



D

NR 5 (624) 2025

CENA 9,25 zł

ISSN 1737-3005

www.deltami.edu.pl

0-663-10-4-1-5 T-2-14592

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

Kołysanka
z geometrią
w tle

s. 4

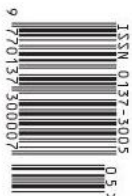
B

R

A



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 2700 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (624) 2026

Niezwykłe równanie Markowa

Jarosław Górnicki

str. 1



Zadania

str. 3

Kołysanka z geometrią w tle

Michał Miśkiewicz

str. 4

Jak nalać z pustej szklanki?

Piotr Krzyżanowski

str. 6



Aktualności

Sztuczna inteligencja odkrywa świat

str. 8



Plastry miodu

Bartłomiej Pawlik

str. 9

Problem Tibora Radó

Jarosław Górnicki

str. 10

O skali magnitudo

Arkadiusz Hess

str. 12



Nieludzka mowa

Marta Fikus-Kryńska

str. 15

Metamateriały – od pomysłu do pierwszych realizacji

Paweł Perkowski

str. 16

Klub 44

str. 20



Prosto z nieba: Małe czerwone kropki

str. 22



Niebo w maju

str. 23



Ciąg zadań

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

**W następnym numerze:
Fizyka dla rolnika.**



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Niezwykłe równanie Markowa

Jarosław GÓRNICKI*

*Kontakt: gornicki59@gmail.com

Odpowiednikiem magisterium (doktoratu) w carskiej Rosji był doktorat (habilitacja) na zachodzie Europy (np. w Cesarstwie Niemieckim).



Andriej A. Markow (1856–1922) był matematykiem rosyjskim. Z powodzeniem pracował w teorii liczb (ułamki łańcuchowe, aproksymacja liczb), analizie matematycznej (równania różniczkowe i całkowite), a po 1900 roku głównie w teorii prawdopodobieństwa. Szczególnie interesował się procesami stochastycznymi, wprowadził pojęcie łańcuchów Markowa. Ilustracja powyżej przedstawia Andrieja A. Markowa, gdy miał około 30 lat

Andriej A. Markow studiował matematykę na Uniwersytecie Petersburskim.

Tam też w wieku 23 lat obronił pracę magisterską (1880), a potem pracę doktorską (1884). Obie prace dotyczyły teorii liczb. Treść pierwszej z nich ukazała się w dwóch częściach w języku francuskim w prestiżowym czasopiśmie *Mathematische Annalen* (tom XV (1879), tom XVII (1880)).

Szkolna matematyka wystarczy, aby pokazać, że pochodzące z tej pracy *równanie diofantyczne Markowa*,

$$(*) \quad m^2 + n^2 + k^2 = 3mnk,$$

ma w liczbach naturalnych nieskończenie wiele rozwiązań (m, n, k) o wyjątkowo ciekawej strukturze.

Rozpocznijmy od prostej obserwacji. Z symetrii równania $(*)$ wynika, że jeśli trójka liczb naturalnych (m, n, k) jest jego rozwiązaniem, to jest nim również każda inna permutacja współrzędnych tego rozwiązania. Zatem, bez straty ogólności, zbiór sześciu rozwiązań równania $(*)$ otrzymanych przez permutację jego współrzędnych będziemy uważać za jedno rozwiązanie.

Żałujemy, że dane mamy rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$. Rozważmy równanie kwadratowe

$$\Phi_m(x) = x^2 + n^2 + k^2 - 3nmx = x^2 - 3nmx + (n^2 + k^2) = 0.$$

Powyższe równanie ma pierwiastek m oraz drugi pierwiastek m' spełniający wzory Viète'a:

$$m + m' = 3nk \quad \text{ i } \quad m \cdot m' = n^2 + k^2.$$

Oczywiście $m' = 3nk - m$ jest liczbą naturalną i trójka liczb (m', n, k) jest również rozwiązaniem równania $(*)$. Rozpatrując analogiczne równania kwadratowe dla pozostałych współrzędnych:

$$\Phi_n(x) = m^2 + x^2 + k^2 - 3mkx = x^2 - 3mkx + (m^2 + k^2) = 0,$$

$$\Phi_k(x) = m^2 + n^2 + x^2 - 3mnx = x^2 - 3mnx + (m^2 + n^2) = 0,$$

korzystając ze wzorów Viète'a, znajdujemy kolejne rozwiązania. Reasumując, każde rozwiązanie (m, n, k) generuje co najwyżej trzy rozwiązania sąsiednie postaci

$$(**) \quad (3nk - m, n, k), \quad (m, 3mk - n, k), \quad (m, n, 3mn - k).$$

W liczbach naturalnych równanie $(*)$ ma oczywiste rozwiązanie $(1, 1, 1)$. Zgodnie ze wzorami $(**)$ rozwiązanie $(1, 1, 1)$ ma jedno rozwiązanie sąsiednie $(2, 1, 1)$. Rozwiązanie $(2, 1, 1)$ ma dwa rozwiązania sąsiednie: $(1, 1, 1)$ oraz jedno nowe $(5, 2, 1)$. Rozwiązanie $(5, 2, 1)$ ma trzy rozwiązania sąsiednie: $(2, 1, 1)$ i dwa nowe $(13, 5, 1)$ i $(29, 5, 2)$ itd. Uważne spojrzenie na otrzymane wyniki sugeruje dwa lematy.

Lemat 1. Rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ ma równe dwie współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $(1, 1, 1)$ lub $(2, 1, 1)$.

Dowód: Załóżmy na przykład, że $n = k$. Wtedy $m^2 + 2n^2 = 3mn^2$, więc $m^2 = n^2(3m - 2)$. Oznacza to, że n^2 dzieli m^2 , zatem n dzieli m . Istnieje więc liczba naturalna d taka, że $m = nd$. Wtedy (z pierwszej równości) $d^2 = 3nd - 2$ i $2 = d(3n - d)$. Oznacza to, że d dzieli 2, więc $d = 1$ lub $d = 2$. W obu tych przypadkach, z ostatniej równości, mamy $n = 1$. Wreszcie $m = nd$ daje nam $m = 1$ lub $m = 2$. Jedynymi możliwymi rozwiązaniami $(*)$ o dwóch równych współrzędnych są więc trójki liczb $(1, 1, 1)$ lub $(2, 1, 1)$. Implikacja przeciwna jest oczywista. $\square$

Rozwiązania $(1, 1, 1)$ oraz $(2, 1, 1)$ równania $(*)$ będziemy nazywać rozwiązaniami *osobliwymi*. Rozwiązania te mają co najwyżej dwa rozwiązania sąsiednie. Nietrudno sprawdzić, że każde nieosobliwe rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ generuje trzy rozwiązania sąsiednie dane wzorami $(**)$.



Lemat 2. Jeśli rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ nie jest osobliwe, to jedno z jego rozwiązań sąsiednich ma mniejszą współrzędną maksymalną, a dwa pozostałe mają większą współrzędną maksymalną.

Dowód: Załóżmy, że $m > n > k$. Pierwiastkami równania $\Phi_m(x) = 0$ są liczby m oraz $m' = 3nk - m$. Ponieważ

$$(n - m)(n - m') = \Phi_m(n) = 2n^2 + k^2 - 3n^2k < 3n^2 - 3n^2k \leq 0,$$

więc liczba n leży między liczbami m i m' , zatem $m > m'$. Oznacza to, że maksymalna współrzędna rozwiązania (m', n, k) jest mniejsza niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) .

Pierwiastkami wielomianu $\Phi_n(x) = 0$ są liczby n oraz $n' = 3mk - n$. Ponieważ

$$(m - n)(m - n') = \Phi_n(m) = 2m^2 + k^2 - 3m^2k < 3m^2 - 3m^2k \leq 0,$$

więc liczba m leży między liczbami n i n' . Skoro $m > n$, to musi być $n' > m$. Zatem maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n', k) jest większa niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) . Analogicznie maksymalna współrzędna rozwiązania $(m, n, 3mn - k)$ jest większa niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) . $\square$

Z wykazanego lematu wynika, że równanie diofantyczne Markowa $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań!

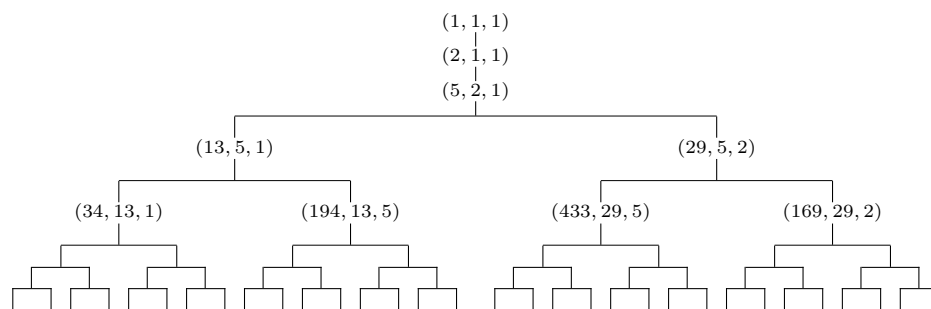
Rozwiązania te tworzą niezwykłą strukturę (drzewo). Mówi o tym następujący rezultat.

Twierdzenie (A.A. Markow, 1879). Każde rozwiązanie (m, n, k) równania diofantycznego Markowa $(*)$ jest połączone (łańcuchem rozwiązań sąsiednich) z rozwiązaniem osobliwym $(1, 1, 1)$. Ponadto współrzędne każdego rozwiązania są liczbami parami względnie pierwszymi.

Dowód: Niech (m, n, k) będzie nieosobliwym rozwiązaniem równania $(*)$. Zgodnie z lematem 2 dla tego rozwiązania istnieje rozwiązanie sąsiednie (m_1, n_1, k_1) o mniejszej współrzędnej maksymalnej. Jeśli to rozwiązanie jest nieosobliwe, to generuje ono rozwiązanie sąsiednie (m_2, n_2, k_2) o jeszcze mniejszej współrzędnej maksymalnej itd. Ponieważ w zbiorze liczb naturalnych nie można utworzyć nieskończonego ciągu malejącego, więc proces ten zakończy się, gdy dostrzemy do pewnego rozwiązania o dwóch równych współrzędnych (lemat 1). Jeśli jest to rozwiązanie $(1, 1, 1)$, to twierdzenie jest udowodnione, jeśli jest to rozwiązanie $(2, 1, 1)$, to ma ono rozwiązanie sąsiednie $(1, 1, 1)$.

Założmy, że istnieje rozwiązanie (m, n, k) , w którym na przykład liczby m i n nie są względnie pierwsze. Istnieje wówczas liczba pierwsza $p > 1$, która dzieli obie liczby m i n . Ze względu na równość $(*)$, p dzieli k . Oznacza to, wobec wzorów $(**)$, że liczba p jest dzielnikiem wszystkich współrzędnych każdego rozwiązania sąsiedniego. Przechodząc łańcuchem rozwiązań do rozwiązania $(1, 1, 1)$, otrzymujemy, że p jest dzielnikiem 1. Sprzeczność. $\square$

Z twierdzenia Markowa wynika, że zaczynając od rozwiązania osobliwego $(1, 1, 1)$ i przechodząc do kolejnych sąsiednich rozwiązań z większym maksimum współrzędnych, otrzymamy wszystkie rozwiązania równania $(*)$.



Drzewo trójek Markowa, czyli rozwiązań równania $(*)$

Liczby Markowa można znaleźć w bazie OEIS pod numerem A002559.

Liczby naturalne pojawiające się jako współrzędne rozwiązań równania diofantycznego Markowa $(*)$ nazywamy *liczbami Markowa*. Ich początkowe wartości są następujące:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, 1597, 2897, 4181, 5741, 6466, 7561, 9077, 10946, 14701, \dots\}.$$

Z liczbami Markowa związana jest sformułowana w 1913 roku przez Georga Frobeniusa hipoteza jednoznaczności: każda liczba Markowa pojawia się dokładnie raz (z dokładnością do permutacji) jako maksimum w trójce Markowa. Hipoteza ta wciąż pozostaje nierozstrzygnięta.

Można dostrzec, że co druga liczba w ciągu liczb Fibonacciego

$$\mathcal{F} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots\}$$

jest liczbą Markowa. Inaczej, trójki rozwiązań występujące na lewym brzegu drzewa Markowa (rysunek) są postaci $(F_{2k+1}, F_{2k-1}, 1)$, $k = 1, 2, \dots$

Liczby Fibonacciego generuje wzór $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

Liczby Pella generuje wzór
 $P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ dla
 $n \geq 2$.

Również co druga liczba Pella

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots\}$$

jest liczbą Markowa, a trójki rozwiązań występujące na prawym brzegu drzewa Markowa (rys. 1) są postaci $(P_{2k+1}, P_{2k-1}, 2)$, $k = 1, 2, \dots$

Równanie Markowa (*) jest wyjątkowe! Adolf Hurwitz (1907) wykazał, że równanie diofantyczne $X^2 + Y^2 + Z^2 = s \cdot XYZ$, gdzie $s = 1, 2, 3, \dots$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych tylko dla $s = 1$ lub $s = 3$. Przy tym wszystkie rozwiązania (A, B, C) równania $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$ otrzymujemy z rozwiązań (m, n, k) równania Markowa (*) za pomocą wzorów $A = 3m, B = 3n, C = 3k$. Napiszemy o tym więcej w kolejnym numerze *Delty*.

Liczby (trójki) Markowa to wciąż aktualny temat badawczy. Pojawiają się one nieoczekiwanie w różnych dziedzinach współczesnej matematyki, co pokazuje lektura książki M. Aigner'a *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture. A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings*, Springer Cham (2013).



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

Rozwiązania na str. 24

F 1143. Podczas orkanu prędkość wiatru może przekraczać 200 km/h. Oszacuj, z ile razy większą siłą uderza w ścianę domu wiatr o prędkości 200 km/h (orkan) od wiatru o prędkości 50 km/h („zwykła” wichura)?

F 1144. a) Biegacz rozpędza się wzdłuż prostej. Rośnie przy tym jego pęd. Czy więcej pędu uzyskuje biegacz, czy podłoże, po którym biegnie? Czy więcej energii kinetycznej nabiera biegacz, czy podłoże?

b) Wioślarz (za pomocą dwóch wiosł) rozpędza łódź. Czy więcej pędu uzyskuje przy tym łódź z wioślarzem, czy woda? Czy więcej energii kinetycznej nabiera łódź, czy woda?

Przygotował Dominik BUREK

M 1852. Wandzia ułożyła z sześciu patyczków dwa trójkąty. Następnie rozłożyła je z powrotem i podzieliła je na dwie grupy po trzy patyczki: w pierwszej grupie znalazły się trzy najdłuższe patyczki, a w drugiej – trzy najkrótsze.

- (a) Czy z trzech patyczków pierwszej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?
- (b) Czy z trzech patyczków drugiej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?

M 1853. Nazwijmy liczbę całkowitą *dobrą*, jeżeli jest większa od 1 i wszystkie jej dzielniki pierwsze kończą się tą samą cyfrą. (Na przykład liczby 19 oraz $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ są dobre, natomiast liczba $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ nie jest dobra). Czy istnieje rosnący ciąg arytmetyczny o różnicy nie większej niż 2026, złożony ze 150 liczb dobrych?

M 1854. Rozalia i Wanda grają na planszy 100×100 . Początkowo wszystkie pola planszy są białe. W każdym swoim ruchu Rozalia zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno na przekątnej. W każdym swoim ruchu Wanda zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno w pionie. (Na rysunku pokazano możliwe pierwsze ruchy Rozalii i Wandy). Pierwszy ruch wykonuje Rozalia. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Kto posiada strategię wygrywającą?

		R		W
	R			W
				W

Kołysanka z geometrią w tle

Michał MIŚKIEWICZ*

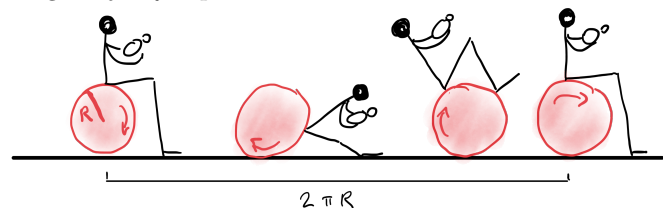
Moja młodsza córeczka lubi, kiedy biorę ją na ręce i siadam na piłce do ćwiczeń. Delikatne kołysanie na gumowej piłce ją uspokaja, a czasem nawet pomaga zasnąć. Niestety nieraz zdarza mi się, że gdy już usiądę, zauważam tuż obok jakiś mebel lub – co gorsza – szeleszczące zabawki, a tego akurat zasypiające maluszki nie lubią. Oczywiście mogą się przetrulać nieco w bok, ale wtedy siedziałbym nierówno, nie na samym szczycie piłki, co po chwili robi się męczące (rys. 1). Jak więc wydostać się z niechcianego kąta?



Rys. 1. Siedzenie na samym szczycie piłki do ćwiczeń jest wygodne, siedzenie bardziej z boku już nie (i grozi wypadkiem)

Sformułujmy ten problem nieco ściślej, przyjmując pewne uproszczenia. Piłka niech będzie idealną sztywną sferą (o promieniu $R \approx 30$ cm) poruszającą się bez poślizgu po płaskim podłożu. Między piłką a siedzącym również nie ma poślizgu, więc miejsce ich styku jest zawsze w tym samym miejscu sfery – początkowo w najwyższym jej punkcie. Zadanie polega na wskazaniu takiego toru przetaczania piłki, by wspomniane miejsce styku znowu znalazło się na szczycie, ale sama piłka była już gdzie indziej.

Może się wydawać, że problem jest beznadziejny – jeśli piłka przetoczy się gdzie indziej, to przecież miejsce styku również się przesunie. Na szczęście tak nie jest, a przykładowe rozwiązanie widać na rysunku 2 – po prostu przetaczamy piłkę po linii prostej na odległość $2\pi R$. Tyle że w połowie drogi rodzic wraz z dzieckiem muszą... zapaść się pod ziemię? Sprasować? Dodajmy więc następujące wymaganie: punkt siedzenia ma pozostać blisko najwyższego położenia, a przynajmniej na górnej części piłki.

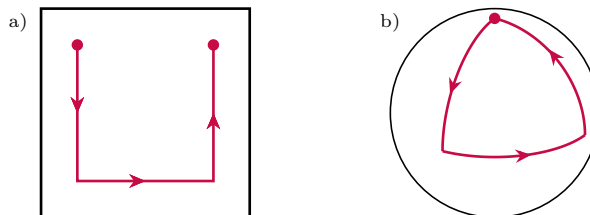


Rys. 2. Po przetoczeniu o $2\pi R$ rodzic znowu jest na górze piłki, ale za jaką cenę?

Da się to zrobić! Ale żeby dobrze zrozumieć, co się tu dzieje z matematycznego punktu widzenia, zaczniemy od eksperymentu myślowego. Stańmy na biegunie północnym zwrócenie w kierunku Paryża ($2^{\circ}20'$ E). Przejdźmy 10 000 km prosto, skróćmy 90° w lewo, jeszcze raz tyle samo prosto, w lewo i znowu prosto. Jak wyobrazić sobie taką wycieczkę? Na podstawie podanych wskazówek można narysować mentalną mapę (rys. 3a): jest to łamana złożona

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

z trzech boków kwadratu. Rzeczywistość wycieczki jest jednak odmienna (rys. 3b): na koniec znajdujemy się z powrotem na biegunie.



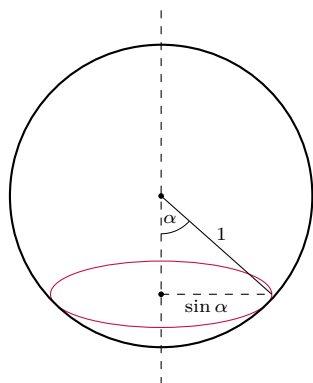
Rys. 3. Dwie ilustracje opisanej wycieczki – na płaszczyźnie i na sferze. To nie przypadek, że tak równo wyszło: oryginalna definicja metra z 1795 roku była oparta właśnie na długości paryskiego południka

Krzywa opisująca wycieczkę na Ziemi jest więc „zamknięta”, chociaż krzywa na mapie taka nie jest. Możliwa jest też przeciwna sytuacja: jeśli na przykład krzywą na mapie uzupełnimy o brakujący bok kwadratu, to odpowiadająca jej wycieczka jeszcze raz odwiedzi Paryż i zakończy się na równiku. Widać więc, że płaszczyzna i sfera – czyli mapa i Ziemia – to dwa różne światy. Opisana tu odpowiedniość (znana jako *development map*) pozwala powiązać dowolną krzywą płaską z odpowiadającą jej krzywą na zadanej powierzchni (dowolnej, nie musi to być sfera). Do tej pory ograniczyliśmy się do krzywej łamanej, i wówczas jej odcinkom odpowiadają łuki geodezyjne na sferze, czyli fragmenty kół wielkich (o geodezyjnych można było przeczytać w Δ_{21}^7 i Δ_{22}^7). Oczywiście prawdziwie zakrzywione krzywe też mają swoje odpowiedniki na sferze.

Wracając do problemu piłki, łatwo odtwarzamy opisany eksperyment: odrysowujemy na podłożu diagram z rysunku 3a (za bok kwadratu przyjmując $\frac{\pi}{2}R \approx 47$ cm) i po zadanym torze przetaczamy piłkę. Punkt styku piłki z podłożą określa wtedy na sferze tor z rysunku 3b. Skoro wraca on na swoje początkowe miejsce na sferze, to na antypodach również rodzic ląduje z powrotem na szczycie. To rozwiązanie jest już fizycznie możliwe, ale nadal niepraktyczne ze względu na duże odchylenie od pionu. Jeśli zależy nam, by to odchylenie nie przekraczało z góry zadanej tolerancji, rozważmy jeszcze jedno podejście.

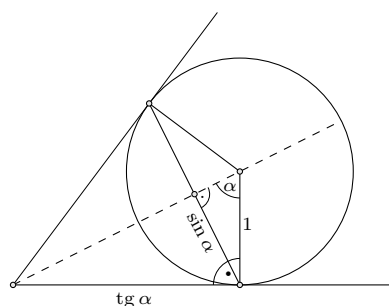
Zatańczmy biodrami, w końcu dzieci to lubią.

Dokładniej, wykonujmy na piłce koliste ruchy i zobaczymy, gdzie nas to zaprowadzi. Na potrzeby analizy przyjmijmy, że piłka jest sferą jednostkową, a w wyniku naszych ruchów punkt styczności z podłożem przemierza na niej okrąg wyznaczony przez kąt α jak na rysunku 4, czyli „równoleżnik szerokości geograficznej $90^{\circ} - \alpha$ ”. Promień takiego okręgu to $\sin \alpha$. Ale gdy przetoczmy sferę wzdłuż równoleżnika, ślad na podłożu może być okręgiem o innym promieniu (polecam rozważyć przypadek $\alpha = 90^{\circ}$). Tylko jakim?



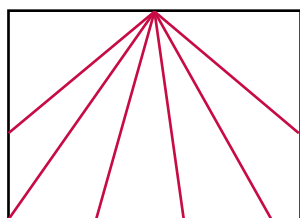
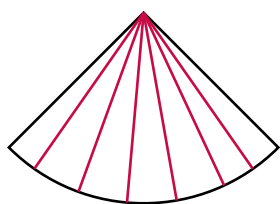
Rys 4. Nowy pomysł: ruch po równoleżniku

Wyznaczenie śladu będzie łatwiejsze, jeśli założymy sferze czapeczkę, czyli przytwierdzimy stożek styczny do niej dokładnie wzdłuż naszego równoleżnika (jak na rys. 5). Zamiast toczyć samą sferę, możemy toczyć stożek ze sferą w środku, a efekt będzie ten sam.



Rys. 5. Sfera z odpowiednią stożkową czapeczką – toczenie jej po podłodze zostawia ten sam ślad, co gdyby toczyć samą sferę

To drugie jest naprawdę łatwe i przed dalszą lekturą polecam Czytelnikowi samodzielnie zbudować stożek z kartki papieru: należy w tym celu wyciąć wycinek koła (zresztą sama kartka A4 też się nada) i skleić brzegi jak na rysunku 6. Gotowe? Przeturlajmy taki stożek po stole, a zobaczymy, że jego wierzchołek pozostaje w miejscu. To oznacza, że śladem jest okrąg o promieniu r równym długości odpowiedniej tworzącej stożka, czyli odległości od wierzchołka do punktów równoleżnika. Z rysunku 5 odczytujemy, że $r = \operatorname{tg} \alpha$.

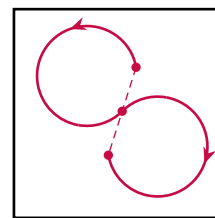
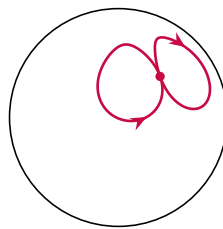


Rys. 6. Przepis na stożek: trzeba tak zgiąć kartkę, by kolorowe linie tworzyły tworzące stożka, a następnie skleić brzegi. Użycie formatu A4 daje stożek z nierówną podstawą, ale to nie szkodzi

Dokąd nas to prowadzi? Niby donikąd, bo tylko kręcimy się w kółko – tak na piłce, jak i na podłodze – ale...

Spróbujmy robić ósemki. Otóż po wykonaniu jednego kółka zrobmy drugie, ale w przeciwną stronę (rys. 7). Po pierwszym kółku nasz ślad na podłodze ma taką długość, jak okrąg przemierzony na sferze, czyli $2\pi \cdot \sin \alpha$, a to przecież mniej niż $2\pi r$. Dokładniej, proporcja długości okręgów wynosi:

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \cos \alpha < 1.$$



Rys. 7. Zataczanie ósemek biodrami daje pożądany efekt: punkt siedzenia pozostaje blisko szczytu, a piłka konsekwentnie się przesuwą

Przykładowo, dla $\alpha = 30^\circ$ jest to $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$, wykonaliśmy więc jedynie 87% pełnego okrążenia na podłodze. Po wykonaniu drugiego kółka w przeciwną stronę oddalimy się od punktu wyjścia jeszcze bardziej, na około 28 cm. Następne ósemki powiodą nas szczęśliwie w wybranym kierunku, hen, daleko od niebezpiecznego kąta z zabawkami.

Podsumowanie. Trzeba uczciwie przyznać, że opisana analiza nijak się ma do praktyki, bo przecież piłka do ćwiczeń nie jest idealnie sztywna, a i poślizg może się przydarzyć. Jak to często bywa z matematyką rekreacyjną, pozostaje nam więc satysfakcja z rozwiązanego problemu. Ale to nie wszystko.

Wspomniałem już, że odpowiedniość między krzywymi posiada w literaturze własną nazwę: *development map*. Widocznie nie jest to wyłącznie źródło rozrywki. I rzeczywiście, jest to pojęcie pożyteczne, na przykład gdy chce się rozważać ruch Browna (i ogólniej martyngały) na różnych przestrzeniach [Hsu, Chapter 2]. Procedura przetaczania również jest punktem wyjścia do różnych rozważań [Sharpe, Appendix B]. Jej angielska nazwa, *rolling without slipping or twisting*, wskazuje, że istotny jest nie tylko brak poślizgu, ale i brak skręcania. Wszak piłka obracająca się wokół pionowej osi technicznie nie ma poślizgu (punkt styku z podłożem jest nieruchomy), ale podlega skręceniu, którego w procedurze przetaczania przecież musimy unikać. Gdybyśmy dopuścili skręcanie, mielibyśmy do czynienia z tzw. *torsją* – która pojawia się w typowym kursie geometrii różniczkowej, ale zazwyczaj w oderwaniu od swojej pięknej etymologii.

Torsję typowo definiuje się wzorem $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Znaczenie tych symboli nie jest tutaj bardzo ważne, chciałem tylko zwrócić uwagę, że skrzętnie ukrywają one swoją geometryczną zawartość.

Może więc są jakieś korzyści z wieczornych rozważań na piłce?

Szkic tego artykułu przeleżał dwa lata w szufladzie, więc razem z córką przeżywamy teraz zupełnie inne matematyczne przygody. Być może jeszcze kiedyś o nich napiszę.

Dalsza lektura dla zaawansowanych:

Elton Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, American Mathematical Society, 2002 (zwłaszcza rozdział 2).

Richard Sharpe, *Differential geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Springer-Verlag, 1997 (zwłaszcza appendix B: *Rolling without slipping or twisting*).

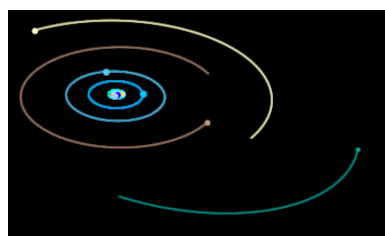
program w Pythonie do rysowania tych krzywych. Dodatkowo (choć nie prosiłem!) dołączył tabelkę z kilkoma sensownymi propozycjami zestawów parametrów prowadzących do różnych efektownych kształtów.

Znowu zapytałem Copilota.

Nie zdziwi nas w tym układzie, że Wielki Mag, zapytany o rozwiązania pewnego równania Riccattiego – w Δ_{21}^7 próbowaliśmy wspólnie z Grzegorzem Łukaszewiczem wykorzystać w tym celu metody grup Liego – z marszu wyprodukował szczegółowe rozwiązanie (powiedziałbym, typowe dla czwórkowego studenta). W dodatku elegancko sformatowane.

W przypadku poważniejszego wyzwania, jakim w Δ_{20}^9 była symulacja ruchu planet w Układzie Słonecznym na przestrzeni 50 000 lat, moi nowi Inteligentni Pomocnicy mieli trochę kłopotów. W zależności od humoru produkowali rozwiązania lepsze lub gorsze. Jednego razu model językowy Qwen3 wiedział, co prawda, że trzeba użyć zachowującego energię schematu symplektycznego (nawet wymienił prawidłowo dwa najbardziej popularne), ale następnie przygotował kod w Pythonie, korzystający nie z nich, tylko z najprostszego schematu Eulera – o którym powszechnie wiadomo, że wyjątkowo źle radzi sobie w tych okolicznościach. I rzeczywiście: symulacja zakończyła się spektakularną porażką, a planety szybko rozsypały się po Wszechświecie.

Więcej o tych schematach pisaliśmy w Δ_{20}^9 .

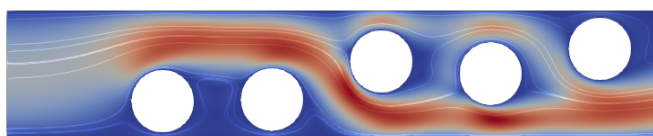


Lecz innego dnia ten sam model był w wyraźnie lepszej formie i poszedł na całość, proponując – zgodnie z duchem wspomnianej na początku rubryki *Pół szklanki mocnego kodu* – wykorzystanie gotowych, mocnych bibliotek: jednej do rozwiązywania równań ruchu, a drugiej do wyznaczenia początkowych położań i prędkości planet na podstawie danych NASA. Efekt był po prostu rewelacyjny – co widać na (zwodniczo niepozornym) rysunku obok, ukazującym finalny fragment symulacji.

Może więc faktycznie żyjemy już w epoce *vibe coding*, kiedy rolą człowieka jest tylko przedstawienie problemu do rozwiązania, a całą resztę – w tym nudne i żmudne kodowanie w Pythonie – ogarnie już tylko Sztuczny Inteligent? Nie odważę się odpowiedzieć na to pytanie, ale w zamian zrobię jeszcze jeden eksperyment.

Skorzystam z wolnodostępnego dużego modelu językowego ogólnego przeznaczenia GPT-OSS-120b. Wiadomo, że są lepsze – lecz ich nie próbowałem.

Zadanie przeprowadzenia komputerowej symulacji przepływu płynu w rurze, wzdłuż której przemieszczają się niewielkie przeszkody (powiedzmy, kulki; zob. rys. poniżej) jest jednym z tych zadań, które z powodzeniem mogłyby trafić do dawnej rubryki *o mocnym kodzie*: dysponujemy na tyle wyrafinowanymi bibliotekami, że rozwiązanie powinno dać się zapisać w zwięzły sposób w Pythonie.



Poprosiłem więc mojego Inteligentnego Pomocnika, aby samodzielnie przygotował taki właśnie kod, opisując mu (niektóre) fizyczne parametry zadania. W odpowiedzi poprawnie domyślił się, jakie brakujące warunki należy dodać, aby otrzymać to, o co mi chodziło, a następnie wyprodukował ładnie wyglądający program w Pythonie.

Nie od razu udało się uruchomić tę symulację. W kodzie było kilka drobnych błędów składniowych, które dopiero w mozolnym procesie kolejnych poprawek (wprowadzanych przez niego) i testów (wykonywanych przeze mnie) zostały w końcu szczęśliwie usunięte przez Sztucznego Programistę.

Jednak wówczas ujawniły się następne, tym razem poważniejsze kłopoty – związane z wybranym algorytmem – i tego już nie udało się przeskoczyć: choć Sztuczny Inteligent starał się, jak mógł, nie był w stanie pójść dalej bez merytorycznej pomocy z mojej strony. Lecz ja, kompletnie nie rozumiejąc, *co się dzieje i o co chodzi* w jego kodzie, miałem w głowie totalną pustkę.

A z pustego to, jak wiadomo, i Salomon nie należy.



Sztuczna inteligencja odkrywa świat

Zespoły doświadczalne w laboratorium CERN pod Genewą nowe cząstki odkrywają w miarę rutynowo. W marcu ogłoszono, że w eksperymencie LHCb zaobserwowano po raz pierwszy hadron Ξ_{cc}^+ zbudowany z dwóch kwarków powabnych i jednego dolnego. W pewnym sensie cząstka ta jest krewniaczką protonu, ale ma znacznie większą od niego masę, a poza tym żyje niezwykle krótko. O jej istnieniu dowiadujemy się, wykrywając charakterystyczne produkty rozpadu, które są dobrze ukryte wśród śladów miliardów innych cząstek wytwarzanych w doświadczeniu.

Ważnym elementem metodologii doświadczalnej fizyki cząstek elementarnych jest bowiem rozpoznawanie subtelnych wzorców w wielkich zbiorach danych generowanych przez detektory. A do takiego zadania są wprost stworzone nowoczesne systemy sztucznej inteligencji – wielkie modele językowe.

Taką tezę stawiają w niedawno udostępnionej publicznie pracy badacze z MIT i CERN-u. Przedmiotem analiz były publicznie dostępne dane z eksperymentów CMS przy akceleratorze LHC oraz z eksperymentów ALEPH i DELPHI, które działały przy akceleratorze LEP, przyspieszającym na przełomie XX i XXI wieku elektrony i pozytony w tym samym tunelu, który obecnie jest zajmowany przez LHC.

Naukowcy stworzyli system *Just Furnish Context* (JFC) działający w oparciu o model Claude Opus firmy Anthropic. Zbudowany przez nich agent różni się od wcześniejszych implementacji tym, że ma rzeczywistą autonomię w całym procesie analizy danych. Otrzymuje jedynie ogólny cel fizyczny – np. pomiar prawdopodobieństwa rozpadu bozonu Z na hadrony na podstawie danych ALEPH – i samodzielnie planuje oraz realizuje czynności badawcze, od selekcji przypadków przez oszacowanie poziomu tła i niepewności systematycznych aż po wybór metod statystycznych i sposobu prezentacji wyników.

Autonomia modelu nie jest jednak całkowicie nieograniczona. Korzysta on z bazy wiedzy opracowanej przez ludzkich fizyków. Pierwszą częścią tej bazy jest opis tego, co należy zrobić: etapów analizy oraz wymaganych rezultatów każdego etapu, ale bez narzucania sposobu ich osiągnięcia. Druga część to wskazówki, jak należy to zrobić: opis praktycznej wiedzy dziedziny, np. typowych źródeł niepewności, znanych pułapek w analizach czy też wymaganych testów.

Model naśladuje wieloetapowy proces recenzyjny w prawdziwym zespole badawczym. Wytworzone analizy przechodzą przez sześć recenzji (przeprowadzanych przez ten sam model): wstępną recenzję fizyczną, krytyczną recenzję fizyczną (poszukiwanie błędów), konstruktywną recenzję fizyczną (sugerowanie ulepszeń), ocenę ogólnej prezencji wyników, ogólne sprawdzenie spójności i sensowności wyników oraz ostateczną ocenę analizy.

Model przeprowadził dziewięć analiz, z których każda była inicjowana krótkim promptem w języku fizyczno-naturalnym (np. „Zmierz liczbę generacji lekkich neutrin na podstawie szerokości niewidocznych rozpadów bozonu Z ”). Całość zajęła nieco poniżej 55 godzin, a jakość wyników była porównywalna z opublikowanymi pracami. A czym model sztucznej inteligencji różnił się od prawdziwych fizyków? W kilku przypadkach zaczął budować złożone opowieści wokół prostych faktów, takich jak zanieczyszczenie próbki rozpadów bozonu Higgsa na taony rozpadami bozonu Z na miony; nie spowodowało to jednak wygenerowania błędnej analizy, ale zostało wychwycone w procesie recenzji.

Czy oznacza to, że doświadczalni fizycy cząstek elementarnych są już niepotrzebni? Bynajmniej! Opisujący model zajmował się analizami w ramach znanej fizyki i budował swoje narzędzia z istniejących już i przetestowanych „klocków”. Nie wiadomo, jak poszłoby mu szukanie procesów nowej fizyki o nie do końca zrozumianych jeszcze przejawach. Z drugiej strony, mimo że złecone analizy były wcześniej wykonane przez ludzi, to nie wszystkie opublikowano, co oznacza, że model naprawdę stworzył od zera dobrze działające narzędzia.

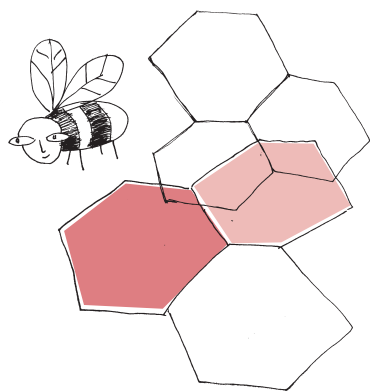
Co z tego wynika? Zdaniem autorów, jest to przykład możliwości zastosowania narzędzi sztucznej inteligencji do przesunięcia nacisku w kształceniu fizyków z zaawansowanego programowania na rozwój intuicji fizycznej i myślenia naukowego, bo implementację idei można w dużej mierze pozostawić maszynom.

Krzysztof TURZYŃSKI

[*] E. A. Moreno, S. Bright-Thonney, A. Novak, D. Garcia, P. Harris, *AI Agents Can Already Autonomously Perform Experimental High Energy Physics*, arXiv:2603.20179



Uzasadnienie nierówności izoperymetrycznej można odnaleźć w artykule Bartłomieja Bzdęgi z Δ_{23}^1 .



Czytelnikom, którzy nie znają pojęcia granicy górnej, służę innym wyjaśnieniem: dla dowolnego podziału płaszczyzny na pola jednostkowe istnieją dowolnie duże koła, w ograniczeniu do których długość linii danego podziału w stosunku do pola koła jest dowolnie bliska tej wartości dla układu heksagonalnego.

Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Jaki kształt powinniśmy wybrać, jeżeli chcemy ograniczyć 1 m^2 płaszczyzny za pomocą jak najkrótszego sznurka? Oczywiście koło – figurę płaską o najmniejszym obwodzie przy zadanym polu. Wiąże się to z *nierównością izoperymetryczną*, zachodzącą dla każdej figury płaskiej: $4\pi A \leq L^2$, gdzie A i L to, odpowiednio, pole i obwód; równość zachodzi tylko dla koła właśnie. Zauważmy jednak, że kół nie da się szczelnie ułożyć: zawsze zostają luki, a żaden fragment sznurka nie może być użyty do ograniczenia dwóch kołowych obszarów (sąsiadujące koła mają co najwyżej jeden punkt wspólny). Jaką zatem figurę powinniśmy wybrać, gdy chcemy podzielić powierzchnię na możliwie największe równe pola, zużywając jak najmniej „sznurka”? Przy podziale płaszczyzny nie wolno nam „marnować” brzegu: każda krawędź powinna być wspólna dla dwóch sąsiednich pól, a całość ma tworzyć szczelne pokrycie bez luk. Jeśli dodatkowo ograniczymy się do wielokątów foremnych, to dla ustalonego pola A foremny m -kąt ma obwód

$$L_m = 2\sqrt{mA \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}.$$

Ponieważ jedynymi wielokątami foremnymi, które kafelkują płaszczyznę, są trójkąt, kwadrat i sześciokąt, wystarczy porównać wartości ich obwodów. Otrzymujemy $L_6 < L_4 < L_3$, co tłumaczy, dlaczego wśród foremnych kandydatów wygrywa siatka heksagonalna – ma najmniejszy obwód (a więc i najmniejsze zużycie materiału) przy tym samym polu każdej komórki.

Powyższy fakt – że wśród wielokątów foremnych najlepiej sprawdzają się sześciokąty – był znany już starożytnym Grekom. Uwadze myślicieli nie umknęło również, że dzielą tę wiedzę z... pszczołami! Na przełomie III i IV wieku naszej ery Pappus z Aleksandrii stwierdził, że heksagonalny kształt komórek w plastrze miodu jest niezwykle efektywny (w kontekście minimalizacji ilości zużytego wosku, który pełni tutaj rolę „sznurka”). Półtora milenium później dużo dobitniej ujął to Karol Darwin w dziele *O powstawaniu gatunków*: plaster miodu nazwał arcydziełem inżynierii, a praca pszczół posłużyła mu za przykład obrazujący ewolucyjne wykształcenie perfekcyjnego instynktu.

W powyższym rozumowaniu ograniczyliśmy się jednak do wielokątów foremnych. Ale skąd wiadomo, czy nie istnieje rozwiązanie lepsze – chociażby z bokami różnych długości albo z wykrzywionymi krawędziami? Rozstrzyga to udowodnione w 1999 roku przez Thomasa Halesa twierdzenie: nie można podzielić płaszczyzny efektywniej niż pszczoły. A bardziej formalnie, dla dowolnego podziału płaszczyzny na części o jednostkowym polu *granica górna* stosunku długości krzywych podziału zawartych w kole o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu r do pola tego koła (tzn. πr^2) jest równa $\sqrt[3]{12}$, czyli tyle, ile dla siatki heksagonalnej. Rzecz jasna, twierdzenie Halesa nosi nazwę *twierdzenia o plastrze miodu*.

Na koniec dodajmy, że siatka heksagonalna – choć w trochę innym kontekście – występuje również we własnościach kombinatorycznych symbolu dwumianowego Newtona. Prosta obserwacja, nazywana *zasadą plastra miodu* (ang. *the honeycomb rule*), mówi, że równość

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1}$$

zachodzi dla dowolnych liczb naturalnych k i n takich, że $0 < k < n$. Zachęcam do sprawdzenia równania dla konkretnych wartości k i n oraz odnalezienia odpowiednich sześciu współczynników dwumianowych w trójkącie Pascala: łatwiej wtedy dostrzec „plastrową” genezę nazwy.

A tak w ogóle, to pszczoły wylatujące z ula często bardzo efektywnie radzą sobie z dobrze znanym *problemem komiwojażera*! Kończy mi się jednak miejsce na stronie, więc być może wrócę do tego tematu innym razem.

Problem Tibora Radó Jarosław GÓRNICKI*

Geometria to nie tylko trójkąty, koła czy parabole. Oto jej inne oblicze. Na początku XX wieku Giuseppe Vitali, badając funkcje rzeczywiste, wykazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (G. Vitali). *Niech E będzie przedziałem ograniczonym o długości $|E|$. Wtedy każdy skończony zbiór przedziałów $E_1, E_2, \dots, E_m$ pokrywających przedział E zawiera nienachodzące na siebie przedziały $E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_i}$ o łącznej długości*

$$|E_{m_1}| + \dots + |E_{m_i}| \geq \frac{1}{3} \cdot |E|.$$

Dowód. Spośród przedziałów $E_1, \dots, E_m$ wybieramy przedział najdłuższy i oznaczamy go jako E_{m_1} . Następnie usuwamy ze zbioru przedział E_{m_1} i wszystkie przedziały pokrycia, które na niego nachodzą. Usunięte przedziały mogą pokryć przedział nie dłuższy niż $3 \cdot |E_{m_1}|$. Z pozostałych przedziałów pokrycia wybieramy przedział najdłuższy i oznaczamy go jako E_{m_2} . Usuwamy przedział E_{m_2} i wszystkie przedziały, które na niego nachodzą. Usunięte przedziały mogą pokryć przedział nie dłuższy niż $3 \cdot |E_{m_2}|$. Proces ten prowadzimy do wyczerpania wszystkich możliwości. Tak wybrane przedziały $E_{m_1}, \dots, E_{m_i}$ nie nachodzą na siebie i

$$3 \cdot |E_{m_1}| + \dots + 3 \cdot |E_{m_i}| \geq |E|.$$

Istotnie, gdyby $3 \cdot |E_{m_1}| + \dots + 3 \cdot |E_{m_i}| < |E|$, to w zbiorze E istniałyby punkty pokryte przez pewien przedział, który nie został rozpatrzony. Sprzeczność, bo postępowanie było prowadzone do wyczerpania wszystkich możliwości. Dowód jest zakończony. $\square$

Prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 1 dla płaszczyzny.

Twierdzenie 2. *Niech S będzie figurą ograniczoną o polu $|S|$. Z każdego skończonego zbioru kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$, o równoległych bokach, pokrywających figurę S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_r}$ o łącznym polu*

$$|K_{n_1}| + \dots + |K_{n_r}| \geq \frac{1}{9} \cdot |S|.$$

Dowód. Spośród kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$ wybieramy kwadrat o największym polu (równoważnie: najdłuższym boku) i oznaczamy go jako K_{n_1} . Usuwamy ten kwadrat i wszystkie kwadraty pokrycia, które nachodzą na kwadrat K_{n_1} . Usunięte kwadraty mogą pokryć kwadrat o polu nie większym niż $9 \cdot |K_{n_1}|$. Z pozostałymi kwadratami pokrycia powtarzamy tę procedurę do wyczerpania wszystkich możliwości. Tak wybrane kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_r}$ nie nachodzą na siebie, ponadto

$$9 \cdot |K_{n_1}| + \dots + 9 \cdot |K_{n_r}| \geq |S|,$$

a stąd wynika teza. $\square$

Tibor Radó (1895–1965) w liście z 20 września 1927 roku do Wacława Sierpińskiego (ówczesnego redaktora czasopisma *Fundamenta Mathematicae*) zauważył, że współczynnik $\frac{1}{3}$ w twierdzeniu 1 można zastąpić współczynnikiem $\frac{1}{2}$ (łatwo pokazać, że jest to wartość optymalna, zostawiamy to więc Czytelnikowi jako ćwiczenie).

Twierdzenie 3 (T. Radó, 1928). *Niech E będzie przedziałem ograniczonym o długości $|E|$. Wtedy każdy skończony zbiór przedziałów $E_1, E_2, \dots, E_m$ pokrywających przedział E zawiera nienachodzące na siebie przedziały $E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_k}$ o łącznej długości*

$$|E_{m_1}| + \dots + |E_{m_k}| \geq \frac{1}{2} \cdot |E|.$$

Dowód. Przedziały pokrywające E ustawiamy w pewnej dowolnej, ale ustalonej kolejności. Przeglądamy je po kolei i odrzucamy każdy przedział zawarty w sumie nieodrzuconych na tym etapie przedziałów. W ten sposób dostajemy nowe pokrycie. W każdym z nieodrzuconych przedziałów E_i wybieramy punkt wewnętrzny x_i tak, by był on punktem zewnętrznym dla wszystkich pozostałych przedziałów z nowego pokrycia. Punkty te są różne między sobą

Zbiór $E \subset \mathbb{R}$, różny od punktu, nazywamy przedziałem, gdy każda liczba leżąca między liczbami należącymi do E też należy do E .

Przedziały E_j , $j = 1, 2, \dots, m$ pokrywają

przedział E , gdy $E \subset \bigcup_{j=1}^m E_j$.

Przedziały E_i, E_j nie nachodzą na siebie, gdy nie mają wspólnych punktów wewnętrznych (choć mogą mieć wspólne punkty brzegowe).

i możemy przyjąć, że zostały tak ponumerowane, aby $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Dla $i \geq 1$ i przedziałów E_i, E_{i+h} , gdzie $h \geq 2$, mamy $x_i < x_{i+1} < x_{i+h}$. Ponieważ punkt x_{i+1} jest punktem zewnętrznym dla przedziałów E_i i E_{i+h} , więc przedziały te nie nachodzą na siebie. Oznacza to, że przedziały E_i o indeksach parzystych tworzą zbiór przedziałów nienachodzących na siebie o łącznej długości L' . Podobnie przedziały o indeksach nieparzystych tworzą zbiór przedziałów nienachodzących na siebie o łącznej długości L'' . Ponieważ $E \subset E_1 \cup \dots \cup E_n$, więc $L' + L'' \geq |E|$. Oznacza to, że przynajmniej jedna z liczb L', L'' jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2} \cdot |E|$. $\square$

Jednocześnie T. Radó wyraził przypuszczenie, że w twierdzeniu 2 współczynnik $\frac{1}{9}$ można zastąpić współczynnikiem $\frac{1}{4}$, ale nie potrafił tego wykazać. (Jak poprzednio, jest jasne, że nie ma nadziei na wartość większą od $\frac{1}{4}$). List T. Radó opublikowany w *Fundamenta Mathematicae* [tom 11 (1928), 228–229] zapoczątkował problem nawiązujący do twierdzenia 2.

Problem (T. Radó, 1928). Jaka jest największa liczba $\frac{1}{9} \leq c \leq \frac{1}{4}$ taka, że z każdego skończonego zbioru kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$ o równoległych bokach pokrywających figurę ograniczoną S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_j}$ o łącznym polu

$$|K_{n_1}| + \dots + |K_{n_j}| \geq c \cdot |S|?$$

Odpowiedź na to pytanie nie jest znana, choć znamy już lepsze oszacowanie współczynnika c : $0,1179 \approx \frac{1}{8,4797} < c \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{384} \approx 0,2473$ (zob. [*]). Problem T. Radó doczekał się wielu wariantów (np. gdy pokrycia utworzone są z kół) oraz n -wymiarowych odpowiedników. Również w tych przypadkach rozwiązania nie są znane.

[*] S. Bereg, A. Dumitrescu, M. Jiang, *On covering problems of Radó*, *Algorithmica* 57(3) 2010, 538–561.

Pokażemy teraz, że przypuszczenie Tibora Radó jest słuszne w przypadku, gdy figurę S pokrywa skończona liczba przystających kwadratów (o równoległych bokach). Niezwykle pomysłowe uzasadnienie, wykorzystujące znane twierdzenie H. Blichfeldta, podał w 1940 roku A. S. Sokolin.

Na papierze w kratkę kratka stanowi sieć. Jej oczka to kwadraty jednostkowe, a punkty przecięć kratki to węzły.

Twierdzenie 4 (H. Blichfeldt, 1914). *Niech $S \subset \mathbb{R}^2$ będzie figurą ograniczoną o polu $|S| > n - 1$. Wtedy figurę S można przesunąć równolegle tak, aby zawierała n węzłów sieci.*

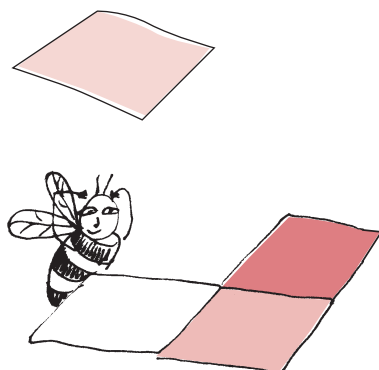
Dowód (G. Birkhoff). Zamiast przesuwając figurę S , przesuniemy oczka sieci. Kratka dzieli figurę S na części $S_1, S_2, \dots, S_n$ leżące w kwadratach jednostkowych $K_1, K_2, \dots, K_n$. Przesuwamy równolegle kwadraty K_i ($i > 1$) wraz z częściami S_i na kwadrat K_1 . Wtedy we wnętrzu kwadratu K_1 istnieje punkt należący jednocześnie do co najmniej n części S_i figury S . Gdyby tak nie było, to $|S| \leq n - 1 < |S|$. Przebijamy w tym punkcie wszystkie kwadraty K_i ($i = 1, 2, \dots, n$), a następnie każdy kwadrat przesuwamy równolegle do położenia pierwotnego. Ślady przebić (jest ich co najmniej n) to węzły nowej sieci kwadratowej (jednostkowej) równoległej do sieci wyjściowej, które należą do figury S . $\square$

Twierdzenie 5 (A.S. Sokolin, 1940). *Niech S będzie figurą ograniczoną o polu $|S|$. Z każdego skończonego zbioru przystających kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_m$, o równoległych bokach, pokrywających figurę S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{m_1}, K_{m_2}, \dots, K_{m_n}$ o łącznym polu*

$$|K_{m_1}| + \dots + |K_{m_n}| \geq \frac{1}{4} \cdot |S|.$$

Dowód. Załóżmy, bez zmniejszania ogólności rozumowania, że pole każdego kwadratu z pokrycia jest równe $(\frac{1}{2})^2$. Niech n będzie największą liczbą naturalną spełniającą nierówność $|S| > n - 1$. Zgodnie z twierdzeniem 4 (Blichfeldta) figurę S możemy przesunąć równolegle tak, by zawierała $n \geq |S|$ węzłów sieci jednostkowej. Wówczas dla każdego węzła pozostawiamy jeden kwadrat pokrywający ten węzeł. Tak wybrane kwadraty nie nachodzą na siebie, a ich łączna powierzchnia wynosi $(\frac{1}{2})^2 \cdot n \geq \frac{1}{4} \cdot |S|$. $\square$

Pozostaje nam podać ostateczne rozwiązanie problemu Tibora Radó, ale to wymaga jeszcze trochę pracy...



O skali magnitudo

Arkadiusz HESS*

* Student, Kolegium MISMaP,
Uniwersytet Warszawski

W zachowanym dziele *Komentarz do Phenomena Aratos i Eudoksosa* Hipparch nie wprowadza numerowanej skali, używa jedynie greckich przymiotników, takich jak lampros (λαμπρός) – jasny, hypolampros (ὑπολαμπρός) – dość jasny, amydros (ἀμυδρός) – słaby, mikros (μικρός) – blady, do porównania jasności gwiazd.

Irradiancja to natężenie promieniowania określające ilość energii przypadającą na jednostkę powierzchni w jednostce czasu. Jednostką irradiancji jest więc $[W/m^2]$.

W ogólności problem jest nieco bardziej złożony. Skala magnitudo pochodzi od obserwacji gołym okiem, zaś Pogson w swej pracy opierał się na wczesnych pomiarach fotograficznych. Okazuje się, że oko ludzkie ma nieco inną czułość dla poszczególnych długości fal (różne gwiazdy o różnej temperaturze mają maksimum jasności dla różnych długości fal *via* prawo przesunięć Wiena) aniżeli papier fotograficzny. Z tego powodu w fizyce oświetlenia (choćby w pomiarach jasności lamp) używa się luksów (lumen na metr kwadratowy), czyli irradiancji skorygowanej o czułość ludzkiego oka.

W podręcznikach astronomii często spotyka się zapis $\ln F$ dla strumienia, jednak matematycznie operacja logarytmowania wielkości fizycznej z jednostką jest niepoprawna. Prawidłowo należy stosować logarytm ze stosunku wartości do jednostki odniesienia (np. $\ln(F/F_0)$), co daje wielkość bezwymiarową.

Przyjęcie dla Wega dokładnie $m = 0$ jest definicją historyczną. Obecnie Wega nie jest już uważana za wzorzec i jej jasność różni się od zera we współczesnych systemach fotometrycznych.

Kiedy w pogodną noc zaczniemy przypatrywać się niebu, zauważymy bez trudu, że gwiazdy (i planety) ewidentnie różnią się jasnością. Również starożytni dostrzegli ten jakościowy fakt. Jednak dopiero w II wieku p.n.e. Hipparch z Nikei stworzył pierwszą znaną klasyfikację gwiazd.

W II wieku n.e. Klaudiusz Ptolemeusz z Aleksandrii, autor dzieła *Almagest* (a właściwie *Mathematikē Syntaxis*) wprowadza numerowaną skalę jasności gwiazd, w której podzielił gwiazdy od najjaśniejszych (które nazwał gwiazdami pierwszej wielkości) do świecących najślabiej (gwiazdy szóstej wielkości). Pojawiający się tu termin „wielkość” – mégetheos (μεγέθους) – w wiekach późniejszych został zlatynizowany do postaci *magnitudo*, która to nazwa jest używana w astronomii po dziś dzień.

Zauważmy przy okazji, że jaśniejsze obiekty mają mniejszą wartość w skali magnitudo. Jest to jedna z dość nietypowych dla fizyków rzeczy w astronomii.

W 1856 roku Norman Pogson uściślił skalę magnitudo. Nadał jej ścisłą definicję matematyczną i powiązał wizualne jasności gwiazd z fizycznie mierzalną wielkością (w tym przypadku tzw. irradiancją). Takie natężenie w literaturze astronomicznej określa się terminem strumienia (ang. *flux*), dlatego oznacza się go tradycyjnie jako F (choćby fizycy używają również literki I).

Pogson zauważył, że stosunek natężeń światła gwiazd pierwszej i szóstej wielkości gwiazdowej (czyli różniących się o pięć wielkości) jest bliski 100. W swojej normalizacji założył, że wynosi on dokładnie 100, $\frac{F_1}{F_6} = 100$. Drugim założeniem poczynionym przez Pogsona było przyjęcie, że stosunek natężeń odpowiadających różnicy jednej wielkości gwiazdowej jest stały, z czego wynika:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = 100^{1/5} \approx 2,512,$$

a liczbę $\sqrt[5]{100}$ nazywa się czynnikiem Pogsona. Skala magnitudo jest skalą logarytmiczną, co odpowiada nieliniowej reakcji ludzkiego oka na zmiany natężenia światła. Związek ten można powiązać z prawem Fechnera–Webera, wiążącym wrażenie zmysłowe (tutaj postrzegana jasność m w magitudo) z fizyczną siłą bodźca F , wyrażonym poprzez równanie różniczkowe:

$$dm = k \cdot \frac{dF}{F}.$$

Całkując, otrzymujemy rzeczywiście:

$$(1) \quad m = k \cdot \ln \left(\frac{F}{F_0} \right) + C,$$

gdzie F_0 jest strumieniem odniesienia (np. strumieniem odpowiadającym zerowej wartości magnitudo), a C jest stałą całkowania. W praktyce stałą C i wartość F_0 dobiera się tak, aby skalę magnitudo powiązać z obserwacjami (co będzie dokładniej opisane w dalszej części artykułu).

We wzorze tym mamy stałą proporcjonalności k oraz stałą kalibracyjną C . Tę pierwszą możemy wyznaczyć, korzystając z różnicy magnitudo dla dwóch źródeł o różnych natężeniach F_1 i F_2 . Jeśli rozpatrzmy różnicę jasności źródeł m_1 i m_2 , których jasność różni się o pięć magnitudo, to z założenia Pogsona otrzymujemy:

$$5 = k \cdot \ln(100) \implies k = \frac{5}{\ln(100)} = \frac{2,5}{\ln(10)} \approx 1,0857.$$

Stałą kalibracyjną C wyznacza się natomiast tak, żeby dla Wega (*a Lyr*) – najjaśniejszej gwiazdy w gwiazdozbiornie Lutni – otrzymać $m = 0$. Z pomiarów fotometrycznych wiadomo, że stała C wynosi około $-13,89$.

Ponieważ w czasach Pogsona logarytmy dziesiętne były powszechnie używane w astronomii i istniały rozbudowane tablice do ich szybkiego obliczania, to

słynny wzór Pogsona można najczęściej spotkać w formie:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right).$$

Warto też zauważyć, że występujący tu czynnik $-2,5$ jest wartością dokładną i wynika z własności logarytmu dziesiętnego, a jego bliskość do czynnika Pogsona jest przypadkowa, nie jest on jego przybliżeniem.

Jasności pozorne i bolometryczne

Jasności obserwowane wybranych ciał niebieskich w skali magnitudo (m). Należy pamiętać, że wartości te zależą od pasma obserwacji oraz od warunków obserwacyjnych. Jasność Księżyca jest podana w peryhelium, a Wenus i Jowisza w ich maksimum jasności.

Obiekt	Jasność (m)
Słońce	-26,83
Księżyc w pełni	-12,60
Wenus	-4,93
Jowisz	-2,94
Syriusz (α CMa)	-1,47
Kanopus (α Car)	-0,7
Arktur (α Boo)	-0,04
Wega (α Lyr)	+0,03
Polaris (wartość średnia)	+1,98

Czasami – zwłaszcza w przypadku pomiarów precyzyjnych oraz dla obserwatoriów kosmicznych – jasność pozorną definiuje się jako jasność obserwowaną z orbity Ziemi, aby usunąć wpływ atmosfery.

Jasność obiektu obserwowanego z Ziemi oznacza się m i nazywa jasnością pozorną. Ponieważ jednak jasność obiektu spada z jego odległością, to jasność pozorna nie odzwierciedla rzeczywistej jasności obiektów (strumienia światła, które one rzeczywiście emitują). Warto zatem zdefiniować pewną szczególną wielkość, zwaną jasnością absolutną, zapisywaną poprzez M , zdefiniowaną (dla danej gwiazdy) jako jasność pozorną, jaką miałyby dana gwiazda, gdyby była obserwowana z odległości standardowej równej 10 parseków, przy założeniu braku ekstynkcji, czyli osłabienia światła spowodowanego absorbującym i rozpraszającym ośrodkiem (głównie pyłem międzygwiazdowym) pomiędzy gwiazdą a obserwatorem. Dzięki temu pojęciu można porównywać rzeczywistą (fizyczną) jasność gwiazd niezależnie od ich aktualnej odległości od Ziemi.

Dla gwiazd i galaktyk magnitudo absolutne definiuje się standardowo jako jasność obserwowaną z odległości 10 parseków (32,6 lat świetlnych). Definicja ta wynika z historycznych uwarunkowań i jest powszechnie stosowana w astronomii gwiazdowej i pozagalaktycznej. Dla obiektów Układu Słonecznego stosuje się inne standardowe odległości: dla planet i planetoid magnitudo absolutne definiuje się dla odległości 1 j.a. od Słońca i 1 j.a. od obserwatora, przy założeniu kąta fazowego 0° (pełne oświetlenie). Dla komet definicja jest nieco bardziej złożona, uwzględnia bowiem ich aktywność i rozkład światła w komie i warkoczu.

Związek między magnitudo pozornym m , absolutnym M i odległością d (wyrażoną w parsekach) wyraża się klasycznym wzorem modułu odległości:

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5 + A,$$

gdzie dodatkowy składnik A oznacza ekstynkcję. Dla obserwacji pozagalaktycznych lub kosmologicznych uwzględnia się również inne efekty, tj. korekty związane z przesunięciem ku czerwieni (m.in. tzw. k -correction) i efektami relatywistycznymi.

Jasność można również analizować pod kątem obszaru widma, które obserwujemy. Gdy interesuje nas całkowita jasność we wszystkich długościach fal, definiuje się jasność bolometryczną m_{bol} i M_{bol} . Dla Słońca typowa wartość bolometrycznego magnitudo absolutnego wynosi $M_{\text{bol},\odot} \approx 4,74$. Różnica między magnitudo bolometrycznym a wizualnym gwiazdy jest opisywana przez korektę bolometryczną, zależną od temperatury i widmowego rozkładu energii gwiazdy.

W praktycznej fotometrii nie obserwujemy całego widma, lecz wybrane jego fragmenty, określone przez używane filtry. Ponieważ definicja magnitudo w danym systemie zależy od funkcji odpowiedzi instrumentu, krzywe transmisji i odbicia filtrów są kluczowe dla określenia faktycznego strumienia rejestrowanego przez detektor.

Kalibracja skali magnitudo

W czasach, kiedy w astronomii zaczęto utrzymywać obrazy, potrzebne stało się precyzyjne zdefiniowanie skali magnitudo (czyli dokładne zdefiniowanie stałych kalibracyjnych C z równania (1)). Jako punkt odniesienia została wybrana Wega – gwiazda jasna, niezaczerwieniona i najjaśniejsza z gwiazd wczesnego typu widmowego na półkuli północnej. Początkowa definicja obejmowała kilka gwiazd oprócz Wegi. Zakładano, że te gwiazdy mają średnio magnitudo $V = 0$ i wskaźniki barwy, czyli kolory fotometryczne, również równe 0 (w rzeczywistości Wega ma $V = 0,03$).

Istnieje także inny problem związany z użyciem Wegi jako odniesienia. Jej dość szybki obrót wzdłuż własnej osi generuje zmienność między 2% a 6%, w zależności od pasma. Do bardzo precyzyjnych prac potrzebna jest więc ostrożność przy użyciu systemu opartego na Wedze.

O obserwatorium im. Very Rubin
pisaliśmy w Δ_{26}^4 .

Fotometria CCD, jak każda metoda obserwacyjna, jest podatna na wpływ warunków zewnętrznych i charakterystyk instrumentu – a przy precyzyjnych pomiarach trzeba to uwzględnić. Surowe obrazy z detektora CCD zawierają nie tylko interesujący nas sygnał pochodzący od obiektów astronomicznych, lecz także zakłócenia związane z elektroniką kamery i układem optycznym. Dlatego przed właściwą analizą tworzy się i stosuje tzw. obrazy referencyjne: *bias* $B(x, y)$ (reprezentujący elektroniczny offset, obecny nawet przy zerowym czasie ekspozycji), *dark* $D(x, y)$ (opisujący sygnał generowany przez prąd ciemny detektora) oraz *flat* $F(x, y)$ (korygujący nierównomierną czułość pikseli i oświetlenie pola widzenia).

Aby otrzymać wiarygodne pomiary jasności, surowe obrazy poddaje się kalibracji z użyciem klatek referencyjnych. Proces ten opisywany jest wzorem:

$$I_{\text{cal}}(x, y) = \frac{I_{\text{raw}}(x, y) - B(x, y) - t_{\text{exp}} D(x, y)}{F_{\text{norm}}(x, y)},$$

t to czas ekspozycji.

Dopiero tak skalibrowane obrazy mogą być wykorzystane do pomiarów fotometrycznych. Kalibrację wykonuje się w specjalnych programach, które usprawniając ten proces, pozwalają zaoszczędzić sporo czasu. Więcej o technicznych aspektach astrofotografii pisał Ireneusz Nowak w Δ_{24}^4 .

Czytelników zainteresowanych skalami magnitudo zachęcamy również do samodzielnego zapoznania się ze współczesnymi przeglądami nieba – z których najważniejsze są 2MASS, SDSS i Gaia.

W praktyce pomiary są bardziej skomplikowane, ponieważ Wega nie zawsze jest dostępna do obserwacji w tym samym czasie co źródło. Dlatego systemy fotometryczne wymagają definicji wielu wtórnych standardów fotometrycznych rozproszonych po niebie.

Współcześnie porównuje się wiele nakładających się ekspozycji wykonanych w różnych częściach nieba. Takie podejście, zastosowane m.in. w przeglądzie SDSS (metoda *ubercal*) oraz w Obserwatorium im. Very Rubin (algorytm FGCM), umożliwia dokładne wyznaczenie punktu zerowego skali magnitudo z dokładnością rzędu milimagnitudo.

Krótko o historii detektorów

Choć skala magnitudo ma swoje korzenie w historii percepcji wzrokowej i definicjach Pogsona, jej praktyczne użycie zależy od możliwości detektorów.

Pierwszymi używanymi detektorami były płytki fotograficzne. Płytki oferowały możliwość dłuższej integracji, a tym samym wykrywania słabszych obiektów. Dostarczały również trwałych zapisów obserwacji. Jednak ich analiza była trudna, cierpiały na nieliniowość odpowiedzi i miały niską wydajność kwantową (stosunek wykrytych fotonów do padających fotonów).

Prawdopodobnie pierwszym, który sfotografował gwiazdę inną od Słońca (była to gwiazda Wega (*α Lyr*)), był John Adams Whipple, amerykański wynalazca, pracujący razem z astronomem Williamem Cranch Bondem w Harvard College Observatory. George Phillips Bond, syn W. C. Bonda, jest również uważany za jednego z pionierów w tej dziedzinie.

Rozwój technik pomiaru jasności gwiazd postępował równolegle z pojawieniem się coraz bardziej czułych detektorów. Fotoelektryczna fotometria gwiazd pojawiła się wraz z wprowadzeniem fotokomórek, a następnie fotopowielaczy. W 1892 roku irlandzki astronom William Monck jako pierwszy dokonał pomiarów astronomicznych za pomocą ogniwa fotowoltaicznego (wyprodukowanego przez George'a Minchina).

W 1907 roku kolejne próby fotoelektrycznych obserwacji astronomicznych podjął Amerykanin Joel Stebbins. Wraz z Paulem Guthnickem był pionierem w użyciu metod fotoelektrycznych do fotometrii, rozwijając je do poziomu precyzyjnego narzędzia pomiarowego.

Kolejnym przełomem były układy CCD (*Charge-Coupled Devices*), wynalezione w 1969 roku przez Willarda Boyle'a i George'a Smitha, pierwotnie do zastosowań komputerowych; pierwszy obraz astronomiczny wykonano nimi w obserwacjach Urana w Jet Propulsion Laboratory. Układy CCD szybko zrewolucjonizowały pomiary fotometryczne dzięki wysokiej czułości, liniowości i stabilności i pozostają do dziś podstawowym detektorem używanym w astronomii.

Podsumowanie

Skala magnitudo pozostaje wygodnym i historycznie uzasadnionym sposobem zapisu jasności astronomicznych; jej logarytmiczny charakter wynika z percepcji wzrokowej i został sformalizowany przez Pogsona. W praktyce fotometrycznej kluczowe są:

- dokładne zdefiniowanie punktu zerowego danego systemu (opartego np. na Wedze),
- precyzyjne określenie odpowiedzi instrumentu, czyli tego, jak filtr, detektor i optyka reagują na różne długości fali,
- rygorystyczna kalibracja obejmująca obserwacje gwiazd standardowych, poprawki na masę powietrza, barwy obiektów i propagację punktów zerowych do obserwowanych obszarów nieba.

Dla uzyskania precyzji rzędu 1% konieczne jest odwołanie się do spektrofotometrycznych standardów i starannego modelowania wszystkich składników systemu pomiarowego.

Nieludzka mowa

Wyobraźcie sobie, Szanowni Czytelnicy, istoty żyjące w grupach rodzinnych, których przedstawiciele dbają o siebie wzajemnie i o potomstwo. Istoty inteligentne, umiejące się komunikować, nawiązujące relacje z istotami innych gatunków. I przywołajcie inne istoty, także obdarzone dużym mózgiem, inteligencją i umiejętnością komunikacji, które zaczynają polować na te pierwsze. W ciągu kilkudziesięciu lat doprowadzają je do granicy wymarcia, zabijając między 2 a 3 miliony osobników. Ich ciała posłużą do wyrobu niekopiących świec, kosmetyków, ekskluzywnych perfum, leków i przede wszystkim do smarowania urządzeń mechanicznych.

Przed całkowitym wyginięciem istoty pierwsze uratował przypadek. W czasie Zimnej Wojny marynarka USA używała podwodnych mikrofonów do wykrywania okrętów wroga. Zarejestrowano nie tylko dźwięki maszyn, ale także dziwne, powtarzalne i złożone, nieznane dotąd sygnały. Początkowo nie było jasne, skąd pochodzą – aż ustalono, że ich źródłem są wieloryby. W 1967 roku Roger Payne i Scott McVay opublikowali przełomowe badania o „śpiewie” humbaków. Wydana trzy lata później płyta „The song of the Humpback Whale” rozpowszechniła odkrycie. Rzewny i tajemniczo brzmiący w naszych uszach „śpiew” podzielał jako nośnik odkrycia, że walenie są inteligentnymi istotami, które komunikują się ze sobą w złożony sposób i mają społeczne relacje. Ten emocjonalny poniekąd aspekt badań był impulsem do działań w obszarze świadomości społecznej oraz legislacyjnym. Powstał ruch „Save the Whales”, który doprowadził do podpisania w 1982 roku memorandum o zaprzestaniu zabijania wielorybów i wprowadzenia go w życie w 1986.

W 2020 roku powstał CETI (Cetacean Translation Initiative), projekt badawczy mający na celu rozszyfrowanie „języka” wielorybów, a szczególnie kaszalotów. O ile śpiewające humbaki używają dźwięków przypominających nawoływanie, kaszaloty, które są zębowcami, używają do komunikacji i nawigacji klikania przypominającego dźwięki mechanicznej maszyny do pisania. Te ciągi kliknięć kojarzą się z komunikatami nadawanymi alfabetem Morse’a.

Kaszaloty są dobrym kandydatem do badań języka walen, ponieważ mają zorganizowane życie społeczne. Żyją w matriarchalnych klanach rodzinnych, grupach samic z młodymi. Samce po kilku latach życia w klanie oddzielają się i z wyjątkiem okresu godowego wiodą samotniczy tryb życia. Osiągają ogromne rozmiary, zwykle 16–18 m, rekordowo nawet 20–22 m, ważą zwykle 40–50 ton. Są największymi waleniami z grupy zębowców.

O życiu kaszalotów wciąż niewiele wiadomo, spędzają bowiem większość czasu pod wodą. Schodzą na wielkie głębokości, przeciętnie na około 800–1200 m, rekordowe zapisy wskazywały nawet 3000 m. Potrafią wytrzymać bez oddechu blisko godzinę, ale i tu rekordy są znacznie większe – do ponad dwóch godzin. Ich olbrzymie ciało ma więc przystosowania, które sprawiają, że nie jest miażdżone przez ciśnienie na głębokości kilkuset i więcej

metrów. Ponadto potrafią polować w całkowitych ciemnościach, używając do tego echolokacji – za pomocą wspomnianego klikania. Dźwięki, które wydają, mają natężenie 200–230 decybeli w wodzie, dzięki czemu sondują głębiny i komunikują się na dużych odległościach.

Kaszałot z profilu to pierwowzór ikony wieloryba. Myślę, że to na kaszałocie wylądował pan Małuskiwicz z wierszyka Juliana Tuwima. Zmęczony bezowocnym poszukiwaniem wieloryba zamierzał rozbić namiot na wyspie, która okazała się lewym nozdrzem walenia. Historyjka ta nie jest daleka od prawdy, bo głowa olbrzymiego kaszałota stanowi około 1/3 długości jego ciała. Oprócz czaszki i ogromnego (największego wśród istot żyjących na Ziemi) mózgu – w głowie tej, nad górną szczęką, znajduje się wielki magazyn tłuszczu. Składa się on z tzw. melona, dużej struktury gęstej tkanki tłuszczowej, oraz zbiornika spermacetu, zawierającego nawet do 1,9 tysięcy litrów tego ciekłego „oleju”. To on był najcenniejszym surowcem dla wielorybników. Wciąż nie jest do końca jasne, jaka jest jego funkcja. Uznaje się, że reguluje on pływalność, służy jako ośrodek wzmacniający wydawane przez kaszałota dźwięki oraz stanowi ochronę dla czaszki i mózgu przed wielkim ciśnieniem w głębinach oceanów.

Projekt CETI ma za zadanie zebranie wielkiej liczby danych, które posłużą trenowaniu modeli uczenia maszynowego. Naukowcy, przy użyciu dronów, przymocowują wielorybom za pomocą przyssawek niewielkie urządzenia, które rejestrują dźwięk dzięki zsynchronizowanym hydrofonom, a także dane z czujników ciśnienia, ruchu, orientacji i warunków środowiskowych. W połączeniu z nagraniem z drona materiałem filmowym zbiór danych pozwala badać, w jaki sposób wieloryby komunikują się i poruszają pod powierzchnią wody. Wszystkie dane i nagrania są selekcjonowane i analizowane przy użyciu modeli uczenia maszynowego. Do tego dodawane są konteksty, w których rejestrowano nagrania. Projekt ma doprowadzić do zrozumienia podstaw języka wielorybów. CETI realizowany jest w wodach niedaleko Dominikany, gdzie od wielu lat prowadzone są obserwacje klanów rodzinnych kaszalotów. Każdy osobnik jest znany i rozróżniany, ma swoje imię, drzewa genealogiczne są starannie opisane.

Naukowcy zidentyfikowali setki różnych wzorów klików (tzw. kody, ang. *coda*, *codas*), które mogą funkcjonować

jak fonemy w ludzkim języku – czyli podstawowe elementy dźwiękowe, z których składają się bardziej złożone komunikaty. Badania wskazują, że kaszaloty używają różnych sekwencji dźwięków w kontekstach społecznych, co sugeruje, że ich system komunikacji ma cechy podobne do języka. Dzięki hipotezie, że percepcja wałeni jest inna niż ludzka, uznano, że przerwy w dźwiękach, w ramach konkretnych kod, uniemożliwiają nam „usłyszenie” tego, co odbierają wieloryby. Badacze wycięli zatem przerwy między kliknięciami i powstały dźwięki przypominające nasze samogłoski „a” oraz „i”. W takiej „przyspieszonej” formie sygnał nadawany przez kaszalota można spisywać ze słuchu, bowiem zmienia się z szeregu kliknięć w ciąg wyraźnie odróżnialnych głosek.

W ramach badań CETI 8 lipca 2023 roku o godzinie 9:30 płynący w łodzi badacze zauważyli zgromadzenie 11 wielorybów z grupy zwanej „Unit A”. Grupa ta wywodzi się z dwóch linii. Osobniki obu klanów przez dłuższy czas znajdowały się w jednym skupisku, co u niespokrewnionych ze sobą blisko zwierząt jest nietypowe. Zwykle poruszają się i polują oddzielnie, rzadko wchodząc w fizyczny kontakt. Po upływie półtorej godziny w wodzie pojawiła się krew i pokazał się ogon rodzącego się właśnie kaszalota. To krytyczny moment, osesek ma ujemną pływerność, lecz nie ma umiejętności pływania, jego płetwa ogonowa nie jest w pełni rozprostowana. Po trwającym 34 minuty porodzie, natychmiast po uwolnieniu oseska z dróg rodnych matki, zwierzęta grupowo stworzyły platformę z własnych ciał i wypchnęły nowonarodzonego na powierzchnię, aby mógł wziąć pierwszy oddech. Przez kolejne 3 godziny zachowanie grupy było nagrywane przez dwa drony.

Badacze mieli ogromne szczęście. Ostatni opis porodu kaszalotów pochodzi z roku 1986. Teraz całość została

dokładnie zarejestrowana, a dane posłużyły za materiał do analizy przez sztuczną inteligencję. Naukowcy zidentyfikowali imiennie osobniki i określili orientację ich ciał. Nowonarodzonego utrzymywały na powierzchni przede wszystkim cztery samice, z czego dwie to matka i ciotka, ale dwie pochodziły z innej linii. Pozostałe zwierzęta stanowiły wsparcie, wchodząc niekiedy w rolę podtrzymujących, zapewniały także bezpieczeństwo młodych z grupy i monitorowanie otoczenia. Przez długą część wydarzenia w bliskiej okolicy znajdował się także spokrewniony z jedną z linii samiec. Tak grupa, ściśle współpracując przez kilka godzin, przyjęła na świat nowego członka społeczności.

To pierwszy tak dokładnie opisany przypadek narodzin u wielorybów. Jednocześnie zarejestrowano wszystkie głosy wydawane przez zwierzęta. Analiza dźwięków wykazała częste używanie kod, które służą identyfikacji kaszalotów z tego rejonu świata, towarzyszących zabiegom pielęgnacyjnym, służącym tworzeniu i utrwalaniu więzi społecznych oraz sygnałów typowych dla tej konkretnie grupy A kaszalotów.

Kiedy czytam o odkrywaniu tajemnic wielkich, inteligentnych istot zamieszkujących głębiny oceanów, wzruszam się. I czuję ulgę, że nie tylko zabijamy – ale wciąż jakaś lepsza część człowieczeństwa szuka dróg porozumienia, także z istotami innego gatunku. Tylko co my im powiemy, kiedy w końcu nauczymy się ich mowy?

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Korzystałam z:

Alaa Maalouf i wsp. Cooperation by non-kin during birth underpins sperm whale social complexity. Science (2026) DOI: 10.1126/science.ady9280

Yaniv Aluma i wsp. Description of a collaborative sperm whale birth and shifts in coda vocal styles during key events. Scientific Reports (2026). DOI: 10.1038/s41598-025-27438-3

Metamateriały – od pomysłu do pierwszych realizacji

* Wydział Nowych Technologii i Chemii,
Wojskowa Akademia Techniczna

Paweł PERKOWSKI*

W dwóch poprzednich artykułach (Δ_{23}^6 i Δ_{23}^{10}) pokazaliśmy, że w określonych warunkach (odpowiednia pulsacja pola pomiarowego ω) możemy zmierzyć ujemną przenikalność elektryczną materiału wypełniającego kondensator (Δ_{23}^6) lub ujemną przenikalność magnetyczną materiału wypełniającego solenoid (Δ_{23}^{10}), mimo że w rzeczywistości wartości obu przenikalności są dodatnie. Ujemne wartości obu przenikalności nie są więc rezultatem fizycznych właściwości badanego materiału, lecz wynikają ze szczególnego „opakowania”, w którym znajduje się badany materiał. Efekt ten występuje, gdy wypełnionemu badanym materiałem kondensatorowi towarzyszy indukcyjność, którą określiliśmy jako „pasożytnicza”, lub gdy wypełnionej badanym materiałem cewce towarzyszy analogiczna pojemność pasożytnicza. Wobec istnienia w badanym układzie jednocześnie cewki i kondensatora układ może znaleźć się w rezonansie.

Pojawienie się rezonansu w tych układach prowadzi do tego, że przy zmianie pulsacji sygnału mierzonego w pobliżu pulsacji rezonansowej obwód będzie zmieniał swój charakter z pojemnościowego na indukcyjny i vice versa.



Ideowo ten przypadek jest podobny do zjawiska rezonansu prądów i rezonansu napięć w obwodach LC .

Z analizy przeprowadzonej w artykułach Δ_{23}^6 i Δ_{23}^{10} wiemy, że w szeregowym połączeniu cewki i kondensatora dla niskich pulsacji ω (niskiej częstości zmian napięcia na źródle) obwód taki zachowuje się jak pojemność (napięcie odkłada się głównie na kondensatorze). Czyli jeżeli będziemy nasz obwód analizować przez pryzmat jego właściwości pojemnościowych, to w wyniku pomiaru dostaniemy dodatnią wartość przenikalności elektrycznej materiału umieszczonego w kondensatorze. Dla wysokich pulsacji wymuszenia obwód ma charakter indukcyjny (napięcie odkłada się głównie na cewce). Wówczas w standardowym pomiarze otrzymalibyśmy ujemną wartość przenikalności elektrycznej materiału umieszczonego w kondensatorze (Δ_{23}^6). Podobną sytuację możemy zaobserwować w połączeniu równoległym kondensatora i cewki. Dla niskich pulsacji ω obwód ma charakter indukcyjny (prąd płynie głównie przez cewkę). Czyli próba wyznaczenia przenikalności magnetycznej materiału umieszczonego w cewce da nam wartość dodatnią. Natomiast dla wysokich pulsacji wymuszenia obwód ma charakter pojemnościowy (prąd płynie głównie przez pojemność). Wówczas w standardowym pomiarze otrzymalibyśmy ujemną wartość przenikalności magnetycznej materiału umieszczonego w cewce (Δ_{23}^{10}).

Przypadki analizowane w obu artykułach (Δ_{23}^6 i Δ_{23}^{10}) dotyczą ujemnych wartości przenikalności elektrycznej lub magnetycznej zmierzonych w elementach dyskretnych. Powstaje zatem pytanie: Czy w naturze występują materiały, które wykazywałyby ujemne wartości obu lub jednej przenikalności dla fali elektromagnetycznej przechodzącej przez te materiały? Generalnie odpowiedź brzmi: „nie”, ale jest jeden wyjątek związany nierozdzielnie z obecnością elektronów swobodnych w metalach. Metale w okolicy tzw. pulsacji plazmowej ω_p (leży ona w nadfiolecie) zmieniają znak przenikalności elektrycznej. Jest to pulsacja oscylacji własnych gazów elektronów swobodnych. Poniżej tej częstotliwości ($\omega < \omega_p$) elektrony swobodne nadążają (bez zwłoki) za oscylacjami pola elektrycznego (składowej fali elektromagnetycznej). W wyniku tego nadążania metale odbijają idealnie światło. W tym przypadku metale mają bardzo dużą dodatnią przenikalność elektryczną. Powyżej pulsacji plazmowej ($\omega > \omega_p$) elektrony swobodne nie nadążają za zmianami pola elektrycznego w fali elektromagnetycznej. W efekcie metale w nadfiolecie przestają odbijać fale elektromagnetyczne.

Pulsacja jest nazywana również częstością kolową. Pulsacja plazmowa to naturalna częstość, z jaką elektrony w plazmie zaczynają wspólnie oscylować wokół swojego położenia równowagi, gdy zostaną lekko przesunięte względem dodatnio naładowanych jonów.

W tym miejscu należy podkreślić, że poza metalami powyżej pulsacji plazmowej nie stwierdzono w przyrodzie występowania materiałów, które mogłyby się charakteryzować ujemnymi przenikalnościami: elektryczną i/lub magnetyczną.

Wiktor Wiesiełago [A] pod koniec lat 60. XX wieku zaproponował stworzenie materiału posiadającego ujemne przenikalności, choć lepiej może należałoby mówić „struktury”, która będzie miała w sobie w sposób sztuczny stworzone i rozmieszczone elementy mogące spełniać rolę cewek, kondensatorów i elementów przewodzących. Te struktury byłyby rozmieszczone periodycznie w jakiejś osnowie i oddziaływałyby z falami elektromagnetycznymi o różnych pulsacjach. Dla szczególnych pulsacji fala elektromagnetyczna mogłaby wywoływać w strukturach rozmieszczonych

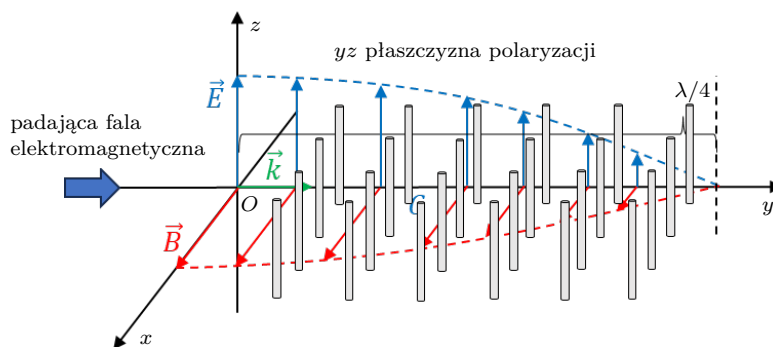
w tym materiale rezonanse doprowadzające do rejestracji ujemnych przenikalności. Materiały o takich własnościach nazwano *metamateriałami*.

Choć dzisiaj wiemy o różnych typach metamateriałów i metapowierzchni, skupimy się dalej na pierwotnym pomysśle Wiktora Wiesiełago. O metamateriałach mówilibyśmy być może jako o ciekawostce naukowej, gdyby nie fizyczne realizacje tych materiałów. W tym kontekście wymienić należy prace:

- Johna Pendry’ego i współpracowników (1996) o możliwości stworzenia materiałów/struktur wykazujących ujemną przenikalność elektryczną [B],
- Johna Pendry’ego i współpracowników (1999) o możliwości stworzenia materiałów/struktur wykazujących ujemną przenikalność magnetyczną [C],
- Davida Smitha i współpracowników (2000) o możliwości realizacji materiałów/struktur wykazujących jednocześnie ujemne przenikalności: elektryczną i magnetyczną [D].

Tego typu materiały właściwiej jest nazywać materiałami hybrydowymi, ponieważ składają się z osnowy dielektrycznej (osnową może być także próżnia/powietrze) i struktury periodycznej. W przypadku struktury dyskretnych źródeł energii (dla zakresu radiowego) jest zmienne napięcie (pole elektryczne) ze źródła zasilania, o czym można przeczytać w Δ_{23}^6 i Δ_{23}^{10} . Gdy materiał hybrydowy (metamateriał) oświetlimy falą elektromagnetyczną, to na zachowanie tych struktur powinny wpływać obie składowe tej fali (pola elektryczne oraz magnetyczne). Okazuje się, że gdy w przestrzeni odpowiednio (w zależności od polaryzacji fali elektromagnetycznej) umieścimy obwody składające się z elementu pojemnościowego, elementu indukcyjnego oraz elementu przewodzącego (specjalnie nie piszemy tu „kondensatora” ani „cewki”, bo to są struktury, które na pierwszy rzut oka nie wyglądają jak zwykły kondensator czy cewka), wówczas fala elektromagnetyczna będzie oddziaływała z tymi strukturami. W tym kontekście metamateriały są z definicji anizotropowe dla fali elektromagnetycznej, ponieważ oddziaływanie zależy od polaryzacji fali.

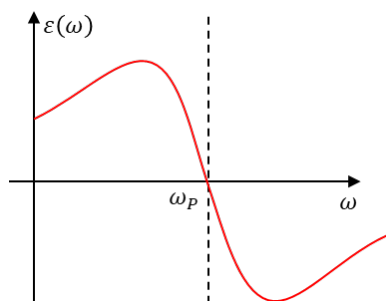
Możemy podejrzewać, że, jak to opisano w Δ_{23}^6 i Δ_{23}^{10} , uzyskanie efektywnej ujemnej przenikalności elektrycznej oraz magnetycznej wymaga zastosowania dwóch różnych struktur. Jedna byłaby odpowiedzialna za ujemną przenikalność elektryczną, a druga za ujemną przenikalność magnetyczną. Ponadto z punktu widzenia fali elektromagnetycznej ośrodek taki powinien być ciągły i jednorodny. W przypadku klasycznego materiału atomy czy cząsteczki budujące ten ośrodek są małe w stosunku do długości fali światła, które przechodzi przez ośrodek – więc ośrodek jest dla tego światła ciągły. W przypadku metamateriałów elementy budujące ten ośrodek oraz okres ich powtarzalności muszą być również małe w stosunku do długości oddziałującej z nimi fali – tak żeby fala odczuwała ten ośrodek jako ciągły.



Rys. 1. Płaska fala elektromagnetyczna rozchodzi się wzdłuż osi Oy i jest scharakteryzowana wektorem falowym $\vec{k}$. Drgania pola elektrycznego $\vec{E}$ zachodzą wzdłuż osi Oz . Kierunek wektora pola magnetycznego $\vec{B}$ jest równoległy do osi Ox . Powtarzające się pręciki metalowe są równoległe do pola elektrycznego. Długość fali propagującej się jest wyraźnie większa od rozmiaru elementu ($a \ll \lambda$), przez który przechodzi i z którym oddziałuje

Struktura pierwsza musi korzystać z pola elektrycznego, wpływając na efektywnie obserwowaną ujemną przenikalność elektryczną. Pendry wiedział, że metale mają bardzo dużą przenikalność elektryczną i powyżej pulsacji plazmowej zmieniają znak przenikalności elektrycznej na ujemny. Zaproponował w 1996 roku strukturę [B], którą można by było określić „rozrzedzonym metalem”. Składa się ona (rys. 1) z pręcików metalicznych o średnicy d rozmieszczonych regularnie na kwadratowej sieci o stałej a . W ten sposób zyskał dwa efekty: obniżył wyraźnie wartość przenikalności elektrycznej (w stosunku do ciągłego metalu)

oraz obniżył pulsację plazmową do zakresu mikrofalowego (z nadfioletu). Ponieważ, jak pamiętamy, długości λ fali elektromagnetycznej z zakresu mikrofalowego są rzędu centymetrów, więc nietrudno było stworzyć takie powtarzające się struktury o wymiarach około jednego centymetra (w [B] przyjęto $a \approx 0,5$ cm). Został więc spełniony warunek $a \ll \lambda$. Poprzez dobór wymiarów (a i d) tej struktury Pendry mógł w pewnym zakresie stroić pulsację plazmową ω_P (pulsację inwersji znaku przenikalności elektrycznej) oraz wartość (amplitudę) przenikalności elektrycznej ε .

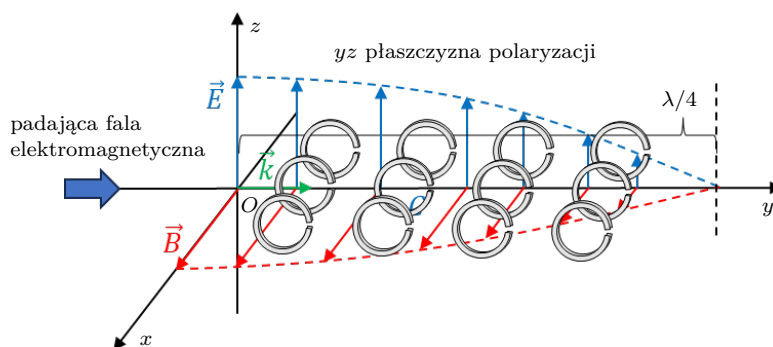


Rys. 2. Efektywna przenikalność elektryczna ε struktury pręcikowej w funkcji pulsacji fali elektromagnetycznej. ω_P to pulsacja inwersji znaku przenikalności elektrycznej

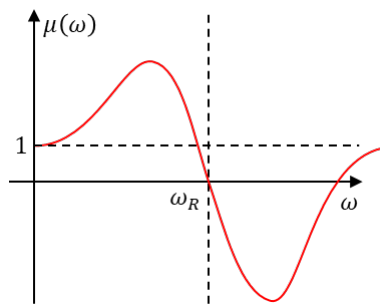
Pendry otrzymał materiał hybrydowy, którego przenikalność elektryczna ε zmieniała się w funkcji pulsacji ω , jak na rysunku 2.

Zauważmy, że struktura zaproponowana w [B] nie wpływa na pole magnetyczne, ponieważ indukcja pola magnetycznego $\vec{B}$ (w fali elektromagnetycznej) jest prostopadła do pręcików. Stąd zaproponowana struktura „rozrzedzonego metalu” nie prowadzi do efektywnej ujemnej przenikalności magnetycznej. Aby uzyskać oddziaływanie pola magnetycznego fali elektromagnetycznej ze strukturą metamateriału, Pendry w 1999 roku zaproponował nową strukturę. Składa się ona z rezonatorów w postaci rozciętych obwodów kołowych prostopadłych do pola magnetycznego (rys. 3).

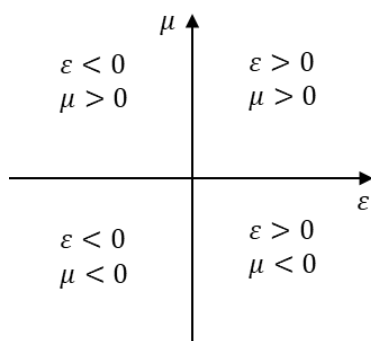
W rzeczywistości w pracy Pendry’ego [C] to nie były przecięte pierścienie, lecz przecięte walce przewodzące, ale dla wygody możemy je sprowadzić do przeciętych obwodów kołowych. Dzięki takiemu rozwiązaniu element indukcyjny (pierścienie) może czerpać energię ze zmiennego pola magnetycznego (wykorzystując prawo indukcji Faradaya). Przecięcie tego obwodu utworzyło zaimprovizowany kondensator. Połączenie obwodu kołowego z kondensatorem



Rys. 3. Płaska fala elektromagnetyczna rozchodzi się wzdłuż osi Oy i jest opisana wektorem falowym $\vec{k}$. Kierunek drgań wektora pola magnetycznego $\vec{B}$ jest zgodny z osią Ox . Wektor pola elektrycznego $\vec{E}$ jest równoległy do osi Oz . Powierzchnie elementów indukcyjnych są prostopadłe do osi Ox . Długość fali λ propagującej się jest wyraźnie większa od elementu ($a, b \ll \lambda$), przez który przechodzi i z którym oddziałuje



Rys. 4. Efektywna przenikalność magnetyczna μ struktury przeciętych obwodów kołowych w funkcji pulsacji fali elektromagnetycznej. ω_R to pulsacja inwersji znaku przenikalności magnetycznej



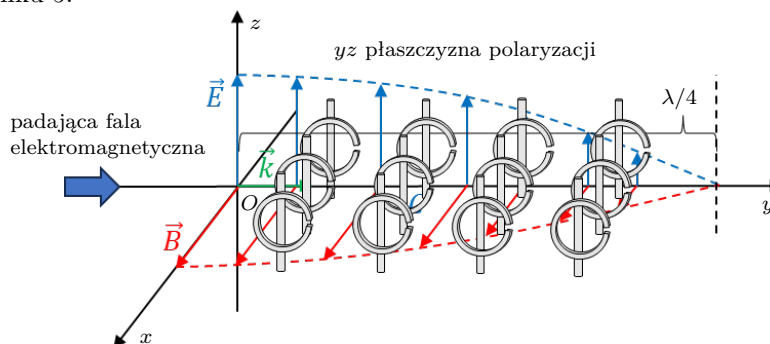
Rys. 6. Podział materiałów ze względu na wartości obu przenikalności. Jeżeli tak dobierzemy parametry struktur, że $\omega_R < \omega_P$, to dla niskich pulsacji ($\omega < \omega_R$) metamateriał zaproponowany przez Smitha będzie charakteryzował się zestawem dodatnich przenikalności $\epsilon > 0$ i $\mu > 0$, dla średnich pulsacji ($\omega_R < \omega < \omega_P$) $\epsilon > 0$ i $\mu < 0$, a dla wysokich pulsacji ($\omega > \omega_P$) ($\epsilon < 0$ i $\mu < 0$). Jeżeli parametry struktur dobierzemy tak, że $\omega_P < \omega_R$, to dla niskich pulsacji ($\omega < \omega_P$) metamateriał Smitha będzie charakteryzował się zestawem dodatnich przenikalności $\epsilon > 0$ i $\mu > 0$, dla średnich pulsacji ($\omega_P < \omega < \omega_R$) $\epsilon < 0$ i $\mu > 0$, a dla wysokich pulsacji ($\omega > \omega_R$) obie przenikalności będą ujemne ($\epsilon < 0$ i $\mu < 0$).

Autor dziękuje profesorowi Januszowi Parce za dyskusje nad tematyką artykułu.

stanowi obwód rezonansowy. Taki rezonator charakteryzuje się pulsacją rezonansową ω_R . Na właściwości rezonansowe wpływ mają rozmiary struktury, a przede wszystkim średnica obwodów d , szerokość przecięcia a pierścienia, a także odległości b pomiędzy pierścieniami. Pole magnetyczne fali elektromagnetycznej oddziałuje z układem rezonansowym tak, że dla niskich pulsacji (poniżej ω_R) daje przenikalność magnetyczną dodatnią, a dla wysokich pulsacji (powyżej ω_R) daje przenikalność początkowo ujemną, a potem dodatnią, ale mniejszą od jeden (rys. 4).

Zauważmy, że struktura zaproponowana w [C] nie wpływa na pole elektryczne, stąd ta struktura nie prowadzi do ujemnych wartości efektywnej przenikalności elektrycznej.

Rok po publikacji Pendry'ego ukazała się publikacja Smitha [D] łącząca w jednym materiale obie struktury. Taki metamateriał jest przedstawiony na rysunku 5.



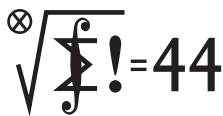
Rys. 5. Płaska fala elektromagnetyczna rozchodzi się wzdłuż osi Oy i jest opisana wektorem falowym $\vec{k}$. Kierunek drgań wektora pola magnetycznego $\vec{B}$ jest zgodny z osią Ox i prostopadły do powierzchni elementów indukcyjnych. Wektor pola elektrycznego $\vec{E}$ jest równoległy do osi Oz i równoległy do pręcików, w których ma wywołać prądy przepolaryzowania. Długość fali λ propagującej się jest wyraźnie większa od rozmiarów elementów w obu strukturach, przez które przechodzi i z którymi oddziałuje

Obie podstruktury (osobno pręciki i osobno przerwane pierścienie) są od siebie niezależne. Możemy niezależnie zmieniać ich wymiary i w rezultacie stroić pulsacje: plazmową (ω_P) i rezonansową (ω_R). Poprzez odpowiedni dobór wymiarów obu struktur możemy więc otrzymać różne znaki obu przenikalności. Potencjalne kombinacje przenikalności w materiałach przedstawia rysunek 6. W pierwszej ćwiartce znajdują się materiały, rzec by można, „klasyczne”, dla których obie przenikalności są dodatnie. Te materiały (gdy założymy, że nie pochłaniają światła) są przezroczyste (współczynnik załamania jest rzeczywisty i dodatni). W drugiej ćwiartce są materiały metaliczne – powyżej pulsacji plazmowej oraz metamateriały zawierające rezonatory z przerwanymi pierścieniami – też powyżej pulsacji rezonansowej. Tego typu metamateriały nie są przezroczyste (współczynnik załamania jest urojony). W trzeciej ćwiartce są metamateriały, które charakteryzują się ujemnymi wartościami obu przenikalności. Ich struktura wymaga obecności zarówno struktur pierścieniowych, jak i pręcikowych. Te metamateriały są przezroczyste, ale różnią się od tych z ćwiartki pierwszej. Różnica tkwi we współczynniku załamania: współczynnik załamania jest rzeczywisty i ujemny. Natomiast w czwartej ćwiartce umieszczone są metamateriały o dodatniej przenikalności elektrycznej i ujemnej przenikalności magnetycznej. Tego typu metamateriały nie są przezroczyste (współczynnik załamania jest urojony).

Literatura:

- [A] V.G. Veselago, „The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu”, Sov. Phys. Usp. **10**, 509–18 (1968).
- [B] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, I. Youngs, „Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures”, Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [C] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, „Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena”, IEEE Trans. Microw. Theory Tech. **47** 2075–84 (1999).
- [D] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser, S. Schultz, „Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity”, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
907 ($WT = 2,42$) i 908 ($WT = 2,10$)
z numeru 10/2025

Michał Adamaszek	Kopenhaga	44,15
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,19
Roksana Słowik		39,93
Marian Łupieżowiec	Gliwice	39,55
Stanisław Bednarek	Łódź	38,25
Mikołaj Pater		36,35
Jędrzej Biedrzycki		34,18

Pan Michał Adamaszek (10×44): szósty
uczestnik Ligi matematycznej
z dwucyfrową liczbą wykonanych rund!

913. Od razu widać, że zbiór $\{0, 1, \dots, m\}$ nie zawiera trójki liczb o sumie zerowej (krótko: *trójki zerowej*); zatem $m+1$ jest osiągalną liczebnością zbioru M (tu i dalej elementami rozważanych zbiorów są liczby całkowite). Pokażemy, że nie da się uzyskać większej liczebności; czyli udowodnimy, że

(*) jeśli $M \subset [-m, m]$ jest zbiorem liczb bez trójki zerowej (m – liczba nieparzysta), to $|M| \leq m+1$.

Rozpatrzmy najpierw specyficzne sytuacje (i), (ii), (iii).
Oznaczenia: $M_+ = M \cap [0, m]$, $M_- = M \cap [-m, 0]$.

(i) Gdy $m \in M$ oraz $-m \in M$. Wówczas $0 \notin M$ (brak trójki zerowej). Rozbijamy zbiór $M_- \setminus \{-m\}$ na pary postaci $\{-m+k, -k\}$, gdzie $k = 1, \dots, \frac{1}{2}(m-1)$. Skoro $m \in M$, zatem z każdej z tych par może wejść do zbioru M co najwyżej jedna liczba. Dlatego $|M_-| \leq \frac{1}{2}(m-1) + 1 = \frac{1}{2}(m+1)$. Skoro $-m \in M$, zatem (analogicznie) $|M_+| \leq \frac{1}{2}(m+1)$. Stąd $|M| = |M_+| + |M_-| \leq m+1$.

(ii) Gdy $m \in M$, ale $-m \notin M$, za to $-m+1 \in M$. Rozbijamy zbiór $M_- \setminus \{-m\}$ na pary tak samo, jak w przypadku (i); ale teraz $M_- \setminus \{-m\} = M_-$, i dlatego $|M_-| \leq \frac{1}{2}(m-1)$. Elementy nieujemne łączymy w pary postaci $\{l, m-1-l\}$, gdzie $l = 0, \dots, \frac{1}{2}(m-3)$; jest ich $\frac{1}{2}(m-1)$. Skoro $-m+1 \in M$, z każdej z nich wchodzi do zbioru M co najwyżej jedna liczba. Nietrudno sprawdzić, że te pary łącznie wyczerpują wszystkie liczby z przedziału $[0, m-1]$, z wyjątkiem jednej, „centralnie położonej” liczby $\frac{1}{2}(m-1)$. Zatem $|M_+| \leq \frac{1}{2}(m-1) + 1 + 1$ (dwa ostatnie składniki biorą się z uwzględnienia tej liczby „centralnej” oraz samej liczby m). Stąd $|M| = |M_-| + |M_+| \leq \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{2}(m+3) = m+1$.

(iii) Gdy $-m \in M$, ale $m \notin M$, za to $m-1 \in M$. To przypadek dokładnie symetryczny do (ii); rozumowanie przenosi się przez zmianę znaku wszystkich elementów (oraz przerzucenie liczby 0 do M_-) i ponownie daje oszacowanie $|M| \leq m+1$.

Dowód własności (*) przeprowadzimy przez indukcję (po liczbach nieparzystych, więc ze skokiem o 2). Przypadek bazowy ($m=1$) jest banalny. Ustalmy liczbę nieparzystą $m \geq 3$ i przyjmijmy własność analogiczną do (*) dla $m-2$: każdy zbiór bez trójki zerowej, leżący w przedziale $[-m+2, m-2]$ liczy nie więcej niż $m-1$ elementów. Weźmy teraz dowolny zbiór $M \subset [-m, m]$ bez trójki zerowej. Jego część zawarta w przedziale $[-m+2, m-2]$ jest mocy $\leq m-1$.

Zadania z matematyki nr 921, 922

Redaguje Marcin E. KUCZMA

921. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości CD . Punkt E leży wewnątrz tego trójkąta i zachodzą związki: $AC > BC = BE$, $CD^2 = AD \cdot BD$. Dwusieczna kąta AED połowi bok AB . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości miary kąta ABC .

922. Niech $\sigma(k)$ oznacza sumę wszystkich (dodatnich) dzielników liczby naturalnej k . Niech A_n będzie średnią arytmetyczną liczb $\sigma(k)/k$ po $k = 1, \dots, n$. Obliczyć granicę ciągu (A_n) gdy $n \rightarrow \infty$ lub wykazać, że ten ciąg nie ma granicy.

Zadanie 922 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2026

Przypominamy treść zadań:

913. Niech m będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczebność zbioru M , zawartego w przedziale $[-m, m]$, złożonego z liczb całkowitych, w którym każda trójka różnych liczb ma sumę różną od zera.

914. Znaleźć wszystkie pary a, b liczb rzeczywistych różnych od zera, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |\sin(ax)| + |\cos(bx)|$ jest okresowa.

I teraz: jeśli część pozostała, czyli zawarta w zbiorze $\{-m, -m+1, m-1, m\}$ jest mocy ≤ 2 , to cały zbiór M liczy nie więcej niż $m+1$ elementów; to teza indukcyjna. A jeżeli część zbioru M zawarta w $\{-m, -m+1, m-1, m\}$ jest mocy ≥ 3 , to musi mieć miejsce jedna z sytuacji (i), (ii), (iii); w każdej z nich, jak pokazano wyżej, dostajemy oszacowanie $|M| \leq m+1$, więc także mamy tezę indukcyjną. Własność (*) została udowodniona. Stąd odpowiedź: maksymalna liczebność zbioru M wynosi $m+1$.

914. Zbadamy najpierw przypadek, kiedy $b=1$, czyli $f(x) = |\sin ax| + |\cos x|$. Jeśli a jest liczbą wymierną, $a = k/m$ ($k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), to każdy z dwóch składników definiujących f jest funkcją okresową (o okresie $m\pi$), więc funkcja f też.

W drugą stronę: założmy, że f jest funkcją okresową z okresem $T > 0$ (niekoniecznie minimalnym): $f(x+T) = f(x)$. Biorąc kolejno $x=0$, $x=\pi$, dostajemy związki

$$(1) \quad \begin{aligned} |\sin aT| + |\cos T| &= 1, \\ |\sin(a\pi+aT)| + |\cos(\pi+T)| &= |\sin a\pi| + 1; \end{aligned}$$

przy tym $|\cos(\pi+T)| = |\cos T|$ (liczba π jest okresem podstawowym każdej z funkcji $|\sin|$, $|\cos|$). Odejmujemy stronami pierwszą równość (1) od drugiej i, korzystając z tego, że $|\sin(\alpha+\beta)| \leq |\sin \alpha \cos \beta| + |\sin \beta \cos \alpha|$, otrzymujemy po prostym przekształceniu nierówność

$$|\sin a\pi| (|\cos aT| - 1) + |\sin aT| (|\cos a\pi| - 1) \geq 0.$$

Tu oba składniki są niedodatnie, więc muszą być zerami; dla pierwszego z nich oznacza to alternatywę

$$(2) \quad \sin a\pi = 0 \quad \text{lub} \quad |\cos aT| = 1.$$

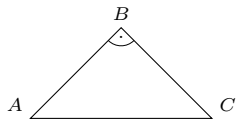
Jeśli zachodzi pierwsza z równości (2), to a jest liczbą całkowitą (więc wymierną). Jeśli zachodzi druga równość (2), to aT ($\neq 0$) musi być całkowitą wielokrotnością π , więc $T = k\pi/a$ (dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$). Wstawiamy to do pierwszego równania (1) i dostajemy $|\cos(k\pi/a)| = 1$, skąd $k\pi/a = m\pi$ (dla pewnego $m \in \mathbb{Z}$) – czyli $a = k/m$. Wykazaliśmy, że $f(x) = |\sin ax| + |\cos x|$ jest funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą wymierną.

Przypadek ogólny (funkcja określona w treści zadania) przez oczywistą zamianę zmiennej $y = bx$ ($b \neq 0$) sprowadza badaną funkcję do postaci $|\sin(\frac{a}{b}y)| + |\cos y|$. Na mocy przypadku już rozpatrzonego wnosimy, że funkcja f jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek a/b jest liczbą wymierną. [Rozwiązanie według pomysłu autora zadania (Witold Bednarek).]

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2026



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
804 ($WT = 2,2$), 805 ($WT = 1,5$)
z numeru 10/2025

Jan Zambrzycki	Białystok	5-44+1,04
Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6-37,19
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3-36,28
Krzysztof Zygan	Lubin	34,85
Ryszard Woźniak	Kraków	34,5
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-27,40
Paweł Kubit	Kraków	21,82
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3-19,65
Zbigniew Galias	Kraków	1-14,75

810. Siłę naprężenia sznurka N w badanej chwili możemy obliczyć z równań ruchu:

$$2mg/3 - N = 2ma/3, \quad N - mg/3 = ma/3,$$

gdzie a jest przyspieszeniem sznurka, stąd

$$N = 4mg/9.$$

Szukana siła F nacisku na blok wynosi

$$(1) \quad F = 2N - \Delta F,$$

gdzie ΔF jest wypadkową składowych pionowych sił dośrodkowych działających na elementy sznurka leżące na bloku. Mimo że promień r bloku jest mały, nie możemy jej pominąć, bo masa tej części sznurka $\Delta m \sim r$, a przyspieszenie dośrodkowe $a_d \sim 1/r$.

Siłę ΔF możemy wyliczyć z zasady zachowania pędu. Rozważmy mały przedział czasowy Δt , w którym część sznurka o prędkości v i masie $mv\Delta t/l$ przechodzi przez blok, a jej prędkość zmienia się z v na $-v$. Spełnione jest równanie:

$$\Delta F \Delta t = 2mv^2 \Delta t/l,$$

$$(2) \quad \Delta F = 2mv^2/l.$$

Prędkość v w badanej chwili możemy obliczyć z zasady zachowania energii:

$$-mgl/4 = -mgl/18 - 2mgl/9 + mv^2/2,$$

$$(3) \quad v^2 = gl/18.$$

Z równań (1)–(3) otrzymujemy szukaną siłę nacisku:

$$F = 7mg/9.$$

811. Niech oś Z będzie skierowana przeciwnie do wektora natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$. Ruch elektronu jest złożeniem

Zadania z fizyki nr 818, 819

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

818. Przekrój szklanego pryzmatu jest prostokątnym trójkątem równoramiennym (rysunek). Podstawa AC i ścianka boczna BC są gładkie, ścianka boczna AB – matowa. Szkło, z którego wykonano pryzmat, ma współczynnik załamania n . Pryzmat stoi na gazecie. Jaką część powierzchni tekstu widzi obserwator, który patrzy przez gładką ściankę BC ?

819. W naczyniu znajduje się ciecz i jej para nasycona. W wyniku procesu izotermicznego rozprężania objętość zajmowana przez parę wzrosła $\beta = 3$ razy, a ciśnienie pary zmalało $\alpha = 2$ razy. Znaleźć stosunek masy cieczy do masy pary znajdujących się w naczyniu w chwili początkowej. Objętość zajmowaną przez ciecz zaniedbać.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2026

Przypominamy treść zadań:

810. Gładki, jednorodny sznurek o długości l i masie m przerzucony jest przez niewielki nieruchomy blok tak, że w chwili początkowej pozostaje w równowadze, a po lekkim przesunięciu zaczyna ześlizgiwać się z bloku. Znaleźć siłę nacisku sznurka na blok w chwili, gdy jego długość z jednej strony wynosi $l/3$.

811. Naładowany kondensator płaski znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są prostopadłe do płaszczyzn okładek. Odległość między okładkami wynosi d , indukcja pola magnetycznego B . Wewnątrz kondensatora, koło ujemnie naładowanej okładki znajduje się źródło powolnych elektronów wysyłanych w różnych kierunkach. Jakie musi być napięcie między okładkami, aby elektrony ogniskowały się z możliwie najlepszą dokładnością na dodatnio naładowanej okładce? Oddziaływanie między elektronami zaniedbujemy.

ruchu wzdłuż osi Z oraz ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do B . Ze strony pola elektrycznego na elektron działa siła $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, która nadaje mu przyspieszenie wzdłuż osi Z o bezwzględnej wartości

$$a_z = eE/(m) = eU/(md),$$

gdzie U jest napięciem między okładkami, m masą elektronu, $-e$ jego ładunkiem. W płaszczyźnie prostopadłej do Z elektron porusza się po okręgu o promieniu $R = mv_{\perp}/(eB)$, a $v_{\perp}$ jest rzutem jego prędkości na płaszczyznę prostopadłą do Z . Okres obrotu

$$T = 2\pi m/(eB).$$

Aby wiązka elektronów ogniskowała się w jednym punkcie na dodatniej okładce, czas ich przelotu między okładkami musi wynosić nT , gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, czyli spełniony musi być warunek:

$$d = v_z nT + a_z n^2 T^2 / 2 = v_z nT + eUn^2 T^2 / (2md),$$

gdzie v_z jest zetaową składową prędkości elektronu emitowanego ze źródła. Dla różnych kątów emisji v_z jest inne, i zogniskowanie wiązki w jednym punkcie nie jest możliwe. Ponieważ jednak źródło emituje powolne elektrony, możemy w poprzednim wzorze zaniedbać pierwszy wyraz zależny od prędkości. Stąd otrzymujemy warunek na napięcie między okładkami:

$$U = ed^2 B^2 / (2\pi^2 n^2 m).$$

Jest to wynik przybliżony. Elektrony nie skupiają się w jednym punkcie, lecz tworzą „plamkę” na dodatnio naładowanej okładce. Jej rozmiar będzie najmniejszy dla $n = 1$. Ostatecznie szukane napięcie wynosi:

$$U = ed^2 B^2 / (2\pi^2 m).$$

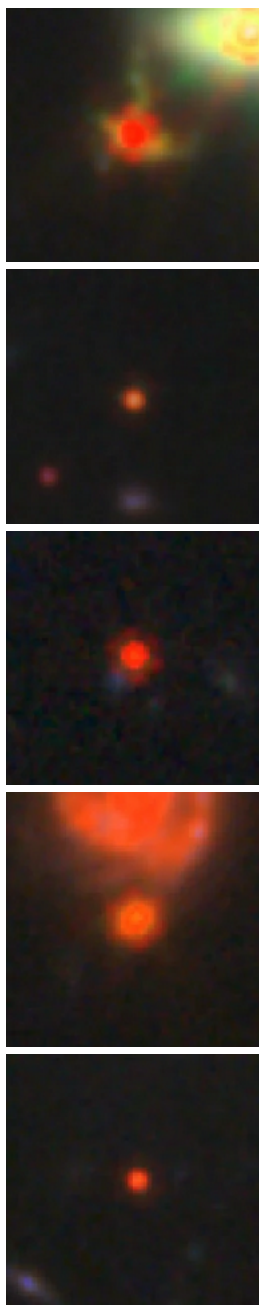
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Mówiąc o bardzo wczesnym Wszechświecie, rozumiemy tutaj Wszechświat około 13 miliardów lat temu, czyli okres, gdy od Wielkiego Wybuchu minęło zaledwie kilkaset milionów lat.



Zdjęcia „małych czerwonych kropek” wykonane przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba. Źródło: Rusakov et al. (2026), *Nature* 649, 574–579

A jednak – nie do końca... Sposób powstania tych obiektów oraz szczegółowe procesy fizyczne mogące zachodzić wewnątrz gazowego kokonu czarnej dziury wciąż pozostają zagadką. Niektórzy naukowcy porzucili nawet nazwę „małe czerwone kropki” i zaczęli nazywać te obiekty „gwiazdami czarnych dziur” (ang. *black hole stars*), uznając, że nazwa ta bardziej oddaje ich naturę. I w zasadzie ma to sens. Obiekty te emitują promieniowanie jak ogromne gwiazdy! Z tą różnicą, że

Jasne, rubinowoczerwone kropki przedstawione na zdjęciach obok to pozornie niewielkie obiekty, których naturę astronomowie próbują wyjaśnić od kilku lat. Po raz pierwszy dostrzeżono je w 2024 roku na zdjęciach wykonanych przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba. Od tego czasu widzimy je praktycznie na każdym zdjęciu wczesnego Wszechświata wykonanym przez ten teleskop. Co jednak szczególnie intrygujące, we współczesnym Wszechświecie nie ma ich odpowiedników. Ba! Próżno ich szukać już nawet około 1,6 miliarda lat po Wielkim Wybuchu. Wygląda więc na to, że istniały jedynie na samym początku dziejów Wszechświata, około 13,2 do 12,2 miliarda lat temu.

Początkowe obserwacje sugerowały, że *małe czerwone kropki* to niesamowicie masywne obiekty, które podważają teorie tłumaczące powstanie i ewolucję Wszechświata. Z wstępnych obserwacji małych czerwonych kropek wynikałoby bowiem, że albo galaktyki (jeżeli byłyby to galaktyki) powstawały niewiarygodnie szybko, albo że nieprawdopodobnie masywne czarne dziury (jeżeli byłyby to czarne dziury) pojawiały się dosłownie znikąd we wczesnym Wszechświecie. Innymi słowy, początkowe badania wykazywały, że małe czerwone kropki były zbyt masywne, by mogły być młodymi galaktykami świecącymi światłem nowo powstałych gwiazd. Nie emitowały jednak promieniowania rentgenowskiego ani fal radiowych, będących charakterystycznymi oznakami obecności supermasywnych czarnych dziur pochłaniających otaczającą je materię.

Oczywiście astronomowie szybko wykonali bardziej szczegółowe obserwacje spektroskopowe kilku z tych obiektów i w lutym 2026 roku opublikowali wyniki w czasopiśmie *Nature*. Nowe obserwacje sugerują, że początkowo zdecydowanie przeszacowaliśmy masy tych obiektów, i w rzeczywistości są młodymi czarnymi dziurami, które bardzo szybko rosną, karmiąc się otaczającą je materią. Ponadto otacza je kokon zjonizowanego gazu, który powstrzymuje ucieczkę promieniowania charakterystycznego dla czarnych dziur.

A skąd czerwony kolor? Szybko rosnące czarne dziury zazwyczaj emitują ogromne ilości promieniowania ultrafioletowego z rozgrzanych do białości dysków materii wirujących wokół czarnej dziury. W przypadku małych czerwonych kropek promieniowanie ultrafioletowe emitowane przez dysk materii wokół czarnej dziury przenika przez otaczający je kokon gazu i pyłu i wydostaje się na zewnątrz w postaci czerwonego światła, nadając im charakterystyczny rubinowy odcień.

Kokony zjonizowanego gazu nie tylko maskują czarne dziury, ale także sprawiają, że obiekty te wydają się masywniejsze, niż są w rzeczywistości. Na podstawie nowych obserwacji zespół badaczy obliczył, że czarne dziury ukryte wewnątrz małych czerwonych kropek mają masy tylko od 100 tysięcy do 10 milionów mas Słońca. W porównaniu do supermasywnych czarnych dziur, które mogą osiągać masy liczone w miliardach mas Słońca, są więc stosunkowo niewielkie.

Pozostało nam ostatnie pytanie. Dlaczego małe czerwone kropki przestają istnieć 1,6 miliarda lat po Wielkim Wybuchu? Odpowiedź jest stosunkowo prosta. Czarne dziury niszczą swoje kokony, pochłaniając je „od środka”. Gaz zostaje pochłonięty lub rozproszony i pozostaje zwykła czarna dziura emitująca zwykle dla czarnych dziur promieniowanie.

Uff. Kryzys zażegnany. Model kosmologiczny uratowany! Istnienie małych czerwonych kropek wytłumaczone.

zamiast procesów fuzji jądrowych utrzymujących w całości kulę gazu, jak to ma miejsce w przypadku na przykład Słońca, mamy... gwałtownie rosnącą czarną dziurę, której istnienie utrzymuje w całości „gwiazdę” pyłu i gazu.

Napisane na podstawie artykułu: V. Rusakov et al. (2026), „Little red dots as young supermassive black holes in dense ionized cocoons”, *Nature* 649, 574–579.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



W piątym miesiącu roku Słońce kontynuuje wędrówkę na północ, ale wyraźnie zmniejsza się jej tempo. Szczególnie w ostatniej dekadzie miesiąca, gdy po przekroczeniu równoleżnika $+20^\circ$ deklinacji Słońce zwiększy wysokość górowania o niecałe 2° . Jak co roku około 20 dnia miesiąca Słońce przechodzi na południe od Plejad, by zakończyć maj kilka stopni na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka.

Pod koniec maja zaczyna się w Polsce sezon na obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny. Pierwszy fenomen oznacza oświetlanie zawieszonych wysoko w atmosferze chmur przez niezbyt głęboko schowane pod horyzont Słońce, nawet w czasie najciemniejszej części nocy, dzięki czemu pozostają one wyraźnie widoczne nad północną częścią widnokregu. Obłoki srebrzyste zaczynają się pojawiać najpierw nad morzem i stopniowo do przesilenia letniego obszar ich występowania obejmuje całą Polskę, choć południowe pogranicze naszego kraju znajduje się przy południowym zasięgu ich występowania, i szansa na ich zobaczenie w górach jest niewielka.

Łuk okołohoryzontalny natomiast to mała, lecz intensywna tęcza, pojawiająca się przy zasnutym cirrusami niebie 46° na południe od Słońca. Żeby jednak mogła ona powstać, samo Słońce musi znajdować się co najmniej 58° nad widnokregiem, a na naszych szerokościach geograficznych warunek ten jest spełniony tylko od połowy maja do końca lipca w godzinach okołopołudniowych. Tutaj jest odwrotnie, bardziej uprzywilejowana jest południowa część naszego kraju, gdzie Słońce wędruje wyżej nad horyzontem i dłużej spełnia warunek odpowiedniej wysokości nad nim.

Noce w pierwszej i ostatniej części miesiąca zostaną rozświetlone przez Księżyc, którego pełnia przypada 1 i 31 maja. Niestety jego silny blask wpłynie na widoczność corocznego roju meteorów η -Akwarydów, których maksimum aktywności przypada zawsze około 6 maja i w tym roku ich obserwacje pokrzyżuje Srebrny Glob w fazie przekraczającej 86%. Wcześniej, w nocy z 3 na 4 maja, Księżyc w fazie 95% zbliży się na $1,5^\circ$ do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. W nocy maksimum η -Akwarydów Księżyc dotrze do zachodniej części Strzelca, dobie później zaś wszędzie niecałe 3° od Nunki, drugiej co do jasności widocznej z naszych szerokości geograficznych gwiazdy tej konstelacji.

9 maja naturalny satelita Ziemi przejdzie przez ostatnią kwadrę na tle gwiazdozbioru Koziorożca i do nowiu tydzień później jego warunki obserwacyjne pozostaną słabe ze względu na niskie położenie ekliptyki na porannym niebie. W tych dniach malejący sierp Księżyc o świcie wzniesie się zaledwie kilka stopni ponad widnokrąg i da się go dostrzec jedynie przy przejrzystej atmosferze i braku przeszkód terenowych w południowo-wschodniej części nieboskłonu.

Na niebie wieczornym ekliptyka wciąż jest nachylona dość korzystnie, a zatem już 17 maja o zmierzchu, mniej więcej 24 godziny po nowiu, można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Księżyc w fazie 2% nisko nad zachodnim widnokregiem. W jego odszukaniu pomoże planeta Wenus świecąca wtedy prawie 19° na wschód

wzdłuż ekliptyki od niego. Dobę później Księżyc zbliży się na 5° do Wenus, prezentując tarczę w fazie 6%. Sama planeta pokona w maju kolejne 36° na niebie, zaczynając miesiąc przy parze gwiazd 4. wielkości κ i ϵ Tau, niedaleko miejsca, gdzie na przełomie maja i czerwca dotrze Słońce i kończąc w Bliźniętach 9° od Jowisza. Wenus coraz szybciej zbliża się do nas i do końca miesiąca blask jej tarczy zwiększy się do -4^m , średnica urośnie do $13''$, faza natomiast spadnie do 80%.

Jowisza, drugą widoczną w maju planetę, Księżyc minie w odległości 4° 20 maja, zwiększając fazę do 22%. Wieczorem w podobnej odległości na prawo od niego pokażą się Polluks i Kastor, para najjaśniejszych gwiazd Bliźniąt. Warunki obserwacyjne największej planety Układu Słonecznego wyraźnie się pogarszają. Zanim zrobi się wystarczająco ciemno, zbliży się ona na niewielką odległość do widnokregu i jej obraz w teleskopach ulegnie wpływowi grubych warstw naszej atmosfery. Również jej najjaśniejsze księżycy napotkają trudności z przebicciem się przez tło nieba. Dlatego nie pozostanie nam wiele więcej niż obserwowanie zbliżania się Wenus do Jowisza. Odróżnienie obu planet nie sprawia kłopotu, ponieważ Jowisz świeci zdecydowanie słabiej. Do końca miesiąca jego blask zmniejszy się do $-1,9^m$, przy średnicy tarczy $33''$.

21 maja sierp Księżyc w fazie 33% zajmie pozycję $2,5^\circ$ na wschód od M44, jasnej gromady otwartej gwiazd w Raku. Jednak jej dostrzeżenie utrudni zorza wieczorna i niskie położenie nad horyzontem. Dwa dni później natomiast Księżyc przejdzie przez I kwadrę, świecąc wieczorem jakieś 7° na lewo od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa.

W ostatnim tygodniu maja faza Srebrnego Globu wzrośnie stopniowo do pełni i jego blask rozświetli i tak już nie do końca ciemne noce. W tym okresie Księżyc zbliży się na 4° do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, 27 dnia miesiąca, a w nocy z 30 na 31 maja, dzień przed pełnią, zajmie pozycję 6° na zachód od Antaresa i jednocześnie 1° od gwiazdy 3. wielkości π Sco.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 3



Rozwiązanie zadania F 1143.

Przyjmijmy, że wiatr wieje prostopadle do ściany domu, gęstość niesionego prądu powietrza wynosi ρ , a powierzchnia ściany S . W ciągu jednej sekundy do ściany dociera więc powietrze o masie $m = S\rho v$ i pędzie $p = mv = S\rho v^2$. Ściana zmienia kierunek i prędkość wiatru, co oznacza, że przejmuje znaczny ułamek jego pędu. Wartość tego ułamka w przybliżeniu nie zależy od prędkości wiatru (a od sposobu, w jaki zmienia on kierunek i prędkość). Oznacza to, że siła nacisku na ścianę jest proporcjonalna do v^2 . Wiatr o prędkości 200 km/h naciska więc na ścianę z siłą w przybliżeniu 16 razy większą niż wiatr o prędkości 50 km/h.

Uwaga: Bardzo silne wiatry, takie jak orkany, związane są zwykle z niskim ciśnieniem atmosferycznym, a więc i mniejszą gęstością powietrza. Jednak w najsilniejszych orkanach ciśnienie nie spada poniżej około 90% normalnego ciśnienia atmosferycznego, a więc różnica gęstości powietrza między zwykłą wicherą i orkanem jest zwykle niewielka.



Rozwiązanie zadania F 1144.

a) Z zasady zachowania pędu wynika, że biegacz uzyskuje dokładnie taki sam pęd jak podłoże. Energia kinetyczna uzyskana przez ciało jest równa działającej na nie sile pomnożonej przez drogę, na jakiej ta siła działa. Z trzeciej zasady Newtona wynika, że biegacz działa na podłoże taką samą siłą, jak podłoże działa na niego. W każdym kroku biegacz przebywa dłuższą drogę niż podłoże – dokładniej: w każdym kroku biegacz przesuwa podłoże, odkształcając je o znacznie mniejszy odcinek (droga działania siły) niż sam się przesuwa. Oznacza to, że biegacz uzyskuje więcej energii niż podłoże.

b) Podobnie jak w punkcie a) pęd uzyskany przez łódź z wiosłarzem jest równy pędowi przekazanemu wodzie. W tym przypadku jednak każde z piór wiosła działa połową siły napędzającej łódź i pokonuje w każdym cyklu wiosłowania dłuższą drogę niż łódź. Oznacza to, że większą energię kinetyczną uzyskuje woda.

Pomysły obu zadań pochodzą z książki Lewisa C. Epsteina *Thinking Physics, Understandable Practical Reality*.



Rozwiązanie zadania M 1852.

Odpowiedź. a) Tak, zawsze. b) Nie, nie zawsze.

1) Oznaczmy długości patyczków przez

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6.$$

Ponieważ patyczek o długości a_1 był bokiem pewnego trójkąta wraz z dwoma innymi patyczkami, jego długość jest mniejsza od sumy długości tych dwóch pozostałych patyczków. W szczególności

$$a_1 < a_2 + a_3.$$

Ponieważ zachodzi $a_1 \geq a_2$ oraz $a_1 \geq a_3$, nierówność $a_1 < a_2 + a_3$ jest wystarczająca, aby z patyczków o długościach a_1, a_2, a_3 można było ułożyć trójkąt.

2) Niech początkowo dane będą dwa przystające trójkąty o bokach długości 1, 3, 3. Wówczas trzy najkrótsze patyczki mają długości

$$1, 1, 3,$$

z których nie można ułożyć trójkąta, gdyż suma dwóch krótszych jest równa 2, czyli mniej niż długość trzeciego.



Rozwiązanie zadania M 1853.

Odpowiedź. Taki ciąg arytmetyczny nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje rosnący ciąg arytmetyczny

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + 149d$$

złożony ze 150 dobrych liczb całkowitych. Skorzystamy z następującego znanego faktu.

Fakt. Jeżeli liczba całkowita d jest względnie pierwsza z liczbą naturalną m , to wśród dowolnych m kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy d znajduje się liczba podzielna przez m .

Istotnie: Liczby

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (m - 1)d$$

dają wszystkie możliwe reszty modulo m . Gdyby bowiem dla pewnych $0 \leq k < \ell < m$ zachodziło

$$a + kd \equiv a + \ell d \pmod{m},$$

to mielibyśmy $(\ell - k)d \equiv 0 \pmod{m}$, a z względnej pierwszości d i m wynikałoby, że $m \mid (\ell - k)$, co jest niemożliwe.

Niech teraz p i q będą dwiema liczbami pierwszymi kończącymi się różnymi cyframi, takimi że $pq \leq 150$. Nazwijmy taką parę *szkodliwą*. Jeżeli d nie dzieli się ani przez p , ani przez q , to z faktu wynika, że w naszym ciągu arytmetycznym istnieje wyraz podzielny przez pq , co jest niemożliwe, gdyż liczba dobra nie może mieć dwóch dzielników pierwszych kończących się różnymi cyframi.

Stąd wynika, że dla każdej szkodliwej pary liczb pierwszych liczba d musi dzielić się przynajmniej przez jedną z nich.

Rozważmy teraz liczby pierwsze

$$2, 5, 7, 11, 13.$$

Każde dwie z nich tworzą szkodliwą parę, zatem d musi dzielić się przez wszystkie te liczby, z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Ponadto liczby 3 i 19 również tworzą szkodliwą parę, a więc d dzieli się przynajmniej przez jedną z nich. W konsekwencji otrzymujemy

$$d \geq (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot 3 = 2310 > 2026,$$

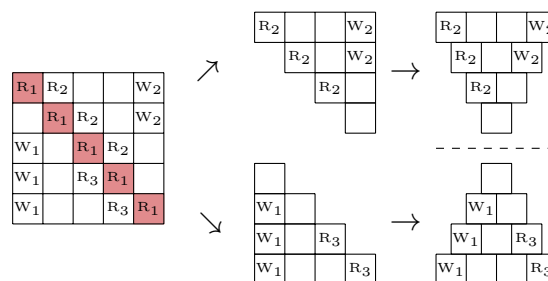
co jest sprzeczne z założeniem.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że taki ciąg arytmetyczny nie istnieje.



Rozwiązanie zadania M 1854.

Opiszemy jedną z możliwych strategii wygrywających Rozalii. W pierwszym ruchu Rozalia zamalowuje wszystkie pola leżące na dowolnie wybranej głównej przekątnej planszy. Po tym ruchu plansza rozpada się na dwie jednakowe „schodkowe” części. Następnie wyobraźmy sobie, że w każdej z tych części przesuwamy każdy poziomy rząd, z wyjątkiem pierwszego, o pół pola względem poprzedniego.



W wyniku tych przesunięć zarówno dawne piony, jak i dawne przekątne równoległe do głównej stają się ukośnymi rzędami pól. Przy tym „piony” jednej części są symetryczne do „przekątnych” drugiej. Oznacza to, że na każdy ruch Wandy Rozalia może odpowiedzieć ruchem symetrycznym w drugiej części planszy (dwa takie przykłady pokazano na rysunku). Po każdym ruchu Rozalii sytuacja na przekształconej planszy pozostaje symetryczna, a zatem Rozalia zawsze ma możliwy ruch zgodny z opisaną strategią. Ponieważ gra na pewno się zakończy (po nie więcej niż 10^4 ruchach), w pewnym momencie Wanda nie będzie mogła wykonać ruchu, a Rozalia wygra.



Ciąg zadań

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Kilka lat temu, w czasie *Szkoły Matematyki Poglądowej*, w luźnej, zakulisowej rozmowie, zaproponowałem, by to, co zwykliśmy nazywać „zbiorem zadań” przemianować na „ciąg zadań” – zadania są przecież zazwyczaj ułożone w jakiejś sensownej kolejności i prawie zawsze ponumerowane. Nazwa ta niestety nie przyjęła się – prawdopodobnie dlatego, że zbyt wiele książek wymagałoby wymiany okładek. Ale do kącika pasuje.

A zadania będą, rzecz jasna, o ciągach. Mają one ten urok, że mogą dotyczyć praktycznie każdego działu matematyki. Są trochę jak *Fasolki Bertiego Botta* – nigdy nie wiadomo, na co się trafi...

Uwaga dotycząca oznaczeń. Przez $(a)_k^m$ rozumiemy ciąg $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ dla ustalonych całkowitych $k \leq m$; dopuszczamy przy tym $m = \infty$, a niekiedy również $k = -\infty$. Jest to zapis analogiczny do zapisu

funkcji $f : X \rightarrow \dots$, w którym określamy dziedzinę, ale nie chcemy nazywać zmiennej. W takich okolicznościach piszemy „funkcja f ” i analogicznie – „ciąg (a) ”.

Przykład (57 OM, zmodyfikowane). Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg $(a)_1^\infty$ liczb całkowitych dodatnich spełnia rekurencję $a_{n+1} = \tau(a_n) + c$ dla każdego $n \geq 1$, w czym $\tau(m)$ oznacza liczbę dzielników liczby m . Wykazać, że ciąg (a) jest od pewnego miejsca okresowy.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $\tau(m) \leq \frac{1}{2}m + 1$, gdyż w przedziale $(m/2, m)$ nie ma dzielników m . Wynika z tego, że jeśli $a_n > 2c + 2$, to $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n + 1 + c < a_n$. Istnieje zatem liczba N , dla której $a_N \leq 2c + 2$. Z drugiej strony, jeśli $a_n \leq 2c + 2$, to mamy $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n + 1 + c \leq 2c + 2$. Z tego wynika, że $1 \leq a_n \leq 2c + 2$ dla wszystkich $n \geq N$. Zbiór wartości ciągu jest skończony (ale ciąg nie jest), a więc dla pewnych całkowitych $M, t > 0$ zachodzi równość $a_{M+t} = a_M$. Każdy wyraz ciągu jednoznacznie określa następny, a więc indukcyjnie dowodzimy, że $a_{n+t} = a_n$ dla wszystkich $n \geq M$.

Mamy tu elementy teorii liczb, analizy i kombinatoryki. Brakuje tylko geometrii. Ale geometria będzie – jest ukryta w jednym z poniższych zadań.

Zadania

- Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$ oraz ciąg arytmetyczny $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Wiadomo, że liczba $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$ jest wymierna. Dla jakich n wynika z tego, że co najmniej jeden wyraz ciągu (a) jest liczbą wymierną? (52 OM)
- Dany jest ciąg $(b)_0^\infty$ różnych, nieujemnych liczb całkowitych, spełniający warunki: $b_0 = 0$ i $b_n < 2n$ dla $n > 0$. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $m \geq 0$ istnieją liczby całkowite $k, l \geq 0$, dla których $b_k + b_l = m$. (70 OM)
- Ciąg $(a)_1^\infty$ ma taką własność, że dla wszystkich całkowitych dodatnich k, l zachodzi podzielność $k + l \mid a_k + a_l$. Udowodnić, że jeśli $k \neq l$, to $k - l \mid a_k - a_l$. (74 OM)
- Rozważmy zbiór wszystkich n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy najmniejszy wyraz. Udowodnić, że suma wszystkich wybranych wyrazów jest równa $1^n + 2^n + \dots + k^n$. (54 OM)
- Dana jest liczba naturalna k . Ciąg $(a)_1^\infty$ określamy równościami: $a_1 = k + 1$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że jeśli $m \neq n$, to liczby a_n i a_m są względnie pierwsze. (53 OM)
- Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą możliwą długość ciągu spełniającego następujące trzy warunki:
 - wszystkie wyrazy należą do zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$,
 - żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe,
 - w wyniku wykreślenia części wyrazów nie można otrzymać ciągu postaci (x, y, x, y) dla $x \neq y$. (62 OM)
- Ustalmy liczbę pierwszą p oraz liczby całkowite dodatnie $a, n < p$. Niech A będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb $a, 2a, 3a, \dots, na$. Dowieść, że ze zbioru A można wybrać $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ elementów, które uporządkowane rosnąco są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. (11 WLM)
- Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg $(C)_0^n$ liczb nieujemnych spełnia warunek $C_p C_r + C_q C_s = C_{p+q} C_{r+s}$ dla wszystkich całkowitych $p, q, r, s \geq 0$ spełniających równość $p + q + r + s = n$. Znajdź $C_1 = 1$, wyznaczyć wszystkie możliwe wartości C_2 . (60 OM)
- Ciąg $(a)_1^\infty$ zdefiniowany jest następująco $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_{k+1} = \frac{1}{1+a_k-a_k^2}$ dla $k \geq 1$. Dowieść, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dla wszystkich $n \geq 1$. (5 WLM)

Wskazówki do zadań

- Dla wszystkich $n \equiv 1 \pmod{3}$.
- Dla $m = 2n - 1$ w jednej z par $(k, m - k)$ ($0 \leq k < n$) obie liczby są wyrazami ciągu (zasada szlaku trzeba rozważyć przypadki, w których n jest lub nie jest wyrazem ciągu (b)).
- $a_k - a_l = (a_k + am) - (a_l + am)$.
- Jest dokładnie $(k - m + 1)^n - (k - m)^n$ takich ciągów z minimum równym m .
- Niech $P_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ($P_1 = 1$). Indukcyjnie $a_n = P_n + k$ oraz $a_n \equiv 1 \pmod{k}$. Dla $n < m$ mamy $a_n \mid P_m$. Resztę roboty wykonaj algorytm Euklidesa.
- Nie trudno znaleźć taki $(2n - 1)$ -wyrazowy ciąg. Wykazamy indukcyjnie, że dłuższego nie ma. Dla $n > 1$ w najdłuższym ciągu – naszym go nie ma – pewna wartość się powtarza. Niech $a_i = a_j = x$, przy czym w ciągu (a) $i < j$. Założenie indukcyjne stosujemy do ciągów $(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_m)$, które spełniają wymagane warunki i mają rozłączne zbiory wartości.
- Niech r_k będzie resztą z dzielenia ka przez p . Ciąg $(r_k)_1^\infty$ jest różnowartościowy i dla pewnych $r_1, \dots, r_{k_2}$ zachodzi $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ i $k_1 \neq k_2$ oraz $k_1 + k_2 \mid p$. Dla $d = \gcd(k_1, k_2)$ ciąg $(r_{kd})_{k=1}^\infty$ jest arytmetyczny.
- Rozważamy wielokąt foremny $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ z $|A_0 A_1| = 1$ i przyjmijmy $C_i = |A_0 A_i|$ (z konwencją $A_n = A_0$, $C_n = C_0 = 0$). Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza ciąg $(C)_0^n$ spełnia opisane w treści zależności. To samo twierdzenie pozwala uzasadnić (choć jest to trudniejsze), że zależność z zadania jednoznacznie wyznacza wyrazy ciągu $(C)_0^n$.
- Indukcyjnie $0 < a_n < 1$ oraz $a_1 a_2 \dots a_n = \frac{1}{1 + a_n}$. Dla $b_n = \frac{1}{1 + a_n}$ mamy $b_n = \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{n-1}}} = \frac{b_{n-1}}{1 + b_{n-1}}$ oraz $b_n < \frac{1}{2}$ dla $n \geq 2$, indukcyjnie $b_n < \frac{1}{2}$.



KONKURS PTM im. WITOLDA WILKOSZA

na najlepszą studencką pracę
popularyzującą matematykę

Na Konkurs można nadsyłać prace
mające na celu
popularyzację matematyki

Termin zgłoszeń: 30 września 2026

<http://ok-ptm.im.uj.edu.pl/wilkosz.php>

Organizator Konkursu



Oddział Krakowski
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego

Sponsor Konkursu



UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Matematyki i Informatyki

