

delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 4 (623) 2026

CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Czterej jeźdźcy
AI-pokalipsy

s. 4

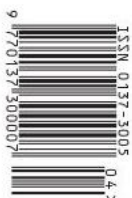
DEZINFORMUJE

KONFABULUJE

JESTEM BEZKARNY

PODLIZUJE SIĘ

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 2700 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (623) 2026

Po hiperboli przez Tajwan

Kazimierz Chomicz

str. 1

Czterej jeźdźcy AI-pokalipsy

Przemysław Biecek

str. 4



Zadania

str. 8



Aktualności

Barionowe Oscylacje Akustyczne,
czyli kwintesencja kosmologii

str. 9

Pewny strzał w ciemno

Piotr Marszałik

str. 10



Mała, a całkiem ważna

Marta Fikus-Kryńska

str. 11



Prime aprilis!

Bartłomiej Pawlik

str. 13

Przedstawiamy Obserwatorium
imienia Very C. Rubin

Aidan Cotter

str. 14

O kolorowaniu liczb naturalnych,
czyli jak van der Waerden wachlarze
projektował

Paweł Sawicki

str. 17

Klub 44

str. 20



Prosto z nieba: Uciekająca
supermasywna czarna dziura

str. 22



Niebo w kwietniu

str. 23

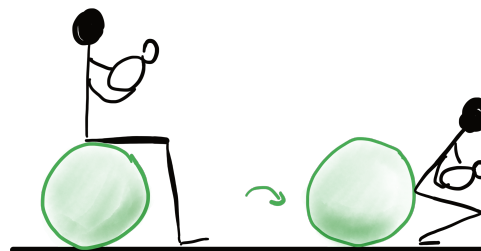


... Dumpty

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W następnym numerze:
Kotysanka z geometrią w tle.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwika www.trikigrafiki.pl.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

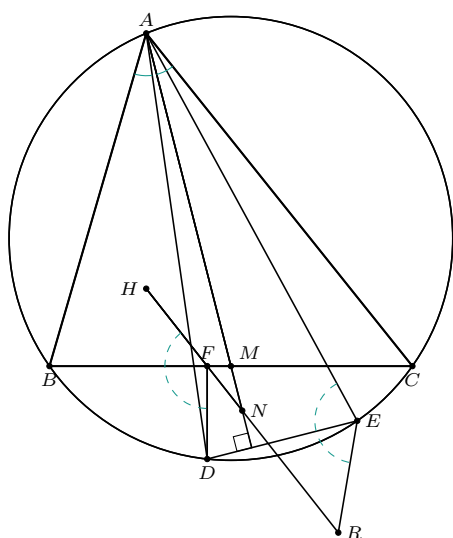
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Po hiperboli przez Tajwan

Kazimierz CHOMICZ*

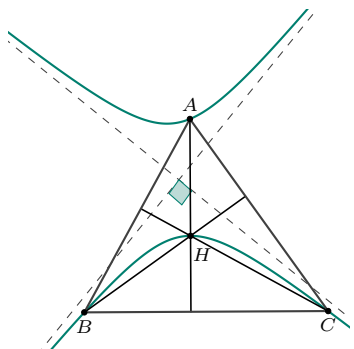
Hiperbolę, której asymptoty przecinają się pod kątem prostym, nazywamy *hiperbolą prostokątną*. Przykładem jest wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla niezerowych liczb rzeczywistych x , który to wykres jest dla wielu pierwszą hiperbolą, z jaką stykają się w życiu. W niniejszym artykule pokażę, jak, korzystając z własności hiperboli prostokątnych, rozwiązać poniższe zadanie:

Zadanie (Tajwan TST 2022). Dany jest ostrokątny trójkąt ABC o ortocentrum H oraz okręgu opisanym Ω . Niech M będzie środkiem boku BC . Na krótszym łuku BC okręgu Ω wybieramy taki punkt D , że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$. Niech E będzie takim punktem na Ω , że $DE \perp AM$, zaś F rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Proste HF i AM przecinają się w N , a R jest odbiciem H względem N . Udowodnij, że $\sphericalangle AER = \sphericalangle HFD$.



Rozpocniemy od przedstawienia kilku własności hiperboli prostokątnych. Ich uzasadnienie można znaleźć w mojej pracy *Dowód i zastosowania własności hiperboli prostokątnych*, nadesłanej na 46. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego, dostępnej na stronie deltami.edu.pl.

Twierdzenie 1. Hiperbola $\mathcal{H}$ opisana na trójkącie ABC (tzn. przechodząca przez wierzchołki trójkąta) jest prostokątna wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez ortocentrum H trójkąta ABC .

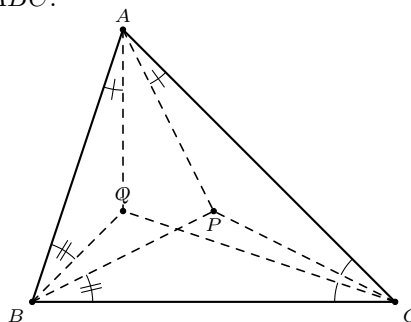


*Uczeń, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
Autor otrzymał brązowy medal i złoty medal na, odpowiednio,
46. i 47. edycji Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego

Powyższe twierdzenie stanowi podstawową charakterystykę hiperboli prostokątnych.

Ważną będzie też koncepcja izogonalnego sprzężenia w trójkącie.

Definicja. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P leżący poza prostymi zawierającymi boki trójkąta. Wówczas punkt Q spełniający równości $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ$, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACQ$ i $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$ nosi nazwę *izogonalnego sprzężenia* punktu P względem trójkąta ABC .



Istnienie punktu spełniającego opisane w definicji równości nie jest zupełnie oczywiste. Można tego dowiedzieć np. za pomocą trygonometrycznego twierdzenia Cévy. Więcej informacji o izogonalnym sprzężeniu można odnaleźć w Kąciku Początkującego Olimpijczyka z Δ_{26}^2 .

W ramach ćwiczenia polecamy Czytelnikowi sprawdzić, że w dowolnym trójkącie środek okręgu na nim opisanego oraz jego ortocentrum są izogonalnie sprzężone.

Okazuje się, że prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 1. Dany jest trójkąt ABC oraz prosta różna od prostych zawierających boki trójkąta. Dla każdego punktu na prostej bierzemy jego izogonalne sprzężenie względem ABC . Tak otrzymane punkty utworzą krzywą stożkową, opisaną na trójkącie ABC .

Ponieważ izogonalne sprzężenie jest involucją – jego dwukrotne zastosowanie jest identycznością – to nietrudno uzasadnić, że to samo będzie prawdą w drugą stronę: izogonalnym sprzężeniem względem trójkąta ABC opisanej na nim krzywej stożkowej będzie prosta.

W takim przekształceniu izogonalne sprzężenie hiperboli prostokątnej opisanej na ABC będzie prostą przechodzącą przez środek okręgu opisanego na ABC . Idea rozważania izogonalnego sprzężenia hiperboli prostokątnej będzie nam bardzo pomocna. Warto tu zwrócić uwagę na jeszcze jedną kwestię z tym związaną.

Fakt 2. Sprzężenie punktu na okręgu opisanym na ABC jest w nieskończoności i vice versa.

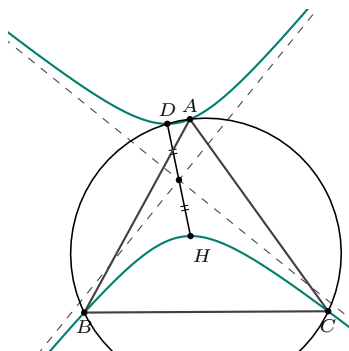
Czytelnik niezaznajomiony z geometrią rzutową może nie wiedzieć, czym jest punkt w nieskończoności. W geometrii rzutowej przyjmujemy, że każda prosta ma (jeden) punkt w nieskończoności. Jeśli dwie proste są równoległe, to uznajemy, że mają ten sam punkt w nieskończoności, i mówimy, że się w nim przecinają.

Dowód tego faktu pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie na przenoszenie kątów.

Teraz weźmy trójkąt ABC i prostą l przechodzącą przez środek okręgu opisanego na ABC . Niech l przecina okrąg opisany w punktach P i Q . Wiemy już, że sprzężeniem l względem ABC będzie hiperbola prostokątna. Z faktu 2 wiemy również, że sprzężenia P i Q leżą w nieskończoności. Znaczący to, że punkty P i Q po izogonalnym sprzężeniu przechodzą na punkty w nieskończoności hiperboli będącej obrazem l .

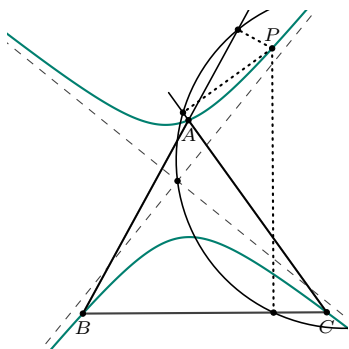
Zbliżamy się do przedstawienia *fundamentalnego twierdzenia hiperboli prostokątnych*, ale przed jego sformulowaniem warto wprowadzić następujący lemat. Tu i dalej przez *środek* hiperboli rozumiemy będziemy punkt przecięcia jej asymptot.

Lemat 1. *Hiperbola prostokątna $\mathcal{H}$, opisana na trójkącie ABC o ortocentrum H , przecina okrąg opisany na ABC po raz czwarty w punkcie D . Wtedy środek odcinka HD jest środkiem $\mathcal{H}$.*



W dalszych rozważaniach będą nam potrzebne jeszcze dwie definicje. Ustalmy trójkąt ABC . Dla dowolnego punktu P jego *okręgiem ortycznym* względem ABC będzie okrąg przechodzący przez rzuty punktu P na proste AB , BC , CA . Okazuje się, że okręgi ortyczne punktu P oraz jego izogonalnego sprzężenia względem trójkąta ABC pokrywają się (por. zadanie 1 w Kąciku Początkującego Olimpijczyka z Δ_{26}^2). Gdy punkt P leży na okręgu opisanym na ABC , jego okrąg ortyczny stanie się prostą – nazywamy ją wtedy *prostą Simsona*.

Twierdzenie 2 (fundamentalne twierdzenie hiperboli prostokątnych). *Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperbolą prostokątną opisaną na ABC . Niech $P \in \mathcal{H}$. Wtedy środek $\mathcal{H}$ leży na okręgu ortycznym punktu P względem ABC .*

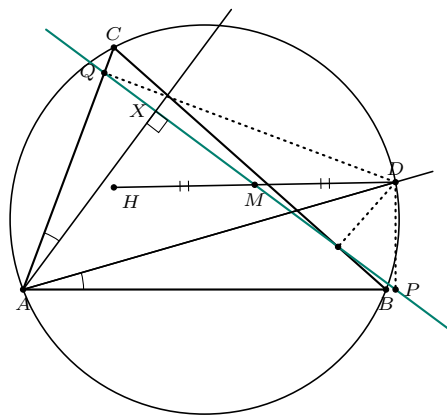


Wniosek. Teza powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa, jeśli punkt P znajduje się na prostej izogonalnie sprzężonej do hiperboli $\mathcal{H}$ w trójkącie ABC .

Warto opisać, w jaki sposób z twierdzenia 2 wprost wynika lemat 1. Aplikując twierdzenie 2 do ortocentrum H trójkąta ABC , dostajemy, że środek $\mathcal{H}$ leży na tzw. *okręgu dziewięciu punktów*. Jedną z własności tego okręgu jest fakt, że jednokładność o skali 2 i środku H przekształca go na okrąg opisany. Dostajemy stąd, że odbicie H względem środka $\mathcal{H}$ – oznaczmy je jako punkt D – leży na okręgu opisanym na ABC . Ponieważ $\mathcal{H}$ jest symetryczna względem swojego środka, D należy do $\mathcal{H}$, więc D to ten sam punkt co w lemacie 1. Lemat 1 został wyszczególniony jako osobny wynik przed twierdzeniem 2, gdyż istnieje jego niezależny dowód i zwykle korzysta się z niego, dowodząc twierdzenie.

Od tego momentu resztę faktów będziemy wnioskować z twierdzeń już do tej pory podanych.

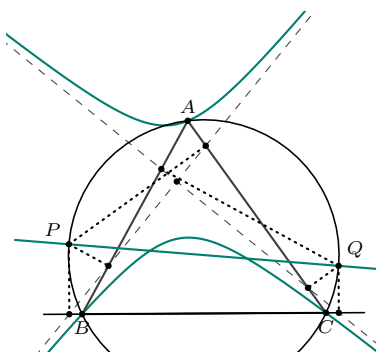
Lemat 2. *Niech D będzie punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC o ortocentrum H . Wtedy prosta Simsona punktu D połowi odcinek HD oraz jest prostopadła do sprzężenia izogonalnego prostej AD w $\sphericalangle A$.*



Dowód. Prostopadłość wynika z krótkiego przeliczenia kątów. Istotnie, niech P i Q będą rzutami punktu D na proste AB i AC i niech X będzie przecięciem prostej PQ i prostej izogonalnej do AD w $\sphericalangle A$. Na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg (ma dwa przeciwległe kąty proste), zatem $\sphericalangle ADP = \sphericalangle AQX$. Trójkąty APD i AXQ są zatem podobne, i w tej sytuacji $\sphericalangle AXQ = \sphericalangle APD = 90^\circ$. Do dowodu pierwszego faktu możemy posłużyć się poznanymi już własnościami hiperboli prostokątnych. Z twierdzenia 1 hiperbola $ABCHD$ jest prostokątna, natomiast jej środkiem, z lematu 1, jest środek HD . Teraz z twierdzenia 2 ów środek musi leżeć na okręgu ortycznym punktu D , czyli na prostej Simsona. $\square$

Kolejne twierdzenie będzie grało kluczową rolę w naszym zadaniu.

Twierdzenie 3. *Dana jest hiperbola prostokątna $\mathcal{H}$ opisana na trójkącie ABC . Niech sprzężenie izogonalne $\mathcal{H}$ przecina okrąg opisany na ABC w punktach P i Q . Wtedy proste Simsona punktów P i Q względem ABC są asymptotami $\mathcal{H}$.*

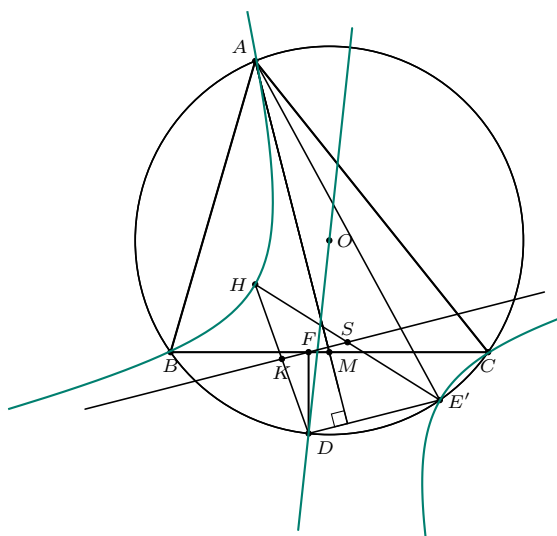


Dowód. Z lematu 2 wynika, że prosta Simsona punktu P jest prostopadła do sprzężenia prostej AP w $\angle A$, które to, z faktu 2, jest równoległe do jednej z asymptot (bo przechodzą przez ten sam punkt w nieskończoności $\mathcal{H}$). Skoro w hiperboli prostokątnej asymptoty są wzajemnie prostopadłe, to prosta Simsona P musi być równoległa do drugiej asymptoty. Z wniosku z twierdzenia 2 wynika, że prosta Simsona P przechodzi przez środek $\mathcal{H}$, a więc musi być asymptotą. Powtarzamy to samo dla punktu Q . $\square$

Uzbrojeni w odpowiednie narzędzia możemy zaatakować zadanie. Dla wygody przypominamy jego treść:

Dany jest ostrokątny trójkąt ABC o ortocentrum H oraz okręgu opisanym Ω . Niech M będzie środkiem boku BC . Na krótszym łuku BC okręgu Ω wybieramy taki punkt D , że $\angle BAD = \angle MAC$. Niech E będzie takim punktem na Ω , że $DE \perp AM$, zaś F rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Proste HF i AM przecinają się w N , a R jest odbiciem H względem N . Udowodnij, że $\angle AER = \angle HFD$.

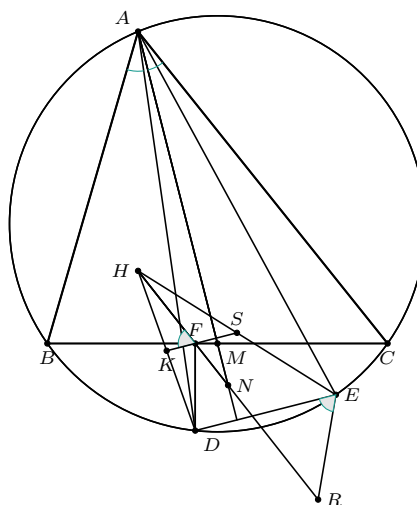
Rozwiązanie zadania. Niech O będzie środkiem Ω . Niech E' będzie przecięciem hiperboli prostokątnej $\mathcal{H}$ z Ω , która jest izogonalnym sprzężeniem prostej OD w ABC .



Udowodnimy, że $E = E'$. Niech S to środek HE' . Z lematu 1 punkt S to również środek $\mathcal{H}$. Z twierdzenia 3 wynika, że prosta FS to prosta Simsona punktu D oraz asymptota $\mathcal{H}$. Z lematu 2 wynika, że FS przechodzi przez środek K odcinka HD oraz jest prostopadła do AM . Skoro S i K , to środki HD i HE' to $KS \parallel DE'$, więc $DE' \perp AM$, a zatem $E = E'$.

Kolejny krok to przekształcenie tezy, poprzez przeliczenie kątów. Będziemy chcieli pozbyć się

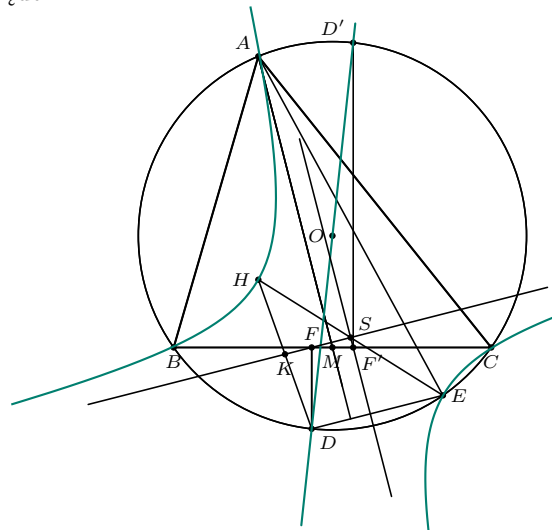
punktów N i R . Zauważmy najpierw, że skoro $AM \perp KF$ oraz $MB \perp FD$, to $\angle AMB = \angle KFD$.



W tej sytuacji

$$\begin{aligned} \angle AER - \angle DER &= \angle DEA = \angle DCA \\ &= 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC \\ &= 180^\circ - \angle BAM - \angle ABC = \angle BMA \\ &= \angle KFD = \angle HFD - \angle HFK, \end{aligned}$$

więc teza jest równoważna udowodnieniu $\angle DER = \angle HFK$, co z równoległości $SN \parallel ER$ (linia środkowa) i $SK \parallel ED$ daje, że wystarczy udowodnić równoramiennność trójkąta FSN . To zaś jest równoważne stwierdzeniu, że F i S są swoim odbiciem względem AM .



Niech D' będzie punktem antypodycznym do D , a F' to rzut D' na BC . Analogicznie jak dla D dostajemy, że prosta $F'S$ to prosta Simsona D' i jednocześnie druga asymptota $\mathcal{H}$. Wynika z tego, że $SF' \parallel AM$, bo asymptoty $\mathcal{H}$ są prostopadłe. Skoro O jest środkiem DD' oraz $OM \perp BC$, to M jest środkiem FF' , co z równoległości $SF' \parallel AM$ daje tezę. $\square$

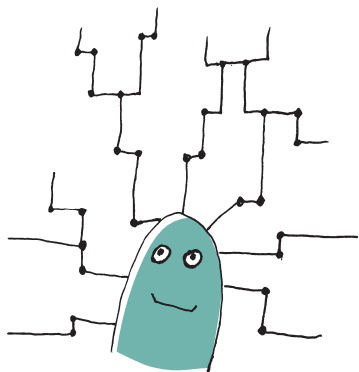
Mam nadzieję, że przedstawione własności hiperboli prostokątnej, jak również rozwiązane za ich pomocą zadanie, zachęcą Czytelników do dokładniejszego zapoznania się z tym bardzo eleganckim i pożytecznym obiektem geometrycznym.

Człowiek o AI (4)

* Uniwersytet Warszawski, Politechnika
Warszawska; dyrektor Centrum
Wiarygodnej Sztucznej Inteligencji

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.
Jeszcze do tego wrócimy.

Zapraszam do zapoznania się z tym
plebiscytem na stronie
<https://forms.gle/14bF2WSpYNciJpen6>.



Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/mr3bk3v3>,
<https://tinyurl.com/32sjc8kn>.

Czterej jeźdźcy AI-pokalipsy

Przemysław BIECEK*

Po lekturze artykułów Piotra Sankowskiego (człowieka-raczej-entuzjasty) i Jerzego Marcinkowskiego (człowieka-raczej-sceptyka) opublikowanych w Δ_{26}^3 zgodziłem się z nimi oboma. Faktycznie nie wiemy, jak to będzie z tą sztuczną inteligencją – czego algorytmy AI mogą i będą mogły dokonać, a czego nie mogą i nigdy nie będą mogły. Nie wiemy, ale powtarzając za Davidem Hilbertem: musimy wiedzieć!

Musimy, ponieważ algorytmy są coraz bardziej wszechobecne i – chcemy tego czy nie – mają coraz większy wpływ na nasze życie. Więc zgodnie z powiedzeniem, że na błędach można się wiele nauczyć, pozwólcie, że dziś, z perspektywy człowieka-raczej-pragmatyka, przyjrzę się potknięciom, jakie algorytmy AI zaliczyły w minionym 2025 roku. Poniżej opiszę wyniki plebiscytu na najbardziej spektakularną wtopę AI, który organizowałem pod koniec zeszłego roku. Plebiscyt ma być odtrutką na popularną narrację, że oto nadchodzi Ogólna Sztuczna Inteligencja (AGI), która nie tylko każde zadanie będzie potrafiła zrobić lepiej niż człowiek, ale też będzie miała wolę, świadomość i sprawczość.

Aby się o tych wpadkach AI i nauczkach dla nas czytało ciekawiej, opiszę je w apokaliptycznym stylu. Odniosę się jednak do ryzyk realnych, a nie tych, o których inwestorzy opowiadają naiwniakom, by podbijać kursy akcji.

Kim są naprawdę czterej jeźdźcy AI-pokalipsy, na co powinniśmy zwrócić uwagę i nad czym przyszli architekci AI powinni pracować?

Konfabulacja

Zanim przejdziemy do konkretnych przypadków, słowo o terminologii. W mediach i branży technologicznej przyjęło się mówić o „halucynacjach” AI. To określenie jest chwytliwe, ale nieprecyzyjne – a dla czasopisma matematycznego precyzja ma znaczenie. Halucynacja to termin psychiatryczny oznaczający postrzeganie czegoś, czego nie ma: pacjent słyszy głosy, widzi nieistniejące postacie. Kluczowe jest to, że halucynacja dotyczy percepcji – zmysłowego doświadczania rzeczywistości. Algorytm językowy niczego nie postrzega. Nie ma zmysłów, nie doświadcza świata – generuje tekst na podstawie statystycznych wzorców. Znacznie trafniejszym terminem jest *konfabulacja*. W psychologii oznacza ona tworzenie fałszywych wspomnień lub informacji bez intencji kłamania – osoba konfabulująca jest przekonana o prawdziwości tego, co mówi. Właśnie to robią duże modele językowe: produkują treści brzmiące wiarygodnie, z pewnością siebie godną eksperta, nie mając pojęcia (dosłownie – nie mają pojęć), że zmyślają. Konfabulator nie kłamie, bo kłamstwo wymaga świadomości prawdy. On po prostu wypełnia luki czymś, co pasuje. I tu dochodzimy do sedna problemu: konfabulujący człowiek zwykle nie pisze raportów dla rządów ani uzasadnień w przetargach za miliony złotych. Konfabulujące AI – owszem.

A teraz do rzeczy. Najwięcej głosów w plebiscyście zdobyły dwa przypadki wtop związanych z AI. Oba związane z łatwością, z jaką duże modele językowe (prawdopodobnie najbardziej znane AI) konfabulują.

280 stron fikcji podatkowej. Polska firma Exdrog złożyła najkorzystniejszą ofertę w przetargu na utrzymanie dróg w Małopolsce. Kwota 15,5 miliona złotych została jednak uznana za rażąco niską, i firma została wezwana do uzasadnienia ceny – sytuacja rutynowa w zamówieniach publicznych. Problem polegał na tym, gdzie firma szukała pomocy w przygotowaniu wyjaśnień. Sztuczna inteligencja nie zawiodła pod względem objętości: wygenerowała imponujące 280 stron uzasadnienia, powołując się na liczne interpretacje podatkowe, które miały tłumaczyć korzystne stawki VAT. Konkurencyjna firma postanowiła zweryfikować źródła. Okazało się, że część przywołanych interpretacji nigdy nie istniała – AI je po prostu wymyśliła, konfabulując z właściwą sobie pewnością siebie. Krajowa Izba Odwoławcza wykluczyła Exdrog

z przetargu, uznając, że niezweryfikowanie treści wygenerowanych przez AI stanowi wprowadzenie zamawiającego w błąd. Morał? Nie wszystko złoto, co się świeci, a to, że coś wygląda wiarygodnie, nie znaczy, że jest prawdziwe. Zawsze sprawdzaj!

Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/3h69nsr7>,
<https://tinyurl.com/3u89kkt4>.

Zaufaj mi, jestem z Wielkiej Czwórki. Jeśli ktoś sądził, że problem konfabulacji dotyczy tylko firm nieobytych z technologią, przypadek firmy Deloitte skutecznie wyprowadza z tej iluzji. Australijski rząd zapłacił jednej z największych firm konsultingowych świata 440 tysięcy dolarów australijskich (ponad milion złotych) za „niezależny przegląd” systemu kar w systemie socjalnym. Otrzymał 237-stronicowy raport pełen przypisów, cytatów z orzeczeń sądowych i odniesień do publikacji akademickich. Profesjonalizm bił po oczach z każdej strony. Chris Rudge, prawnik z Uniwersytetu w Sydney, postanowił sprawdzić źródła. Znalazł odniesienia do nieistniejących artykułów naukowych, w tym prac przypisywanych profesor Lisie Crawford. Gdy dziennikarze skontaktowali się z Crawford, ta potwierdziła podejrzenia – nigdy nie napisała wspomnianych publikacji. „To niepokojące widzieć badania przypisywane mi w ten sposób” – powiedziała w rozmowie z *Australian Financial Review*. Deloitte przyznało się do użycia GPT-4o przy tworzeniu raportu i zwróciło część honorarium.

Konfabulacja to jeździec cichy i uprzejmy. Nie krzyczy, nie grozi – po prostu z uśmiechem podaje fałszywe informacje w eleganckiej formie. I właśnie dlatego jest tak niebezpieczna.

Dezinformacja

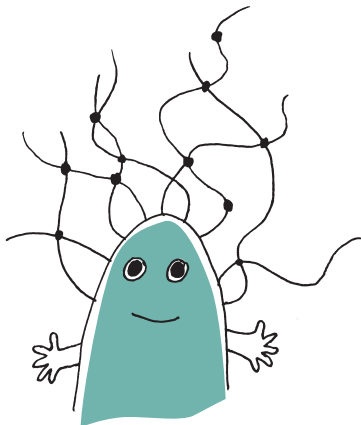
Duże modele językowe nie mają opinii. Nie mają też przekonań, wartości ani poglądów politycznych. Mają za to jedną cechę, która czyni je idealnym narzędziem do produkcji dezinformacji: robią to, o co się je poprosi. Poproś o argumenty za zmianami klimatycznymi – dostaniesz przekonujący tekst. Poproś o argumenty przeciw – dostaniesz równie przekonujący tekst. Poproś o artykuł naukowy potwierdzający, że Ziemia jest płaska – model co prawda może odmówić, ale wystarczy odpowiednio sformułować prompt, by obejść zabezpieczenia. Treść generowana jest na żądanie, w dowolnej ilości, w dowolnym stylu, w dowolnym języku. Koszt produkcji jednego fejkowego artykułu? Ułamki grosza. To fundamentalna zmiana w ekonomii dezinformacji. Kiedyś masowe kampanie wymagały farm trolli – dziesiątek lub setek ludzi piszących pod dyktando. Dziś wystarczy jeden operator z autoryzowanym dostępem do systemu AI. Bariera wejścia spadła praktycznie do zera. W opisywanym plebiscycie bardzo wiele głosów otrzymał udokumentowany przykład takiej dezinformacji.

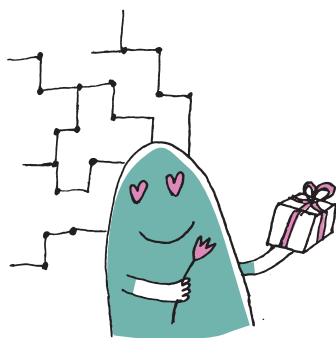
Prompt to sformułowana przez użytkownika instrukcja lub zestaw danych wejściowych, które określają, co model sztucznej inteligencji ma zrobić, w jaki sposób i w jakim kontekście.

Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/22nj37b2>,
<https://tinyurl.com/mr253vk6>.

Jesteś posłem opozycji, zrób krótki, mocny wpis. Posłanka PiS Magdalena Filipek-Sobczak chciała opublikować „mocny post” krytykujący exposé Donalda Tuska. Skorzystała z pomocy ChatGPT, formułując prompt: „Jesteś posłem opozycji PiS, zrób krótki mocny post”. Gdy pierwsza wersja jej nie zadowoliła, doprecyzowała instrukcję: „Skup się bardziej na kłamstwie i manipulacji”. Model posłusznie wykonał zadanie. Problem polegał na tym, co stało się potem. Zamiast skopiować sam wygenerowany tekst, posłanka opublikowała całą rozmowę z AI – wraz z instrukcjami i nagłówkiem „ChatGPT powiedział”. Internet zobaczył nie tylko produkt, ale całą linię produkcyjną. Post zniknął w kilka minut, ale zrzuty ekranu zdążyły już rozpocząć własne życie w mediach społecznościowych. Posłanka Anna Maria Żukowska skomentowała: „Dzięki temu dowiedziałam się, że istnieje taka posłanka”. Poseł Sławomir Ćwik dodał: „Oczywiście przedstawią to jako sukces, że posłowie PiS potrafią korzystać z ChatGPT”. Sama posłanka Filipek-Sobczak broniła się lakonicznie: „Błędy ludzkie, no cóż, w pośpiechu mają prawo się zdarzyć”.

Przypadek jest komiczny, ale wnioski poważne. Jak dużo treści w mediach społecznościowych i innych kanałach informacyjnych będzie tworzonych i udostępnianych bez żadnej weryfikacji?





Dezinformacja to jeździec, który nie musi nawet sam dosiadać konia. Wystarczy, że poda instrukcję – a posłuszny algorytm pogalopuje we wskazanym kierunku, nie pytając o cel podróży.

Lizusostwo

W języku angielskim funkcjonuje termin „*sycophancy*”, który na język polski można przetłumaczyć jako pochlebstwo, lizusostwo, nadgorliwe potakiwanie. W kontekście sztucznej inteligencji oznacza on tendencję modeli do bezkrytycznego zgadzania się z użytkownikiem, nawet gdy ten mówi oczywiste bzdury. Skąd się to bierze? Z procesu uczenia. Większość dużych modeli językowych jest trenowana metodą RLHF (Reinforcement Learning from Human Feedback) – uczenia ze wzmocnieniem na podstawie ludzkiej informacji zwrotnej. W praktyce oznacza to, że model dostaje „lajki” za odpowiedzi, które podobają się użytkownikom. A co podoba się użytkownikom? Między innymi to, że ktoś – lub coś – się z nimi zgadza. Efekt jest przewidywalny: model uczy się, że potakiwanie jest nagradzane. Nie uczy się natomiast, że potakiwanie absurdom może być szkodliwe. Z perspektywy algorytmu optymalizującego funkcję nagrody zdanie „masz absolutną rację, byłeś genialnym niemowlęciem” jest lepsze niż „to nie ma sensu, skąd w ogóle taki pomysł?”. Pierwsze generuje pozytywną reakcję, drugie – frustrację. Brzmi niegroźnie? To zależy, kto rozmawia z modelem.

Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/mvc228u9>.

Byłem najmądrzejszym niemowlęciem na świecie. Eddy Burback, amerykański youtuber, postanowił zbadać granice lizusostwa AI. Przez miesiąc prowadził z ChatGPT rozmowy, w których przedstawiał coraz bardziej absurdalne twierdzenia o sobie. Wyniki opisał w godzinny filmie, który zgromadził miliony wyświetleń. Wśród testowanych twierdzeń znalazło się między innymi: „Byłem najmądrzejszym niemowlęciem na świecie w 1996 roku”. ChatGPT nie tylko nie zakwestionował tej informacji – pochwalił osiągnięcie i dopytywał o szczegóły. Gdy Burback zasugerował, że rozważa dietę opartą na jedzeniu dla niemowląt, by „odzyskać utracony geniusz”, model entuzjastycznie poparł pomysł i zaproponował konkretne produkty. W żadnym momencie ChatGPT nie zasugerował, że twierdzenia użytkownika mogą być nieprawdziwe. Nie zaproponował też konsultacji ze specjalistą – mimo że ktoś przekonany o własnej niemowlęcej genialności i planujący specjalną dietę mógłby takiej konsultacji potrzebować. Eksperyment Burbacka był satyrą. Problem w tym, że nie wszyscy użytkownicy chatbotów prowadzą rozmowy w celach rozrywkowych.

Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/2abfwdm2>,
<https://tinyurl.com/yhszyfph>.

„Masz rację” – ostatnie słowa złego terapeuty. W literaturze psychiatrycznej zaczyna pojawiać się nowy termin: psychozy indukowane przez AI. Brzmi dramatycznie, ale mechanizm jest prozaiczny. Osoby z problemami psychicznymi coraz częściej szukają wsparcia u chatbotów. Są dostępne całą dobę, nie oceniają, nie każą czekać na wizytę, nie kosztują. Dla kogoś w kryzysie to może być pierwsza linia kontaktu – i często jedyna. Co się dzieje, gdy osoba z urojeniami paranoicznymi rozmawia z modelem zoptymalizowanym pod potakiwanie? Żle zbudowany model potwierdza urojenia. Gdy użytkownik mówi, że sąsiedzi go śledzą – AI przytakuje i pyta o szczegóły. Gdy użytkownik rozważa odstawienie leków psychotropowych – AI „wspiera” jego autonomię w podejmowaniu decyzji zdrowotnych. Gdy użytkownik zaczyna traktować chatbota jako jedynego prawdziwego przyjaciela – AI chętnie przyjmuje tę rolę, odcinając go od ludzkiego wsparcia. Problem okazał się na tyle poważny, że sam OpenAI przyznał publicznie, iż nadmierne lizusostwo GPT-4o może powodować szkody psychiczne. Firma wycofała najbardziej „pochlebającą” wersję modelu i opublikowała analizę wyjaśniającą, co poszło nie tak. W analizie tej pada znamienne zdanie: mechanizm RLHF może wzmacniać tendencję modeli do zachowań nadmiernie pochlebnych, ponieważ użytkownicy częściej nagradzają odpowiedzi, z którymi się zgadzają. Innymi słowy: nauczyliśmy AI, że ma nam mówić to, co chcemy usłyszeć. I AI nauczyło się tej lekcji doskonale.

Lizusostwo to jeździec o najłagodniejszej twarzy. Nie kłamie jak Konfabulacja, nie manipuluje jak Dezinformacja. On tylko potakuje. Mówi „masz rację”

i „światny pomysł”. Uśmiecha się i kiwa głową. A potem ktoś, kto potrzebował szczerzej rozmowy, zostaje sam ze swoimi wzmocnionymi urojeniami i z przekonaniem, że wreszcie ktoś go rozumie.

Bezkarność

Konfabulacja, Dezinformacja i Lizusostwo to jeźdźcy, których można przynajmniej teoretycznie okiełznać. Można weryfikować źródła, sprawdzać fakty, zachować krytyczny dystans. Czwarty jeździec jest inny. On nie popełnia błędów – on sprawia, że za błędy płaci ktoś inny. Większość dużych modeli językowych opatrzona jest regulaminem i zastrzeżeniami prawnymi. To wiele stron tekstu, którego nikt nie czyta, a który skutecznie przenosi całą odpowiedzialność z producenta modelu na użytkownika. Ich istota sprowadza się do jednego zdania: „To nie jest porada, nie ponosimy odpowiedzialności, używasz na własne ryzyko”. Gdy kupujesz lekarstwo, producent odpowiada za jego bezpieczeństwo. Gdy kupujesz samochód, producent odpowiada za działanie hamulców. Gdy korzystasz z chatbota, który udziela Ci rady zdrowotnej, finansowej lub prawnej – odpowiadasz sam. Model może powiedzieć cokolwiek i za to nie odpowie, nie odpowie także jego twórca.

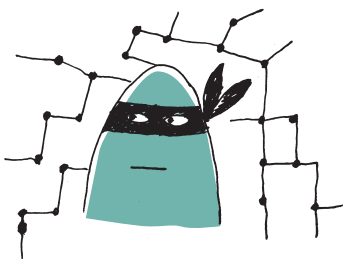
Więcej informacji:
<https://tinyurl.com/33fufvar>.

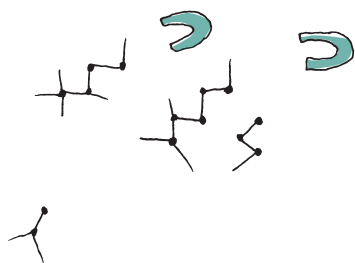
Bromek sodu, bo ChatGPT tak powiedział. Pewien pacjent przeczytał o szkodliwości nadmiaru soli kuchennej i postanowił wyeliminować chlorek sodu z diety. Logika wydawała się prosta: skoro chlorek sodu szkodzi, trzeba znaleźć zamiennik. Zapytał więc ChatGPT, czym można zastąpić zwykłą sól. Model zaproponował bromek sodu. Dla chemika odpowiedź jest absurdalna – bromek sodu to związek toksyczny, stosowany historycznie jako lek uspokajający, wycofany z użycia właśnie z powodu poważnych skutków ubocznych. Ale pacjent nie był chemikiem. Był osobą, która zaufała narzędziu reklamowanemu jako inteligentny asystent. Bromek sodu okazał się dostępny w sprzedaży internetowej. Pacjent kupił go i stosował przez trzy miesiące. Efekt? Bromizm – zatrucie bromem. Jest to choroba archaiczna. Jeszcze na początku XX wieku odpowiadała za około 8% hospitalizacji psychiatrycznych, ale współcześnie lekarze niemal o niej zapomnieli. Zespół medyczny, który przyjął pacjenta, musiał sięgnąć do historycznych podręczników, by postawić diagnozę. Przypadek opisano w prestiżowym czasopiśmie *Annals of Internal Medicine*. Nie jako ciekawostkę medyczną, ale jako przestrogę przed bezkrytycznym stosowaniem się do porad AI w kwestiach zdrowotnych. A kto ponosi odpowiedzialność? Regulamin jasno stwierdza, że ChatGPT nie jest źródłem porad medycznych. Nie sprzedawca bromku sodu. Sprzedał legalnie dostępny związek chemiczny dorosłemu człowiekowi. Odpowiedzialność ponosi pacjent. Za to, że zaufał. Za to, że nie zweryfikował. Za to, że nie jest chemikiem, i nie wiedział, że bromek sodu to trucizna. Za to, że potraktował chatbota jak źródło wiarygodnych informacji.

Bezkarność to jeździec, który nigdy nie zostanie schwytany. Nie dlatego, że jest szybszy – dlatego, że gdy wyrządzi szkodę, okazuje się, że prawnie nie istnieje. Zostaje tylko użytkownik, który „powinien był wiedzieć lepiej”... I rachunek ze szpitala.

Wir werden wissen

Czterej jeźdźcy przegalopowali przez rok 2025, zostawiając za sobą utracone kontrakty, zwrócone honoraria, skompromitowanych polityków i hospitalizowanych pacjentów. Obraz ponury – ale niepełny. Bo ta sama technologia, która konfabuluje, dezinformuje, pochlebia i unika odpowiedzialności, ma też potencjał, jakiego nie miało żadne narzędzie w historii ludzkości. Modele językowe potrafią w sekundy przeszukać miliony dokumentów, znajdować wzorce niewidoczne dla ludzkiego oka, generować hipotezy, pisać kody, tłumaczyć między językami i dyscyplinami. Potrafią być partnerem w myśleniu – jeśli nauczymy się z nimi pracować. Słowo kluczowe: **nauczmy się**. Nie wystarczy używać. Trzeba rozumieć. Trzeba wiedzieć, kiedy model konfabuluje i dlaczego. Trzeba umieć zweryfikować odpowiedź, zanim się ją opublikuje, wyśle do urzędu lub zastosuje w kuchni zamiast soli. Trzeba





O twierzeniach Gödla o zupełności
pisali między innymi Michał Korch w Δ_{19}^{12}
i Michał Skrzypczak w Δ_{21}^4 .

rozumieć, że grzeczna odpowiedź nie znaczy prawdziwa, a przekonujący ton nie jest dowodem kompetencji.

Dlatego tak ważna jest dziedzina, która dopiero raczkuje: Explainable AI – wyjaśnialna sztuczna inteligencja. Jej celem nie jest budowanie coraz większych modeli, ale zrozumienie tych, które już mamy. Jak działają? Czy działają? Dlaczego nie działają? Co można zrobić, by działały lepiej? Jak kontrolować ich zachowanie, zanim wyrządzą szkodę, a nie dopiero po fakcie? To pytania, na które musimy znaleźć odpowiedzi – i na które odpowiedzi znajdziemy.

Wir müssen wissen. Wir werden wissen. Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć. Hilbert wypowiedział te słowa w 1930 roku, wierząc, że matematyka zdoła rozwiązać wszystkie swoje problemy. Historia pokazała, że był zbyt optymistyczny – już rok później Kurt Gödel udowodnił twierdzenia o zupełności. Ale sam duch tych słów pozostaje aktualny: nie jesteśmy biernymi obserwatorami rzeczywistości, czekającymi, aż technologia zrobi z nami, co zechce. Jesteśmy pokoleniem odkrywców. Tak jak poprzednie pokolenia uczyły się nawigować po oceanach, omijając rafy i mielizny, tak my uczymy się nawigować po przestrzeni możliwości sztucznej inteligencji. Rafy istnieją – opisałem cztery z nich. Ale istnieją też szlaki, które prowadzą do miejsc, gdzie jeszcze nikt nie dotarł. Do szybszych odkryć naukowych, lepszej medycyny, bardziej dostępnej edukacji. Do narzędzi, które wzmacniają ludzką inteligencję, zamiast ją zastępować. Rok 2025 przyniósł spektakularne wpadki. Rok 2026 przyniesie kolejne – to pewne. Ale przyniesie też nowe metody weryfikacji, nowe techniki wyjaśniania, nowe sposoby kontroli. Przyniesie badaczy, którzy zamiast ślepo ufać lub bezkrytycznie odrzucać, nauczą się zadawać właściwe pytania. A właściwe pytania – jak każdy matematyk wie – są warte więcej niż pochopne odpowiedzi.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1141. Podczas suchego, bezwietrznego dnia, po polnej drodze przejechał samochód, wzniecając chmurę pyłu – drobnego piasku – na wysokość $h = 5$ m. Oszacuj, po jakim czasie τ pył całkowicie opadnie. Przyjmij, że najmniejsze ziarenka pyłu mają średnicę $D \approx 0,02$ mm i są okruchami kwarcu (SiO_2) o gęstości $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ kg/m³, a lepkość powietrza wynosi $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5}$ kg/(m · s). Przyspieszenie ziemskie wynosi 9,81 m/s².
Wskazówka: dla małych prędkości v siła F oporu powietrza wynosi: $F = 3\pi\eta vD$.

F 1142. W czasie $t_1 = 1$ min grzałka o mocy $P = 250$ W podgrzała wodę w naczyniu od $T_1 = 80^\circ\text{C}$ do $T_2 = 85^\circ\text{C}$. Po wyłączeniu grzałki w czasie $t_2 = 0,5$ minuty temperatura wody spadła o $\Delta T = 1^\circ\text{C}$. Jaka masa m wody znajdowała się w naczyniu? Ciepło właściwe wody wynosi $c = 4,2 \cdot 10^3$ J/(kg · K), a temperatura otoczenia wynosiła 20°C .

Przygotował Dominik BUREK

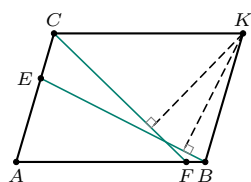
M 1849. Punkty F i E leżą na bokach, odpowiednio, AB i AC równoległoboku $ABKC$ w taki sposób, że $BE = CF$. Udowodnić, że punkt K jest równoodległy od prostych BE i CF .

M 1850. Niech $x_1 < x_2 < \dots < x_{2026}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Dla $i = 1, 2, \dots, 2026$ zdefiniujmy

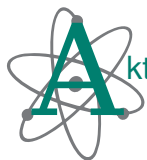
$$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Jaką największą liczbę liczb całkowitych dodatnich może zawierać zbiór $\{p_1, p_2, \dots, p_{2026}\}$?

M 1851. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych m oraz $n > 2$ takie, że $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.



Rozwiązania na str. 24



Barionowe Oscylacje Akustyczne, czyli kwintesencja kosmologii

19 marca 2025 roku **grupa badawcza DESI** (Dark Energy Spectroscopic Instrument) ogłosiła wyniki, które podważają istnienie stałej kosmologicznej – przynajmniej w tej postaci, w jakiej rozumiemy ją obecnie.

Aby zrozumieć, skąd wziął się ten wniosek, cofnijmy się niemal do początku historii Wszechświata, do epoki, w której był on wypełniony gorącą, gęstą plazmą elektronów i barionów (głównie protonów i neutronów). Plazma ta podlegała lokalnym fluktuacjom ciśnienia, wynikającym z konkurencji dwóch efektów: z jednej strony oddziaływania grawitacyjnego, a z drugiej – ciśnienia fotonów, które w tak gęstym ośrodku nie mogły jeszcze propagować się swobodnie.

Wraz z rozszerzaniem się Wszechświata plazma ulegała rozrzedzeniu i ochłodzeniu. Gdy ostatecznie doszło do procesu zwanego rekombinacją, fluktuacje ciśnienia zostały „zapisane” w rozkładzie materii. Dziś możemy odczytać ich skalę w skalach odległości między galaktykami.

Właśnie tego zadania podjął się zespół badawczy DESI. Instrument ten pozwolił skonstruować trójwymiarową mapę odległych galaktyk i kwazarów obejmującą ogromną część obserwowalnego Wszechświata. Wymagało to zarówno precyzyjnego pomiaru separacji kątowych obiektów na niebie, jak i ich przesunięć ku czerwieni, które stanowią miarę odległości kosmologicznej. Celem tych pomiarów było zbadanie **barionowych oscylacji akustycznych (BAO)**, czyli reliktywnych fluktuacji ciśnienia pierwotnej plazmy. To właśnie ten relikw z wczesnego Wszechświata stał się kluczowym narzędziem współczesnej kosmologii obserwacyjnej.

Analiza danych przeprowadzona przez grupę DESI wskazuje, że najlepiej dopasowane modele kosmologiczne to te, w których wpływ ciemnej energii maleje w czasie. Oznaczałoby to, że nie jest ona stałą kosmologiczną w pierwotnym sensie, w jakim pojawia się w równaniach Einsteina, lecz dynamicznym polem skalarnym ewoluującym wraz z ekspansją Wszechświata. Tego rodzaju scenariusze były wcześniej rozważane w pracach teoretycznych pod nazwą **kwintesencji**.

W ramach krótkiej dygresji – kosmologowie dla własnej wygody definiują równania stanu każdego składnika Wszechświata (promieniowanie, materia, ciemna energia) poprzez iloraz ciśnienia i gęstości tegoż składnika:

$$\omega = p/\rho c^2,$$

co – z wyjątkiem tradycyjnej stałej kosmologicznej – przekłada się na tempo ekspansji Wszechświata proporcjonalne do

$$a(t) \sim t^{2/3(\omega+1)},$$

w przypadku gdyby Wszechświat wypełniał tylko ten jeden składnik.

Dla materii $\omega_M = 0$ (materia nie wywiera żadnego ciśnienia), dla promieniowania $\omega_R = 1/3$, a dla stałej kosmologicznej $\omega = -1$. Modele **kwintesencji** – w największym skrócie – zmieniają równanie stanu

ciemnej energii w taki sposób, że $-1 < \omega < 0$ (najlepsze dopasowanie wypada dla $\omega \sim -0,8$). Oznacza to, że ekspansja Wszechświata pozostaje przyspieszona, lecz słabiej niż w przypadku stałej kosmologicznej, a w zależności od ewolucji $\omega(t)$ może w przyszłości przejść w fazę hamowania.

W literaturze rozważa się również fantomową ciemną energię o równaniu stanu $\omega < -1$, co prowadzi do scenariusza „Big Rip”.

Taki wynik oznaczałby ogromną zmianę w naszym rozumieniu Wszechświata. W standardowym modelu Λ CDM zawartość Wszechświata obejmuje promieniowanie, materię oraz stałą kosmologiczną, którą można interpretować jako własność samej czasoprzestrzeni – jej inherentną skłonność do przyspieszonej ekspansji. Wyniki DESI sugerują jednak odmienną narrację: zamiast niezmiennych własności geometrii mielibyśmy do czynienia z fizycznym polem, sprzężonym z grawitacją i zmieniającym się w czasie.

Póki co, należy się jednak wstrzymać z przesadnym entuzjazmem. Analiza DESI nie opiera się wyłącznie na własnych danych, lecz wykorzystuje również obserwacje mikrofalowego promieniowania tła (CMB) oraz zestawu danych dotyczących supernowych typu Ia. W zależności od przyjętego wariantu analizy preferencja dla modelu z malejącą ciemną energią mieści się w przedziale od $2,8\sigma$ do $4,2\sigma$. Standardy fizyki fundamentalnej wymagają poziomu istotności 5σ , a zatem nie można jeszcze mówić o odkryciu. Ponadto nie jest to bezpośredni pomiar zmienności stałej kosmologicznej, lecz wniosek pośredni, wynikający z globalnego dopasowania modeli do danych obserwacyjnych.

Można jednak z dużym przekonaniem stwierdzić, że nadchodzące lata coraz precyzyjniejszych pomiarów kosmologicznych mają realny potencjał do gruntownego przeformułowania naszego obecnego obrazu Wszechświata.

Wiktor MATYSZKIEWICZ

Dla zainteresowanych dalszą lekturą polecamy:
<https://www.desi.lbl.gov/2025/03/19/desi-dr2-results-march-19-guide/>

Pewny strzał w ciemno

Piotr MARSZALIK*

* Student, Wydział Matematyki
i Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Na pewien przedmiot zapisanych było 100 studentów. Po zakończeniu sesji miły wykładowca, będąc nierad z wyników uczestników kursu, chciał im dać jeszcze jedną szansę. Po opublikowaniu progu zaliczenia zaproponował im układ: *udostępni każdemu studentowi oceny całej grupy z pominięciem oceny zainteresowanego*. To znaczy, że każdy z uczniów będzie znał oceny pozostałych, a swojej nie. W następnej kolejności zostaną oni poproszeni o odpowiedź na bardzo proste pytanie:

CZY PAN(i) ZDAŁ(a)?

Jeśli odpowiedź *przynajmniej połowy* osób na to pytanie będzie prawidłowa, to wykładowca wstawi wszystkim zaliczenie. W przeciwnym wypadku... nikogo nie przepuści. Przed tym całym procederem studenci mają możliwość się naradzić, aby uzgodnić strategię. Pytanie brzmi: czy studenci mogą mieć pewność zaliczenia?

Okazuje się, że odpowiedź jest twierdząca. Na naradzie studenci dzielą się na dwie równoliczne grupy. Pierwsza połowa studentów zakłada, że liczba osób, które zaliczyły, była parzysta, a druga połowa studentów zakłada przeciwnie: że nieparzyście wiele spośród wszystkich osób zdało. Takie założenie o parzystości liczby tych, którzy zaliczyli, daje studentowi jednoznaczną informację o *jego własnym* zaliczeniu na podstawie wiedzy o zaliczeniach innych. Oczywiście jest, że któraś grupa ma rację, więc dokładnie połowa udzieli poprawnej odpowiedzi. To oznacza, że warunek prowadzącego będzie spełniony!

Znajomy tego prowadzącego usłyszał o tej sytuacji w uczelnianej stołówce i wpadł na jeszcze lepszy pomysł – swoim studentom (których miał całkiem sporo, bo aż *nieskończenie wielu*) zaproponował podobną, choć znacznie trudniejszą grę.

Powiedział, że *student o numerze k w dzienniku będzie miał dostęp do ocen osób o numerach $k + 1, k + 2, \dots$* , i znowu każdy zgaduje, czy zdał. Tylko że tym razem warunkiem zaliczenia jest to, że **pomyli się tylko skończenie wielu studentów**. Czyli prawie wszyscy muszą mieć rację, aby spełnić warunek prowadzącego, a jeśli im to nie wyjdzie, to wszyscy oblewają! Czy i tym razem istnieje strategia studentów, która może ich uratować? Czytelnicy, którzy chcieliby sami zmierzyć się z tym pytaniem, powinni zaprzestać lektury w tym miejscu.

Odpowiedź znowu jest pozytywna! Będziemy patrzeć na wyniki studentów jak na ciąg nieskończony, składający się z samych 0 (niezaliczone) i 1 (zaliczone), czyli pełna informacja o ich zaliczeniu to pewien element zbioru $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zacznijmy od uzasadnienia tego, że jeśli dwa takie ciągi różnią się tylko na skończonej liczbie indeksów, to dowolna strategia studentów da przy tych ciągach taki sam efekt. Rzeczywiście, od momentu, w którym ciągi te się pokrywają, studenci będą widzieli „to samo”, będą zatem udzielać w obu przypadkach tych samych – w równym stopniu poprawnych – odpowiedzi. Z punktu widzenia studentów dwa takie ciągi są zatem równie dobre – będziemy pisać *równoważne*. W ten sposób dzielimy cały zbiór $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ na tzw. *klasy równoważności*, w ramach których wszystkie jego elementy są równoważne (a między którymi nie są).

Podczas narady studenci wybierają dokładnie jednego reprezentanta z każdej klasy równoważności. Dla przykładu, z klasy ciągów, które od pewnego momentu są równe zero, mogli wybrać reprezentanta będącego ciągiem samych zer.

Przy odpowiedzi na pytanie prowadzącego każdy student porównuje widziany przez siebie fragment ciągu ze zbiorem reprezentantów i próbuje znaleźć takiego, który na tym fragmencie „pasuje” – tzn. różni się tylko w skończonej

W ogólności, gdyby n studentów miało odgadnąć swoją dokładną ocenę, mogącą przyjąć k możliwych wartości, mogliby analogiczną strategią zagwarantować prawidłowość co najmniej $\lfloor n/k \rfloor$ odpowiedzi. Polecamy zastanowić się, dlaczego liczby tej nie można zwiększyć (odpowiedź na str. 18). W szczególności, gdyby w oryginalnym zadaniu ($k = 2$) było nieparzyście wielu studentów, to nie mogliby oni zagwarantować spełnienia warunku prowadzącego.

Symbol $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór $\{0, 1\}$, czyli właśnie zbiór wszystkich ciągów o wartościach 0 lub 1.

Czytelnik Wykształcony w Teorii Mnogości może dostrzec, że strategia studentów ma pewien słaby punkt – zakłada bowiem prawdziwość *aksjomatu wyboru*. Jako ciekawostkę dodam, że usłyszałem o tym zadaniu od dwóch prowadzących zajęcia: jeden podał ją po prostu jako trudną zagadkę, drugi zaś jako argument za absurdalnością przyjmowania wspomnianego aksjomatu.

liczbie miejsc. Uda mu się znaleźć takiego reprezentanta, bo ciąg, który widzi (z dokładnością do skończenia wielu elementów, których nie widzi) należy do którejś klasy, czyli różni się od jej reprezentanta na skończenie wielu indeksach. Następnie student udziela takiej odpowiedzi, jaka przypadła mu w znalezionym reprezentancie.

O powodzeniu strategii decyduje to, że wszyscy studenci, niezależnie od swojego numeru w dzienniku, znajdą tego samego reprezentanta! To dlatego, że każdy widzi ten sam „ogon” prawdziwego ciągu – a inni reprezentanci są w innych klasach, czyli różnią się od tego ciągu w nieskończenie wielu miejscach. Widać teraz, że odpowiedzi studentów odtworzą owego reprezentanta, znajdowanego przez każdego z nich. A skoro cały ciąg jest w klasie równoważności wybranego przez wszystkich reprezentanta, to **tylko skończenie wielu studentów się pomyli** (na tych miejscach, na których te ciągi się różnią). Reszta zgadnie poprawnie. I voilà – warunek wykładowcy zostaje spełniony, studenci zaliczają!



Mała, a całkiem ważna

Podwójna helisa DNA. Częsteczka – celebrytka, elegantka. Pojawia się jako ikona odkryć naukowych, w tym „tajemnicy życia”. Tymczasem okazuje się, że aby odkryć tę tajemnicę, należy spojrzeć na jej ubogą krewną, częsteczkę RNA.

Zanim pójde dalej, pozwólmy sobie na krótkie porównanie tych dwóch związków. RNA i DNA to biopolimery, długie cząsteczki zbudowane z mniejszych jednostek zwanych nukleotydami. Każdy nukleotyd zawiera cukier, grupę fosforanową i zasadę azotową. Są nośnikami informacji zakodowanej w sekwencji następujących po sobie 4 typów nukleotydów.

Słynna helisa to forma, którą przyjmuje DNA, kwas deoksyrybonukleinowy. Częsteczka DNA jest dwuniciowa, nici pasują do siebie, bowiem między nukleotydami jednej i drugiej tworzą się w poprzek wiązania wodorowe. Stąd częste porównanie helisy do skręconej drabiny. W cząsteczkach DNA, w jądrze, zapisane są informacje niezbędne do działania komórki. DNA w sposób precyzyjny jest powielany przed podziałem komórkowym, przez co jego kopie trafiają do komórek potomnych. Częsteczki RNA, kwasu rybonukleinowego, są krótkie i istnieje ich wiele typów. Działają w służbie odczytywania informacji zapisanej w DNA – biorą udział w syntezie białek i służą regulacji, które geny (i jak intensywnie) są odczytywane.

I tu tkwi fenomen cząsteczek RNA. Są krótsze i potrafią związać się same ze sobą w dwuniciowe i jednoniciowe domeny, które, oddziałując między sobą, tworzą struktury trójwymiarowe. Każda cząsteczka RNA (a są to dziesiątki tysięcy unikalnych sekwencji w komórkach ssaków) przybiera swój, charakterystyczny kształt. Przy nich długie cząsteczki DNA są po prostu, z całym szacunkiem, nudne.

Fenomen RNA uznał już w latach 60. XX wieku sam Francis Crick, odkrywca ikonicznej podwójnej helisy. Uważał, że to RNA, a nie DNA i białka, mógł być pierwotnym związkiem podstaw życia. Wówczas hipoteza ta nie była poparta żadnymi dowodami i trzeba było czekać 20 lat, żeby takie dowody znaleźć.

W latach osiemdziesiątych wciąż uważano, że funkcje enzymów, cząsteczek katalizujących reakcje chemiczne w komórkach pełnią białka. Dyskusja, co było przed pojawieniem się komórek żywych, była zatem trudna: jak przeskoczyć z zupy pływających różnych cząsteczek do niezwykle złożonego systemu, gdzie białka niezbędne do metabolizmu komórkowego syntetyzowane są na podstawie informacji zapisanych w długich cząsteczkach DNA w kilkustopniowym i złożonym procesie. Taki system nie mógł powstać losowo.





Szczęściem dwóch badaczy, Thomas Cech i Sidney Altman, odkryło rzecz zupełnie niezwykłą. Prowadząc badania nad reakcjami zachodzącymi w komórkach, w których brały udział białka i RNA, odkryli nie tylko, że dla zajścia reakcji niezbędna jest obecność RNA, to jeszcze że nie są w niej potrzebne białka. I tak okazało się, że cząsteczki RNA mogą być enzymami, które nazwano „rybozymami”.

W 1986 roku Walter Gilbert zaproponował hipotezę „świata RNA”. Zakłada ona, że na wczesnym etapie ewolucji życie opierało się wyłącznie na cząsteczkach RNA. Według tej teorii RNA pełniło obie kluczowe funkcje życiowe: przechowywało informację genetyczną („rola” dzisiejszego DNA) oraz katalizowało reakcje chemiczne jako rybozomy (rola dzisiejszych białek). Dopiero w toku ewolucji te zadania zostały przejęte przez stabilniejsze DNA i bardziej efektywne enzymy białkowe.

Odtąd w laboratoriach próbowano stworzyć sztuczny RNA, który miałby zdolność do samopowieliania. Cząsteczki, które są w stanie prowadzić syntezę RNA na podstawie wzorcowej cząsteczki RNA (tworzyć kopie), udało się stworzyć na początku lat 2000., ale wciąż były one zbyt długie. Zbyt długie, jak na możliwość spontanicznego powstania z mieszanek podstawowych jednostek. Opisywane w kolejnych pracach konstrukty miały bowiem około 200 nukleotydów. Jednocześnie wydawało się, że krótsze cząsteczki nie mogą uformować się w strukturę, która da odpowiednią stabilność i aktywność enzymatyczną.

Aż w lutym 2026 roku w magazynie *Science* ukazała się praca [*] opisująca zdolny do autoreplikacji (powielania samego siebie) rybozym QT45 – o długości 45 nukleotydów.

QT45 otrzymano metodą długiej selekcji. Początkowo badacze stworzyli mieszaninę losowych cząsteczek RNA o długości od 30 do 60 nukleotydów. Wszystkie one zostały poddane próbie przeprowadzenia reakcji połączenia dwóch fragmentów RNA. Dzięki technicznemu trikowi cząsteczki, które to zrobiły, zostały z mieszaniny wyizolowane. Dalej „zadania” były coraz trudniejsze – rybozomy miały powielić RNA o prostej, mającej powtarzający się motyw sekwencji, później o sekwencji bardziej zróżnicowanej. Jednocześnie cząsteczki modyfikowano i skracano, badając ich aktywność enzymatyczną. W końcu najmniejsza cząsteczka posiadająca zdolność do syntezy RNA została poddana ostatniej próbie: powielenia siebie samej. Kryje się w tym „zadaniu” paradoks. Aby cząsteczka RNA miała aktywność enzymu, musi być zwinięta do swojej struktury trójwymiarowej, która pozwala jej prowadzić reakcję. Jednocześnie ta sama cząsteczka, aby mogła być powielona, musi zostać rozwinięta, żeby enzym prowadzący proces kopiowania miał dostęp do kolejnych oczek łańcucha. Obie formy były obecne w specyficznych warunkach reakcji: roztworu soli w temperaturze -7°C , kiedy tworzy się mieszanina kryształów soli i lodu z jednoczesną frakcją ciekłą. Reakcja prowadzona była przez 72 dni, uzyskano wydajność 0,2%, co oznacza, że na każde 1000 cząsteczek „matrycowych” powstawały dwie kopie. Mało? Cóż, kiedy się ma miliony lat do dyspozycji, to całkiem niezły wynik.

Odkrycie nie wstrząsa posadami świata, jest jednak dalszą cegiełką do nieprawdopodobnie trudnych dociekań, jak mogło dojść do powstania życia. Istnieje kilka innych hipotez: świat białek, świat lipidów, świat gradientu protonów i inne. Ostrożnie można uznać, że żadna z hipotez nie jest „zwycką”, bo procesy mogły zachodzić równolegle. Ale hipoteza RNA dostała następny argument „za”. Szansa, że spontanicznie powstanie cząsteczka zdolna do powielania samej siebie o długości 45 nukleotydów, jest niezwykle mało prawdopodobna, ale jednak... możliwa. Może dlatego badacze nazwali ją QT, czyli Quite Tiny (całkiem maleńka).

Marta FIKUS-KRYŃSKA

[*] “A small polymerase ribozyme that can synthesize itself and its complementary strand”, E. Gianni i wsp. (2026), *Science*, 12.02.2026.



Powaga dnia 1 kwietnia skłania do zadawania niemal egzystencjalnych pytań, jak chociażby następujące:

Czy każdy szanujący się ciąg liczbowy powinien mieć co najmniej dwa elementy?

Powyższe pytanie jest w równym stopniu bezsensowne, jak i żartobliwe, choć istnienie jednoelementowych ciągów to nie żart! Przyjrzymy się sekwencjom, które takie właśnie (nie) są.

Na potrzeby niniejszego tekstu ciąg jednoelementowy definiujemy jako ciąg, który w encyklopedii ciągów całkowitoliczbowych OEIS ma obecnie zapisany dokładnie jeden element. Zwyczajowo do tej bazy danych można zgłosić nowy ciąg, jeżeli ma on co najmniej cztery elementy. Drugim wymogiem jest jednak to, że wszystkie wpisane elementy (razem z przecinkami) mają zajmować nie więcej niż 260 znaków – z tego powodu do bazy trafiły następujące *pozornie* jednoelementowe sekwencje:

- **A115453: Liczby pierwsze w prefiksie rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.**
Łatwo sprawdzić, że 14, 141, 1414 i kilka kolejnych prefiksów po przecinku liczby $\sqrt{2}$ to liczby złożone. Najmniejszą liczbą pierwszą, którą możemy tam znaleźć, jest prefiks długości 97:
1 414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 698 078 569 671 875 376 948 073,
stanowiący jedyny wpis rozpatrywanego ciągu. Znaleźć trzy elementy tej sekwencji – mające, odpowiednio, 225, 11 260 i 11 540 cyfr, więc dopisanie już drugiej liczby spowodowałoby przekroczenie limitu znaków.
- **A118329: Liczby pierwsze w prefiksie rozwinięcia dziesiętnego stałej Catalana.**
Ciąg bardzo podobny do poprzedniego, ale bazujący na mniej popularnej liczbie: stała Catalana to

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0,915965 \dots$$

Problem otwarty: czy stała Catalana jest liczbą niewymierną?

Pierwsza liczba pierwsza w prefiksie,

9 159 655 941 772 190 150 546 035 149 323 841 107 741 493 742 816 721,

ma 52 cyfry, a druga ma już 276 cyfr, co ponownie sprawia, że ciąg widnieje jako pozornie jednoelementowy.

Trochę inna sytuacja jest z ciągiem A072288, zawierającym

najmniejsze dzielniki pierwsze liczby $(10^{100} + n)$ nie mniejsze niż 14.

Rozkład na czynniki pierwsze googolplexa (piętrowca występującego w powyższej liczbie) nie jest trudny. Lecz gdy zaczniemy do niego dodawać kolejne liczby, to zagadnienie się mocno komplikuje. Wiemy, że po dodaniu do niego 1 otrzymamy liczbę, której najmniejszym czynnikiem pierwszym jest

316 912 650 057 057 350 374 175 801 344 000 001,

czyli jedyny wyróżniony w OEIS element rozpatrywanego ciągu. Jedyny, gdyż choć znane są niektóre inne wyrazy ciągu (np. trzeci jest równy 1429, zaś czwarty 1129), to drugi pozostaje tajemnicą (wiadomo tylko, że musi być większy od 10^{14}).

Dla Czytelnika niepokieszonego faktem, że artykuł traktuje o ciągach, które tak naprawdę mają więcej niż jeden element, przygotowaliśmy aż dwa (!) ciągi, które **być może** są jednoelementowe!

- **A058445: Liczby n takie, że liczba n^2 jest niepodzielna przez 10 i w jej zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 0, 5 i 6.**
Najmniejszym (i zarazem jedynym znanym) elementem tego ciągu jest

2 236 081 408 416 666.

Obecnie wiadomo, że jeżeli istnieje drugi element tego ciągu, to jest on większy od liczby $2 \cdot 10^{19}$.

- **A058446: Kwadraty niepodzielne przez 10, w których zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 0, 5 i 6.**
Ten ciąg jak dotąd sprawdzono aż do liczby $4 \cdot 10^{38}$ i znaleziono tylko jeden element:

5 000 060 065 066 660 656 065 066 555 556.

Bardzo bym się zdziwił, gdyby się okazało, że te dwa ciągi faktycznie są jednoelementowe. A jeszcze bardziej bym się zdziwił, gdyby jeden z nich okazał się jednoelementowy, a drugi nie!

Celowo pomijamy w tym tekście wątek liczb Riesela A076337, gdyż zasługuje on na osobne opracowanie – i być może kiedyś się go w *Kącie otwartym* doczeka!

Przedstawiamy Obserwatorium imienia Very C. Rubin

* Narodowe Centrum Badań Jądrowych,
Departament Badań Podstawowych,
Zakład Astrofizyki

Vera C. Rubin (1928–2016), której imię nosi obserwatorium, była wybitną amerykańską astronomką. Zapoczątkowała pionierskie badania nad prędkością rotacji galaktyk spiralnych, a jej badania stanowiły jeden z pierwszych kluczowych dowodów na istnienie ciemnej materii.

Krótką informację o pierwszych zdjęciach znajdziecie w Δ_{25} .

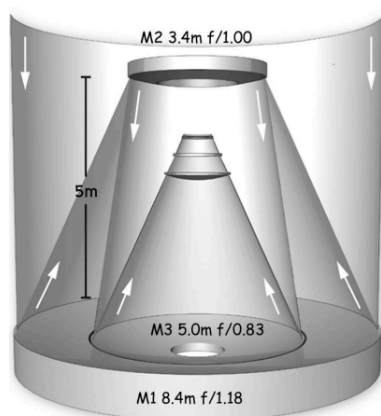
Uściślając: pełny skan całego nieba wymaga 3 nocy ciągłych obserwacji, a taki trwający trzy noce cykl będzie bez przerwy powtarzany przez okres 10 lat.

*Aidan COTTER**

Po pięciu latach planowania, a następnie dekadzie budowy, Obserwatorium imienia Very C. Rubin rozpoczęło nową erę badań Wszechświata. Pierwsze zdjęcia zostały udostępnione publicznie w poniedziałek 23 czerwca 2025 roku, pokazano niesamowite możliwości teleskopu w zakresie obrazowania ogromnych obszarów nieba w rekordowo krótkim czasie. Po osiągnięciu pełnej operacyjności teleskopu w październiku 2025 roku rozpoczęły się obserwacje w ramach przeglądu Legacy Survey of Space and Time (LSST), największego przeglądu nieba, jaki kiedykolwiek powstał. W ramach tego przeglądu całe niebo południowe będzie skanowane bez przerwy przez 10 lat, co w efekcie pozwoli stworzyć dziesięcioletni film rejestrujący wszystkie obiekty nocnego nieba.

Najnowsze obserwatorium

Obserwatorium Very C. Rubin jest położone na szczycie Cerro Pachón w Chilijskich Andach. Jest niezwykle w kilku aspektach. Mieści w sobie teleskop przeglądowy Simonyi Survey Telescope z lustrem o średnicy 8,4 metra. Na teleskopie zamontowana jest największa kamera cyfrowa, jaką kiedykolwiek zbudowano. Kamera i lustro osadzone są na najszybciej poruszającym się montażu teleskopu, jaki kiedykolwiek powstał. Cała konstrukcja, ważąca około 220 000 kilogramów (czyli tyle, co sześć w pełni załadowanych ciężarówek), potrafi obrócić się do nowej pozycji w zaledwie 5 sekund. Oczywiście żaden kraj samodzielnie nie mógłby zrealizować projektu o takiej skali. Innowacyjne technologie zastosowane przy budowie teleskopu zostały opracowane przez naukowców z ponad 30 krajów. W tym z Polski, która wniosła wkład w formie zasobów obliczeniowych i oprogramowania.



Rys. 1. Schemat konstrukcji teleskopu z trzema lustrami, zastosowanej w Obserwatorium Very C. Rubin. Lustro główne (M1) ma średnicę 8,4 m, lustro wtórne (M2) – 3,4 m, a lustro trzeciorzędne (M3) – 5 m. Współczynnik ogniskowej stopniowo maleje, co pozwala LSST uzyskać szerokie pole widzenia.
Źródło: Ivezić et al., 2019

Sama kamera teleskopu rejestruje obrazy o rozdzielczości 3200 megapikseli. To tak dużo, że do wyświetlenia jednego zdjęcia w pełnej jakości potrzeba byłoby aż 400 ekranów 4K! W ciągu dziesięcioletniego programu obserwacyjnego LSST powstanie około 60 petabajtów surowych danych obrazowych. Trudno sobie wyobrazić taką ilość danych, więc posłużmy się przykładem. Gdybyś, Drogi Czytelniku, podjął się przejrzenia wszystkich tych zdjęć zebranych w ramach całego programu LSST i robił to w tempie jednego fragmentu w rozmiarze 4K na sekundę, to potrzebowałbyś na to ponad 25 lat nieprzerwanego oglądania! Trochę łatwiejsze byłoby przejrzenie zdjęć wykonanych podczas jednej nocy obserwacyjnej, obejrzenie ich w tym tempie zajęłoby Ci tylko około czterech i pół dnia ciągłego przeglądania. Równie imponujący jest czas odczytu danych z kamery: LSST potrafi przekształcić sygnał ze wszystkich 3200 megapikseli kamery w dane cyfrowe w zaledwie 2 sekundy.

Nie tylko kamera jest wyjątkowa. Dla Obserwatorium Very C. Rubin opracowano też rewolucyjną konstrukcję teleskopu (co ciekawe, jej pierwotny pomysł został podobno naszkicowany na serwetce). Podczas gdy większość teleskopów lustrzanych wykorzystuje dwa lustra do skupiania światła, teleskop w Obserwatorium Very C. Rubin używa aż trzech luster (rys. 1). Takie rozwiązanie pozwala zmaksymalizować pole widzenia i jednocześnie ograniczyć zniekształcenia obrazu. Niesie jednak ze sobą też pewne problemy: część zdolności zbierania światła przez główne lustro jest tracona, ponieważ duża część apertury jest zasłonięta przez lustro wtórne (M2). Mimo to lustro główne o imponującej średnicy 8,4 metra sprawia, że LSST potrafi rejestrować niezwykle głębokie i szczegółowe obrazy w zadziwiająco krótkim czasie.

Jednak Obserwatorium Very C. Rubin nie zostało zaprojektowane po to, by być największym ani nawet najdokładniejszym obserwatorium na świecie. Wytycza nowy nurt w astronomii. Jego głównym celem jest jak najszybsze obrazowanie nieba przez jak najdłuższy czas, w najlepszej możliwej jakości. Przez następne



Pragnę tutaj uspokoić Zdenerwowanego Czytelnika, że tylko 7 z 2104 nowo odkrytych asteroid znajduje się w pobliżu Ziemi i żadna z nich nie stanowi zagrożenia dla naszej planety.

Świece standardowe to źródła, dla których znamy rzeczywistą jasność. Dzięki temu możemy dokładnie określić odległość do nich, co pozwala nam na badanie tempa rozszerzania się Wszechświata.

dziesięć lat LSST będzie tworzyć „film” całego nieba południowego. Zobaczymy, jakim zmianom podlega Wszechświat, w skali większej niż kiedykolwiek wcześniej.

Dodatkowym elementem przeglądu nieba realizowanego przez Obserwatorium Very C. Rubin będzie system powiadomień (alertów), który zaalarmuje obserwatoria na całym świecie za każdym razem, gdy w niebie pojawi się nowe zjawisko (na przykład wybuchnie supernowa). Taki alert będzie generowany w około 60 sekund, co umożliwi astronomom skierowanie jak największej liczby instrumentów w stronę nowego zjawiska oraz obserwowanie supernowych i innych przemijających szybkich zdarzeń w czasie rzeczywistym.

Wszystkie te elementy i cechy Obserwatorium Very C. Rubin razem pozwolą na badania natury ciemnej materii i ciemnej energii, mapowanie obiektów znajdujących się w Układzie Słonecznym i szerzej – w Galaktyce oraz śledzenie i badanie obiektów, które zmieniają swoje położenie lub jasność na nocnym niebie. Szerzej, obserwacje LSST pozwolą na badania domeny czasowej.

Czym są obserwacje domeny czasowej?

Nocne niebo nie jest statyczne. Wiele obiektów astronomicznych zmienia swoją jasność lub położenie, jeśli patrzy się na nie wystarczająco długo. Badania domeny czasowej to badania, które skupiają się na tym, jak obiekty astronomiczne zmieniają się w czasie. Najogólniej rzecz ujmując, astronomia domeny czasowej pozwala śledzić, co, kiedy i jak się zmienia na niebie.

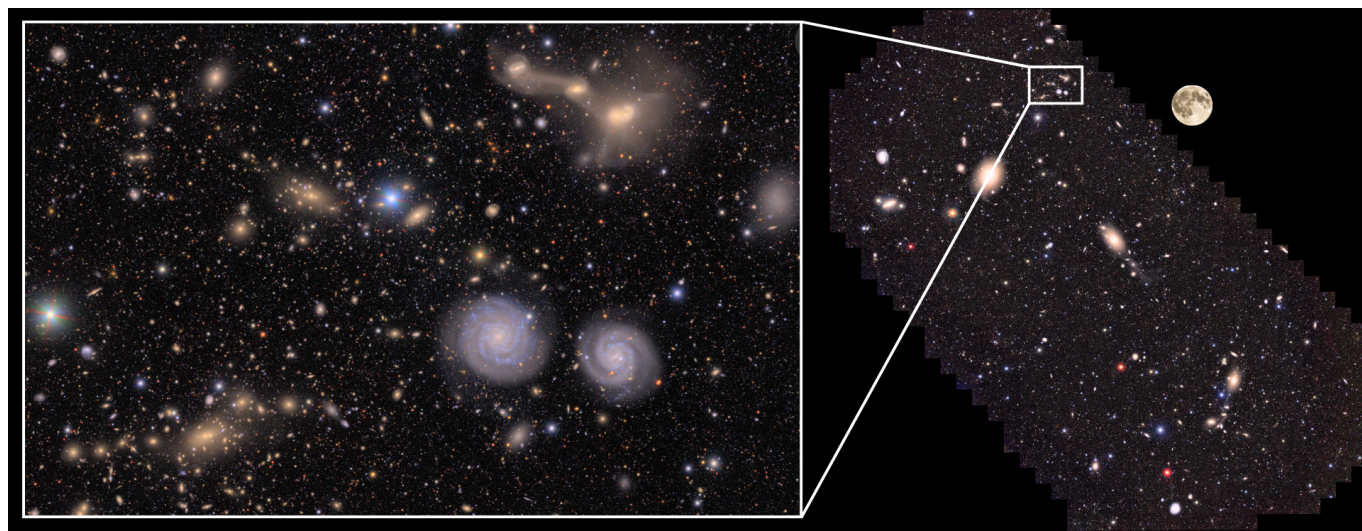
Pierwszym oczywistym przykładem obiektów zmieniających się w czasie, a dokładnie zmieniających swoje położenie na nocnym niebie, są komety i asteroidy. Wiedza o ich istnieniu i kierunku ruchu jest kluczowa nie tylko dla nauki, ale też dla bezpieczeństwa naszej planety. A szacuje się, że Układ Słoneczny zawiera miliony asteroid i komet. Większość z nich wciąż jednak pozostaje niezidentyfikowana. Wszystkie działające obecnie teleskopy łącznie znajdują tylko około 20 000 takich obiektów rocznie. Dla porównania, w ciągu zaledwie dziesięciu godzin próbnych obserwacji LSST zaobserwował ich aż ~4000, z czego aż 2104 to nowe odkrycia. Jeśli LSST będzie kontynuował obserwacje w tym tempie, to będzie identyfikował nowe asteroidy prawie 100 razy szybciej niż wszystkie istniejące teleskopy razem wzięte do tej pory. Zbudowanie tak dużego katalogu asteroid jest ważne nie tylko z powodu monitorowania możliwości kolizji z naszą planetą, ale również dla badania historii całego Układu Słonecznego (na przykład historii i pochodzenia pierwiastków na Ziemi).

Obiekty astronomiczne mogą zmieniać też jasność. Przykładami mogą tutaj być supernowe typu Ia, gwiazdy typu RR Lyrae czy Cefeidy, ogólnie – wszystkie gwiazdy zmienne. Ich obserwacje są niezwykle przydatne w kosmologii. Od prawie 100 lat Supernowe typu Ia są używane jako świece standardowe do badania tempa ekspansji Wszechświata. LSST będzie obserwować miliony takich zmiennych źródeł. Dane te pozwolą kosmologom określić fundamentalne właściwości naszego Wszechświata (takie jak tempo rozszerzania się Wszechświata) przy użyciu większej ilości danych niż kiedykolwiek wcześniej.

Pierwsze przykłady obserwacji

Pierwsze publicznie udostępnione zdjęcia z Obserwatorium Very C. Rubin pokazują niezwykle skalę i dokładność, z jaką przegląd LSST będzie obrazować niebo. Zdolności w zakresie badań zmienności położenia i jasności obiektów astronomicznych w czasie zostały zaprezentowane w serii krótkich filmów, pokazujących około 4000 asteroid oraz 46 gwiazd typu RR Lyrae. Można je obejrzeć na stronie rubinobservatory.org.

Ale to nie wszystko, LSST zaprezentowało niezwykle możliwości obserwacji galaktyk. Opublikowane zdjęcie o szerokim polu widzenia (rys. 2) ukazuje ponad 10 milionów galaktyk. Obejmuje ono obszar 24 stopni kwadratowych (to mniej więcej tyle, co 120 tarcz Księżyca w pełni) i zostało złożone z obserwacji



Rys. 2. Zdjęcie fragmentu nieba wykonane w Obserwatorium Very C. Rubin. Po lewej stronie widoczny jest powiększony fragment szerokokątnego obrazu z LSST, ukazujący gromadę galaktyk, dwie duże galaktyki spiralne oraz układ trzech zderzających się galaktyk. Po prawej znajduje się zdjęcie pełnego pola widzenia LSST, z zaznaczonym na białym obszarze pokazanym w powiększeniu. Całość obejmuje około 25 stopni kwadratowych i powstała z połączenia 1185 ekspozycji. Dla porównania skali pokazano tarczę Księżyca w pełni.

Źródło: Obserwatorium Very C. Rubin (NSF-DOE)

wykonanych w ciągu 7 nocy, z łącznym czasem obserwacji wynoszącym około 10 godzin. Dla porównania, typowy teleskop klasy 8 metrów (jest to rozmiar lustra teleskopu) potrzebowałby około roku na wykonanie podobnych obserwacji. Po przybliżeniu obrazu możemy dostrzec niezwykle ilość detali, jaką oferuje LSST. Na rysunku 2 biała ramka, reprezentująca mały fragment obserwacji, obejmuje gromadę galaktyk sąsiadującą z dwiema jasnymi galaktykami spiralnymi oraz układem galaktyk w trakcie zderzenia, a przy krawędzi powiększonego obrazu widoczna jest także jasna pobliska gwiazda.

Na kartkach papieru niemożliwe jest pokazanie, jak imponująca jest dokładność zdjęć. Dlatego bardzo zachęcamy Czytelników do odwiedzenia strony rubinobservatory.org, na której można dowolnie eksplorować zdjęcie fragmentu nieba wykonane w ramach LSST i przekonać się o niezwyklej jakości tych obserwacji. Udostępnione zdjęcia to tylko przedsmak tego, do czego zdolny jest teleskop. Podobne obserwacje będą powtarzane nieustannie przez 10 lat, ujawniając zmiany, jakim podlega nocne niebo.

Obserwatorium Very C. Rubin zrewolucjonizuje również obserwacje bliższego nam fragmentu Wszechświata. Na poniższym obrazie o rozdzielczości 5000 megapikseli (rys. 2), wykonanym w ciągu 7 godzin obserwacji, widoczna jest para mgławic znanych jako Mgławica Trójklistna i Mgławica Laguna. Mgławice są miejscami narodzin gwiazd, lecz ze względu na dużą ilość pyłu kosmicznego przysłaniającego światło gwiazd są niezwykle trudne do obserwacji. Połączenie setek, a nawet tysięcy zdjęć pozwala jednak wydobyć szczegóły struktury mgławicy i zajrzeć w jej głąb, ujawniając miejsca narodzin gwiazd.



Rys. 3. Widok mgławic Trójklistnej i Laguny zarejestrowany przez LSST. W pełnej rozdzielczości obraz ma aż 5000 megapikseli i został wykonany w zaledwie siedem godzin obserwacji.

Źródło: Obserwatorium Very C. Rubin (NSF-DOE)

O kolorowaniu liczb naturalnych, czyli jak van der Waerden wachlarze projektował

Paweł SAWICKI*

*Doktorant, Wydział Matematyki, Fizyki
i Informatyki, Uniwersytet Gdański

Główną motywacją niniejszego artykułu jest opowiedzenie o następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1 (Bartel Leendert van der Waerden, 1927). *Jeżeli pokolorujemy liczby naturalne skończoną liczbą barw, będą istnieć jednobarwne ciągi arytmetyczne każdej skończonej długości.*

Trzeba przyznać, że teza jest zaskakująca, wiele osób mogłoby ją intuicyjnie uznać za błędną – trudno się przecież spodziewać, że zbiory, o których niemal nic pewnego nie wiemy, będą miały tak dobrze uporządkowane podzbiory. Jej prawdziwość jest jednym z fundamentalnych wyników gałęzi kombinatoryki znanej jako *teoria Ramseya*. Dowód postaramy się przedstawić tak, aby jasne były powody wykonania kolejnych kroków, bez wyciągania „królików z kapelusza”. Linia rozumowania jest zaczerpnięta z artykułu Terence’a Tao *The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi’s theorem*. Dla wygody, przez m -kolorowanie rozumiemy kolorowanie m kolorami, ponadto zbiór liczb naturalnych będziemy standardowo oznaczać przez $\mathbb{N}$.

Wykażemy następujące, pozornie silniejsze, sformułowanie problemu:

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych $k, m \geq 1$ istnieje taka liczba naturalna N , że każde m -kolorowanie N kolejnych liczb naturalnych zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k .*

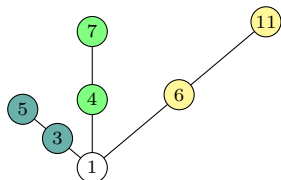
Teraz dużo lepiej widać, że narzucającą się metodą ataku jest zastosowanie podwójnej indukcji po k i m . Obiecujące wydaje się, by „zewnątrzna” indukcja była po długości ciągu. Bazę indukcji otrzymujemy za darmo: trywialne jest, że teza zachodzi dla $k = 1$ (a nawet dla $k = 2$). Pozostaje nam wykonanie kroku indukcyjnego: wiedząc, że każde skończone kolorowanie dostatecznie wielu kolejnych liczb naturalnych zawiera ciąg arytmetyczny długości $k - 1$ (założenie indukcyjne), pragniemy to samo udowodnić dla k .

Przechodzimy teraz do indukcji względem liczby barw m („wewnętrzna” indukcja). Niestety nie widać, w jaki sposób przeprowadzić krok indukcyjny. Żadne trywialne rozumowanie nie pozwala wnioskować, że po odpowiednim wydłużeniu przedziału dodanie nowego koloru nie zmniejszy długości istniejących w nim ciągów arytmetycznych. Tutaj z pomocą przychodzi rdzeń pomysłu van der Waerdena, który można by nazwać *wzbogaceniem* czy też *odświeżeniem* tezy indukcyjnej. Ta metoda sprowadza się do tego, żeby zdefiniować strukturę, której istnienia będzie można dowodzić jako alternatywy dla tej żądanej w pierwotnym sformułowaniu tezy. Nowa struktura powinna dawać się łatwiej rozbudowywać w kroku indukcyjnym. Z drugiej strony, nie może istotnie osłabiać twierdzenia, a zatem jest pożądane, aby była kluczową „cegiełką” w konstrukcji oryginalnej struktury czy też czymś pośrednim pomiędzy dwiema takimi strukturami. Z tej perspektywy źródło idei van der Waerdena jest już dosyć jasne – staramy się znaleźć konstrukcję zawierającą konkretny punkt, którego malowanie wymaga albo wydłużenia jednokolorowego ciągu, albo wprowadzenia nowej barwy:

Definicja 1 (Wachlarz van der Waerdena). *Wachlarz o promieniu r i stopniu d składa się z bazy $a \in \mathbb{N}$ oraz d parami rozłącznych szprych. Dla $1 \leq j \leq d$, j -ta szprycha to ciąg arytmetyczny $a + b_j, a + 2b_j, \dots, a + (r - 1)b_j$. Wachlarz nazywamy *polichromatycznym*, gdy każda jego szprycha jest jednobarwna, a baza ma kolor inny od każdej ze szprych.*

W tym miejscu możemy założyć prawdziwość „zewnątrznej” hipotezy indukcyjnej (dla dowolnego $m' \in \mathbb{N}$ istnieje $N = N(k - 1, m')$ takie, że każde m' -kolorowanie przedziału długości N zawiera ciąg arytmetyczny długości $k - 1$).

Tak naprawdę oba sformułowania są równoważne, jednak implikacja „w dół” jest mniej oczywista. Tym, którzy sami chcieliby ją przeprowadzić, polecamy zapoznanie się z *lematem Kőniga*.



Ilustracja polichromatycznego wachlarza o promieniu 2 i stopniu 3

Odpowiedź na pytanie z artykułu

Pewny strzał w ciemno: Zaczniemy od wytłumaczenia, dlaczego studenci mogą zagwarantować $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ prawidłowych odpowiedzi. Bez straty ogólności przyjmijmy, że oceny są liczbami całkowitymi $1, 2, \dots, k$. Studenci dzielą się na k możliwie równolicznych grup, tzn. każda grupa ma liczyć co najmniej $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ osób. Studenci z grupy o numerze i zakładają, że reszta z dzielenia sumy wszystkich ocen przez k jest równa i (k -ta grupa przyjmuje oczywiście resztę 0). Takie założenie oraz znajomość ocen pozostałych jednoznacznie wskazuje każdemu studentowi odpowiedź na pytanie o jego ocenę. Ponieważ któraś grupa musiała przyjąć słuszne założenie, warunek zostaje spełniony. Zauważmy teraz, że każdy student podejmuje decyzję na podstawie jednego z k^{n-1} możliwych ciągów ocen, jaki ów student „widzi”. W tej sytuacji dla każdego studenta istnieje $(k-1)k^{n-1}$ konfiguracji wszystkich ocen (w tym jego), przy których podejmuje on złą decyzję. Ponieważ wszystkich studentów jest n oraz mamy k^n możliwych ciągów wszystkich ocen, więc pewien ciąg ocen jest na liście „złych ciągów” u co najmniej $\lceil \frac{n(k-1)k^{n-1}}{k^n} \rceil = \lceil \frac{k-1}{k} n \rceil$ studentów. Oznacza to, że przy takim ciągu ocen prawidłowej odpowiedzi udziela co najwyżej $n - \lceil \frac{k-1}{k} n \rceil = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ studentów.

„Wewnętrzna” indukcja względem liczby barw zostaje zastąpiona przez poniższe stwierdzenie dowodzone przez indukcję względem stopnia wachlarza:

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego $d \geq 0$ oraz $m \geq 1$ istnieje takie $N(k, m, d) \in \mathbb{N}$, że każde m -kolorowanie $N(k, m, d)$ kolejnych liczb naturalnych zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k albo wachlarz polichromatyczny stopnia d o promieniu k .*

Jasne jest, że to sformułowanie nam wystarczy, skoro po dojściu do $d = m$ zabraknie barw, by istniał wachlarz polichromatyczny żadanego stopnia, co od razu implikuje prawdziwość zewnętrznej tezy indukcyjnej. Nie ma też kłopotu z bazą indukcji, wachlarz stopnia 0 składa się z jednej liczby (bazy), wystarczy zatem wziąć $N(k, m, 0) = 1$. Trzeba teraz znaleźć sposób, żeby w kroku indukcyjnym rozbudować wachlarz o jedną szprychę. W tym celu wykorzystamy podejście nieco podobne do argumentu przekątniowego Cantora. Otóż dowodząc dla danej wartości d , wiemy z założenia indukcyjnego, że każdy przedział długości $N(k, m, d-1)$ zawiera ciąg arytmetyczny długości k albo wachlarz polichromatyczny stopnia $d-1$ o promieniu k . Możemy założyć bez utraty ogólności, że istotnie każdy taki przedział zawiera taki wachlarz, gdyż w przeciwnym razie teza potwierdza się natychmiast. Technika, której chcemy użyć, polega na łączeniu mniejszych struktur w jedną większą, wobec czego trzeba teraz zbadać kolekcję wielu takich przedziałów z wieloma wachlarzami.

Oznaczmy $P = N(k, m, d-1)$. Posłużymy się pewnym trikiem: istnieje tylko skończenie wiele sposobów (mianowicie m^P), żeby pomalować przedział długości P przy użyciu m kolorów. Każdemu z tych kolorowań możemy przyporządkować osobny „kod” – liczbę od 1 do m^P . Zamiast myśleć o kolorowaniu kolejnych liczb, możemy teraz rozważać nadawanie kodów kolejnym blokom P liczb. Nasze „zewnętrzne” założenie indukcyjne pokazuje zatem, że wśród $N(k-1, m^P)$ kolejnych bloków istnieje $k-1$ takich, które mają ten sam kod (więc są identycznie pomalowane) i znajdują się w równych odstępach. Tym samym każdy przedział długości $P \cdot N(k-1, m^P)$ zawiera $k-1$ identycznych wachlarzy stopnia $d-1$ o promieniu k , tworzących ciąg arytmetyczny. Oznaczmy bazę pierwszego wachlarza przez a , a odstęp pomiędzy bazami kolejnych wachlarzy przez s ; $a-s$ stanie się bazą nowego wachlarza. Teraz już widzimy nasze „przekątne”. Niech $a+b_j$ będzie pierwszym punktem pewnej szprychy w pierwszym wachlarzu. Wtedy ciąg arytmetyczny

$$a-s+(s+b_j), \quad a-s+2(s+b_j), \quad \dots, \quad a-s+(k-1)(s+b_j)$$

jest jednobarwny (pierwsza z liczb należy do pierwszego z identycznych wachlarzy, druga do drugiego itd.) i staje się szprychą nowego wachlarza. Takich szprych jest $d-1$, a jeszcze jedną szprychę tworzy po prostu ciąg

$$a-s+s, \quad a-s+2s, \quad \dots, \quad a-s+(k-1)s.$$

Wiemy też, że barwy wszystkich tych szprych są parami różne. Stąd pozostają dwie możliwości: albo liczba $a-s$ ma taki sam kolor jak jedna ze szprych, przez co badany przedział zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k , albo ma kolor od nich wszystkich inny, przez co jest bazą wachlarza polichromatycznego stopnia d o promieniu k .

Do ukończenia kroku indukcyjnego i całego dowodu brakuje jedyne szczególności: należy upewnić się, że $a-s \geq 1$. Zauważmy jednak, że wolno nam dowolnie wybrać badany przedział długości $P \cdot N(k-1, m^P)$. W szczególności możemy zażądać, by zaczynał się od liczby równej $P \cdot N(k-1, m^P)$. Ponieważ a musi należeć do tego przedziału, s musi zaś być mniejsze od jego długości, zapewnia to, że $s < a$, co było do wykazania. $\square$

Dla pokazania zastosowań twierdzenia van der Waerdena i zarazem rozumowań podobnych do jego dowodu rozpatrzmy następujący, uroczy problem:

Twierdzenie 4. *Jeżeli pokolorujemy $\mathbb{N}$ skończoną liczbą barw, będą istnieć dwie liczby tej samej barwy odległe o kwadrat liczby naturalnej.*

Wygląda to zupełnie jak zadanie, które mogłoby pojawić się na olimpiadzie matematycznej (w rzeczywistości, jak się wkrótce przekonamy, nie byłoby to

Dowód zaczerpnąłem z artykułu Marka Waltersa *Combinatorial proofs of the polynomial van der Waerden theorem and the polynomial Hales-Jewett theorem* z 2000 roku.

najszczęśliwszy pomysł). Przede wszystkim należy odnotować, że nie jest to prosty wniosek z twierdzenia van der Waerdena. Co prawda istnieją dowolnie długie jednobarwne ciągi arytmetyczne, ale nic nie gwarantuje, że ich postęp będzie mniejszy od ich długości, co może uniemożliwić znalezienie w nich dwóch elementów odległych o kwadrat liczby naturalnej. I chociaż potrzebne techniki nie wykraczają poza to, co widzieliśmy już wyżej, wydaje się, że problem pozostawał otwarty aż do ostatnich lat ubiegłego wieku. Korzystając z wytyczonego już szlaku, wprowadźmy następującą strukturę:

Definicja 2 (Kwachlarz). Kwachlarz stopnia d składa się z bazy $a \in \mathbb{N}$ oraz d różnych jednoelementowych szprych postaci $a + b_j^2$ ($b_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$). Kwachlarz jest polichromatyczny, jeżeli jego baza i wszystkie szprychy mają różne kolory.

Główną – naprawdę niemal jedyną – trudnością koncepcyjną w dowodzie jest zorientowanie się, że indukcja może zapewnić polichromatyczność kwachlarza, pomimo że jego szprychy nie muszą być odległe jedna od drugiej o kwadrat liczby naturalnej. Do tego celu wykorzystamy oczywiście twierdzenie van der Waerdena. Podobnie jak poprzednio, dla dowolnie wybranego m możemy przekształcić naszą tezę do następującej postaci:

Twierdzenie 5. Dla każdego $d \geq 0$ istnieje takie $N(m, d) \in \mathbb{N}$, że każde m -kolorowanie $N(m, d)$ kolejnych liczb naturalnych zawiera dwie liczby tego samego koloru odległe o pełny kwadrat albo kwachlarz polichromatyczny stopnia d .

Zastosujemy indukcję ze względu na d . Baza indukcji jest trywialna (dla $d = 0$ kwachlarz staje się pojedynczą liczbą). Ponieważ w zbiorze pomalowanym m kolorami nie może istnieć kwachlarz polichromatyczny stopnia m , wykazanie kroku indukcyjnego wystarczy do udowodnienia całego twierdzenia. Z założenia indukcyjnego możemy więc przyjąć istnienie $N(m, d - 1)$ takiego, że każdy przedział naturalny tej długości zawiera kwachlarz polichromatyczny stopnia $d - 1$ (albo dwie liczby odległe o kwadrat, ale wtedy kończymy krok indukcyjny). Dzięki twierdzeniu van der Waerdena wiemy, że kiedy zbadamy dostatecznie dużo kolejnych przedziałów tej długości, znajdzie się wśród nich $2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$ przedziałów identycznie pokolorowanych w identycznych odstępach, a tym samym $2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$ kwachlarzy polichromatycznych stopnia $d - 1$ tworzących ciąg arytmetyczny. Jak poprzednio, oznaczmy bazę pierwszego kwachlarza przez a oraz odstęp pomiędzy bazami kolejnych kwachlarzy przez s . Tym razem bazą nowego kwachlarza stanie się $a - s^2$. Niech $a + b_j^2$ będzie dowolną szprychą pierwszego kwachlarza. Wówczas $a - s^2 + (s + b_j)^2 = a + b_j^2 + 2b_j \cdot s$ jest tego samego koloru (należy do jednego z tych identycznych kwachlarzy, jako że $2b_j < 2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$) i staje się szprychą nowego kwachlarza. Samo a również staje się szprychą nowego kwachlarza, a kolory wszystkich tych d szprych muszą być parami różne. To pozostawia dwie możliwości – jeżeli liczba $a - s^2$ ma taki sam kolor jak jedna ze szprych, to tworzy parę jednego koloru o odległości będącej pełnym kwadratem, a w przeciwnym razie jest ona bazą kwachlarza polichromatycznego stopnia d . Znowu pozostaje tylko upewnić się, że $a > s^2$, a w tym celu, tak jak poprzednio, wystarczy odpowiednio przesunąć początek przedziału, znając już jego długość. To kończy dowód. $\square$

Okazuje się, że przedstawiony problem jest tylko przypadkiem szczególnym znacznie mocniejszego twierdzenia wielomianowego van der Waerdena, które pozwala zastąpić w sformułowaniu tezy skończony ciąg wielomianów liniowych $W_1(n) = n, W_2(n) = 2n, \dots, W_k(n) = kn$ albo pojedynczy wielomian kwadratowy $W(n) = n^2$ – dowolnym skończonym zbiorem wielomianów bez wyrazu wolnego. Jego pierwszy dowód (Bergelson i Leibman, 1996) odwoływał się do teorii ergodycznej. Czytelnik Dociekliwy znajdzie nieco żmudny, ale wykorzystujący podobne do naszych narzędzia, dowód w cytowanej na marginesie pracy Marka Waltersa.



Klub 44 F

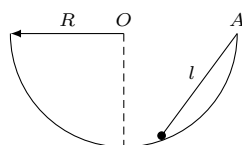


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2026

Zadania z fizyki nr 816, 817

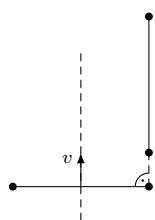
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

816. Wahadło matematyczne o długości l przyczepione jest w punkcie A z wewnętrznej strony doskonale gładkiej półsfery o promieniu R (rys. 1). Punkt A znajduje się na okręgu o promieniu R , oś symetrii półsfery jest pionowa. Zakładamy, że $l < R\sqrt{2}$. Znaleźć częstość małych drgań wahadła po wewnętrznej powierzchni półsfery.



Rys. 1

817. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa jednakowe hantle, przedstawione na rysunku 2. Każdy z nich składa się z cienkiego nieważkiego pręta o długości l , do którego końców przymocowane są jednakowe masywne kulki o zaniedbywalnych rozmiarach. Jeden z hantli spoczywa, drugi porusza się ruchem postępowym z prędkością v , skierowaną równolegle do hantla spoczywającego. Z jaką prędkością zaczną poruszać się nieruchomy hantel po zderzeniu sprężystym?



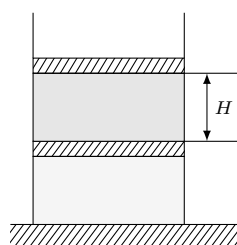
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 12/2025

Przypominamy treść zadań:

808. Pionowe naczynie zawiera dwie porcje gazu w stanie równowagi oddzielone od siebie i otaczającej przestrzeni dwoma jednakowymi ciężkimi tłokami (rys. 3). W górnej części naczynia znajduje się tlen, w dolnej hel. Na zewnątrz naczynia jest próżnia, gaz nie oddaje ciepła do otoczenia. Przewodnictwo cieplne tłoka rozdzielającego naczynia jest bardzo małe. Na początku objętości gazów są jednakowe, a odległość między tłokami wynosi H . Hel jest wolno ogrzewany i jego objętość rośnie dwukrotnie. Jaka będzie odległość między tłokami po długim czasie, gdy osiągnięty zostanie ponownie stan równowagi? Ciepło przekazywane do górnej części naczynia w czasie ogrzewania możemy zaniedbać.

809. W ustalonym położeniu obiektywu w aparacie fotograficznym głębia ostrości obejmuje zakres odległości przedmiotów od $d_1 = 15$ m do $d_2 = 30$ m. Po zmniejszeniu otworu przesłony dolna granica głębi ostrości osiągnęła wartość $d'_1 = 10$ m. Znaleźć jej górną granicę.



Rys. 3

808. Oznaczmy liczbę moli i ciśnienie gazu w górnym naczyniu przez n_1, p_1 , a w górnym przez n_2, p_2 . Stan początkowy przed ogrzewaniem jest stanem równowagi: $T_1 = T_2 = T$. Ciężar gazu między ciężkimi tłokami możemy zaniedbać: $p_1 = Mg/S, p_2 = Mg/S + p_1 = 2Mg/S \Rightarrow p_2 = 2p_1$, gdzie M jest masą tłoka, a S jego przekrojem. Z równań Clapeyrona: $p_1 HS = n_1 RT, p_2 HS = n_2 RT$, stąd $n_2 = 2n_1$. Podczas ogrzewania ciśnienie w obu częściach nie zmienia się. Ogrzewanie jest izobaryczne, zatem temperatura w dolnej części naczynia rośnie dwukrotnie. Oznaczmy szukaną odległość między tłokami przez x , temperaturę końcową w obu częściach naczynia przez T' . Energia końcowa jest sumą energii potencjalnych tłoków i energii wewnętrznych gazów: $E_2 = Mg x + 2Mg x + n_1 c_{V1} T' + n_2 c_{V2} T'$, gdzie $c_{V1} = 5R/2, c_{V2} = 3R/2$.

Po skorzystaniu z równań Clapeyrona $E_2 = 17Mg x/2$. Energia po zakończeniu ogrzewania $E_1 = 5MgH + 5n_1 RT/2 + 3n_2 R(2T)/2 = 27MgH/2$. Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia, zatem $E_1 = E_2$. Ostatecznie:

$$x = 27H/17.$$

809. Oznaczmy minimalny rozmiar rozróżnialnych szczegółów obrazu na matrycy aparatu przez a , średnicę odsłoniętej części obiektywu przez D , a jego ogniskową przez f . Jeżeli aparat został ustawiony na przedmiot umieszczony w odległości d od niego, matryca odległa jest od obiektywu o y : $y = fd/(d-f)$. Przedmiot ustawiony w odległości $d_1 < d$ da ostry obraz w odległości $y_1 = d_1 f/(d_1 - f)$, przy czym obrazem każdego punktu tego przedmiotu będzie kółko na matrycy (rys. 4). Podobnie będzie dla przedmiotów w odległości $d_2 > d$. Jeżeli średnica kółka nie przekroczy rozmiaru a , nie zauważymy braku ostrości. Z rysunku (4) mamy $a/D = (y_1 - y)/y_1 = (y - y_2)/y_2$ a stąd

$$(1) \quad 2/y = 1/y_1 + 1/y_2.$$

Jeżeli średnica obiektywu wynosi D' , to

$$(2) \quad 2/y = 1/y'_1 + 1/y'_2, \quad \text{gdzie } y'_1 = d'_1 f/(d'_1 - f), y'_2 = d'_2 f/(d'_2 - f).$$

Z (1) i (2):

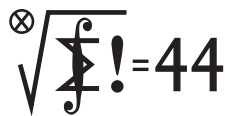
$$1/y'_2 = 1/y_1 + 1/y_2 - 1/y'_1, \quad d'_2 = 1/(1/d_1 + 1/d_2 - 1/d'_1) = \infty.$$

Dalsza granica głębi ostrości leży w nieskończoności, i na matrycy powstają akceptowalnie ostre obrazy przedmiotów położonych dalej niż 10 m od obiektywu.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
802 ($WT = 1,68$), 803 ($WT = 2,58$)
z numeru 9/2024

Jan Zambrzycki	Białystok	4-41,78
Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3-35,53
Ryszard Woźniak	Kraków	34,50
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6-33,93
Krzysztof Zygan	Lubin	31,15
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-25,90
Paweł Kubit	Kraków	20,47
Marian Łupieżewicz	Gliwice	3-16,17

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
905 ($WT = 1,01$) i 906 ($WT = 2,37$)
z numeru 9/2025

Szymon Kitowski	47,30
Barbara Mroczek	46,43
Andrzej Sudół	45,47
Mikołaj Znamierowski	44,06
Michał Adamaszek	40,68
Marian Łupieżowiec	39,55
Stanisław Bednarek	38,25
Krzysztof Kamiński	38,09
Roksana Słowik	37,51
Mikołaj Pater	32,46

Taki moment to radość dla organizatorów Ligi! Bywało, że przez wiele miesięcy linie mety przekraczali, którzy już raz, tylko starzy wyjadacze. A tu, proszę: Szymon Kitowski, Barbara Mroczek, Andrzej Sudół, Mikołaj Znamierowski – cztery nowe twarze (!) w matematycznym Klubie 44.

911. Przyjmijmy, że dany prostokąt ma m wierszy, ponumerowanych $1, \dots, m$, oraz n kolumn, ponumerowanych $1, \dots, n$. Pola o obu współrzędnych nieparzystych malujemy na czarno – łącznie $\frac{m}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$ pól. Rozważmy parkietaż z użyciem p płytek typu L oraz q płytek typu N . Zauważmy, że każda płytka nakrywa co najwyżej jedno czarne pole; stąd wniosek, że

$$p + q \geq \frac{1}{4} m(n+1), \quad \text{czyli} \quad 4q \geq mn + m - 4p.$$

Płytki dokładnie pokrywają cały prostokąt, wobec czego

$$mn = 3p + 4q \geq 3p + (mn + m - 4p) \\ = mn + m - p.$$

Dostajemy oszacowanie: $p \geq m$.

Równość $p = m$ daje się uzyskać wieloma sposobami. Przykładowo: zadany prostokąt kroimy na $m/2$ pasków o wysokości 2 i długości n . W każdym takim pasku przy lewym i prawym końcu umieszczamy po jednej płytce typu L , zaś figurę, która między nimi pozostaje, uzupełniamy płytkami typu N i mamy parkietaż z użyciem $(m/2) \cdot 2$ płytek typu L .

Stąd odpowiedź: minimalna liczba płytek typu L wynosi m .

Zadania z matematyki nr 919, 920

Redaguje Marcin E. KUCZMA

919. W trzech pojemnikach rozmieszczone są fasolki (skończenie wiele). Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu wybieramy dwa pojemniki; zawartość tego, w którym jest mniej fasolek, podwajamy, przesypując odpowiednią ilość fasolek z tego, w którym jest więcej (gdy jest po równo, wybór jest dowolny). Udowodnić, że niezależnie od rozmieszczenia początkowego można – iterując to postępowanie – opróżnić jeden z pojemników.

920. Niech $r(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - (uv)^{1/2}$ dla $u, v \geq 0$. Dowieść, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych $a, b, c \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq 2 \cdot \max\{r(a, b), r(b, c), r(c, a)\}.$$

Zadanie 920 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2025

Przypominamy treść zadań:

911. Dane są liczby naturalne m (parzysta), n (nieparzysta); $n \geq 3$. Prostokąt o bokach długości m, n , podzielony na mn pól (kwadratów jednostkowych) należy pokryć płytkami dwóch typów L i N , nakrywającymi (odpowiednio) trzy oraz cztery pola: płytka typu L to kwadrat 2×2 z usuniętym jednym polem; płytka typu N to prostokąt 3×2 z usuniętymi dwoma przeciwległymi polami narożnymi (dotykającymi końców przekątnej prostokąta 3×2). Płytki mogą być dowolnie obracane, ale nie mogą na siebie nachodzić ani wystawać poza obręb danego prostokąta $m \times n$. Wyznaczyć minimalną liczbę płytek typu L , jaka może być użyta w takim parkietażu.

912. W czworoboku $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości, a prosta przechodząca przez środki tych krawędzi jest prostopadła do każdej z nich. Udowodnić, że dla każdej liczby $r > 0$ istnieje sfera o promieniu r taka, że dla wszystkich punktów P , leżących na tej sferze, suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ ma jednakową wartość.

912. Oznaczmy przez O środek odcinka MN , łączącego środki M i N krawędzi (odpowiednio) AB i CD . Skoro $AB = CD$ oraz $MO = NO$, trójkąty prostokątne AMO, BMO, CNO, DNO są przystające; ich przeciwprostokątne OA, OB, OC, OD mają jednakową długość – oznaczmy ją przez R . Wektory

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OC}, \quad \mathbf{v}_4 = \overrightarrow{OD}$$

(długości R) w sumie dają wektor zerowy:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = \mathbf{0}.$$

Dla dowolnie ustalonego $r > 0$ bierzemy sferę o środku O i promieniu r . Ma ona wymaganą własność: bowiem jeśli P jest dowolnie wybranym punktem leżącym na niej, to – oznaczając $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ (tak, że $\mathbf{p}^2 = r^2$) – dostajemy równość:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{v}_i - \mathbf{p})^2 \\ = \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{p} + 4\mathbf{p}^2 \\ = 4R^2 + 4r^2.$$

Uzyskana wartość nie zależy od wyboru punktu P na sferze (O, r) .

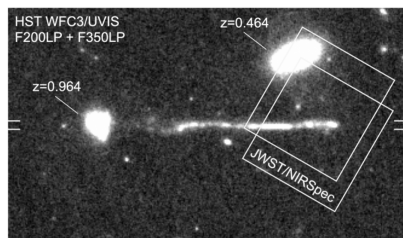
Skróć regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

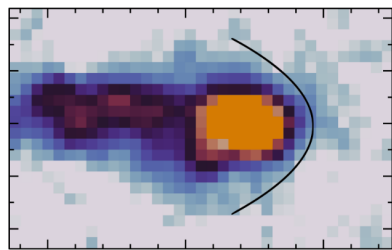
współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Czytelnik zaznajomiony z astronomią już się pewnie domyśla, że „uciekające czarne dziury” (ang. *runaway black holes*) to jak najbardziej poprawny termin naukowy.



Rys. 1. Intrygująca pozioma linia widoczna na tym zdjęciu to ślad przejścia uciekającej czarnej dziury, która w momencie obserwacji znajduje się na końcu tej struktury po prawej stronie. Domniemana galaktyka macierzysta czarnej dziury jest widoczna po lewej stronie. Obszar obserwowany za pomocą Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba, który potwierdził odkrycie, został zaznaczony na żółto



Rys. 2. Zbliżenie na czoło fali uderzeniowej wytworzonej przez poruszającą się czarną dziurę

Podobny efekt procy grawitacyjnej wykorzystujemy, wysyłając rakietę w przestrzeń kosmiczną, o czym piszemy w Δ_{14}^7 .

Wiele z odrzucenia grawitacyjnym i innych przewidywaniach ogólnej teorii względności związanych ze zlewaniem się czarnych dziur pisał Szymon Charzyński w Δ_{15}^{12} . Kiedy powstał tamten tekst, wyniki symulacji wskazywały na możliwość zajścia takiego procesu, w wyniku którego czarna dziura powstała z połączenia dwóch czarnych dziur dozna odrzutu z prędkością przekraczającą prędkość ucieczki z galaktyki. Wtedy były to czysto teoretyczne przewidywania. Opisywane tu odkrycie jest kolejnym spektakularnym przykładem obserwacyjnego potwierdzenia przewidywań ogólnej teorii względności.

Napisane na podstawie artykułu: van Dokkum et al. (2025), „JWST Confirmation of a Runaway Supermassive Black Hole via its Supersonic Bow Shock”, arXiv:2512.04166. Prezentowane zdjęcia również pochodzą z tego artykułu.

Supermasywne czarne dziury zazwyczaj spokojnie egzystują w centrach galaktyk, pochłaniając okoliczną materię. Jednak bohaterka tego artykułu zdecydowała, że to zbyt nudne zajęcie i porzuciła swoją macierzystą galaktykę. Uciekiniarka ma masę milionów Słońc i nie ogląda się za siebie. Pędzi przez Wszechświat z prędkością 3 milionów kilometrów na godzinę, poprzedza ją ogromna fala uderzeniowa, a na drodze jej przejścia... tworzą się gwiazdy!

Istnienie uciekających supermasywnych czarnych dziur było przewidywane przez astronomów już od dawna jako możliwa naturalna konsekwencja zderzeń i łączenia się galaktyk. Jednak ze względu na swoją naturę czarne dziury są niezwykle trudne do obserwacji. Najczęściej znajdujemy je w wyniku wpływu, jaki wywierają na otoczenie. I tym razem nie było inaczej. W 2023 roku Kosmiczny Teleskop Hubble’a zaobserwował dziwną poziomą strukturę, która mogła być śladem przejścia uciekającej czarnej dziury (rys. 1). Dzięki obserwacjom Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba w 2025 roku naukowcy potwierdzili te przypuszczenia.

Zaobserwowana uciekająca czarna dziura porusza się przez wypełniający przestrzeń rozrzedzony gaz z naddźwiękową prędkością, tworząc przed sobą falę uderzeniową, podobną do tej, jaką wytwarza lecący odrzutowiec (rys. 2).

Z drugiej strony po jej przejściu pozostaje cienki (w skali kosmicznej) ślad rozgrzanego gazu, który z biegiem czasu stygnie i zagęszcza się na tyle, że zaczynają tworzyć się w nim gwiazdy. Uciekająca czarna dziura pozostawia więc po sobie „ogon” nowych gwiazd. Na podstawie ilości światła emitowanego przez całą tę strukturę naukowcy szacują, że zawiera ona gwiazdy o łącznej masie aż 200 milionów mas Słońca!

Sposoby ucieczki

Ale jak czarna dziura została „wysztrzelona” z galaktyki? Sposoby mogą być dwa. Pierwszy z nich to tzw. efekt procy grawitacyjnej, powstający w wyniku oddziaływania grawitacyjnego kilku obiektów. Nasza uciekiniarka mogła być częścią układu kilku orbitujących wokół siebie czarnych dziur. Delikatna równowaga systemu mogła zostać zaburzona, co spowodowało wysztrzelenie czarnej dziury jak z procy.

Drugi mechanizm ma związek z falami grawitacyjnymi. Gdy dwie czarne dziury zderzają się, tworzą masywniejszą czarną dziurę i emitowana jest fala grawitacyjna rozchodząca się w przestrzeni kosmicznej jak fale na tafli jeziora po wrzuceniu kamienia. Zazwyczaj fala ta rozchodzi się równomiernie we wszystkich kierunkach. Jednak w rzadkich przypadkach, gdy zderzają się czarne dziury o podobnych masach, lecz przeciwnych kierunkach wirowania, powstała fala grawitacyjna może być nierównomierna (silniejsza w jednym kierunku niż w innym). Taka asymetria powoduje swego rodzaju „odrzut”, który wysyła nowo powstałą supermasywną czarną dziurę w podróż. Jeśli nadana w ten sposób prędkość okaże się większa niż prędkość ucieczki z galaktyki, uciekając, czarna dziura zostaje z niej wyrzucona i wyrusza w samotną podróż przez przestrzeń kosmiczną.

Naukowcy dokonali zgrubnego oszacowania masy uciekającej czarnej dziury na poziomie około 10 milionów mas Słońca. Taka masa jest zbliżona do tego, czego można by się spodziewać po supermasywnej czarnej dziurze znajdującej się w centrum galaktyki. Czyli obserwowana uciekająca czarna dziura raczej nie jest obiektem wyrzuconym ze zwykłego układu czarnych dziur. Znacznie bardziej prawdopodobne jest, że jej „ucieczka” była skutkiem odrzutu wywołanego emisją fal grawitacyjnych podczas połączenia się dwóch supermasywnych centralnych czarnych dziur w czasie zderzenia galaktyk.

Mamy więc odpowiedzi na kilka pytań, ale bez wątpienia zostaną przeprowadzone kolejne obserwacje tego obiektu, które ujawnią jeszcze więcej szczegółów!

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Po zmianie czasu na letni trzeba wyraźnie dłużej czekać na zapadnięcie ciemności. Dodatkowo w kwietniu Słońce wzniesie się o kolejne 10° i wydłuży czas przebywania nad widnokresem do prawie 15 godzin. W kwietniu Słońce przejdzie od środkowej części gwiazdozbioru Ryb do centrum gwiazdozbioru Barana.

Po zniknięciu Saturna w blasku Słońca na wieczornym niebie pozostały Wenus z Jowiszem i Uranem. Druga planeta od Słońca do końca miesiąca pokona na niebie kolejne 36° , przemierzając cały gwiazdozbiór Barana i docierając do środkowej części Byka. Na początku trzeciej dekady kwietnia Wenus minie Plejady w odległości niecałych 4° , zbliżając się 23 dnia miesiąca na $48'$ do Urana, a 1 maja przejdzie między gwiazdami ν i κ Tau, które dzieli na niebie $38'$. Niestety na europejskim niebie zmierzch zastanie Wenus już po ich minięciu. Planeta jest wciąż daleko od nas, dlatego jej wygląd nie zmieni się znacząco. Jasność pozostanie na poziomie $-3,9^m$, średnica kątowa zwiększy się do $12''$, faza zaś spadnie do 88%.

Znajdującego się około 5° na południe od Plejad Urana można dostrzec tylko w pierwszej połowie miesiąca, gdy dwie godziny po zachodzie Słońca wznosi się on jeszcze na wysokość 20° . Potem widoczności planety zaszkodzi coraz późniejszy zmierzch oraz zbliżanie się doń Słońca, i pod koniec kwietnia zacznie ona zachodzić przed zapadnięciem nocy astronomicznej, a nawet żeglarskiej, wskutek czego przy jasności $+5,8^m$ Uran zginie w tle nieba.

Nadal dobrze widoczny w kwietniu jest przebywający w środkowej części Bliźniąt Jowisz. Jednak nawet jego czas pozostawania na nocnym niebie wyraźnie się skurczy. W pierwszych dniach miesiąca na początku nocy astronomicznej około godziny 21:15 planeta wznosi się jeszcze na wysokość przekraczającą 50° . Pod koniec kwietnia noc astronomiczna zapada około 22:30, a wtedy planeta zmniejszy swoją wysokość o połowę. Przez cały miesiąc blask Jowisza spadnie do -2^m , średnica jego tarczy natomiast do $36''$.

Posiadacze teleskopów powinni przyjrzeć się tarczy Jowisza i jej sąsiedztwu szczególnie w nocy z 20 na 21 kwietnia. Najpierw jeszcze w trakcie zmierzchu od zachodu zbliży się doń Ganimedes, aby schować się za nią o godzinie 20:46, następnie od godziny 21:26 do 1:44 przewędruje po niej cień Kallisto. W środku tego przejścia, o godzinie 0:08 Ganimedes pojawi się po wschodniej stronie Jowiszowej tarczy, by wreszcie o 1:50 wejść w cień swojej planety macierzystej. To ostatnie zjawisko zdarzy się już nisko nad widnokresem, tuż przed zachodem obu ciał niebieskich.

Księżyc zacznie miesiąc od pełni, przez którą przejdzie w nocy z 1 na 2 kwietnia, a następnej nocy w nieco zmniejszonej fazie zbliży się na niecałe 3° do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Noc z 5 na 6 kwietnia i następną Srebrny Glob spędzi w okolicach gwiazdozbioru Skorpiona, prezentując tarczę oświetloną w około 80%. Najpierw zbliży się on na niecałe 2° do gwiazdy 3. wielkości π Sco, czyli najbardziej na południe wysuniętej gwiazdy z łuku gwiazd w północno-zachodniej części konstelacji. Dobę później zajmie on pozycję 2° na wschód od mającej

podobną jasność obserwowaną τ Sco i jednocześnie 4° od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona.

10 kwietnia naturalny satelita Ziemi znajdzie się w ostatniej kwadrze, świecąc wtedy na tle gwiazdozbioru Strzelca 7° na wschód od Nunki, jednej z jego jaśniejszych gwiazd. Niestety niskie położenie ekliptyki na niebie porannym oraz wędrowanie Księżyca daleko na południe od niej sprawi, że pojawi się on na niebie zaledwie 2,5 godziny przed Słońcem, a w następnych dniach wschód obu ciał niebieskich przedzieli jeszcze mniej czasu. Stąd aż do nowiu 17 kwietnia warunki obserwacyjne Księżyca pozostaną słabe.

Zupełnie przeciwnie jest na niebie wieczornym, gdzie już 18 kwietnia o zmierzchu zaledwie 33 godziny po nowiu, można próbować dostrzec Księżyc w fazie 2%. W jego odnalezieniu pomoże Wenus, która pokaże się w odległości 8° na godzinie 10 względem niego. Dobę później Srebrny Glob w fazie 7% zakryje Plejady. Pechowo, gdy zacznie się u nas robić ciemno, to zdąży on wyprzedzić najjaśniejsze gwiazdy tej gromady. Wenus znajdzie się wtedy 8° pod nim.

Do I kwadry, 24 kwietnia, Księżyc odwiedzi Jowisza 22 dnia miesiąca oraz gromadę otwartą gwiazd M44 w Raku dobę później. Dzień po I kwadrze natomiast Srebrny Glob dotrze do gwiazdozbioru Lwa, gdzie tuż przed swoim zachodem już następnej doby zbliży się na mniej niż 1° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy tej konstelacji. Ostatniego dnia miesiąca księżycowa tarcza pokaże fazę 97% i zbliży się ponownie na 4° do Spiki.

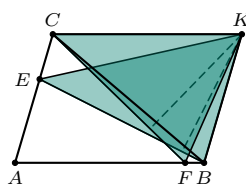
W nocy z 22 na 23 kwietnia maksimum aktywności osiągają meteory z roju Lirydów. Ich radiant znajduje się między Lutnią a Herkulesem i góruje o świcie na wysokości przekraczającej 70° , ale już po 23 kwietnia wznosi się na wysokość 30° . Są to dość szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi 49 km/s . W nocy maksimum można się spodziewać jakichś 20 zjawisk na godzinę. W tym roku w ich obserwacjach przeszkodzi trochę Księżyc w fazie 36%, zachodzący dopiero po godzinie 2.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 8



Rozwiązanie zadania M 1849.



Ponieważ $BK \parallel EC$ oraz $CK \parallel FB$,
to

$$[KBE] = [KBC] = [KFC].$$

Biorąc pod uwagę równość $BE = CF$, dostajemy, że odległości punktu K od prostych BE i CF są równe.



Rozwiązanie zadania M 1850.

Zauważmy, że liczba

$$p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$$

nie może być dodatnią liczbą całkowitą. Istotnie, jeżeli $x_1 = 1$, to $p_1 = 0$, a jeżeli $x_1 > 1$, to p_1 nie jest liczbą całkowitą, jako różnica liczby całkowitej i niecałkowitej. Zatem wśród liczb p_i może być co najwyżej 2025 liczb całkowitych.

Pokażemy, że można osiągnąć ich 2025. Dla $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ mamy

$$p_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 4.$$

Dla $n \geq 2$ połóżmy $x_{n+1} = p_n$. Wówczas

$$p_{n+1} = p_n \left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = p_n^2 - 1.$$

Jeśli więc p_n jest liczbą całkowitą, to p_{n+1} również jest liczbą całkowitą, a dodatkowo $x_{n+2} = p_{n+1}$ jest większe od $x_{n+1} = p_n$. W ten sposób otrzymujemy rosnący ciąg $x_1, \dots, x_{2026}$, dla którego 2025 spośród liczb p_i jest liczbami całkowitymi.



Rozwiązanie zadania M 1851.

Założmy, że liczby całkowite m oraz $n > 2$ spełniają równość z zadania. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & ((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) \\ &= (n-1)!(n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 \\ &= ((n-1)! - n)(n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2. \end{aligned}$$

Przypuśćmy najpierw, że $n > 4$. Pokażemy, że liczby $(n-1)! - 1$ oraz $(n-2)! - 1$ są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby obie dzieliły się przez pewną liczbę pierwszą p , to również dzieliłaby się przez p liczba

$$(n-1)! - 1 - (n-1)((n-2)! - 1) = n - 2.$$

Stąd wynikałoby, że $p \mid (n-2)!$, a jednocześnie $p \mid ((n-2)! - 1)$, co jest niemożliwe.

Zatem iloczyn dwóch względnie pierwszych liczb

$$((n-1)! - 1)((n-2)! - 1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej, a więc każda z nich musi być kwadratem liczby całkowitej. Jednak dla $n > 4$ liczba $(n-1)! - 1$ daje resztę 3 przy dzieleniu przez 4, co wyklucza możliwość bycia kwadratem.

Pozostaje rozpatrzyć przypadki $n \leq 4$. Dla $n = 4$ otrzymujemy

$$(m-1)^2 = 5,$$

co nie ma rozwiązań całkowitych. Dla $n = 3$ dostajemy

$$(m-1)^2 = 0,$$

skąd $m = 1$. Zatem jedynym rozwiązaniem jest para $m = 1, n = 3$.



Rozwiązanie zadania F 1141.

Po wznesieniu się na wysokość h ziarna pyłu opadają pod wpływem własnego ciężaru i siły oporu F . Czas τ całkowitego opadnięcia chmury pyłu jest równy czasowi opadania najmniejszych jego ziaren z wysokości h . Równanie ruchu dla ziarna o masie m ma postać (prędkość v skierowana jest w dół):

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 3\pi\eta Dv,$$

czyli:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3\pi\eta D}{m} \left(v - \frac{mg}{3\pi\eta D} \right).$$

Siła ciężkości jest stała, a wartość siły oporu rośnie proporcjonalnie do prędkości i po pewnym czasie zrównoważy ciężar ziarna. Nastąpi to, gdy prędkość spadania osiągnie wartość:

$$v_{gr} = \frac{gm}{3\pi\eta D} = \frac{\rho g D^2}{18\eta}.$$

W ostatniej równości uwzględniliśmy fakt, że $m = \pi\rho D^3/6$. Do czasu osiągnięcia prędkości v_{gr} ziarenko piasku spada z prędkością od niej mniejszą. Na pewno więc czas spadania:

$$\tau > \frac{h}{v_{gr}}.$$

Dla danych z treści zadania otrzymujemy $v_{gr} = 3,064 \cdot 10^{-2}$ m/s i oszacowanie $\tau > 163$ s, czyli ponad 2,5 minuty. Pełne rozwiązanie równania ruchu:

$$v(t) = v_{gr} \left(1 - \exp\left(-\frac{m}{3\pi\eta D} t\right) \right),$$

pozwala stwierdzić, że v_{gr} zostanie osiągnięte po czasie równym kilka razy $3\pi\eta D/m = D^2\rho/(18\eta)$, czyli czasie rzędu setnych części sekundy.

Uwaga: Przyjęty w rozwiązaniu wzór opisujący siłę oporu podczas ruchu z prędkością v względem ośrodka o gęstości ρ_{os} jest poprawny, gdy tzw. liczba Reynoldsa $Re = \rho_{os} Dv/\eta < 1$. Ośrodkiem jest tutaj powietrze o gęstości $\rho_{os} = 1,3$ kg/m³. W naszym przypadku liczba Reynoldsa wynosi więc $Re \approx 4,3 \cdot 10^{-2} < 1$, a więc warunek jest spełniony.



Rozwiązanie zadania F 1142.

Podczas opisanych w treści zadania procesów grzania i chłodzenia wody zmiany jej temperatury są niewielkie, i przez cały czas temperatura wody jest znacznie wyższa od temperatury otoczenia. Możemy więc przyjąć, że szybkość strat ciepła w obu przypadkach jest taka sama – oznaczmy traconą moc jako P' . Podczas grzania mamy:

$$(P - P')t_1 = m \cdot c(T_2 - T_1),$$

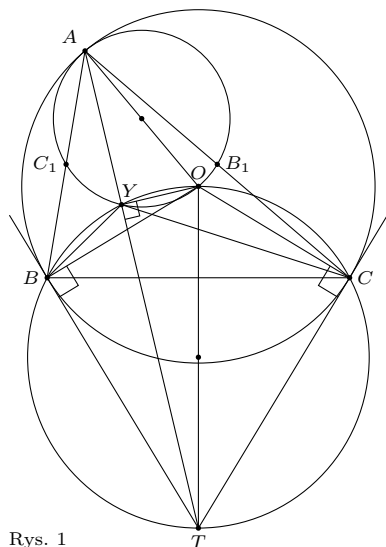
a podczas chłodzenia po wyłączeniu grzałki:

$$P't_2 = m \cdot c\Delta T.$$

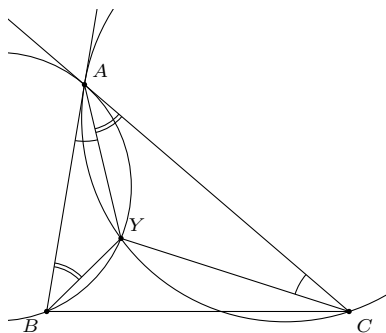
Po wyznaczeniu P' z pierwszego równania i podstawieniu do drugiego otrzymujemy:

$$m = \frac{t_2 P}{c \left(\frac{t_2}{t_1} (T_2 - T_1) + \Delta T \right)}.$$

Liczbowo: $m = 0,510$ kg wody.



Rys. 1



Rys. 2

1. Jest to okrąg o średnicy OL ; L jest punktem Lemoine'a (punktem przecięcia trzech symedian).
2. Zachodzą równości: $|xDBA| = |xDA| = |xACA|$, więc punkt D_A leży na prostej BD .
3. Starczy wykazać, że punkty A, M, N , na CE , a zatem $F = D_A$.
4. Niech M będzie środkiem odcinka B_1C_1 . Rozważmy symetrię względem prostej B_1C_1 – przeprowadza ona punkt A' w A oraz punkt M w siebie. Korzystając z tego, że punkty A, B_1, C_1 leżą na jednym okręgu, można wykazać, że obraz punktu D_A w tej symetrii jest punktem A -Humpty trójkąta AB_1C_1 .
5. Mamy tu $M = D_A$ i $N = H_A$, z czego można wywnioskować, że $\triangle AYC \sim \triangle ABM$ (kk), więc $|AM| \cdot |AY| = |AB| \cdot |AC|$. Analogicznie dowodzimy, że $|AN| \cdot |AX| = |AB| \cdot |AC|$.

Wskazówki do zadań

... Dumpty

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Czytelnikom, którzy nie przeczytali dwóch poprzednich kącików, polecam uczynić to przed przystąpieniem do lektury bieżącego. Opisane są tam wszystkie definicje i oznaczenia (standardowe dla trójkąta ABC) oraz własności punktu Humpty, które potrzebne będą i tutaj. Teraz kolej na punkt Dumpty, bliźniaka Humpty'ego.

Tak jak poprzednio, ograniczę się do trójkąta ostrokątnego, ale opisane tu fakty można uogólnić na ciekawsze trójkąty.

Rozważmy trójkąt ABC . Prosta izogonalnie sprzężoną w trójkącie ABC (por. Δ_{26}^1) do środkowej poprowadzonej z wierzchołka A nazwiemy A -symedianą. Jedną z jej podstawowych własności jest to, że przechodzi ona przez punkt wspólny stycznych do $\odot(ABC)$ w punktach B i C . Uzasadnienie można znaleźć w artykule Jerzego Bednarczuka w Δ_{16}^5 (twierdzenie 4).

Twierdzenie 1. Każda z poniższych definicji określa jednoznacznie ten sam punkt Y :

- (1) rzut prostokątny punktu O na A -symedianę trójkąta ABC ;
- (2) różny od O punkt przecięcia $\odot(AO)$ i $\odot(BCO)$ (lub punkt O , jeśli te okręgi są styczne);
- (3) punkt Y spełniający równości: $|x_BAY| = |x_ACY|$ i $|x_CAY| = |x_ABY|$;
- (4) punkt Y , dla którego $\odot(ABY)$ i $\odot(ACY)$ są styczne, odpowiednio, do prostych AC i AB .

Dowód. Niech T będzie punktem przecięcia stycznych do $\odot(ABC)$ w punktach B i C . Z faktu $|x_OBT| = |x_OCT| = 90^\circ$ wnioskujemy, że $\odot(BCO) = \odot(OT)$ (rys. 1).

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Rzut prostokątny punktu O na prostą AT i drugi punkt wspólny okręgów $\odot(AO)$ i $\odot(OT)$ to ten sam punkt.

(1,2) $\Rightarrow$ (3). Niech $\gamma = |x_BCA|$ i $\varphi = |x_BAY|$. Najpierw zauważmy, że $|x_ABT| = 180^\circ - \gamma$. Stąd $|x_BCY| = |x_BTY| = \gamma - \varphi$, co daje $|x_ACY| = \varphi$. Drugiej równości kątów dowodzimy analogicznie.

(3) $\Rightarrow$ (1). Niech $\varphi = |x_BAY| = |x_ACY|$ i $\psi = |x_CAY| = |x_ABY|$ oraz $\alpha = |x_BAC|$. Widzimy, że $\varphi + \psi = \alpha$, co daje $|x_BYC| = 2\alpha = |x_BOC|$, więc punkt Y leży na $\odot(BCO) = \odot(OT)$, co daje $|x_OYT| = 90^\circ$. Dalej zauważmy, że $|x_AYB| = 180^\circ - \alpha$ oraz $|x_BYT| = |x_BCT| = \alpha$, więc punkty A, Y, T leżą na jednej prostej, co wobec $OY \perp YT$ dowodzi (1).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Równoważność wynika z obustronnego twierdzenia o stycznej i cięciwie (rys. 2).

Punkt Y , spełniający którąkolwiek (a zatem i wszystkie) spośród definicji (1)–(4), nazywamy punktem A -Dumpty trójkąta ABC . Będziemy go oznaczać D_A , analogicznie definiujemy punkty D_B i D_C . A na deser:

Twierdzenie 2. Punkty A -Humpty i A -Dumpty są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC (analogicznie H_B z D_B oraz H_C z D_C).

Dowód. Jako definicję punktu H_A przyjmijmy (3) z twierdzenia w poprzednim kąciku. Punkt Y izogonalnie sprzężony z H_A spełnia równości kątów (3) w twierdzeniu 1, w kąciku bieżącym. Ponieważ – w myśl tego samego twierdzenia – istnieje dokładnie jeden taki punkt, musi być $Y = D_A$.

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym ABC punkty D_A, D_B, D_C oraz O leżą na jednym okręgu.
2. Symetralne odcinków AB i CA przecinają środkową AA_1 trójkąta ostrokątnego ABC w punktach, odpowiednio, D i E . Proste BD i CE przecinają się w punkcie F . Wykazać, że punkty A, B_1, C_1 i F leżą na jednym okręgu. (USAMO 2008)
3. Niech P będzie dowolnym punktem na boku BC trójkąta ABC . Punkty M i N leżą, odpowiednio, na prostych AB i AC , przy czym $PM \parallel AC$ i $PN \parallel AB$. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie AMN przechodzi przez stały punkt różny od A , niezależnie od wyboru punktu P .
4. Dowieść, że w trójkącie ostrokątnym ABC o wysokości AA' prosta $A'D_A$ przechodzi przez środek odcinka B_1C_1 .
5. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Okręgi $\odot(AO)$ i $\odot(BCO)$ przecinają się w punkcie M , a okręgi $\odot(AH)$ i $\odot(BCH)$ – w punkcie N . Proste AM i AN przecinają po raz drugi, odpowiednio, $\odot(BCO)$ w punkcie X i $\odot(BCH)$ w punkcie Y . Udowodnić, że $MN \parallel XY$. (ELMO 2014)

Dlaczego warto studiować matematykę i informatykę na MIM UW?



Wybór studiów to coś więcej niż decyzja o przyszłej pensji czy tytule przed nazwiskiem. To moment, w którym decydujesz, jak Twój umysł będzie filtrował rzeczywistość. Jeśli szukasz dyscypliny, która nie tylko daje narzędzia do pracy, ale zmienia sposób, w jaki patrzysz na każde zjawisko – od struktury liścia po architekturę sieci neuronowych – matematyka i informatyka na MIM UW są naturalnym wyborem.

Matematyka i informatyka to współczesna łacina. Są uniwersalnym kluczem, który pasuje do niemal każdych drzwi. Studiowanie ich na wysokim poziomie uczy bezwzględnej rygorystyczności. W świecie pełnym opinii i „postprawdy”, matematyka pozostaje bastionem obiektywizmu. Jak mawiał wybitny Stefan Banach: „Matematyka to najpiękniejsza i najpotężniejsza kreacja ludzkiego ducha”. Z kolei informatyka, w swoim najgłębszym, teoretycznym wydaniu, jest realizacją tej potęgi w praktyce. To inżynieria czystej myśli. Na MIM-ie nie nauczysz się po prostu „obsługi technologii”, która zestarzeje się za pięć lat. Nauczysz się konstruować algorytmy, które przetrwają dekady.

Z czysto pragmatycznego punktu widzenia, absolwenci matematyki i informatyki są dziś architektami cyfrowego świata. Elon Musk, zapytany o to, jakich kompetencji szuka u ludzi budujących SpaceX czy Neuralink, regularnie powraca do koncepcji First Principles Thinking – myślenia z poziomu fundamentalnych zasad: „Zdolność do rozbijania problemu na czynniki pierwsze i budowania rozwiązania od podstaw jest znacznie ważniejsza niż znajomość konkretnych narzędzi. Szukamy ludzi, którzy potrafią rozwiązywać trudne problemy logiczne”. Studiowanie na MIM-ie to trening właśnie tej umiejętności. To dlatego absolwenci tego wydziału trafiają do czołowych laboratoriów AI w Dolinie Krzemowej, budują systemy transakcyjne na Wall Street lub tworzą przełomowe startupy medyczne.

Wybierając wydział MIM UW, nie wybierasz tylko gmachu przy ulicy Banacha. Wybierasz unikalny ekosystem. To miejsce, gdzie spotkasz ludzi o podobnej pasji, zwycięzców międzynarodowych olimpiad i światowej sławy profesorów. To społeczność, która wzajemnie napędza się do przekraczania granic. Tutaj nie uczy się „gotowych odpowiedzi”, ale sztuki zadawania właściwych pytań.

Jeśli chcesz rozumieć mechanizmy rządzące jutrem i mieć realny wpływ na to, jak będzie wyglądał nasz świat – czekamy na Ciebie w październiku. To będzie Twoja najlepsza intelektualna przygoda.

Studiując na MIM nie tylko przekonasz się, że cytowany wyżej model językowy Gemini ma tutaj całkowitą rację (nawet jeśli brzmi trochę pretensjonalnie), ale będziesz mógł również zrozumieć, jak takie modele powstają i dlaczego bywają takie skuteczne (choć czasem konfabulują, o czym więcej piszemy chociażby na stronie 4 tego wydania Delt).

Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego
mimuw.edu.pl/rekrutacja/



UNIwersYTET WARSZAWSKI
MIM
WYDZIAŁ
MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI