efektywny w implementacji.



Pozwala także zaoszczędzić bardzo dużo pamięci, gdyż zamiast przechowywać pełne dane – utrzymujemy tylko tablicę bitów. Złożoność dodawania i sprawdzania, czy element należy do zbioru, to $O(k)$, gdzie k jest liczbą użytych funkcji skrótu. Warto zauważyć, że rozmiar użytej pamięci nie zależy od samych danych, a jedynie od zbioru wartości funkcji skrótu $[0, m - 1]$. Jednak wraz ze wzrostem liczby elementów zbioru (n) rośnie liczba bitów o wartości 1, a więc również prawdopodobieństwo p odpowiedzi fałszywie pozytywnej. Natomiast nigdy nie pojawiają się fałszywie negatywne.

Spróbujmy teraz oszacować, jak duża powinna być tablica bitów i ile funkcji skrótu należy użyć, aby zapewnić odpowiednio wysoką precyzję, czyli odpowiednio niskie prawdopodobieństwo p . Załóżmy, że dodajemy nowy element x do zbioru i obliczamy jego skróty. Dla pierwszej funkcji skrótu f_1 , dowolnego innego elementu y ze zbioru oraz wybranej funkcji f_j prawdopodobieństwo, że $f_1(x) = f_j(y)$, wynosi $\frac{1}{m}$, gdzie m to rozmiar tablicy bitów. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem $1 - \frac{1}{m}$ bit $f_1(x)$ nie koliduje z $f_j(y)$. Jeśli w naszym zbiorze mamy n elementów i dla każdego obliczyliśmy k funkcji skrótu, to z niezależności wartości funkcji skrótu otrzymujemy, że z prawdopodobieństwem $(1 - \frac{1}{m})^{nk}$ bit $f_1(x)$ nie koliduje z żadnym z n elementów zbioru, a więc z prawdopodobieństwem $1 - (1 - \frac{1}{m})^{nk}$ bit $f_1(x)$ był już wcześniej ustawiony na 1. Skoro używamy k niezależnych funkcji skrótu, to prawdopodobieństwo, że wszystkie obliczone bity $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ są już ustawione na 1, wynosi

$$(1) \quad p = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{nk}\right)^k.$$

Zastanówmy się, czy możemy w jakiś łatwy sposób oszacować to prawdopodobieństwo. Jako że szukamy dobrej struktury danych dla bardzo dużych zbiorów, możemy rozpatrywać przypadek graniczny, w którym $m \rightarrow \infty$. Wytrawny Czytelnik na pewno widzi pewne podobieństwo między wzorem (1) a jedną z fundamentalnych własności liczby e , a konkretnie

$$e^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m.$$

Zapisując

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{nk} = \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{nk}{m}} \approx (e^{-1})^{\frac{nk}{m}} = e^{-\frac{nk}{m}},$$

możemy oszacować $p \approx (1 - e^{-\frac{nk}{m}})^k$.

Aby odpowiedzieć sobie na pytanie, ilu funkcji skrótu potrzebujemy, należy zastanowić się, jakiego prawdopodobieństwa odpowiedzi fałszywie pozytywnej (p) oczekujemy, oraz oszacować liczbę elementów w zbiorze (n) i dostępny rozmiar tablicy (m), w której zaimplementujemy filtr Blooma. Wyznamy najpierw minimum funkcji $p(k)$ dla ustalonej wartości stosunku $\frac{m}{n}$. Mamy:

$$p(k) \approx \left(1 - e^{-\frac{nk}{m}}\right)^k = e^{\ln\left(1 - e^{-\frac{nk}{m}}\right)^k} = e^{k \ln\left(1 - e^{-\frac{nk}{m}}\right)}.$$

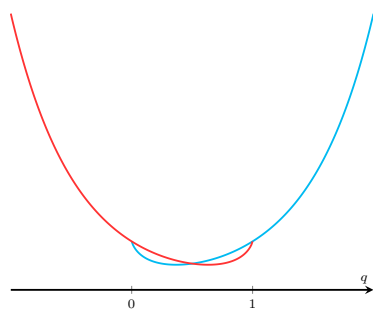
Wystarczy teraz przyrównać do 0 pochodną wykładnika w wyrażeniu po prawej stronie powyższej równości (tzn. logarytmu naturalnego z funkcji $p(k)$):

$$\left(k \ln\left(1 - e^{-\frac{nk}{m}}\right)\right)' = \ln\left(1 - e^{-\frac{nk}{m}}\right) + k \frac{\frac{n}{m} e^{-\frac{nk}{m}}}{1 - e^{-\frac{nk}{m}}}.$$

Zamiast szukać miejsca zerowego pochodnej dla dodatniego k , wygodniej jest podstawić $q = e^{-\frac{nk}{m}}$, czyli $\ln q = -\frac{nk}{m}$. Wtedy otrzymujemy do rozwiązania równanie:

$$\ln(1 - q) - \frac{q}{1 - q} \ln q = 0,$$

dla q należącego do przedziału $(0, 1)$.



Porównanie funkcji q^q oraz $(1-q)^{1-q}$

Powyższe równanie możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}(1-q) \ln(1-q) - q \ln q &= 0, \\ \ln((1-q)^{1-q}) - \ln(q^q) &= 0, \\ \ln\left(\frac{(1-q)^{1-q}}{q^q}\right) &= 0, \\ \frac{(1-q)^{1-q}}{q^q} &= 1, \\ (1-q)^{1-q} &= q^q.\end{aligned}$$

Ponieważ funkcje q^q oraz $(1-q)^{1-q}$ są symetryczne względem punktu $\frac{1}{2}$, otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$, czyli $e^{-\frac{nk}{m}} = \frac{1}{2}$, co oznacza, że $p(k)' = 0$ dla $k = \frac{m}{n} \ln 2$.

Co więcej, Czytelnik łatwo uzasadni widoczny na rysunku fakt, że dla $0 < q < \frac{1}{2}$ mamy $q^q < (1-q)^{1-q}$, zaś dla $\frac{1}{2} < q < 1$ zachodzi $q^q > (1-q)^{1-q}$. Oznacza to, że dla $q < \frac{1}{2}$ (czyli $k > \frac{m}{n} \ln 2$) mamy $p(k)' > 0$ i podobnie dla $k < \frac{m}{n} \ln 2$ mamy $p(k)' < 0$. Stąd wnioskujemy, że dla $k = \frac{m}{n} \ln 2$ funkcja p osiąga swoje minimum.

Ponieważ jesteśmy w stanie uzależnić optymalną liczbę funkcji skrótu k od $\frac{m}{n}$, nic nie stoi na przeszkodzie, aby obliczyć, jakiego rozmiaru tablicy potrzebujemy do przechowania n elementów z zadaniem prawdopodobieństwem odpowiedzi fałszywie pozytywnej p :

$$\begin{aligned}p &= \left(1 - e^{-n \frac{m}{n} \ln 2}\right)^{\frac{m}{n} \ln 2} = 2^{-\frac{m}{n} \ln 2}, \\ m &= \frac{n}{\ln 2} \log_{\frac{1}{2}} p.\end{aligned}$$

Dla naszego przykładu, w którym Facebook sprawdza loginy $n = 3 \times 10^9$ użytkowników, jeśli chcemy uzyskać $p = 0,001$, to potrzebujemy zaledwie $k = 10$ funkcji oraz raptem $m \approx 5\text{GB}$ danych.

Jak widać na powyższym przykładzie, filtr Blooma pozwala znacząco zmniejszyć zużycie danych oraz utrzymać stały czas odpowiedzi, o ile jesteśmy w stanie zaakceptować pewien margines błędu.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1837. W kwadracie $\mathcal{K}$ dany jest wielokąt wypukły $\mathcal{P}$ o tej własności, że niezależnie od tego, jak dwie kopie $\mathcal{P}$ umieścimy w $\mathcal{K}$, zawsze mają one wspólny punkt. Udowodnić, że dowolne trzy kopie $\mathcal{P}$ umieszczone w $\mathcal{K}$ mają również wspólny punkt.

M 1838. Dana jest liczba całkowita $n > 0$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$. Udowodnić, że istnieją takie liczby naturalne $m, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^n a_i \right| \leq |a_k|.$$

M 1839. Niech $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych n . Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $\omega(an + c) \geq \omega(bn + c)$.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1133. Jakie czynniki decydują o wartości prędkości u , z jaką gazy są wyrzucane z dyszy pracującego silnika raketowego? Oszacuj wartość tej prędkości.

F 1134. Jaka część początkowej masy rakiety, m_0 , musi stanowić paliwo, żeby startując w przestrzeni kosmicznej z dala od źródeł pola grawitacyjnego (gwiazd i planet), rakieta osiągnęła prędkość równą I prędkości kosmicznej, tj. $v_1 \approx 8 \text{ km/s}$, jeżeli prędkość wyrzucanych gazów $u = 4 \text{ km/s}$?



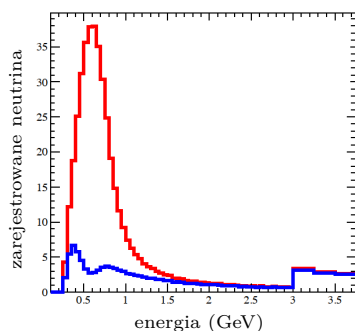
Rozwiązania na str. 24

Polując na neutrino, czyli z pamiętnika fizyka

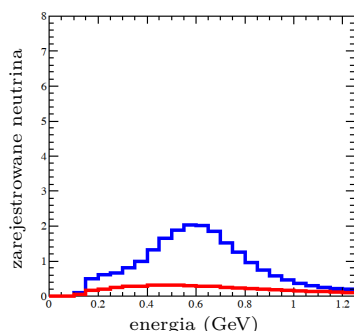
Dzień trzeci

*Narodowe Centrum Badań Jądrowych,
Departament Badań Podstawowych,
Zakład Fizyki Wielkich Energii

Pierwsza i druga część pamiętnika zostały
opublikowane w Δ_{25}^3 oraz Δ_{25}^6



Rys. 1. Mod znikania. Rozkład energii neutrin mionowych. Na czerwono zaznaczono rozkład neutrin mionowych, jakiego spodziewalibyśmy się, gdyby nie było oscylacji neutrin. Na niebiesko przedstawiony jest zaobserwowany rozkład neutrin mionowych – część z nich uległa oscylacji i zmieniła się w neutrino innego typu



Rys. 2. Mod pojawiania się. Rozkład energii neutrin elektronowych. Na czerwono zaznaczono rozkład neutrin, jakiego spodziewalibyśmy się, gdyby nie było oscylacji neutrin. Na niebiesko przedstawiony jest zaobserwowany rozkład neutrin – w drodze pomiędzy detektorami część neutrin mionowych zmieniła się w neutrino elektronowe

O oscylacjach neutrin pisał Wiktor
Matyszkiewicz w Δ_{24}^{10} .

Joanna ZALIPSKA*

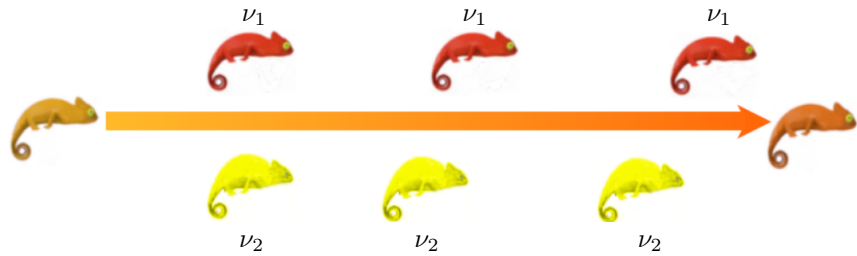
Dzisiaj ważny dzień, zaczynamy kolejny *run* z wiązką neutrin z eksperymentu T2K (runem fizycy nazywają kolejny etap zbierania danych). Po drugiej stronie wyspy w laboratorium J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex), w Tokai uruchamiają akcelerator i dostrajają wiązkę. Najpierw uruchomiony zostanie główny pierścień akceleratora, gdzie przyspiesza się protony. Będą one krążyć w pierścieniu, aż osiągną energię 30 GeV. Protony przyspieszane są w polu elektrycznym, natomiast pole magnetyczne zakrzywia ich tor lotu. Protony wielokrotnie okrążają pierścień akceleratora i przy każdym obiegu są przyspieszane, uzyskując coraz większy pęd. Następnie wiązka protonów wyprowadzana jest z akceleratora i kierowana na węglową tarczę. Protony, zderzając się z atomami tarczy, produkują naładowane dodatnio i ujemnie piony oraz kaony. Odpowiedni znak ładunku pionów (dodatni albo ujemny) można wybrać, sterując polem magnetycznym. Jeśli wybierzemy piony dodatnie, to ostatecznie po odbiciu od tarczy dostaniemy wiązkę neutrin mionowych pochodzących z rozpadu pionu, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Natomiast jeśli zostaną wybrane piony ujemne, to powstanie wiązka antyneutrin mionowych, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

Jakieś 280 metrów od wspomnianej tarczy węglowej znajdują się tzw. bliskie detektory. W ostatnich dniach panowała tam „gorąca atmosfera” w związku ze zbliżającym się rozpoczęciem zbierania danych. Wszystkie podzespoły detektorów musiały zostać uruchomione i przejść kalibrację. Zadaniem bliskich detektorów jest mierzenie strumienia neutrin mionowych (lub antyneutrin mionowych) blisko miejsca produkcji, zanim jeszcze zdążą zmienić swoją tożsamość. Dostarczają one ważnych informacji o rodzajach/typach oddziaływań neutrin mionowych z materią i pozwalają je dobrze opisać przez modele teoretyczne.

Ja z kolei czekam na przybywającą wiązkę neutrin w odległym o jakieś 294 km od J-PARC detektorze Super-Kamiokande, który odgrywa rolę tzw. dalekiego detektora. W czasie podróży neutrin mionowych ubywa z wiązki, a za to pojawiają się w niej neutrino taonowe i elektronowe. Gdy już uzyskamy dane z obu detektorów, porównamy je i sprawdzimy dwie rzeczy. Po pierwsze, ile neutrin mionowych z oryginalnej wiązki zniknęło po drodze (to jest tzw. mod znikania, rys. 1). Sprawdzamy, czy neutrino mionowe znikają z równym prawdopodobieństwem co antyneutrino mionowe. Ta obserwacja pozwala nam na badanie tzw. symetrii CPT (*charge-parity-time*, ładunek-parzystość-czas). Cóż to jest? Wyobraźmy sobie, że klonujemy nasz Wszechświat i możemy na jego klonie dokonywać pewnych operacji i sprawdzać, jak wpływają one na wyniki eksperymentów. Operacja C to zamiana wszystkich cząstek na ich antycząstki. Przekształcenie P oznacza odbicie lustrzane przestrzeni (które zamienia np. śrubę prawoskrętną na lewoskrętną). Natomiast T odwraca kierunek upływu czasu – zamienia przeszłość z przyszłością. Mówimy, że operacja jest symetrią, jeżeli nie wpływa na wyniki eksperymentów. Wiadomo, że operacje C, P i T w ogólności nie są symetriami. Jednak złożenie tych trzech operacji, czyli CPT, według naszej współczesnej wiedzy powinno już być symetrią. Oznacza to, że jeżeli w klonie naszego Wszechświata jednocześnie zamienimy wszystkie cząstki na antycząstki, dokonamy odbicia lustrzanego przestrzeni i zmienimy kierunek upływu czasu na przeciwny, to wyniki wszystkich możliwych eksperymentów powinny być takie same jak w naszym Wszechświecie. Badając neutrino i antyneutrino mionowe, stwierdziliśmy, że w eksperymentach takiego typu jak nasz symetria CPT jest zachowana.

Po drugie, sprawdzamy, ile nowych neutrin elektronowych pojawiło się w drodze od bliskiego do dalekiego detektora, czyli badamy oscylacje neutrin (to jest tzw. mod pojawiania się, rys. 2). Okazuje się bowiem, że znaczna część neutrin mionowych zmieniła swoją tożsamość na neutrino taonowe, a część na neutrino elektronowe.

Ale jak to się dzieje? Oscylacje neutrin są konsekwencją tego, że stany własne zapachu neutrin nie są tożsame z ich stanami masy. Trochę to pogmatwane, więc żeby to wytłumaczyć, posłużę się... kameleonami.



Wyobraźmy sobie jasnopomarańczowego kameleona. Reprezentuje on neutrino mionowe. Dla uproszczenia założmy, że zbudowany jest z dwóch neutrin o różnych masach, ν_1 i ν_2 (tak naprawdę mamy 3 stany masy: ν_1 , ν_2 i ν_3), reprezentowanych przez czerwonego i żółtego kameleona. Wszystkie kameleony mają do pokonania pewną drogę długości L . Ponieważ kameleony czerwone i żółte mają inne masy, kameleony czerwone idą szybciej, a kameleony żółte idą wolniej. Po pewnym czasie do celu dotrze więcej kameleonów czerwonych niż żółtych. W rezultacie da nam to ciemnopomarańczowego kameleona reprezentującego neutrino elektronowe.

To zjawisko (oscylacji neutrin, a nie kameleonów) pozwala nam badać symetrię CP, czyli odpowiedzieć na pytanie, czy prawdopodobieństwo przemiany dla neutrin i anty-neutrin jest takie samo ($P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$). Pytanie to obecnie nurtuje fizyków cząstek, poszukujemy procesów, które są inne dla cząstek i anty-cząstek. Pierwsze dane z eksperymentu T2K wskazują na łamanie symetrii CP, jakkolwiek statystyka zebranych danych jest zbyt niska, żeby wyciągnąć ostateczny wniosek. Sytuacja nie jest taka prosta, ponieważ nie wiemy również, czy trzecie neutrino jest lżejsze, czy też cięższe od pozostałych (tzw. problem hierarchii mas). W zależności od tego, z którym scenariuszem mamy do czynienia, będzie to nam modyfikowało oscylacje neutrin i antyneutrin. Na podstawie wyników tylko z T2K trudno jest rozwikłać tę zagadkę. W rozwiązaniu problemu może pomóc inny eksperyment: Nova, prowadzony w Stanach Zjednoczonych, który wysyła neutrina na dalszą odległość (aż 810 km). Tutaj oddziaływanie z materią, przez którą podróżują neutrina, może prowadzić do rozwikłania problemu degeneracji hierarchii mas i łamania CP.

Hierarchia mas neutrin odnosi się do kolejności trzech stanów mas neutrin (ν_1 , ν_2 i ν_3). Istnieją dwie możliwe hierarchie: hierarchia normalna (NH, $m_1^2 < m_2^2 < m_3^2$), w której ν_3 jest najcięższe, oraz hierarchia odwrotna (IH, $m_3^2 < m_1^2 < m_2^2$), w której ν_3 jest najlżejsze. Obecnie nie wiemy, ile waży neutrino, natomiast w eksperymentach oscylacyjnych wyznaczamy kwadraty różnicy mas. Problem hierarchii mas do dzisiaj nie jest rozwiązany. Wiemy jedynie tyle, że $m_1^2 < m_2^2$.

Już po mojej szychcie. Kolejna osoba przejęła dyżur przy eksperymencie T2K. Teraz monitorowanie danych odbywa się zdalnie z Europy. W międzyczasie kilkakrotnie włączano i wyłączano wiązkę podczas jej dostrajania. Ale ruszyło. Lecą do nas neutrina.

Dzień czwarty

Kolejny dzień: Zbieramy dane z wiązki T2K wysyłanej z odległego o 294 km laboratorium. Na każdą wysłaną z akceleratora J-PARC paczkę cząstek czeka detektor Super-Kamiokande. Jeśli neutrino zaiskrzy w detektorze, to taki przypadek się odnotowuje. Ale oczywiście w międzyczasie nie przestajemy prowadzić normalnych obserwacji. Systemy wyzwalania dla rejestracji zarówno neutrin atmosferycznych, jak i tych pochodzących ze Słońca wciąż działają. W każdej chwili detektor jest więc gotowy na zarejestrowanie neutrin z niespodziewanego wybuchu supernowej, gdyby takie miało miejsce.

Zbliża się konferencja Neutrino 2024 – najważniejsza konferencja dla fizyków neutrin. Dzisiaj wieczorem wysłuchamy próbnej prezentacji najnowszych wyników T2K i ich analizy.

Chcąc odpowiedzieć na palące pytania fizyki neutrin – takie jak symetria CP i hierarchia mas neutrin – łączymy siły i przeprowadzamy zbiorcze analizy danych z dwóch eksperymentów akceleratorowych, T2K i Nova, i jednocześnie analizujemy dane T2K i neutrin atmosferycznych w Super-Kamiokande. Każdy



z tych eksperymentów jest czuły na inne efekty. Na przykład nasz eksperyment T2K jest lepszy w mierzeniu symetrii CP. Eksperyment Nova przesyła wiązkę neutrin na zdecydowanie większą odległość i w związku z tym jest w stanie lepiej badać wpływ materii (dosłownie Ziemi) na neutrino – a to daje nam większą szansę na uzyskanie odpowiedzi, z którą hierarchią mas mamy do czynienia. Ale nawet Nova nie może się równać z badaniami neutrin atmosferycznych, które mogą przenikać do detektora z drugiej strony kuli ziemskiej po przejściu przez planetę (12 742 km). Warto też podkreślić fakt, że połączenie sił eksperymentów T2K i Nova zwiększa dwukrotnie statystykę zebranych danych, których nie mamy tak dużo, ponieważ neutrino bardzo rzadko oddziałują z materią.

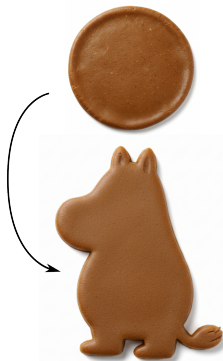
Dotychczasowe ustalenia nie dają jednak ostatecznych odpowiedzi. Pierwsze dwa eksperymenty T2K i Nova sugerują złamaną symetrię CP i odwróconą hierarchię mas. Badania neutrin atmosferycznych z kolei sugerują normalną hierarchię mas. Jakkolwiek statystyczna istotność tych wyników jest jeszcze niska. Potrzeba więcej danych, czyli więcej zarejestrowanych przypadków neutrin w dalekim detektorze.

Eksperymenty T2K, Nova, Super-Kamiokande nadal zbierają dane, więc możemy oczekiwać nowych wyników w niedalekiej przyszłości. Ponadto budowane są nowe eksperymenty: DUNE w Stanach Zjednoczonych oraz Hyper-Kamiokande w Japonii. Wierzmy, że pozwolą nam na rozwikłanie opisanych tu zagadek.

O dyfeomorficznym lepieniu pierniczków

Zofia GROCHULSKA*

* Uniwersytet w Jyväskylä



Wyobraźmy sobie, że bierzemy do ręki naszą ulubioną foremkę w kształcie Muminka i wycinamy nią pierniczek. Muminek, jak wiemy, ma dość obłe kształty (podobno ich autorka, Tove Jansson, podczas tworzenia rysunków tych postaci inspirowała się kształtem zasp śnieżnych; fińskie lasy zimą zdają się roić od Muminków). Gdybyśmy nie mieli odpowiednich foremek, a bardzo chcieli mieć pierniczek w kształcie Muminka, moglibyśmy wyciąć szklanką kółko i zdeformować je do kształtu tego sympatycznego bohatera dziecięcych opowieści. Innymi słowy, znaleźlibyśmy funkcję f , która przekształca koło (dwuwymiarową kulę) na pewien obszar (dwuwymiarowego Muminka). Możemy wykonać to przekształcenie na wiele sposobów, ale na potrzeby naszej opowieści lepiej będzie zamienić koło w Muminka w sposób *dyfeomorficzny*.

Dyfeomorfizm to przekształcenie o wielu cechach pożądanых z punktu widzenia analizy matematycznej: jest odwracalne (czyli istnieje przekształcenie odwrotne) oraz zarówno ono samo, jak i jego odwrotność są różniczkowalne. Przegryźmy tę definicję powoli, jakby to był ostatni pierniczek w tym roku. Żeby przekształcenie było odwracalne, każde dwa różne punkty ciasta muszą zostać przekształcone na dwa różne punkty (muminkowego) ciasta. Innymi słowy, nie wolno nam sklejać ze sobą kawałków ciasta. Wówczas będziemy mogli, po uformowaniu Muminka, wykonać ruchy odwrotne do wcześniejszych i wrócić do pierwotnego kształtu koła. Różniczkowalność to trochę trudniejsze słowo, znane licealistom przygotowującym się do matury rozszerzonej. Nie będziemy tu przytaczać definicji, spróbujemy natomiast opisać, jak wygląda takie przekształcenie, które jest różniczkowalne (i którego odwrotność również taka jest). Otóż takie przekształcenie wygląda trochę jak Muminek – jest

obłe, pełne krągłości, nie przyczynia się do powstawania kantów ani szpiczastych elementów (zaokrągła, choćby delikatnie, nawet muminkowe uszy!). Biorąc to wszystko pod uwagę, możemy stwierdzić, że jeśli uformujemy Muminka z kółka poprzez rozciąganie ciasta w odpowiednich miejscach, to deformacja koła w Muminka będzie dyfeomorfizmem. Co więcej, w podobny sposób możemy przekształcić koło na kształt płaskiej Małej Mi lub płaskiego Ryjka.

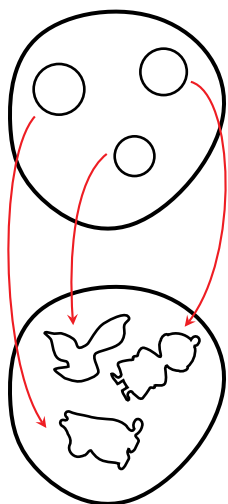
Musimy uściślić jeszcze pewną cechę dyfeomorfizmów. Dyfeomorfizmy możemy podzielić na zachowujące orientację i odwracające orientację. Wyobraźmy sobie, że nasze ciastowe kółko z wierzchu pomalowane jest na różowo, a od spodu na niebiesko. Jeśli przekształcimy kółko dyfeomorficznie w Muminka tak, że przód Muminka będzie różowy, to będzie to dyfeomorfizm zachowujący orientację. Jeśli natomiast nasz dyfeomorfizm wypłyje Muminka, którego przód jest niebieski, oznacza to, że

mieliśmy do czynienia z dyfeomorfizmem odwracającym orientację. Zastanówcie się, proszę, jaki dyfeomorfizm wyobraziliście sobie, gdy w poprzednich akapitach zamienialiście kółko w Muminka? No właśnie – od teraz trzymajmy się jedynie dyfeomorfizmów zachowujących orientację.

Wyobraźmy sobie dwa identyczne, okrągławe placki rozwałkowanego ciasta. Na jednym z nich zaznaczamy szklanką trzy nieprzecinające się kółka, a na drugim odciskamy foremką kształty Muminka, Małej Mi i Ryjka (które się również nie przecinają). Wiemy, że każde kolejne kółko możemy przekształcić dyfeomorfizmem na odpowiedni kształt. A czy znajdziemy dyfeomorfizm przekształcający cały lewy placek ciasta na prawy placek ciasta tak, aby wszystkie

trzy kółka zostały jednocześnie przekształcone na odpowiadające im kształty? Dorzućmy do tego jeszcze jeden warunek: szukamy takiego dyfeomorfizmu, który nie będzie od nas wymagał ruszania ciasta w okolicy brzegu naszego ciastowego placka.

Ci z nas, którzy nie mają pod ręką rozwałkowanego ciasta ani foremek do pierniczek, muszą wyteńczyć swoją wyobraźnię: Czy na moim wymyślnym stole uda się tak porozciągać to ciasto, żeby powstały trzy żądane kształty jednocześnie? I to tak, żeby nie rozciągać ciasta przy brzegu? Czy udałoby się to na takim prawdziwym, kuchennym stole, na którym wycinamy pierniczki z mąki, masła i miodu? Nie wiem. Ale na wymyślnym stole w mojej lub Twojej głowie się uda.



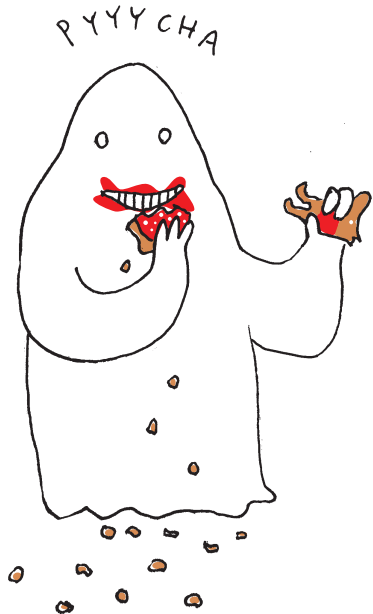
Sformułujmy to pytanie trochę precyzyjniej, bo używając Muminka, Małej Mi i Ryjka, daleko nie zajedziemy. Nasz placek rozwałkowanego ciasta symbolizuje zbiór otwarty U (który jest podzbiorem płaszczyzny); kółka to będą zbiory D_i (w naszym przykładzie $i = 1, 2, 3$), a kształty Muminka, Małej Mi i Ryjka oznaczmy D'_i ($i = 1, 2, 3$). Zbiory D_i są parami rozłączne, zbiory D'_i są parami rozłączne, ale może się zdarzyć tak, że jakiś zbiór D_i przetnie jakiś zbiór D'_j . Niech F_i będzie dyfeomorfizmem przekształcającym D_i na D'_i . Przypominam, że ustaliliśmy już, że umiemy skonstruować każdy z tych dyfeomorfizmów, przekształcający jedno konkretne kółko na jeden konkretny kształt. Naszym zadaniem jest znalezienie dyfeomorfizmu F przekształcającego U na U , o następujących własnościach:

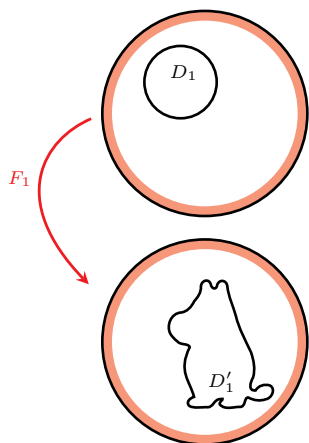
- $F = F_i$ na D_i (czyli F pokrywa się z już znalezionymi dyfeomorfizmami F_i na każdym z kółek D_i),
- $F(x) = x$ w okolicy brzegu U (czyli dyfeomorfizm F nic nie zmienia na pewnym cienkim pasku wokół brzegu placka U , zatem jest tam *identycznością*).

W znalezieniu powyższego dyfeomorfizmu F są dwie trudności. Po pierwsze taki dyfeomorfizm będzie *przedłużeniem* każdego z dyfeomorfizmów F_i . Przedłużenie dyfeomorfizmu F_i oznacza nowy dyfeomorfizm, określony na trochę większym kółku (niż to kółko, na którym określiliśmy F_i), który pokrywa się z F_i na wyjściowym kółku. Wracając do naszej pierniczkowej metafory, powiemy, że chodzi o znalezienie deformacji, która w dokładnie ten sam sposób rozciąga ciasto w muminkowy kształt na wyjściowym kółku oraz kontynuuje rozciąganie tego ciasta poza granicami wyjściowego kółka. Co ważne, chcemy kontynuować rozciąganie tego ciasta w sposób dyfeomorficzny! Znajdowanie przedłużeń dyfeomorfizmów nie jest zadaniem łatwym. Co więcej, są dyfeomorfizmy, których nie da się przedłużyć, choćbyśmy nie wiem jak bardzo tupali nóżką. Dlatego też będziemy zakładać, że wszystkie nasze dyfeomorfizmy F_i da się rozszerzyć chociaż troszeczkę (na odrobinę większe koło).

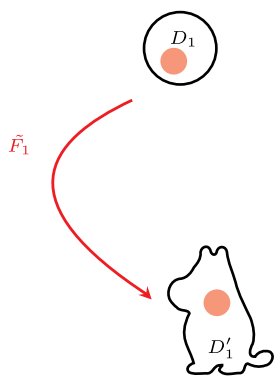
Ktoś mógłby się zaśmiać, *ha ha, niezły profesjonalizm w tej branży: zauważacie, że może wystąpić jakiś poważny problem, więc mówicie: założmy, że w naszym wypadku tenże problem nie wystąpi!* Nie ma się co śmiać – takie myślenie jest w matematyce na porządku dziennym (nie należy jednak przykładać go do, chociażby, chodzenia samemu po zamrożonym jeziorze. Kruchej tafli lodu nie interesuje to, że założyliśmy, że jest nie krucha, lecz gruba i wytrzymała). Zresztą, to nie jest tak, że dowodzimy nasze twierdzenie poprzez założenie tezy: zakładamy jedynie, że F_i da się trochę przedłużyć; wciąż pozostaje pytanie, jak przedłużyć je bardziej niż trochę. Wciąż pozostaje też druga trudność, którą teraz opiszemy. Musimy znaleźć sposób, żeby posklejać znalezione przedłużenia w jeden dyfeomorfizm. To sklepanie jest o tyle trudne, że musimy wymyślić, jak wygląda klej, którym skleamy nasze dyfeomorfizmy. Brzmi to dość dramatycznie, ale o co chodzi?

Wyobraźmy sobie, że mamy nasze (już trochę przedłużone) dyfeomorfizmy F_i , i widzimy (z lewej) jedynie te kawałki ciasta, na których F_i są określone,





Dyfeomorfizm F_1 przekształca D_1 na D'_1 ; szukamy jego przedłużenia, które jest identycznością na zaznaczonym na kolorowo obszarze



Występująca w dowodzie Palaisa modyfikacja $\tilde{F}_i$ dyfeomorfizmu F_i jest przesunięciem na pewnej małej kulce (zaznaczonej kolorem) wewnątrz swojej dziedziny

oraz (z prawej) kawałki ciasta przekształcone przez poszczególne F_i . Po obu stronach widzimy też cienkie brzegi naszych ciastowych placków, których dyfeomorfizm F ma nie ruszać. Zarówno po lewej, jak i po prawej stronie pomiędzy kawałków ciasta wyziera kuchenny blat. Niestety do rozwiązania naszego zadania nie wystarczy to, że weźmiemy do ręki trochę ciasta i zakleimy nim blat kuchenny po lewej i prawej stronie. Musimy znaleźć dyfeomorfizm określony na doklejonym cieście po lewej stronie, który przekształca to ciasto na doklejone ciasto po prawej stronie. Co więcej, ten sklejający dyfeomorfizm musi się pokrywać z F_i w okolicy brzegu każdej z dziedzin F_i . Mam nadzieję, że znalezienie tego sklejającego dyfeomorfizmu nie wydaje się łatwym zadaniem – bo nim nie jest! Chyba że... Chyba że $F_i(x) = x$ blisko brzegów przedłużeń swoich dziedzin! W takiej sytuacji znalezienie sklejającego dyfeomorfizmu jest bajecznie proste: będzie to dobrze nam już znany dyfeomorfizm-leniuszek, który nic nie robi, czyli identyczność.

Wracamy zatem do problemu numer jeden: przedłużania dyfeomorfizmów F_i . Chcemy przedłużyć każdy z F_i w taki sposób, żeby to przedłużenie spełniało $F_i(x) = x$ poza pewnym małym otoczeniem swojej wyjściowej dziedziny (oraz swojego oryginalnego obrazu). Innymi słowy, chcemy, żeby F_i było tam identycznością. I to, na szczęście dla naszej historii, da się zrobić – pokazał to Richard Palais, amerykański matematyk, w swojej pracy z 1960 roku (dla zainteresowanych podaję tytuł: *Extending diffeomorphisms*). Konstrukcja Palais jest jak zorza polarna: trzeba się trochę napracować, żeby ją zobaczyć (np. pojechać w nocy rowerem poza miasto), jest piękna i gdy się na nią patrzy, nie ma się pojęcia, skąd się wzięła. Podkreślam, że trzeba się napracować tylko trochę, bo dowód Palais może być zrozumiały dla zmotywowanego studenta drugiego roku matematyki, jest to elementarna konstrukcja używająca *de facto* jedynie definicji dyfeomorfizmu i różniczkowalności.

Właśnie w elementarności tkwi piękno tego dowodu. A dlaczego jest tak zaskakująca? Palais konstruuje swoje przedłużenie w następujący sposób. Najpierw modyfikuje dyfeomorfizm F_i , nie zmieniając jego wartości przy brzegu swojej dziedziny, tak żeby ten zmodyfikowany dyfeomorfizm był zwykłym przesunięciem na pewnym małym kółku wewnątrz dziedziny. To da się zrobić, proszę mi wierzyć (wtajemniczony Czytelnik może zauważyć, że tu właśnie korzystamy z naszej umowy na dyfeomorfizmy zachowujące orientację). Używając tej modyfikacji, Palais pokazuje, jak skonstruować żądane przez nas przedłużenie, które jest identycznością poza pewnym otoczeniem swojej wyjściowej dziedziny (i swojego oryginalnego obrazu). Powtórzę to raz jeszcze, dla tych, którym szczęki jeszcze nie opadły ze zdumienia: konstruujemy przedłużenie – coś, co intuicyjnie dotyczy wartości przekształcenia przy brzegu – za pomocą przekształcenia, które ma żądane przez nas wartości wewnątrz swojej dziedziny! Za pomocą tej sztuczki możemy skonstruować odpowiednie przedłużenia dyfeomorfizmów F_i , które dają się łatwo posklejać. To sklejenie, szukany dyfeomorfizm F , będzie również spełniało warunek $F(x) = x$ przy brzegu U (czyli F będzie identycznością przy brzegu U). W ten sposób udało nam się odpowiedzieć na nasze jakże praktyczne pierniczkowe pytanie: jest to teoretycznie możliwe, żeby dyfeomorficznie porozciągać rozwałkowane ciasto w ten sposób, żeby za jednym razem utworzyć z trzech kólek Muminka, Małą Mi i Ryjka!

No dobrze, jeszcze zastanówmy się, po co to wszystko. Te dziwne przekształcenia, to sklejenie. Mogłabym podać ileś przykładów innych matematycznych problemów, w których takie konstrukcje się przydają. Ale chyba najuczciwiej byłoby powiedzieć, że to po prostu trochę jak z pierniczkami. Piekę je, bo lubię je jeść. Wszystkich zaciekawionych (lub nieprzekonanych moimi nieprecyzyjnymi argumentami) zachęcam do lektury pracy *Gluing diffeomorphisms, bi-Lipschitz mappings and homeomorphisms*, w której w doborowym towarzystwie Pawła Goldsteina (z Uniwersytetu Warszawskiego) i Piotra Hajlasza (z Uniwersytetu w Pittsburghu) wyjaśniamy zawiłości tej konstrukcji i używamy jej do konstruowania innych pierniczkowych ekscesów.

Drzewo, jakie jest, każdy widzi

Radost WASZKIEWICZ^{†,‡} i Jan TURCZYNOWICZ^{†,§}

[†]Klub Naukowy Fenix

[‡]Instytut Fizyki PAN

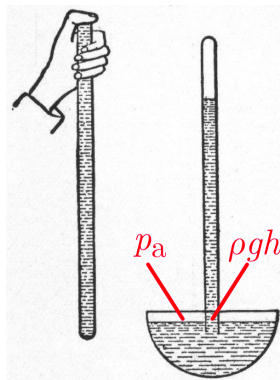
[§]Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Seminarium dendrologiczne

Znana biolożka z Matplanety, Hydrargia, specjalizująca się w badaniu i klasyfikacji najwyższych drzew swojej rodzimej planety, przybyła na Ziemię, by wygłosić prezentację na seminarium dendrologicznym. Ku jej zaskoczeniu okaz, który po wielu latach poszukiwań udało jej się zaobserwować – mierzący aż 76 cm – nie wzbudził wśród słuchaczy najmniejszego zainteresowania, nie mówiąc już o oczekiwanych okrzykach zachwytu. Oburzona reakcją publiczności Hydrargia zaczęła dopytywać znamienitych ziemskich dendrologów o drzewa rosnące na ich planecie, co zapoczątkowało żywą dyskusję. Szybko okazało się, że jedyną istotną różnicą między florą obu planet jest ciecz, której potrzebują drzewa do życia: na Matplanecie to rtęć, a na Ziemi – woda. Zastanówmy się, co jeszcze mogło wynikać z tej niezwykle wymiany zdań...



Rys. 1. Rysunek poglądowy sekwoi, drzewa, które osiąga nawet 116 m wysokości (przy podstawie ludzie). Autor ryciny: Robert van Pelt, dzięki uprzejmości autora [8]



Rys. 2. Tzw. eksperyment Torricelliego: maksymalna wysokość słupa cieczy w odwróconej rurze wypełnionej rtęcią odpowiada ciśnieniu atmosferycznemu. Rycina z książki F. E. Comptona [2]. Ilustracja demonstracji z XVII wieku [6]

Horror vacui

Starsi Czytelnicy bez trudu skojarzą „760 mm słupa rtęci” z prognozą pogody, a dokładniej z ciśnieniem atmosferycznym (mierzenie ciśnień w mm Hg wciąż spotkamy np. w pomiarach ciśnienia tętniczego). Tylko co ciśnienie atmosferyczne ma wspólnego z rtęcią? Odpowiedź na to pytanie znalazł już w 1647 roku kapucyn Valerianus Magnus [6], który przeprowadził następującą demonstrację przed znamienitą publicznością na Zamku Królewskim w Warszawie. Długą, jednostronnie zamkniętą rurę całkowicie napełnił rtęcią, zatkał dłonią [sic!], obrócił otworem do dołu, zanurzył w bali wypełnionej rtęcią i cofnął dłoń spod otworu (por. rys. 2). Ku zdumieniu dworu nad rtęcią pojawiła się pusta przestrzeń. Inaczej niż przewidywał Arystoteles, to nie *horror vacui* – strach (natury) przed próżnią – utrzymuje rtęć w odwróconym naczyniu, tylko ciśnienie atmosferyczne wypycha ją do środka, więc tenże „horror” można przezwyciężyć odpowiednio dużą siłą ciężkości, uzyskując próżnię. Maksymalną wysokość słupa cieczy w takim układzie wyznaczono eksperymentalnie w pierwszej połowie XVII wieku i – jeśli wierzyć Valerianusowi Magnusowi – dokonano tego na dworze króla Władysława IV jeszcze przed Torricellim, który z wyznaczenia ciśnienia atmosferycznego zasłynął.

Celem tego eksperymentu było także złamanie innego dogmatu – światło propagowało się przez próżnię bez potrzeby medium.

Ta demonstracja posłuży nam za minimalny model zachowania się cieczy wewnątrz drzewa. Modelem będzie całkowicie wypełniona, jednostronnie otwarta rura zatkana od strony liści (gdzie zachodzi parowanie, o tym później), z dolnym końcem zanurzonym w zbiorniku z cieczą. Ilościowo równowagę w tym eksperymencie można zrozumieć, analizując siły działające na mały fragment słupa cieczy blisko wylotu rury. Od strony powietrza, ku górze, naciska

(za pośrednictwem cieczy) atmosferyczne p_a , a od strony rury, ku dołowi, naciska słup rtęci, z ciśnieniem pgh , gdzie $\rho = 13,5 \text{ g/cm}^3$ jest gęstością rtęci, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ przyspieszeniem grawitacyjnym, a h wysokością słupa rtęci. Przekształcając równanie i podstawiając $p_a = 1000 \text{ hPa}$, otrzymujemy $h = 76 \text{ cm}$. Jeśli w rurze nie było powietrza, to nad słupem cieczy znajdują się bardzo rozrzedzone pary rtęci – w przybliżeniu próżnia.

Doświadczenie z wyrównywaniem ciśnień pozwoliło badaczom zrozumieć, dlaczego drzewa Matplanety nie mogą przekraczać wysokości 76 cm – rtęć spływa poniżej, nie pozwalając wyższym partiom drzewa z niej korzystać. Chwilę po dojściu do tego wniosku padło pytanie z sali, po którym zapadła głucha cisza.

Dlaczego drzewa na Ziemi mogą być wyższe niż 10 m?

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla wody, dla której $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, otrzymujemy $h_{\text{max}} \approx 10 \text{ m}$. Może się więc wydawać, że drzewa nie powinny rosnąć na wysokość przekraczającą 10 m – jest to maksymalna wysokość, na którą można zassać wodę, obniżając ciśnienie gazu nad swobodną powierzchnią cieczy. Wniosek, w zestawieniu z obserwacją przyrody za oknem, a tym bardziej z najwyższą sekwoją na świecie, Hyperionem, mierzącym 116,07 m (rys. 1), wydaje się absurdalny.

Metoda przewyciężenia tej granicy leży w budowie liści i obiegu wody w roślinie. Drzewa nieustannie odparowują wodę przez tak zwane aparaty szparkowe znajdujące się na liściach. Aby uwzględnić ten proces w naszym modelu drzewa, możemy przyjąć, że te struktury stanowią górne zakończenie rury w postaci błony półprzepuszczalnej.

Rośliny posiadają też inne struktury ułatwiające parowanie (np. przetchlinki).

Proces ten powoduje ciągły przepływ cieczy w kierunku aparatów szparkowych z prędkością rzędu 0,1 mm/h.

Ciecze pod ujemnym ciśnieniem

Przedstawiony mechanizm prowadzi do zjawisk wykraczających poza nasze codzienne intuicje o cieczech. Załóżmy znów, że woda wewnątrz drzewa porusza się ze stałą prędkością, a co za tym idzie, siły działające na jej mały wycinek, na danej wysokości, są w równowadze. Żeby to było możliwe, potrzebny jest hydrostatyczny (woda porusza się na tyle wolno, że wszelkie opory ruchu możemy pominąć) rozkład ciśnienia wewnątrz słupa cieczy $p(z)$ w zależności od wysokości od gleby, z , dany przez:

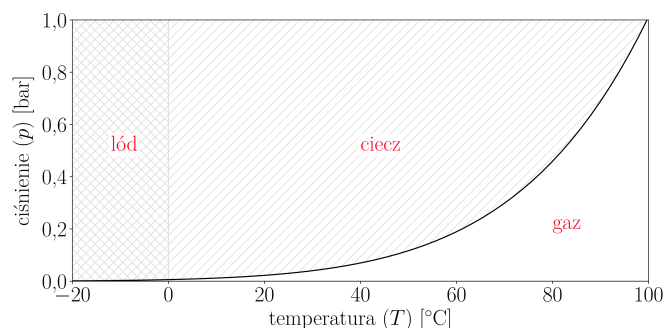
$$(1) \quad p(z) = p_a - \rho g z.$$

Zatem dla drzew wyższych niż 10 m absolutne ciśnienie na czubku drzewa jest **ujemne**, a co za tym idzie, woda jest rozciągana, a nie, jak zazwyczaj, ściskana. To stan materii bardziej kojarzony z ciałem stałym (nie ma przecież problemu z wyciąganiem wody z głębokiej studni wiadrem na napiętym sznurku, podczas gdy przy użyciu zwykłej pompy może to być niemożliwe).

Wracając do eksperymentu Magnusa–Torricellego – kiedy spróbowano umieścić rtęć w stanie naprężenia, w doświadczeniu spontanicznie pojawiła się powierzchnia swobodna, i rtęć odparowała, tworząc bąbel rozrzedzonych par rtęci na górze zatkniętej rury. W przypadku wody rzeczywistość okazuje się bardziej złożona – pomiary ciśnień w drzewach pozwalają uzyskiwać wartości aż do -80 bar [7].

W szkole uczymy się, że stan skupienia wody przy danym ciśnieniu p i temperaturze T można odczytać z diagramu fazowego (rys. 3). Możemy z niego wywnioskować, że jeśli nalejemy do garnka wody w temperaturze pokojowej $T = 20^\circ\text{C}$, a następnie obniżymy ciśnienie do bardzo małej wartości (powiedzmy 0,02 atm), to cała woda zamieni się w parę wodną. Czy to znaczy, że woda w drzewie zacznie wrzeć już poniżej 10 metrów jego wysokości? Odpowiedź brzmi (jak to zwykle bywa z trudnymi pytaniami): to skomplikowane. Przy wyznaczeniu diagramu fazowego rozważa się układ, w którym ciecz może swobodnie zamieniać się w gaz – w przypadku garnka dzieje się to na powierzchni styku gaz-ciecz.

Okazuje się, że ciecz, której powoli zmniejszamy ciśnienie, może znaleźć się w *stanie metastabilnym*, innymi słowy woda jest „przegrzana”, ale wciąż ciekła. W domu łatwiej (i bezpieczniej) zaobserwować taki stan metastabilny ze względu na przemianę z cieczy w ciało stałe – czasami włożony do zamrażarki napój potrafi długo pozostawać ciekły, aż do momentu otworzenia, kiedy gwałtownie zmienia się w lodową „kaszę”. Innym przykładem „przechłodzenia” mogą być wielokrotnego użytku szaszetki ogrzewające.



Rys. 3. Diagram fazowy wody

Parowanie przy niskich ciśnieniach

Taki *stan metastabilny* można osiągnąć tylko przy pewnych warunkach. Aby mogło dojść do parowania, musi najpierw pojawić się protobąbelek, czyli mały pęcherzyk pary, który powstaje wskutek fluktuacji termicznych. Niektóre cząsteczki cieczy mają chwilowo więcej energii i mogą zainicjować jego powstanie.

Następnie taki protobąbelek może się albo powiększać, albo maleć, zależnie od warunków, przy których powstał. Decyduje o tym wartość energii swobodnej (dokładniej, przy założeniu przemian izotermicznych, energii swobodnej Gibbsa), którą możemy obliczyć, znając liczbę cząstek gazu N w bąbelku oraz jego promień r .

Bardziej skomplikowana matematycznie analiza uwzględnia również zmiany N .

Bąbelek będzie miał powierzchnię $A = 4\pi r^2$, objętość $V = (4/3)\pi r^3$ oraz wewnętrzne (dodatnie) ciśnienie p_{in} . Może ono być inne niż stałe (potencjalnie ujemne) ciśnienie cieczy na zewnątrz p_{ext} . Zmieniając objętość od pewnej początkowej wartości V_0 , zewnętrzne

ciśnienie wykonuje pracę:

$$(2) \quad W_{\text{ext}} = p_{\text{ext}}(V - V_0).$$

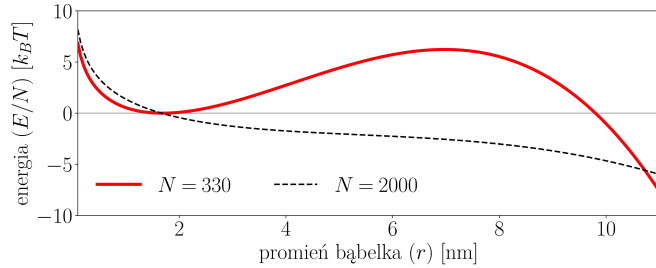
Z drugiej strony praca wykonana na parze (przybliżonej przez gaz doskonały) przy izotermicznym rozprężaniu wynosi:

$$(3) \quad W_{\text{in}} = -Nk_B T \ln \left(\frac{V}{V_0} \right),$$

gdzie $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna. Sumując człony z równań (2)–(3), dochodzimy do wniosku, że gdy $p_{\text{ext}} < 0$, to oplaca się zwiększać V . Bąbelek rośnie, ciśnienie p_{in} spada, i woda wyparuje. Taki model nie uwzględnia wszystkich zjawisk zachodzących wewnątrz drzewa. Brakującym elementem jest **napięcie powierzchniowe** o współczynniku γ , które daje dodatkowy, dodatni, wkład do całkowitej pracy $\gamma(A - A_0)$:

$$(4) \quad W = p_{\text{ext}}(V - V_0) - Nk_B T \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + \gamma(A - A_0).$$

Wykres tego, jak energia swobodna zależy od promienia na rysunku 4.



Rys. 4. Zależność energii swobodnej na cząsteczkę pary od promienia bąbelka przy zewnętrznym ciśnieniu $p_{\text{ext}} = -200$ bar. Dla bąbelków zawierających niewiele cząsteczek wykres ma „górkę”, którą trzeba pokonać, aby zainicjować parowanie

Energia układu pozwala nam przewidzieć, jak zachowa się bąbelek – jego promień będzie się zmieniać tak, aby poruszać się „w dół” krzywej. Jeśli jego promień będzie większy od przypadającego na maksimum, $r \approx 7$ nm, bąbelek będzie rosł i cała ciecz wyparuje, jednak kiedy promień będzie mniejszy, bąbelek zacznie maleć. Choć jego energia będzie wyższa niż ta stanu całkowitego wyparowania, osiągnięcie tego stanu wymaga najpierw pokonania bariery energetycznej, czyli osiągnięcia odpowiednio dużego promienia początkowego. Na szczęśliwy zbieg fluktuacji termicznych, który przepchnie bąbelek przez barierę energetyczną, można czekać bardzo długo.

Taki stan układu nazywamy właśnie *stanem metastabilnym*. Mówiąc językiem technicznym: układ znajduje się w lokalnym minimum energetycznym i aby przejść do globalnego minimum, potrzebna jest znaczna energia aktywacji, której fluktuacje termiczne zazwyczaj nie są w stanie dostarczyć. Innymi słowami można powiedzieć, że woda znajduje się powyżej krzywej spinodalnej (ang. *spinodal curve*) ciecz–para.

Od tego momentu będziemy rozważać tylko sytuacje, w których $p_{\text{ext}} < 0$. Zgodnie z prawem Laplace’a napięcie powierzchniowe powoduje różnicę ciśnień między parą a wodą, wynoszącą $p_{\text{lap}} = 2\gamma/r$. Korzystając

z $pV = Nk_B T$, możemy wyrazić różnicę ciśnień działającą na ścianki bąbelka w funkcji r jako:

$$(5) \quad \Delta p = p_{\text{ext}} + \frac{2\gamma}{r} - \frac{Nk_B T}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

W ekstremum energii swobodnej (zarówno w maksimum, jak i minimum) bąbelek znajduje się w równowadze mechanicznej, zatem $\Delta p = 0$. Warunek równowagi prowadzi do równania trzeciego stopnia:

$$(6) \quad 4\pi p_{\text{ext}} r^3 + 8\pi\gamma r^2 - 3Nk_B T = 0.$$

O liczbie rzeczywistych rozwiązań równania (6) decyduje wyróżnik (szersze omówienie tej metody znajdziemy w „Po co nam Δ ?” z numeru Δ_{22}^6). Możemy zbadać liczbę rzeczywistych rozwiązań. Dla ujemnych p_{ext} współczynnik wiodący wielomianu (6) jest ujemny, a wartość wielomianu dla $r = 0$ też jest ujemna, więc na pewno występuje jedno rozwiązanie dla $r < 0$, które nie ma interpretacji fizycznej; w takim razie, gdy wystąpią trzy rozwiązania, to dwa dodatnie odpowiadają za maksimum i minimum z rysunku 4. Gdy $\Delta = 0$, wykres energii $E(r)$ ma wypłaszczenie, a dla $\Delta < 0$ nie ma maksimum, i każdy bąbelek wyparuje. Wyróżnik wynosi:

$$(7) \quad \Delta = 48\pi^2 Nk_B T (128\pi\gamma^3 - 81Nk_B T p_{\text{ext}}^2),$$

więc warunek istnienia bariery energetycznej ($\Delta > 0$) można zwięźle wyrazić jako:

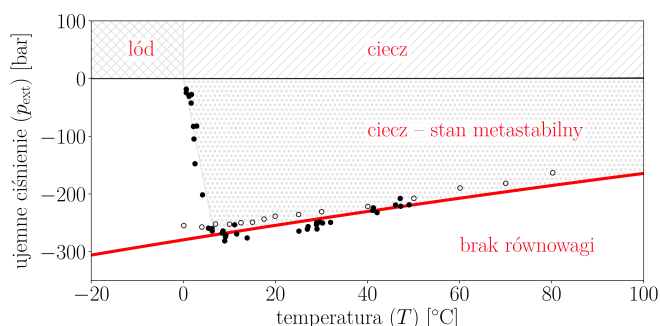
$$(8) \quad 81Nk_B T p_{\text{ext}}^2 < 128\pi\gamma^3.$$

Jeśli nawet najmniejszy możliwy protobąbelek (taki, dla którego $N = 1$, czyli składa się z jednej cząsteczki gazu) będzie wystarczający dla zainicjowania parowania, to woda zacznie parować w całej swojej objętości.

W rzeczywistości w przypadku tak małych protobąbelków przyjęte uproszczenia – para to gaz idealny i napięcie powierzchniowe niezależne od krzywizny powierzchni – stają się nerealistyczne. Na szczęście prawdziwe protobąbelki są większe niż $N = 1$ i w tym zakresie przyjęte uproszczenia są dostatecznie dobre.

Podstawiając do (8) $N = 1$ i przekształcając na ciśnienie, otrzymujemy oszacowanie $p_{\text{ext}} > -6800$ bar. Według tego rachunku woda powinna być w stanie metastabilnym nawet dla ogromnych ujemnych ciśnień, użyteczność tego rachunku możemy zweryfikować doświadczalnie metodą zaproponowaną przez Briggsa (1950) [4].

W jego laboratorium z ogromną prędkością obracano rurę wypełnioną wodą, tak aby siła odśrodkowa rozrywająca ciecz wytworzyła ujemne ciśnienie. Przy odpowiednio dużej prędkości obrotowej (a co za tym idzie, odpowiednio niskim, ujemnym ciśnieniu) blisko osi obrotu woda parowała, co pozwalało reszcie próbki wystrzelić na sensor z końcówek wirującej rury. W ten sposób zbadano graniczne ciśnienie, przy którym woda jest metastabilna. Dla $T = 285$ K otrzymano $p_{\text{ext}} \approx -270$ barów, a zatem woda stała się niestabilna dużo wcześniej (o czynnik około 25) w porównaniu do naiwnego rachunku. Prawdopodobnie wynika to z faktu, że bąbelki o większej liczbie cząsteczek również spontanicznie powstają, a przecież większe bąbelki są mniej stabilne (cf. rys. 4). Dopasowując liczbę cząsteczek w protobąbelku ($N \approx 730$) oraz uwzględniając zależność napięcia powierzchniowego od temperatury,



Rys. 5. Ekstremalne ujemne ciśnienia, przy których woda pozostaje w metastabilnym stanie ciekłym. Porównanie doświadczeń (wirówka – pełne punkty [4], kawitacja akustyczna – puste punkty [5]) z teorią, z dopasowanym $N = 730$

otrzymujemy realistyczne wartości ciśnienia krytycznego w temperaturach powyżej 10°C . Porównanie doświadczeń z dopasowaną teorią przedstawiamy na rysunku 5. Widać na nim zmodyfikowaną wersję diagramu fazowego (jak na rys. 3), tym razem jednak uwzględniamy „historię” układu – zaczynamy od stanu ciekłego.

Przedstawiony tutaj rachunek zakłada, że bąbelkę dużo szybciej zmienia objętość niż liczbę cząstek, co nie zawsze jest prawdą. Pełniejsza analiza tej sytuacji wymaga odpowiedzi na pytanie o wiele skal czasowych: parowania, transportu ciepła, relaksacji mechanicznej bąbelka. Czytelników poszukujących

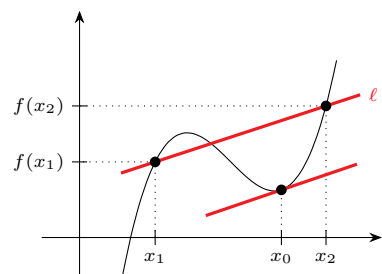
dogłębnych odpowiedzi (i kolejnych trudnych problemów) zapraszamy do lektury prac [3] oraz [1]. Ciekła woda okazuje się tak stabilna, że jeśli problemem byłoby tylko pompowanie do góry, najwyższe drzewo mogłoby mieć wysokość nawet 2 km. Wartość ciśnienia krytycznego, mogłoby się wydawać, nie ma w takim razie konsekwencji dla biologii – jednak w przypadku mangrowców takie ogromne ujemne ciśnienia są potrzebne do wciągania wody bez soli korzeniami zanurzonymi w morzu (odwrócona osmoza), ale to już zupełnie inna historia.

Literatura

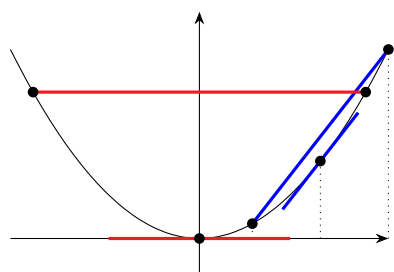
- [1] M. E. M. Azouzi i in. “A coherent picture of water at extreme negative pressure”. *Nature Physics* 9.1 (2013), s. 38–41.
- [2] C. Beach i F. McMurry. *The New Student's Reference Work for Teachers, Students and Families*. F.E. Compton, The New Student's Reference Work for Teachers, Students and Families t. 1, 1919.
- [3] M. Blander i J. Katz. “Bubble nucleation in liquids”. *AIChE Journal* 21 (1979), s. 833–848.
- [4] L. J. Briggs. “Limiting Negative Pressure of Water”. *Journal of Applied Physics* 21.7 (1950), s. 721–722.
- [5] E. Herbert, S. Balibar i F. Caupin. “Cavitation pressure in water”. *Physical Review E* 74 (2006).
- [6] V. Magni. *Demonstratio ocularis: loci sine locato, corporis successive moti in vacuo, luminis nulli corpori inhaerentis*. Benacci, Vittorio, 1648.
- [7] P. F. Scholander i in. “Sap Pressure in Vascular Plants”. *Science* 148.3668 (1965), s. 339–346.
- [8] S. C. Sillett i R. Van Pelt. “A redwood tree whose crown is a forest canopy”. *Northwest Science* 74.1 (2000), s. 34–43.

O pewnej konkurencji, w której parabola nie ma równych sobie

* Katedra Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jana Długosza
w Częstochowie



Rys. 1. Sieczna ℓ poprowadzona przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ oraz poprowadzona przez $(x_0, f(x_0))$ styczna równoległa do ℓ (nie jedyna!)



Rys. 2. Wykres funkcji $f(x) = x^2$, jego dwie sieczne i odpowiadające im styczne. W obu przypadkach punkt $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ zadaje jedyną możliwą styczną

Katarzyna DOMAŃSKA*

Czy dla każdej siecznej do wykresu da się znaleźć równoległą do niej styczną? Lub bardziej precyzyjnie, czy mając daną funkcję f i sieczną ℓ poprowadzoną przez punkty o odciętych $x_1 < x_2$, można tak dobrać punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$, żeby styczna do wykresu funkcji f w $(x_0, f(x_0))$ była równoległa do ℓ ?

Sieczną ℓ , o której tu mowa, jest prosta nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem, którego tangens – jak łatwo dostrzec – jest równy ilorazowi $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Tangens kąta nachylenia stycznej w $(x_0, f(x_0))$ jest zadany przez pochodną: $f'(x_0)$. Pytanie o prostą styczną równoległą do ℓ jest więc pytaniem o istnienie $x_0 \in (x_1, x_2)$ o własności

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Jak powszechnie wiadomo, odpowiedź na powyższe pytanie (dla funkcji f różniczkowalnej w danym przedziale) przynosi klasyczne twierdzenie Lagrange’a o wartości średniej. Odpowiedź jest pozytywna. Trzeba tylko nadmienić, że szukana styczna nie musi być jedyna, a teza twierdzenia nie daje nam jawnego wzoru na punkt x_0 , którego istnienie jest ową tezę zapewnione.

Twierdzenie Lagrange’a dla trójmianów. Łatwo sprawdzić, że specyficznie zachowuje się pod tym względem funkcja określona trójmianem kwadratowym. Istotnie, rozważając funkcję $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, mamy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b \quad \text{oraz} \quad f'(x) = 2ax + b,$$

dla wszelkich $x \in (x_1, x_2)$. Pozwala to zauważyć, że punktem x_0 „realizującym” (dodajmy, że w przypadku $a \neq 0$ jedynym) poszukiwaną styczną, równoległą do prostej ℓ przechodzącej przez punkty $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$, jest średnia arytmetyczna liczb x_1 i x_2 . Przykładu może tu dostarczyć funkcja przyporządkowująca argumentowi x wartość x^2 (por. rys. 2).



Redukcja rozważań do przypadku $f(0) = f'(0) = 0$ jest wygodna, ale nie jest konieczna – zachęcam Czytelnika do przekonania się, jak dalsze rozumowanie przebiega bez tej redukcji.

A w drugą stronę? Naturalnym wydaje się pytanie, dla jakich jeszcze funkcji zachodzi taka prawidłowość, że szukaną styczną równoległą do zadanej siecznej jest ta, która za odciętą punktu styczności ma średnią arytmetyczną odciętych punktów, przez które poprowadzono sieczną.

Okazuje się, że tylko trójmiany mają tę właściwość. Dokładniej, w klasie funkcji różniczkowalnych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równanie

$$(E) \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

spełniają jedynie wielomiany stopnia co najwyżej 2.

Nie jest trudno to udowodnić. Wiemy już, że równanie (E) jest spełnione przez trójmiany kwadratowe, można więc bez straty ogólności przyjąć, że $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ (w przeciwnym przypadku odjęlibyśmy od f funkcję liniową $f(0) + xf'(0)$). Podstawiając $y = 0$ w równaniu (E), otrzymuje się

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x/2) \quad \text{dla } x \neq 0,$$

co dzięki założeniu $f(0) = 0$ oznacza równość

$$f(x) = xf'(x/2) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawienie jej do (E) prowadzi do:

$$\frac{xf'(x/2) - yf'(y/2)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Dla uproszczenia zapisu rozważmy pomocniczo funkcję $G(x) := f'(x/2)$. Zgodnie z założeniem mamy $G(0) = 0$, a równanie wyżej daje nam

$$(E1) \quad xG(x) - yG(y) = (x - y)G(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $y = -x$, uzyskuje się, że funkcja G jest nieparzysta. Teraz wystarczy w równaniu (E1) w miejsce y przyjąć $-y$, żeby po wykorzystaniu nieparzystości otrzymać

$$(E2) \quad xG(x) - yG(y) = (x + y)G(x - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Równania (E1) i (E2) prowadzą do:

$$(x - y)G(x + y) = (x + y)G(x - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że wartości $s = x + y$ oraz $t = x - y$ możemy wybrać dowolnie (biorąc $x = \frac{s+t}{2}$ i $y = \frac{s-t}{2}$), a więc $tG(s) = sG(t)$ dla wszystkich $s, t \in \mathbb{R}$, co oznacza, że $G(x)/x$ jest funkcją stałą.

Dowiedliśmy w ten sposób, że dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość $G(x) = ax$. Zgodnie z definicją G oznacza to $f'(x) = 2ax$, co w połączeniu z warunkiem $f(0) = 0$ daje $f(x) = ax^2$, a więc trójmian kwadratowy.

Co dalej? Nieco więcej trudu kosztuje uzyskanie opisu rozwiązań równania

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Zadanie jest dużo ogólniejsze, ale jego rozwiązanie wymaga tylko nieco więcej trudu i jest bardzo podobne do rozwiązania równania (E). Okazuje się, że jeśli funkcje $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają powyższe równanie, to istnieją takie liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, że

$$f(x) = ax^2 + bx + c = g(x) \quad \text{oraz} \quad h(x) = ax + b.$$

W uzyskaniu opisu rozwiązań powyższego równania kluczowym jest uzyskać równość $f(x) = g(x)$ dla $x \neq 0$. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - g(y)}{x - y} &= h(x + y) = h(y + x) \\ &= \frac{f(y) - g(x)}{y - x} \quad \text{dla } x \neq y, \end{aligned}$$

co w konsekwencji daje

$$f(x) - g(x) = g(y) - f(y) \quad \text{dla } x \neq y.$$

Podstawiając za (x, y) pary $(z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1)$, otrzymujemy równość $f(x) = g(x)$ dla wszystkich x . Do rozwiązania pozostaje równanie

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = h(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, x \neq y,$$

które rozwiązujemy... tak jak poprzednio! Okazuje się, że powiązanie prawej strony równania z pochodną funkcji f nie było w rozumowaniu konieczne i nadal jesteśmy w stanie otrzymać wzór określający funkcje f i h .

47. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

24 września 2024, podczas odbywającego się w Warszawie IX Dnia Popularyzacji Matematyki, miał miejsce finał 47. Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Na tegoroczny Konkurs wpłynęło 8 prac, z których 5 dostało się do finału. Po wysłuchaniu finałowych prezentacji i dyskusji Jury w składzie: Adam Gregosiewicz, Andrzej Komisarski – przewodniczący Jury, Zdzisław Pogoda, Łukasz Rajkowski, Daniel Strzelecki, postanowiło nagrodzić wszystkie prace finałowe.

Złote medale i nagrody w wysokości po 1600 złotych otrzymali:

- Kazimierz Chomicz, uczeń I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, autor pracy *On the fourth power level of p -adic completions of biquadratic number fields*, napisanej pod opieką Tomasza Kowalczyka;
- Franciszek Hansdorfer, uczeń XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, autor pracy *Aproksymacje p -adyczne*, napisanej pod opieką Mariusza Skałby;
- Miłosz Płatek, uczeń V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, autor pracy *Dowód uogólnionego twierdzenia Sawayamy-Thébault'a*, napisanej pod opieką Dominika Burka.

Brazowy medal i nagrodę w wysokości 800 złotych otrzymał Grzegorz Lis, uczeń XX LO im. Leopolda Staffa w Krakowie, autor pracy *Nietypowe transformacje geometryczne*, napisanej pod opieką Bronisława Pabicha.

Wyróżnienie i nagrodę w wysokości 400 złotych otrzymała Patrycja Lamparska, uczennica XXIV Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Łodzi, autorka pracy *Matematyka wyboru*, napisanej pod opieką Stanisława Goldsteina.

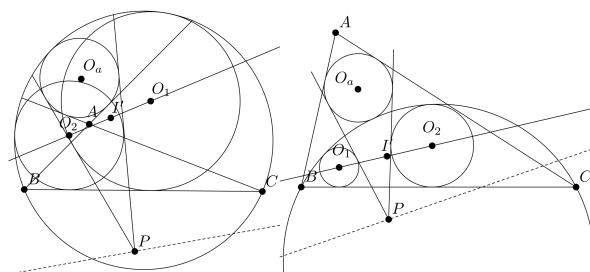
Wszyscy tegorocznymi złoci medaliści byli już nagrodzeni podczas wcześniejszych edycji Konkursu. Kazimierz Chomicz i Miłosz Płatek zdobyli odpowiednio brązowy i złoty medal w 46. KUPzM, zaś Franciszek Hansdorfer, brązowy medal w 45. KUPzM.

Tematyka prac Kazimierza Chomicza i Franciszka Hansdorfera leży na pograniczu algebry i teorii liczb. Obie dotyczą tzw. uzupełnień p -adycznych ciał liczbowych. Są to obiekty algebraiczne mające istotne związki z teorią liczb. Zbieżność tematyki obu prac jest przypadkowa, a uczniowie zajmowali się nieco innymi zagadnieniami. Kazimierz Chomicz badał, ile co najmniej czwartych potęg elementów uzupełnienia p -adycznego dwukwadratowego rozszerzenia ciała liczb wymiernych trzeba dodać, by uzyskać sumę -1 . Uzyskane przez niego wyniki stanowią zakończoną sukcesem kontynuację badań, które utknęły około 40 lat temu.

Z kolei praca Franciszka Hansdorfera poruszała wiele drobniejszych zagadnień, wśród których znalazła się między innymi efektywna metoda wyznaczania w ciele p -adycznym pierwiastków kwadratowych niektórych liczb naturalnych, a także użycie liczb p -adycznych do znajdowania kongruencji takich jak $7^{43^n} + 6^{43^n} + 42^{43^n} + 36^{43^n} + 37^{43^n} \equiv -1 \pmod{43^{n+1}}$.

Ze względu na złożoność tematu nie opiszemy szczegółowo wyników obu prac. Dość powiedzieć, że istotną część finałowego wystąpienia Kazimierza Chomicza musiało zająć wyjaśnienie poszczególnych słów występujących w tytule jego pracy.

Miłosz Płatek udowodnił tytułowe uogólnienie twierdzenia Sawayamy-Thébaulta, które stanowiło nierozstrzygniętą przez około 10 lat hipotezę. Twierdzenie to głosi, że w sytuacjach przedstawionych na poniższych rysunkach, jeśli trójkąt ABC oraz okrąg o środku O_a są ustalone, zaś punkt P porusza się po dowolnej prostej, wówczas wszystkie uzyskane położenia prostej O_1O_2 przechodzą przez jeden punkt (na rysunkach jest to punkt I').



Praca Grzegorza Lisa podzielona jest na trzy części. W pierwszej opisuje, jak można narysować wykres funkcji nie w prostokątnym układzie współrzędnych, lecz w układzie krzywoliniowym, którego oś odciętych stanowi dowolna krzywa gładka. W drugiej części autor uogólnia inwersję względem okręgu, definiując inwersję względem dowolnej krzywej ograniczającej obszar wypukły, takiej jak elipsa, trójkąt i inne wielokąty. W ostatniej części rozważane są obroty względem elipsy i paraboli. Różnią się one od zwykłych obrotów tym, że obracające się punkty poruszają się nie po okręgach, lecz po elipsach lub parabolach. Wszystkie przedstawione przekształcenia i konstrukcje opisane są wyprowadzonymi przez autora wzorami i zilustrowane rysunkami pokazującymi efekty ich działania, które często są zaskakujące.

Patrycja Lamparska podjęła się opisać matematyczne podstawy różnego rodzaju głosowań i wyborów. Założyła, że w wyborach startuje pewna liczba kandydatów i każdy z wyborców ustawia ich w kolejności od najlepszego do najgorszego (dla różnych wyborców ta kolejność może być różna). Kto jest zwycięzcą takiego głosowania? To zależy od przyjętej metody głosowania, czyli sposobu wyznaczania zwycięzcy (lub zwycięzców) w zależności od tego, jak kandydatów uporządkowali wyborcy. Autorka podaje formalny opis tego zagadnienia, wskazuje naturalne warunki, jakie powinny spełniać metody głosowania, i przedstawia kilka takich metod, ilustrując ich działanie przykładami. Wkładem własnym autorki jest opracowanie i przedstawienie trzech nowych metod głosowania.

Andrzej KOMISARSKI
przewodniczący Jury Konkursu

Finałowe prace wraz z większą ilością informacji o konkursie, w tym o nowej 48. edycji, można odnaleźć na stronie deltami.edu.pl w zakładce Konkursy > Konkurs Prac Uczniowskich.



„Mieszkał w Wiśle sum wąsaty,
znakomity matematyk.
Krzychał więc na całe skrzele:
„Do mnie, młodzi przyjaciele!
W dni powszednie i w niedziele
Na życzenie mnożę, dzielę,
Odejmuję i dodaję
I pomyłek nie uznaję!”
Każdy mógł więc przyjść do suma
I zapytać: jaka suma?...”

– Jan Brzechwa, „Sum”

Jaka suma?

Lubimy rekordy. Czekamy na wielkie zawody sportowe, robimy zakłady, czy padnie nowy „naj”. Żądza rekordów jest tak wielka, że te zapisywane w znanej księdze nie raz zadziwiają: największa na świecie zupa, największa liczba gitarzystów grających ulubiony utwór muzyczny, największa liczba schodów pokonanych na głowie...

Zdjęcia dość szczególnego rekordzisty świata obiegły niedawno media. Świat dowiedział się o jego istnieniu, kiedy po półtoragodzinnej walce został wyciągnięty z wody Zalewu Rybnickiego i zmierzony. Gigant, który miał 292 cm, nie doczekał się jednak gratulacji, bo tak się przyjęło, że to wędkarz trzymający na haku swoją zdobycz zbiera oklaski.

Ryby nie mają twarzy słodziaków, nie mają mimiki i nie robią wiele dla uciechy człowieka, chyba że jako trofeum. I jak wiadomo, głosu nie mają... Traktujemy je wyłącznie w kategoriach rekreacyjno-konsumpcyjnych. Rybnicki Sum mógł żyć w Zalewie od początku jego powstania w 1971 roku. Wody Zalewu służą do chłodzenia elektrociepłowni, przez co zbiornik ten w ciągu roku długo utrzymuje wysoką temperaturę (obecnie jest trochę lepiej, bo część starych pieców na węgiel została zamknięta). A w cieplej wodzie ryby rosną szybko. Wyobrażam sobie, że złowienie takiego trofeum jest nie lada przeżyciem, ale jednak dziwię mnie pełne ekscytacji gratulacje, mimo że ryba wróciła do wody. Przecież tak wyjątkowe zwierzę zostało wyciągnięte po długiej szarpaninie ze środowiska, obezwładnione, wyciągnięte na brzeg, zmierzone i obfotografowane.

Od kilku lat, szczególnie w okolicach Świąt, słychać głosy, że może czas zmienić nasz stosunek do ryb. Zwłaszcza, że wiele jeszcze o nich nie wiemy, a badania naukowe na ich temat mogą zadziwić nawet akwarystów. Okazuje się na przykład, że ryby potrafią liczyć. Mało tego, potrafią także dodawać i odejmować. Jak w wierszu Jana Brzechwy. Ale jak dogadać się z rybą, żeby wykazała się taką umiejętnością?

Badacze z Instytutu Zoologii Uniwersytetu w Bonn w pracy opublikowanej w 2022 roku użyli metody, którą zastosowano wcześniej do eksperymentów na pszczołach. Badania przeprowadzono na dwóch gatunkach ryb: słodkowodnych płaszczkach płamistych (*otrygon motoro*) oraz pyszczakach z rodziny pielęgnicowatych (*otropheus zebra*). W akwariach ustawiono kilka przegród, przez co ryby przepływały do kolejnych „pokoi”. W pierwszym pokoju przedstawiano rybom plansze z określoną liczbą obiektów (np. kółek), w zakresie od 1 do 5. W następnym pokoju ryby miały do wyboru dwa zakątki, w jednym pokazana była plansza z jednym kółkiem więcej, a w drugim z jednym kółkiem mniej niż na planszy z pierwszego pokoju.

Najpierw ryby przechodziły trening. Jeśli ryba widziała na pierwszej planszy kółka niebieskie, miała wykonać dodawanie, zatem wybrać zakątek z planszą prezentującą jedno kółko więcej. Zobaczywszy kółka żółte, ryba miała odejmować, czyli wybrać zakątek z planszą o liczbie kółek o jeden mniejszej. Za dobrze wykonane działanie dostawała nagrodę: coś do zjedzenia.

Po treningu, w czasie którego ryby uczyły się, co znaczy dany kolor, przyszedł czas na testy. Czy ryby potrafią zastosować wytrenowaną umiejętność w innym niż trenowane przypadki? W treningowej wersji celowo nigdy nie użyto planszy z trzema elementami. W zadaniach eksperymentalnych ryby oglądały w pierwszym pokoju

planszę właśnie z trzema kółkami. Okazało się, że zwierzęta stosują wyćwiczone zasady. Co więcej, mając przy dodawaniu dostępnych 4 i 5 elementów, częściej wybierały 4, co oznacza, że były w stanie wykonywać dokładne działanie (o jeden więcej), a nie wskazywać planszę po prostu z większą liczbą kółek.

Wiele gatunków zwierząt nawet z odległych ewolucyjnie grup ma pojęcie o liczebności. W przypadku małych liczb (różnie dla różnych zwierząt, zwykle kilka, np. od 1 do 5) mózg zwierząt działa precyzyjnie, rozróżnia każdy element oddzielnie, faktycznie „liczy”. Inny mechanizm pojawia się powyżej tej liczby, kiedy liczenie nazwalibyśmy raczej szacowaniem, przy czym im więcej jest elementów, tym mniejsza „dokładność” szacowania – np. zwierzęta zauważają duże zmiany liczebności obiektów, np. 50 vs. 25, a nie widzą niewielkich zmian, np. 50 vs. 49.

Coraz więcej grup zwierząt wchodzi do matematycznej elity: oczywiście ssaki, w tym nie tylko naczelne, ale także szczury i psy, oraz ptaki (papugi, kruki), płazy i gady, a także nawet bezkręgowce: mrówki i pszczoły. W sumie jednak nie jest to dziwne. Umiejętność liczenia jest potrzebna do przeżycia: przy szacowaniu szansy na bycie zjedzonym (antylopy), przy poszukiwaniu pokarmu, np. policzenie osobników w stadzie, które warto zaatakować (wilki) albo liczenie punktów orientacyjnych w terenie, aby odnaleźć pokarm (pszczoły, mrówki). Ważne też jest orientowanie się, jak liczna jest grupa u zwierząt stadnych (ryby, ptaki, ssaki), a samice potrafią zliczyć, ile młodych mają w miocie (ssaki). Przypuszcza się, że umiejętność liczenia wykształciła się w procesie ewolucji kilkakrotnie.

Sum wąsaty z Wisły w wierszyku nie miał lekko. Trafiał mu się złośliwy klient, lin, który dał mu trudne zadanie: „Czy pan zdoła w swym pojęciu odjąć zero od dziesięciu?”. Tego sum nie umiał zrobić. Nie dziwię się, pojęcie zera

jako liczby nawet ludzie zaczęli stosować późno (w Europie dopiero w XIII w.), a dzieci uświadamiają sobie, czym zero jest, dopiero w wieku około 4–5 lat.

Pierwotnym pojęciem, za którym stoi liczba zero, jest brak czegoś, co jest dla wielu zwierząt dostępne. Zwierzęta potrafią jednak więcej. I tak właśnie naukowcy dowodzą, że trenowane w dodawaniu i odejmowaniu pszczoły wiedzą, że zero (brak) jest mniejsze niż 1. U kraków i małp badania aktywności mózgu wykonywane przy zadaniach związanych z liczeniem wykazywały, że konkretne liczby aktywują konkretne neurony w jednym rejonie mózgu. Także liczba zero. Na razie jednak pojmowania zera nie udało się udowodnić u ryb.

U Brzechwy wszystko kończy się dobrze, jak to w bajce. Choć sum, nie mogąc sprostać zadaniu, schudł ze stresu, zmienił się w małą rybkę, „opuścił wody słodkie i za żonę pojął szprotkę”. Sum z Zalewu Rybnickiego być może posiadał sztukę dodawania zera, skoro urósł prawie do 3 metrów.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

“Cichlids and stingrays can add and subtract ‘one’ in the number space from one to five”, Schluessel i wsp., Scientific reports 12 (2022)

“Numerical ordering of zero in honey bees”, Howard i wsp., Science 360 (2018)

“Behavioral and Neuronal Representation of Numerosity Zero in the Crow”, Kirschhock i wsp., J. Neurosci 41 (2021)

Sprawiedliwe podziały grafów

Zbigniew LONC, Paweł RZAŻEWSKI

Każdy, kto ma rodzeństwo, w dzieciństwie doskonale musiał opanować sztukę dzielenia się. Jak *sprawiedliwie* podzielić między siebie kawałek ciasta? Dla uproszczenia sytuacji, załóżmy najpierw, że w podziale uczestniczą dwie osoby: Alicja i Basia. Naturalnym rozwiązaniem, często stosowanym w praktyce, jest metoda „ja kroję, ty wybierasz”. Alicja kroi ciasto na dwa kawałki, zaś Basia wybiera swój kawałek jako pierwsza. Oczywiście w interesie Alicji jest, aby kawałki były możliwie równe, czyli by wartość mniejszego była jak największa. Wtedy jeśli Alicja dostanie kawałek, który jej nie zadowala, może mieć pretensje tylko do siebie.

Co ciekawe, podejście „ja kroję, ty wybierasz” jest znane od bardzo dawna. Już w Biblii, a dokładniej w Księdze Rodzaju, możemy znaleźć fragment o tym, jak Abram i Lot podzielnili między siebie Ziemię Obiecana, aby uniknąć konfliktów:

„Kraj nie mógł utrzymać ich obu, bo zbyt liczne mieli trzody; musieli więc się rozłączyć. A gdy wynikła sprzeczka, (...) rzekł Abram do Lota: *Niechaj nie będzie sporu między nami, (...) bo przecież jesteśmy krewni. Wszak cały ten kraj stoi przed tobą otworem. Odłącz się ode mnie! Jeżeli pójdiesz w lewo, ja pójdę w prawo, a jeżeli ty pójdiesz w prawo, ja – w lewo.* (...) Lot wybrał sobie zatem całą tę dolinę Jordanu i wyruszył ku wschodowi, i tak rozłączyli się obaj. Abram pozostał w ziemi Kanaan, Lot zaś zamieszkał w owej okolicy”. [Rdz 13, 6–12] (cytat z Biblii Tysiąclecia).

Co jednak zrobić, jeśli w podziale uczestniczy więcej osób? Pytanie to w pierwszej połowie XX wieku zadał Hugo Steinhaus swoim studentom, Stefanowi Banachowi i Bronisławowi Knasterowi. Dało to początek tak zwanej teorii sprawiedliwych podziałów, która jest dziś bogatą dziedziną, leżącą na styku matematyki, informatyki i ekonomii.

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Dobra podzielne i niepodzielne

Problem dzielenia ciasta jest stosunkowo łatwy, gdyż ciasto ma następującą przyjemną cechę (poza innymi oczywistymi zaletami): można je podzielić/przekroić w dowolnym miejscu. My zajmujemy się problemem trudniejszym, gdy musimy rozdzielić dobra *niepodzielne*. Wyobraźmy sobie, że drużyna poszukiwaczy przygód, po pokonaniu smoka, odkryła jego skarb, który składa się z wielu cennych przedmiotów. Każdy przedmiot sam w sobie jest niepodzielny, czyli jedna osoba powinna go wziąć w całości. Dodatkowo każdy z uczestników wyprawy inaczej ceni poszczególne przedmioty: magiczny łuk ma niewielką wartość dla krasnoluda, ale elfi tropiciel będzie nim zdecydowanie zainteresowany. Inne przykładowe scenariusze, gdzie mamy do czynienia z podziałem zbioru niepodzielnych dóbr, to podział majątku po rozwodzie lub podział spadku.

Ciekawy przykład ścisłego podejścia do sprawiedliwego podziału spadku został zilustrowany w książce *Cryptonomicon* Neala Stephensona, którą Czytelnikom polecamy.

Formalnie dany mamy pewien zbiór przedmiotów V oraz n osób, zwanych zwyczajowo *agentami*. Ponadto dla każdego agenta dana jest jego *funkcja użyteczności*, która każdemu przedmiotowi przypisuje pewną nieujemną wartość. Funkcję użyteczności i -tego agenta będziemy oznaczać przez u_i .

Niech $\mathcal{P}_n(V)$ będzie rodziną wszystkich podziałów zbioru V pomiędzy n agentów; nie zakładamy tutaj, że zbiory w tym podziale muszą być niepuste. Każdy taki podział jest zatem ciągiem $(P_1, \dots, P_n)$, gdzie P_i jest podzbiorem V , który dostanie agent numer i . W tym artykule będziemy zakładać, że każda funkcja u_i jest *addytywna*, czyli wartością zbioru $S \subseteq V$, ozn. $u_i(S)$, jest suma wartości jego elementów, czyli $\sum_{v \in S} u_i(v)$. Przy tym założeniu wartość uzyskana przez i -tego agenta w podziale $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(V)$ wynosi $\sum_{v \in P_i} u_i(v)$. Zwróćmy uwagę, że założenie o addytywności nie zawsze jest spełnione w rzeczywistych sytuacjach.

Naszym celem jest znalezienie takiego podziału, aby każdy agent był zadowolony z wartości uzyskanych przedmiotów. Inaczej mówiąc, znalezienie podziału, który jest *sprawiedliwy*.

Co to jest „sprawiedliwy podział”?

Najbardziej naturalnym kryterium sprawiedliwości jest *proporcjonalność*: i -ty agent chciałby uzyskać przedmioty o łącznej wartości co najmniej $u_i(V)/n$. Nietrudno jednak przekonać się, że proporcjonalne podziały nie zawsze istnieją. Na przykład: jeśli jeden przedmiot istotnie przewyższa wartością pozostałe, może go dostać tylko jeden agent, a pozostali odejdą w poczuciu krzywdy. Badano więc wiele innych, mniej restrykcyjnych, definicji sprawiedliwego podziału, w nadziei na znalezienie takiej, która z jednej strony odzwierciedli intuicyjne poczucie sprawiedliwości, zaś z drugiej strony, zagwarantuje istnienie rozwiązania.

W niniejszym artykule zajmujemy się stosunkowo nowym kryterium sprawiedliwości zaproponowanym przez Budisha [3] w 2011 roku, które bardziej pasuje do podziałów zbioru niepodzielnych dóbr. Nazwijmy je *kryterium maksymimalnego udziału*. Dalej będziemy je nazywać w skrócie kryterium *mms*.

Skrót mms pochodzi od anglojęzycznej nazwy tego kryterium: maximin share.

Najpierw każdy agent przeprowadza następujący eksperyment myślowy: co by było, gdybyśmy mieli podzielić się zgodnie z metodą „ja kroję, ty wybierasz?”. Zatem każdy agent rozważa wszystkie podziały V na n części i wybiera taki, gdzie wartość najgorszej części (według jego funkcji użyteczności) jest jak największa. Wartość ta będzie oznaczana przez mms_i , gdzie i jest numerem agenta. Formalnie mamy więc

$$mms_i = \max_{(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(V)} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_i(P_j).$$

Podział, który realizuje maksimum w wyrażeniu powyżej, nazywamy *mms-podziałem* dla agenta i . Podział, gdzie dla każdego i agent i -ty uzyskuje przedmioty o łącznej wartości co najmniej mms_i , będziemy uznawać za *sprawiedliwy*. Formalnie podział $(P_1, \dots, P_n)$ jest *mms-sprawiedliwy*, jeśli dla każdego i zachodzi nierówność $u_i(P_i) \geq mms_i$.

Intuicyjnie każdy agent realistycznie (czy też pesymistycznie) ocenia to, na co może liczyć, zatem można spodziewać się, że tak niewygórowane oczekiwania uda się zaspokoić.

Zwróćmy uwagę, że każdy agent, obliczając swoją wartość mms_i , przyjmuje pesymistyczny scenariusz, że każdy inny agent ceni wszystkie przedmioty tak jak on sam. Może się więc okazać, że istnieją podziały, w których każdy agent dostaje zbiór o wartości znacznie przewyższającej jego oczekiwania. Ekstremalnym przykładem jest sytuacja z dwoma agentami i dwoma przedmiotami a i b , gdzie agent 1 przypisuje wartość 1 przedmiotowi a i 0 przedmiotowi b , natomiast agent 2 odwrotnie – wartość 1 przedmiotowi b i 0 przedmiotowi a . W takim przypadku wartość parametru mms_i wynosi 0 dla obu agentów, a każdy z nich może otrzymać przedmiot o wartości 1.

Zauważmy też, że jeśli $(P_1, \dots, P_n)$ jest *mms-podziałem* dla i -tego agenta, to

$$u_i(V) = \sum_{j=1}^n u_i(P_j) \geq \sum_{j=1}^n mms_i = n \cdot mms_i,$$

czyli w szczególności $mms_i \leq u_i(V)/n$.

Istnienie mms-sprawiedliwych podziałów

Czy tak zdefiniowane sprawiedliwe podziały zawsze istnieją? Odpowiedź na to pytanie nie jest oczywista, o czym świadczy fakt, że znalezienie tej odpowiedzi zajęło aż 3 lata od momentu zaproponowania kryterium *mms*. Zanim tę odpowiedź zaprezentujemy, pokażmy dwie proste obserwacje.

Po pierwsze, jeśli w podziale występuje $n = 2$ agentów, *mms-sprawiedliwy* podział zawsze istnieje. Istotnie, rozważmy następujący protokół postępowania. Pierwszy agent prezentuje swój *mms-podział* (P_1, P_2) . Drugi agent wybiera zbiór P_j ($j \in \{1, 2\}$) o większej wartości według funkcji u_2 (lub dowolny zbiór, jeśli wartości obu zbiorów są równe). Zauważmy, że wartość ta wyniesie co najmniej $u_2(V)/2 \geq mms_2$, zatem drugi agent będzie zadowolony z uzyskanych przedmiotów. Pierwszy agent bierze zbiór, który pozostał – zauważmy, że on także będzie zadowolony, gdyż wartość jego zbioru wynosi co najmniej $\min_{j \in \{1, 2\}} u_1(P_j) = mms_1$.

Powyższą obserwację można nieco uogólnić na sytuację, kiedy agentów jest dowolnie wielu, ale wszyscy, z wyjątkiem być może jednego (powiedzmy pierwszego), mają tę samą funkcję użyteczności i , co za tym idzie, ten sam *mms-podział* $(P_1, \dots, P_n)$. Agent pierwszy wybiera ten zbiór P_j , który maksymalizuje wartość $u_1(P_j)$, zaś każdy z pozostałych agentów bierze jeden z pozostałych $n - 1$ zbiorów (każdy agent inny zbiór). Analogicznie do poprzedniego przypadku nietrudno zweryfikować, że przy takim podziale każdy z agentów odejdzie zadowolony.

Problem rozstrzygnięcia, czy *mms-sprawiedliwe* podziały dla więcej niż dwóch agentów zawsze istnieją, okazał się znacznie trudniejszy. Ostatecznie sprawdziła się tu maksyma wypowiedziana przez Noę Alona (w kontekście innej hipotezy, która wydawała się oczywista, a okazała się nieprawdziwa: hipotezy Hedetniemięgo): *czasami powodem, że coś jest bardzo trudne do pokazania, jest to, że jest to nieprawda*. Pierwszy przykład zbioru dóbr i funkcji użyteczności, dla których nie istnieje *mms-sprawiedliwy* podział, został skontrowany przez Kurokawę, Procaccia i Wanga [5]. Poniżej zaprezentujemy uproszczoną konstrukcję podaną przez Feigego, Sapira i Taubera [4]. Rozważmy zbiór przedmiotów $V = \{1, \dots, 9\}$ i trzech agentów z następującymi funkcjami użyteczności.

agent \ przedmiot	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	26	23	19	16	12	10	9	4	1
2	26	22	20	16	13	9	9	4	1
3	25	23	20	15	13	10	9	4	1

Zauważmy, że $u_1(V) = u_2(V) = u_3(V) = 120$. Rozważmy następujące trzy podziały zbioru V na trzy podzbiory:

$$\mathcal{P}_1 = (\{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}),$$

$$\mathcal{P}_2 = (\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}),$$

$$\mathcal{P}_3 = (\{1, 4\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 7, 9\}).$$

Pomocna przy ich analizie może być tabelka, gdzie w wierszu odpowiadającym podziałowi $\mathcal{P}_i$ przedstawione są wagi przedmiotów dla i -tego agenta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}_1$	26	23	19	16	12	10	9	4	1
$\mathcal{P}_2$	26	22	20	16	13	9	9	4	1
$\mathcal{P}_3$	25	23	20	15	13	10	9	4	1

Zauważmy, że dla każdego i każdy zbiór w podziale $\mathcal{P}_i$ ma dla i -tego agenta wartość 40. Ponieważ jest to dokładnie jedna trzecia wartości całego zbioru V , podział $\mathcal{P}_i$ jest mms-podziałem dla i -tego agenta, czyli $\text{mms}_i = 40$. Jednakże nietrudna, choć dość żmudna, analiza przypadków pozwala przekonać się, że w każdym podziale $(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{P}_3(V)$ istnieje i , dla którego $u_i(P_i) \leq 39$. Pokazuje to, że nie da się podzielić zbioru V w taki sposób, aby każdy z trzech agentów był zadowolony.

Powyższa konstrukcja pokazuje, że nie w każdej sytuacji mms-sprawiedliwy podział istnieje. Rozważmy jednak podział $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$, w którym

$$P_1 = \{1, 5, 9\}, \quad P_2 = \{2, 6, 7\}, \quad P_3 = \{3, 4, 8\}.$$

Pomocna może okazać się poniższa tabelka (w i -tym wierszu pokazane są odpowiednie wartości funkcji u_i).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	26				12				1
P_2		22				9	9		
P_3			20	15				4	

W tym podziale mamy $u_1(P_1) = u_3(P_3) = 39$ i $u_2(P_2) = 40$. Zatem pierwszy i trzeci agent, choć nie są w pełni zadowoleni, uzyskali *prawie* tyle, na ile liczili. Czy można coś ciekawego powiedzieć o istnieniu takich *prawie* mms-sprawiedliwych podziałów? Wróćmy do tej myśli później, a tymczasem zmieńmy nieco temat.

Podziały grafów

W dotychczas analizowanym przez nas problemie nie występowały żadne związki między przedmiotami ze zbioru V , i dowolny zbiór przedmiotów był akceptowany przez agentów, o ile tylko miał dla nich odpowiednio dużą wartość. W praktycznych sytuacjach związki pomiędzy dobrami często mają znaczenie. Przykładem może być następujący problem pojawiający się w rolnictwie. Przez wiele pokoleń rolnicy dzielili swoje pola na coraz mniejsze kawałki między swoje, często bardzo liczne, potomstwo. W wyniku tego procesu, po latach, pola zostały podzielone na bardzo dużo bardzo małych kawałków, a poszczególni właściciele posiadają gospodarstwa złożone z wielu małych, często odległych od siebie poletek. Taka sytuacja nie sprzyja oczywiście racjonalnej gospodarce rolnej. W związku

z tym dokonuje się ponownego podziału ziemi pomiędzy dotychczasowych właścicieli, czyli tzw. *komasacji*.

Dla rolników istotna jest nie tylko wartość pól, które w wyniku tego podziału otrzymują, ale również to, aby każdy z nich miał pole w jednym kawałku.

Zalóżmy więc, że zbiór dzielonych przedmiotów V jest zbiorem wierzchołków pewnego spójnego grafu G . Każdy z agentów ma funkcję użyteczności przypisującą wartości poszczególnym przedmiotom (dokładnie tak jak wcześniej). Teraz jednak każdy agent chciałby, aby otrzymane przez niego przedmioty tworzyły *spójny* podgraf grafu G . Wartość mms_i jest też zdefiniowana względem podziałów V na n spójnych części.

Zdefiniujmy ten problem formalnie. Mamy dany graf G o zbiorze wierzchołków V oraz dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ addytywną funkcję użyteczności $u_i : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Przez $\mathcal{P}_n(G)$ oznaczmy rodzinę wszystkich uporządkowanych podziałów V , w których każdy zbiór podziału indukuje spójny podgraf G . Dla każdego i definiujemy:

$$\text{mms}_i = \max_{(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(G)} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_i(P_j).$$

Znowu: mms_i oznacza minimalną łączną wartość przedmiotów, po otrzymaniu których agent numer i będzie zadowolony. Podział $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(G)$ nazywamy *mms-sprawiedliwym podziałem grafu G* , jeśli każdy agent jest zadowolony, czyli dla każdego i zachodzi $u_i(P_i) \geq \text{mms}_i$. Problem rozważany w poprzedniej sekcji jest więc szczególnym przypadkiem aktualnego, gdy G jest grafem pełnym. Nietrudno też zweryfikować, że w aktualnie rozważanym wariancie nadal działa argumentacja dowodząca istnienia mms-sprawiedliwego podziału w sytuacji, gdy wszyscy agenci, z wyjątkiem być może jednego, mają identyczną funkcję użyteczności. Prowadzi nas to do pytania: Dla jakich grafów G możemy zagwarantować istnienie mms-sprawiedliwego podziału, niezależnie od liczby agentów i ich funkcji użyteczności?

Drzewa. Okazuje się, że przykładem rodziny grafów o takiej własności są drzewa, co zostało udowodnione przez Bouvereta i in. [2]. Naszkicujemy ten dowód, ale najpierw wprowadźmy oznaczenia. Niech T będzie drzewem o zbiorze wierzchołków V i rozważmy n agentów z funkcjami użyteczności $u_i : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Wybierzmy dowolny wierzchołek $r \in V$, będziemy traktować go jako korzeń. Definiuje to dla każdej pary sąsiadujących wierzchołków relację rodzic–dziecko. Dla $w \in V$ przez V_w oznaczać będziemy podzbiór V składający się z wierzchołka w i wszystkich jego potomków w drzewie T . Zauważmy, że zbiór V_w indukuje poddrzewo T ukorzenione w w , czyli w szczególności spójny podgraf T . Co więcej, graf uzyskany z T przez usunięcie wierzchołków z V_w jest spójny (dokładniej, jest drzewem).

Dowód istnienia mms-sprawiedliwego podziału jest indukcyjny po n . Jeśli $n = 1$, czyli jest tylko jeden agent, sytuacja jest jasna: zgarnia on cały zbiór V .

Niech więc $n \geq 2$ i przypuśćmy, że każde drzewo ma mms-sprawiedliwy podział dla $n - 1$ agentów.

Zainicjujmy $w = r$. Następnie dla $i = 1, 2, \dots$ agent i -ty sprawdza, czy $u_i(V_w) \geq \text{mms}_i$. Jeśli nie, nic się nie dzieje i przechodzimy do kolejnego agenta. W przeciwnym przypadku agent i -ty wskazuje wierzchołek $w' \in V_w$ o następujących własnościach:

1. $u_i(V_{w'}) \geq \text{mms}_i$ oraz
2. spośród wszystkich wierzchołków spełniających pierwszą własność w' leży w drzewie T najniżej, czyli w największej odległości od korzenia (remisy rozstrzygamy dowolnie).

Wierzchołek w' zastępuje wierzchołek w i przechodzimy do kolejnego agenta.

Zauważmy, że w ciągu tej procedury na pewno któryś agent coś wskaże, bo w szczególności każdy byłby (bardzo) zadowolony, gdyby dostał zbiór $V_r = V$, rozpatrywany w pierwszym kroku. Teraz rozważmy wierzchołek zapisany jako w po ostatniej iteracji i niech i będzie numerem agenta, który go wskazał.

Agent i dostaje zbiór V_w , a dla pozostałych $n - 1$ agentów i drzewa indukowanego przez $V \setminus V_w$ otrzymujemy podział z założenia indukcyjnego. Dlaczego ten podział zbioru V jest mms-sprawiedliwy? Agent i na pewno będzie zadowolony, bo sam tak zadeklarował, wskazując wierzchołek w . Z drugiej strony dla każdego $j \neq i$ zbiór V_w jest zawarty w jednym z bloków mms-podziału agenta j (dlaczego?). Oznacza to, że agent j w swoim mms-podziale liczy się z utratą zbioru V_w (a nawet jego nadzbioru). Nietrudno pokazać, że wynika z tego, że dla każdego agenta $j \neq i$ najgorszy zbiór w jego mms-podziale drzewa indukowanego przez $V \setminus V_w$ między $n - 1$ agentów ma wartość co najmniej mms_j (gdzie wartość ta policzona jest dla całego zbioru V i n agentów). Zatem zbiór, przyznany mu w wywołaniu indukcyjnym, spełni jego oczekiwania.

Cykle. Zachęćmy sukcesem w przypadku drzew spójrzmy na inne grafy o prostej strukturze. Naturalnym pierwszym kandydatem są cykle. Okazuje się jednak, że w tym wypadku mms-sprawiedliwe podziały mogą nie istnieć. Zaprezentujemy konstrukcję Bouvereta i in. [2]. Tym razem mamy osiem przedmiotów ułożonych w cykl zgodnie z naturalnym porządkiem. Agentów jest czworo, przy czym funkcje użyteczności agentów 1 i 2 są równe, podobnie agentów 3 i 4. Zauważmy, że funkcje te są „cyklicznie przesunięte” względem siebie.

agent \ przedmiot	1	2	3	4	5	6	7	8
1 i 2	1	4	4	1	3	2	2	3
3 i 4	4	4	1	3	2	2	3	1

Rozważmy dwa podziały zbioru przedmiotów na cztery spójne bloki, przedstawione poniżej:

podział	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}_1$	1	4	4	1	3	2	2	3
$\mathcal{P}_2$	4	4	1	3	2	2	3	1

Zauważmy, że w podziale $\mathcal{P}_1$ każdy agent dostaje jedną czwartą łącznej wartości wszystkich przedmiotów według funkcji użyteczności $u_1 = u_2$, a w podziale $\mathcal{P}_2$ każdy agent dostaje jedną czwartą łącznej wartości wszystkich przedmiotów według funkcji użyteczności $u_3 = u_4$. Zatem podział $\mathcal{P}_1$ jest mms-podziałem dla agentów 1 i 2, a podział $\mathcal{P}_2$ jest mms-podziałem dla agentów 3 i 4. Dla każdego i wartość mms_i wynosi więc 5.

Przypuśćmy, że w rozważanym przypadku istnieje mms-sprawiedliwy podział $\mathcal{P}$. W podziale tym każdy agent powinien dostać przedmioty, którym przypisuje wartość co najmniej 5. Skoro wartość każdego przedmiotu nie przekracza 4, w podziale $\mathcal{P}$ każdy agent dostaje co najmniej dwa (czyli dokładnie dwa) przedmioty. Zatem $\mathcal{P}$ jest albo podziałem $\mathcal{P}_1$, albo podziałem $\mathcal{P}_2$. Jest to sprzeczność, gdyż podział $\mathcal{P}_1$ nie jest zadowalający dla jednego spośród agentów 3 i 4, a podział $\mathcal{P}_2$ nie jest zadowalający dla jednego spośród agentów 1 i 2.

Zwróćmy uwagę, że konstrukcja dla cyklu nie oznacza, że jeśli graf G zawiera cykl o ośmiu wierzchołkach, to nie istnieje dla niego mms-sprawiedliwy podział. Co prawda, ustawiając wartości funkcji użyteczności dla wierzchołków spoza cyklu na 0, możemy zasygnalizować, że nie mają one wartości dla żadnego z agentów, ale te dodatkowe wierzchołki (i krawędzie) tworzą nowe połączenia, przez co rodzina rozważanych podziałów wierzchołków cyklu może być większa.

Co dalej?

Wspomnieliśmy wcześniej, że w zaprezentowanym przykładzie, gdzie nie istnieje mms-sprawiedliwy podział (dla grafu pełnego), każdy agent i otrzymuje przedmioty o sumarycznej wartości *prawie* równej swojej wartości mms_i . Prowadzi to do następującego wariantu problemu. Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną grafów. Wyznacz największą stałą $\alpha_{\mathcal{G}} \in [0, 1]$ (zależną tylko od $\mathcal{G}$), dla której prawdziwe jest następujące stwierdzenie: Jeśli przedmioty są wierzchołkami grafu z rodziny $\mathcal{G}$, to niezależnie od liczby agentów i ich funkcji użyteczności istnieje podział gwarantujący każdemu agentowi i przedmioty, którym przypisuje on łączną wartość co najmniej $\alpha_{\mathcal{G}} \cdot \text{mms}_i$. Zaprezentowana wcześniej konstrukcja pokazuje, że jeśli $\mathcal{G}$ jest rodziną grafów pełnych, to $\alpha_{\mathcal{G}} \leq \frac{39}{40}$. Okazuje się, że w tym samym przypadku mamy $\alpha_{\mathcal{G}} \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{3836}$, co pokazali Akrami i Garg [1]. Tylko dla niewielu spośród innych klas grafów znane są podobne oszacowania.

Literatura

- [1] Akrami, H., & Garg, J. (2024). „Breaking the 3/4 barrier for approximate maximin share”. W Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2024, str. 74–91.
- [2] Bouveret, S., Cechlárová, K., Elkind, E., Igarashi, A., & Peters, D. (2017). „Fair division of a graph”. W Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2017, str. 135–141.
- [3] Budish, E. (2011). „The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes”. *Journal of Political Economy*, 119(6), str. 1061–1103.
- [4] Feige, U., Sapir, A., & Tauber, L. (2022). „A tight negative example for mms fair allocations”. W Proceedings of 17th International Conference, WINE 2021, str. 355–372.
- [5] Kurokawa, D., Procaccia, A. D., & Wang, J. (2018). „Fair enough: Guaranteeing approximate maximin shares”. *Journal of the ACM*, 65(2), str. 1–27.



Bartłomiej PAWLIK

Skoro o znaczkach mowa, nie sposób przy tej okazji nie wspomnieć, że pewne małżeństwo matematyków z Krakowa słynie m.in. z bardzo pokażnej kolekcji znaczków pocztowych o tematyce matematycznej.

Artykuł został napisany dość nonszalancko – Baker podał listę wzorów, nie dowodząc ani jednego z nich. W kolekcji znajduje się około trzydziestu wzorów z błędami.

Jedną z najbardziej ludzkich cech jest kolekcjonerstwo. Gromadzenie i porządkowanie przedmiotów może dawać poczucie ładu w – bywa, że dość chaotycznej – codzienności. Ludzie od niepamiętnych czasów kolekcjonują najrozmaitsze rzeczy: od znaczków pocztowych po tropy z wizerunkami świętych.

Amerykański podróżnik i dziennikarz Marcus Baker, jeden z założycieli *National Geographic*, w 1885 roku – kilka lat przed powstaniem tego popularnego czasopisma – zasłynął jako osobliwy kolekcjoner. W prestiżowym *Annals of Mathematics* opublikował dwuczęściowy artykuł pod tytułem *A collection of formulæ for the area of a plane triangle*, zawierający 110 różnych wzorów na pole trójkąta (zliczając je zgodnie z zasadą mówiącą, że pole trójkąta wyrażone przez połowę iloczynu długości boku i opadającej na niego wysokości to jeden wzór, a nie trzy!).

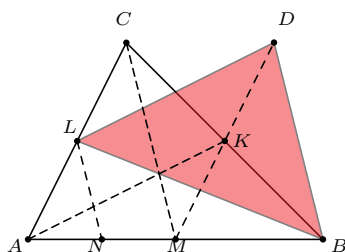
Mimo kilku błędów kolekcja jest bardzo urokliwa. Zaczyna się od trzech wariantów wzoru Herona – wersji z bokami (czyli tej najbardziej znanej), po której zaprezentowano warianty ze środkowymi i z wysokościami. Mamy zatem

$$1. \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdzie a, b, c są długościami boków, a s oznacza połowę obwodu. Następnie, jeżeli m_a, m_b i m_c to środkowe odpowiednich boków, a σ to połowa ich sumy, to

$$2. \Delta = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}.$$

Poprawność tego wzoru można sprawdzić na przykład poprzez porównanie z polem trójkąta o bokach m_a, m_b i m_c . Istotnie, na rysunku na marginesie punkty K, L i M są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC , punkt N to środek odcinka AM , zaś punkt D to odbicie symetryczne punktu M względem K . Boki trójkąta LBD przystają do odpowiednich środkowych trójkąta ABC . Jednocześnie pole LBD jest równe polu NBD , a ono z kolei jest równe $3/4$ pola trójkąta ABC . Uzupełnienie szczegółów tego rozumowania pozostawiam Czytelnikowi.



Trzeci wzór Herona został przez Bakera zapisany w trochę innym stylu:

$$3. \Delta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}.$$

Można go uzasadnić poprzez zastosowanie we wzorze Herona podstawień typu $h_a = \frac{2\Delta}{a}$.

Trzeci wzór w duchu dwóch poprzednich można wyrazić następująco: Jeżeli $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}$ i $\frac{1}{h_c}$ to odwrotności wysokości trójkąta, a $\frac{1}{h}$ to połowa ich sumy, to pole trójkąta wynosi:

$$\Delta = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_c}\right)}}.$$

Ze względu na ograniczenia przestrzenne Kąta Otwartego pominiemy 106 formuł i przedstawimy ostatni okaz z listy Bakera:

$$110. \Delta = \frac{2R}{r} \cdot N,$$

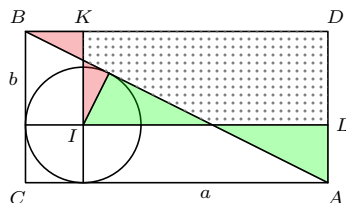
gdzie r i R to promienie okręgów, odpowiednio, wpisanego i opisanego, oraz N to pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu wpisanego z bokami trójkąta.

Czytelnika Zaintrygowanego tą opowieścią zachęcam do odnalezienia artykułu Bakera i samodzielnego sprawdzenia, co się kryje między trzecim a sto dziesiątym wzorem w tej osobliwej kolekcji.

Nietypowy wzór na pole

Patryk RAGAN*

* V Liceum Ogólnokształcące
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie



był prostokątem, ponadto przez środek I okręgu wpisanego poprowadźmy proste równoległe do przyprostokątnych trójkąta. Zaznaczone na rysunku pary trójkątów różowych i zielonych są przystające (cecha kąt-bok-kąt). Z jednego trójkąta różowego, jednego zielonego i zakropkowanego pięciokąta można złożyć zarówno prostokąt $KILD$ o polu ab , jak i trójkąt BAD , przystający do trójkąta ABC . Prawda, że ładne?

Czy wiedzieliście, że pole trójkąta prostokątnego można obliczyć ze wzoru $P = ab$? Nie, nie zapomnieliśmy tutaj o dzieleniu przez 2. I nie, ani a , ani b nie są tu sztucznymi wielkościami w stylu „długość boku podzielona przez $\sqrt{2}$ ”. Nie są to również żadne magiczne długości, lecz po prostu odległości końców przeciwprostokątnej od punktu jej styczności z okręgiem wpisanym. Na pierwszy rzut oka wzór może wydawać się podejrzanie prosty, jak się jednak za chwilę okaże, kryje się za nim elegancka, elementarna geometria.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym w wierzchołku C i niech a i b będą odległościami punktów, odpowiednio, A i B od punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt. Wybierzmy punkt D tak, by $ACBD$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Klub 44 F



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
798 ($WT = 2,97$), 799 ($WT = 3,01$)
z numeru 5/2025

Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Jan Zambrzycki	Białystok	4 – 37,68
Ryszard Woźniak	Kraków	34,00
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3 – 32,28
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6 – 25,64
Krzysztof Zygan	Lubin	22,09
Tomasz Wietecha	Tarnów	18 – 20,06
Paweł Kubit	Kraków	19,62

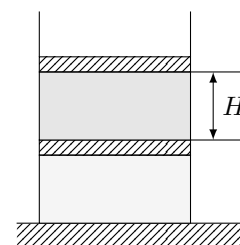
Zadania z fizyki nr 808, 809

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2026

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

808. Pionowe naczynie zawiera dwie porcje gazu w stanie równowagi oddzielone od siebie i otaczającej przestrzeni dwoma jednakowymi ciężkimi tłokami. W górnej części naczynia znajduje się tlen, w dolnej hel. Na zewnątrz naczynia jest próżnia, gaz nie oddaje ciepła do otoczenia. Przewodnictwo cieplne tłoka rozdzielającego naczynia jest bardzo małe.

Na początku objętości gazów są jednakowe, a odległość między tłokami wynosi H . Hel jest wolno ogrzewany i jego objętość rośnie dwukrotnie. Jaka będzie odległość między tłokami po długim czasie, gdy osiągnięty zostanie ponownie stan równowagi? Ciepło przekazywane do górnej części naczynia w czasie ogrzewania możemy zaniedbać.



809. W ustalonym położeniu obiektywu w aparacie fotograficznym głębia ostrości obejmuje zakres odległości przedmiotów od $d_1 = 15$ m do $d_2 = 30$ m. Po zmniejszeniu otworu przesłony dolna granica głębi ostrości osiągnęła wartość $d'_1 = 10$ m. Znaleźć jej górną granicę.

Zadania z matematyki nr 911, 912

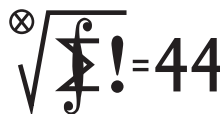
Redaguje Marcin E. KUCZMA

911. Dane są liczby naturalne m (parzysta), n (nieparzysta); $n \geq 3$. Prostokąt o bokach długości m, n , podzielony na mn pól (kwadratów jednostkowych) należy pokryć płytkami dwóch typów L i N , nakrywającymi (odpowiednio) trzy oraz cztery pola: płytka typu L to kwadrat 2×2 z usuniętym jednym polem; płytka typu N to prostokąt 3×2 z usuniętymi dwoma przeciwległymi polami narożnymi (dotykającymi końców przekątnej prostokąta 3×2). Płytki mogą być dowolnie obracane, ale nie mogą na siebie nachodzić ani wystawać poza obręb danego prostokąta $m \times n$. Wyznaczyć minimalną liczbę płytek typu L , jaka może być użyta w takim parkietażu.

912. W czworokącie $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości, a prosta przechodząca przez środki tych krawędzi jest prostopadła do każdej z nich. Udowodnić, że dla każdej liczby $r > 0$ istnieje taka sfera o promieniu r , że dla wszystkich punktów P , leżących na tej sferze, suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ ma jednakową wartość.

Zadanie 912 jest nieznacznie rozszerzoną wersją propozycji, jaką przysłał pan Mirosław Matłęga ze Skoczowa.

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
901 ($WT = 1,33$) i 902 ($WT = 1,90$)
z numeru 5/2025

Krzysztof Maziarz	London	44,20
Jerzy Cisło	Wrocław	43,28
Szymon Kitowski		41,11
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Barbara Mroczek		40,24
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Mikołaj Znamierowski		37,87
Marian Łupieżowiec	Gliwice	37,09
Roksana Słowik		35,92
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,49
Stanisław Bednarek	Łódź	34,43

Pan Krzysztof Maziarz: drugie okrażenie, czekamy na dalsze!



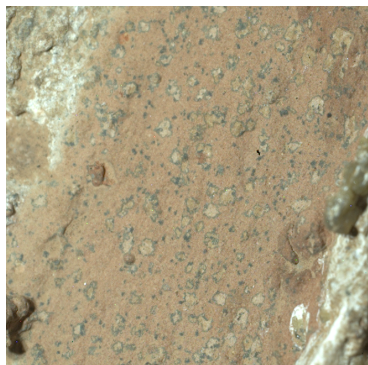
Rys. 1. Krater Jezero – miejsce lądowania łazika Perseverance. Źródło: ESA/DLR/FU-Berlin



Rys. 2. W lipcu 2024 roku z widocznego na zdjęciu otworu została pobrana próbka, w której odnaleziono biosygnatury. Źródło: NASA/JPL-Caltech



Rys. 3. Pojemnik z próbką pozostawiony na powierzchni Marsa. Źródło: NASA/JPL-Caltech/MSSS



Rys. 4. Plamy na marsjańskiej skale. Mogły one powstać w wyniku obecności mikroorganizmów. Źródło: NASA/JPL-Caltech

Napisane na podstawie Joel A. Hurowitz
"Redox-driven mineral and organic
associations in Jezero Crater, Mars",
Nature volume 645, pages 332–340
(2025).

Zespół NASA Perseverance ogłosił 10 września, że we fragmentach marsjańskiej skały odkryto potencjalne ślady życia istniejącego na Marsie miliardy lat temu. Wyniki nie są jednak rozstrzygające. A dokładniej rzecz ujmując, to testy, które jesteśmy w stanie przeprowadzić na Marsie za pomocą instrumentów łazika Perseverance, nie są wystarczająco dokładne. Aby ustalić, czy minerały znalezione w marsjańskiej skale, powstały w wyniku działania mikroorganizmów, czy też w wyniku innych procesów, próbki muszą zostać dostarczone na Ziemię w celu przeprowadzenia dalszych analiz. To jednak raczej się nie stanie w najbliższej przyszłości.

Co właściwie odkryto?

Łazik Perseverance od 2021 roku przemierza krater Jezero (rys. 1), co jakiś czas wierząc otwory i zbierając próbki podłoża. Próbkę tę są wstępnie analizowane przez instrumenty łazika, pakowane w pojemniki i pozostawiane na powierzchni Marsa z zamiarem pozbierania ich i dostarczenia w przyszłości do laboratoriów naukowych na Ziemi (rys. 2 i 3). Miejsce, w którym zbierane są próbki, nie jest przypadkowe. Naukowcy sądzą, że krater Jezero był kiedyś zalany wodą i stanowił starożytną deltę rzeki. Jest to idealne miejsce na poszukiwania życia, które w przeszłości mogło istnieć na Marsie.

Wstępne analizy składu podłoża wykazały obecność gliny i mułu, które na Ziemi doskonale zachowują ślady mikroflory. Są one również bogate w węgiel organiczny, siarkę, utlenione żelazo (rdza) i fosfor. Wszystkie te składniki mogą stanowić bogate źródło energii dla mikroorganizmów. Jednak sam fakt istnienia związków chemicznych przyjaznych życiu mikroorganizmów jeszcze nie jest dowodem na ich obecność. To tylko pierwsza część układanki.

Naukowców zaintrygowało coś innego – liczne kolorowe plamy na skale (rys. 4), które mogły zostać pozostawione przez mikroorganizmy, wykorzystujące surowce zawarte w skale, jako źródło energii. Plamy zawierają ślady dwóch minerałów bogatych w żelazo: wiwianitu i greigitu. Wiwianit często występuje na Ziemi w osadach, torfowiskach i wokół rozkładającej się materii organicznej. Z kolei greigit jest wytwarzany przez niektóre formy życia mikrobiologicznego na Ziemi. Istnienie tych materiałów w tym samym miejscu może być śladem życia mikrobiologicznego.

Ale żeby nie było zbyt kolorowo. Minerały te mogą również powstawać w sposób abiotyczny, czyli bez udziału organizmów żywych. Na przykład poprzez utrzymywanie się wysokich temperatur i/lub działanie kwasów. Badania pokazują jednak, że skały w okolicy próbki nie noszą śladów działania żadnego z tych elementów. Więc bardziej prawdopodobne jest działanie mikroorganizmów żyjących w delcie ówczesnej rzeki. Oczywiście nie możemy tego potwierdzić z całą pewnością.

Jeżeli jednak kiedykolwiek uda się sprowadzić próbki na Ziemię, udowodnienie, czy wiwianit i greigit z marsjańskiej skały są pochodzenia organicznego, jest możliwe z wykorzystaniem istniejących technologii. Jak piszą autorzy publikacji naukowej opisującej wyniki badań: „Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że analiza próbki (...) przy użyciu wysokoczułych instrumentów na Ziemi umożliwi wykonanie pomiarów niezbędnych do określenia pochodzenia zawartych w niej minerałów i substancji organicznych”. Potencjalnie mamy więc próbkę skały, dzięki której potwierdzimy istnienie życia na innej planecie. A byłoby to odkrycie o niewyobrażalnym wręcz znaczeniu. Fakt, że rozwinęło się niezależnie na dwóch planetach tego samego układu słonecznego oznaczałoby, że istnienie mikroorganizmów jest powszechne. Może nawet udałoby nam się ustalić, czy mikroorganizmy Marsa różnią się od Ziemijskich?

Niestety znów pozostaje nam czekać. Misja odzyskania i transportu próbek marsjańskich skał na Ziemię jest planowana, ale nie ma jeszcze nawet przybliżonej daty startu. Osobiście mam nadzieję, że jeszcze będzie mi dane zobaczyć dowód, jeżeli nie na istnienie marsjan, to przynajmniej marsjańskich mikroorganizmów.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



21 grudnia Słońce osiągnie najbardziej na południe wysunięty punkt ekliptyki i zacznie się astronomiczna zima oraz półroczny okres, w którym każdy kolejny dzień jest dłuższy. Najwcześniejszy zachód Słońca nastąpi jednak już 13 dnia miesiąca, a jego najpóźniejszy wschód w Sylwestra.

Przez pierwszą połowę miesiąca rano nisko nad południowo-wschodnim widnokresem można próbować dostrzec planetę Merkury, która 8 grudnia osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 21° . Początkowo na godzinę przed wschodem Słońca planeta osiągnie wysokość 6° . Planety wewnętrzne podczas widoczności porannej dążą do koniunktacji górnej ze Słońcem, stąd zmniejsza się wtedy ich średnica kątowa i rośnie faza tarczy. W przypadku Merkurego rośnie też jego jasność. Do połowy grudnia planeta pojaśnieje od $+0,1^m$ do $-0,5^m$, jej tarcza zmaleje do poniżej $6''$, faza zaś przekroczy 82%. W dniach 14 i 15 grudnia Merkury zbliży się na mniej niż 1° do gwiazdy Graffias, najbardziej na północ wysuniętej jasnej gwiazdy Skorpiona. Trzy dni później natomiast 14° na lewo od niego pokaże się sierp Księżyca w fazie 7%.

Srebrny Glob rozświetli początek i koniec miesiąca, przechodząc w nocy z 4 na 5 grudnia przez pełnię. Noc wcześniej wejdzie on do gwiazdozbioru Byka, ponownie zakrywając Plejady. Tym razem całe zjawisko da się obserwować z Polski. Seria zakryć zacznie się około godziny 4:20 i potrwa aż do około 6:15, przy jaśniejącym już niebie, gdy do zachodu obu ciał niebieskich pozostanie niewiele czasu. Dodatkowo przez Polskę przebiegnie południowa granica zakrycia części gwiazd gromady (w tym jasnych Merope i Atlas) i w niektórych miejscach naszego kraju dojdzie do ich zakrycia brzegowego. Takie zakrycie jest szczególnie atrakcyjne dla obserwatorów, gdyż gwiazda wtedy pojawia się i znika, przechodząc za i między księżycowymi górami.

Na południe od Plejad swoją pętlę na niebie kreśli planeta Uran, która w trzeciej dekadzie listopada przeszła przez opozycję względem Słońca. Uran porusza się ruchem wstecznym i 7 grudnia przejdzie zaledwie $7'$ na południe od gwiazdy 6. wielkości 14 Tau, 22 grudnia natomiast $15'$ na południe od jaśniejszej o $0,5^m$ gwiazdy 13 Tau. Sama planeta świeci z jasnością $+5,6^m$ i można ją mylić ze wspomnianymi gwiazdami. Uran przecina południk lokalny około godziny 22.

7 grudnia Księżyc wejdzie w towarzystwie Kastora i Polluksa, dwóch najjaśniejszych gwiazd Bliźniąt oraz Jowisza. Jego faza zmniejszy się do tego momentu do 88%. Największa planeta Układu Słonecznego zbliża się do styczniowej opozycji i do końca miesiąca jej blask urośnie do $-2,7^m$, średnica kątowa zaś do $46''$. Przez cały miesiąc Jowisz przesunie się o 3° w kierunku mającej jasność obserwowaną $+3,5^m$ gwiazdy Wasat (δ Gem), zbliżając się doń na $2,5^\circ$.

11 grudnia naturalny satelita Ziemi przejdzie przez ostatnią kwadrę, a noc wcześniej wejdzie 5° od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy w Lwie. Do rana odległość między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do $1,5^\circ$, ale pozostaną one nad widnokresem prawie do południa i od około 8:45 do godziny 9:20 dojdzie do zakrycia Regulusa przez Księżyc. Powinno dać się je dostrzec przez większe teleskopy.

Na porannym niebie Srebrny Glob pozostanie aż do wspomnianego już spotkania z Merkurym 17 grudnia, by przejść przez now 20 dnia miesiąca. W tym czasie warto wspomnieć o jego zbliżeniu na 6° do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny 14 grudnia, gdy nad ranem faza jego tarczy spadnie do 28%.

W kolejnych dniach Księżyc rozgości się na niebie wieczornym, gdzie 27 grudnia przejdzie przez I kwadrę i spotka się z parą planet Saturn-Neptun. Do końca miesiąca Saturn zmniejszy dystans do Neptuna do $3,5^\circ$. Jednocześnie jasność Saturna spadnie do $+1,1^m$, przy średnicy tarczy $17''$. Stosunek małej do wielkiej osi pierścieni planety w grudniu wynosi 0,01, dlatego w mniejszym sprzecz są one trudno dostrzegalne. Neptun świeci blaskiem $+7,9^m$ i do jego zaobserwowania potrzebny jest teleskop. Obie planety znajdują się na pograniczu Wodnika i Ryb, tuż na północ od charakterystycznego układu gwiazd 5. i 6. wielkości 20, 24, 27, 29, 30 i 33 Psc, przypominającego kształtem mniejszy i słabszy Mały Wóz.

Ostatniego dnia miesiąca dojdzie do ponownego zakrycia Plejad przez Księżyc. Niestety tym razem Europa ma mniej szczęścia i do zjawiska dojdzie po południu naszego czasu. O zmierzchu tarcza Księżyca w fazie 89% pokaże się już 1° na wschód od tej gromady gwiazd.

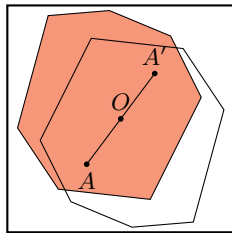
W grudniu, jak co roku, promieniują dwa znaczące roje meteorów: Geminidy, przechodzące przez maksimum aktywności w okolicy 14 grudnia oraz Ursydy, których maksimum przypada 8 dni później. Radiant Geminidów znajduje się kilka stopni na północny zachód od Kastora, drugiej co do jasności gwiazdy Bliźniąt, i góruje około północy na wysokości ponad 70° . Można spodziewać się wyraźnie ponad 100 zjawisk na godzinę, a Księżyc przeszkodzi dopiero nad samym ranem. Radiant Ursydów znajduje się kilka stopni na zachód od gwiazdy Kochab w Małej Niedźwiedzicy. Tutaj zjawisk jest znacznie mniej, zaledwie około 10 na godzinę. Księżyc, tuż po nowiu, nie przeszkodzi w ich obserwacjach.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 3



Rozwiązanie zadania M 1837.



Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną kopią $\mathcal{P}$ umieszczoną w kwadracie $\mathcal{K}$. Rozważmy figurę $\mathcal{R}'$ będącą obrazem figury wypukłej $\mathcal{R}$ przy symetrii względem środka O kwadratu. Wówczas $\mathcal{R}'$ znajduje się wewnątrz $\mathcal{K}$ oraz zgodnie z założeniem $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ mają punkt wspólny A . Obraz A' punktu A przy symetrii względem O również znajduje się w przecięciu wielokątów $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$. Ponieważ punkt O leży na odcinku łączącym dwa punkty należące do wielokąta wypukłego $\mathcal{R}$, sam też do niego należy. Pokazaliśmy, że dowolna kopia wielokąta $\mathcal{P}$ umieszczona w kwadracie $\mathcal{K}$ zawiera punkt O , skąd w prosty sposób wynika teza.



Rozwiązanie zadania M 1838.

Niech dla $m = 1, 2, \dots, n-1$

$$S_m := \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^n a_i$$

i przyjmijmy $S_n = -S_0 = \sum_{i=1}^n a_i$. Wtedy

$$S_m - 2a_m = S_{m-1}.$$

Rozpatrzmy ciąg

$$S_n, S_{n-1}, \dots, S_1, S_0.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $S_n > 0$. Wówczas $S_0 < 0$, możemy zatem znaleźć takie $i \geq 1$, że $S_i \geq 0 \geq S_{i-1}$.

Przypuśćmy, że $S_i = |S_i| > |a_i|$ i $-S_{i-1} = |S_{i-1}| > |a_i|$. Ponieważ $S_i - 2a_i = S_{i-1}$, to $-S_i + 2a_i > |a_i|$, więc $2a_i > S_i + |a_i| > 2|a_i|$, co jest niemożliwe.



Rozwiązanie zadania M 1839.

Założmy przeciwnie, czyli

$$\omega(an+c) < \omega(bn+c).$$

dla dowolnej liczby całkowitej $n > 0$. Dla ustalonej liczby całkowitej $k > 0$, w powyższej nierówności, podstawiając za n liczby

$$a^{k-1}, a^{k-2}b, a^{k-3}b^2, \dots, ab^{k-2}, b^{k-1},$$

dostajemy ciąg nierówności

$$\omega(a^k+c) < \omega(a^{k-1}b+c) < \dots < \omega(b^k+c).$$

Wynika stąd, że $\omega(b^k+c) \geq k+1$. Ponieważ iloczyn $k+1$ liczb pierwszych jest większy niż $k!$, więc

$$k! < b^k + c < b^k + c^k < (b+c)^k.$$

Jednakże

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty \quad (\text{sprawdź to!}),$$

więc $\sqrt[k]{k!}$ dla dużych k przekracza $b+c$ – sprzeczność.



Rozwiązanie zadania F 1133.

W komorze silnika raketowego następuje bardzo gwałtowne spalanie paliwa. Gazowe produkty tego spalania wypływają z dużą prędkością przez dyszę silnika. Prędkość u , z jaką wylatują z dyszy, odpowiada w przybliżeniu średniej prędkości cząsteczek gazu – produktu spalania – o temperaturze T panującej w komorze silnika. Na podstawie twierdzenia o ekwipartycji energii znamy średnią energię kinetyczną cząsteczek gazu:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT.$$

W powyższym wzorze m oznacza masę cząsteczki, a k stałą Boltzmanna. Otrzymujemy oszacowanie:

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

W ostatniej równości R oznacza uniwersalną stałą gazową, $R = 8,3145 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$, a μ molową masę produktów spalania. Wynika stąd, że produkty spalania powinny być jak „najlżejsze” (o małej wartości μ), a temperatura T w komorze spalania powinna być jak najwyższa. Maksymalna wartość temperatury ograniczana jest przez wytrzymałość ścianek silnika – zwykle niewielkie kilka tysięcy kelwinów. W silniku RS-25 napędzającym promy kosmiczne (Space-Shuttle) paliwem jest mieszanina ciekłego tlenu (O_2) i wodoru (H_2). Produktem spalania jest woda (H_2O) o molowej masie $\mu = 18 \text{ g}$. W komorze silnika (poza atmosferą) osiągnięta jest temperatura około 3250 K. Według naszego oszacowania $u \approx 2,1 \text{ km/s}$. W rzeczywistości osiągnięta prędkość gazów to około 4,4 km/s. Różnica wynika głównie z przemian stanu gazu zachodzących w odpowiednio ukształtowanej dyszy silnika (tzw. dyszy Laval’a) podczas wypływu gazu zwiększających uzyskiwaną prędkość.



Rozwiązanie zadania F 1134.

Zgodnie z tzw. wzorem Ciołkowskiego prędkość rakiety o masie początkowej m_0 wzrasta o Δv , zgodnie ze wzorem:

$$\Delta v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right),$$

w którym u oznacza prędkość gazów wyrzucanych przez silnik, a m_f masę końcową rakiety. Oznacza to, że po osiągnięciu I prędkości kosmicznej, $\Delta v = v_1$, masa rakiety m_f będzie wynosiła:

$$m_f = m_0 \exp \left(-\frac{v_1}{u} \right).$$

Stosunek masy zużytego paliwa $m_0 - m_f$ do masy początkowej m_0 wyniesie więc:

$$\frac{m_0 - m_f}{m_0} = 1 - \exp \left(-\frac{v_1}{u} \right).$$

Liczbowo, dla danych z treści zadania, stosunek masy paliwa do początkowej masy rakiety $(m_0 - m_f)/m_0 \approx 0,865$. Podczas startu z powierzchni Ziemi, ze względu na konieczność pokonania przyciągania ziemskiego i oporu powietrza, stosunek ten byłby jeszcze bliższy jedności.



Nierówność Muirheada

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem o jednej z nierównościowych „armat” – nierówności Muirheada. Niektóre używane tu pojęcia i oznaczenia są zaczerpnięte z poprzedniego kącika, więc zachęcam Czytelnika do spojrzenia tam w pierwszej kolejności. Odcinek częściowo bazuje na pracy licencjackiej, którą w 2016 roku pod moją opieką napisał Marek Milwicz, a także na artykule *On uses and applications of Muirhead's Inequality* (*Parabola* 58(3), 2022), w którym można znaleźć jeszcze więcej zadań z nierównością Muirheada w roli głównej.

Rozważmy zbiór wszystkich n -wyrazowych nierosnących ciągów liczb całkowitych nieujemnych o sumie wyrazów równej s – oznaczamy go przez $\mathcal{P}(n, s)$. Na tym zbiorze określamy porządek $\preceq$ w następujący sposób:

$$(a) \preceq (b) \iff \sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ze względu na przynależność obu ciągów do $\mathcal{P}(n, s)$ zachodzi jeszcze równość $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, która często jest dodawana do definicji tego porządku. W powyższej sytuacji mówimy, że ciąg (b) *majoryzuje* ciąg (a) . Jeśli dodatkowo $(a) \neq (b)$, to wówczas piszemy $(a) \prec (b)$ (ciąg (b) *ściśle majoryzuje* ciąg (a)). Ponadto jeżeli $(a) \prec (b)$ oraz nie istnieje ciąg (c) , który by spełniał

warunek $(a) \prec (c) \prec (b)$, to mówimy, że ciąg (b) *majoryzuje* ciąg (a) *bezpośrednio*, co oznaczamy $(a) \triangleleft (b)$.

Z rysunku poniżej, z lewej strony, ilustrującego ten porządek dla zbioru $\mathcal{P}(3, 8)$, można wyczytać między innymi, że: $(5, 3, 0) \prec (7, 1, 0)$ oraz $(4, 3, 1) \triangleleft (4, 4, 0)$. Natomiast żaden z ciągów, $(4, 4, 0)$ ani $(6, 1, 1)$, nie majoryzuje drugiego – dlatego mamy tu tylko częściowy porządek. Nadeszła pora na:

Nierówność Muirheada. Niech $(a), (b) \in \mathcal{P}(n, s)$ oraz $(a) \preceq (b)$. Wówczas

$$W_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq W_{b_1, b_2, \dots, b_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dla wszystkich $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

Cudowny dowód tego twierdzenia nie mieści się niestety w ciasnym kąciku, więc jedynie streszczę go w kilku krokach. Odtworzenie pełnego dowodu Czytelnik może potraktować jako ćwiczenie duchowe. Zakładamy, że $(a), (b) \in \mathcal{P}(n, s)$ dla ustalonych $n \geq 2$ i $s > 0$.

(1) Dla $(a) \preceq (b)$ istnieją ciągi $(c)^{(1)}, (c)^{(2)}, \dots, (c)^{(k)}$ spełniające warunek: $(a) = (c)^{(1)} \triangleleft (c)^{(2)} \triangleleft \dots \triangleleft (c)^{(k)} = (b)$, więc wystarczy ograniczyć dowód do $(a) \triangleleft (b)$.

(2) Jeśli $(a) \neq (b)$, to $a_i \neq b_i$ oraz $a_j \neq b_j$ dla pewnych $i \neq j$ (czyli ciągi (a) i (b) różnią się w co najmniej dwóch miejscach). Jeżeli $(a) \triangleleft (b)$, to ciągi (a) , (b) różnią się w dokładnie dwóch miejscach.

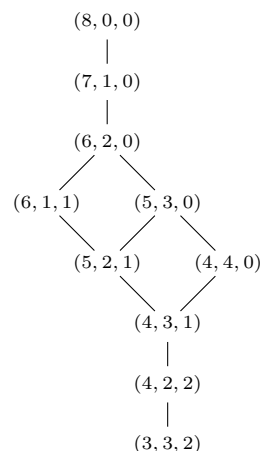
(3) Dla liczb rzeczywistych $x, y > 0$ oraz liczb całkowitych dodatnich $p \geq q$ zachodzi nierówność $x^p y^q + x^q y^p \leq x^{p+1} y^{q-1} + x^{q-1} y^{p+1}$. Teraz wystarczy skorzystać z ostatniej części punktu (2).

Nierówność Muirheada łatwo uogólnić na wykładniki całkowite, a nawet wymierne. W tym celu wystarczy zauważyć, że dodanie tej samej stałej do wszystkich wyrazów ciągów nie wpłynie na hierarchię między nimi, a tylko zmieni zbiór $\mathcal{P}$, w którym je porównujemy. Podobnie jest z mnożeniem wszystkich wyrazów ciągów przez jakąś stałą. Jeśli mamy nierówność z wykładnikami całkowitymi, z których najmniejszym jest $w < 0$, to wystarczy obustronnie pomnożyć nierówność przez $(x_1 x_2 \dots x_n)^{-w}$. Jeśli wykładniki nie są całkowite, ale są wymierne, to wystarczy dokonać podstawienia $x_i = (x'_i)^W$, w którym W oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników wszystkich wykładników w wyjściowej nierówności.

Zadania

Uwaga. Wszystkie poniższe nierówności należy wykazać dla $x, y, z > 0$.

- $(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz$.
- $x+y+z \leq \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$.
- $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (nierówność Nesbitta).
- $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq 3 \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$.
- Nierówności między średnimi: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową dla zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.
- $\frac{y^4+z^4}{yz(y^3+z^3)} + \frac{z^4+x^4}{zx(z^3+x^3)} + \frac{x^4+y^4}{xy(x^3+y^3)} \geq 1$, przy założeniu $xyz = yz + zx + xy$ (57 OM).
- $\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$, przy założeniu $xyz = 1$ (IMO 1995).
- Czy którakolwiek z nierówności: $[5 \ 2 \ 1] \geq [4 \ 4 \ 0]$ lub przeciwna, jest prawdziwa dla wszystkich $x, y, z > 0$?



Wskazówki do zadań

- Po wymnożeniu nawiasów i uporządkowaniu otrzymamy $[2 \ 1 \ 1] \leq [1 \ 1 \ 1]$.
- Po pomnożeniu stronami przez xyz i zrobieniu porządku dostaniemy $[2 \ 1 \ 1] \leq [1 \ 1 \ 1]$.
- Po obustronnym pomnożeniu przez mianowniki nierówność sprowadza się do $[3 \ 0 \ 0] \leq [2 \ 1 \ 0]$.
- Mozna przekształcić do $[6 \ 0 \ 0] + 2[4 \ 2 \ 0] \geq 3[4 \ 1 \ 1]$.
- Postępowanie jest standardowe, tylko wykładniki są niecałkowite, ale tym się nie trzeba przejmować.
- Ujednostyniamy nierówność, mnożąc lewą stronę przez xyz , a prawą przez $yz + zx + xy$. Potem można sprowadzić nierówność do $[7 \ 4 \ 0] \geq [6 \ 4 \ 1]$.
- Jeśli spełniony jest warunek $xyz = 1$, to dla dowolnej stałej t mamy $[a_1 \ a_2 \ a_3] = [a_1 - t \ a_2 - t \ a_3 - t]$. Nierówność sprowadza się do $[4 \ 4 \ 0] + 2[3 \ 3 \ 2] \geq [3 \ 3 \ 4] + [4 \ 4 \ 4]$. Teraz wystarczy zauważyć, że $[5 \ 4 \ 3] = [\frac{5}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{3}{2}] \geq [\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{3}{2}]$.
- Zadana.



48. KONKURS UCZNIOWSKICH PRAC Z MATEMATYKI IM. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8.

Mówiąc krótko: należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!



TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:
30 KWIETNIA 2026 ROKU



Regulamin konkursu, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:

www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich



deltami@mimuw.edu.pl
f Delta.czasopismo