

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 1.5 \cdot 10^8 \cdot 141592$

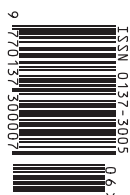
NR 6 (625) 2026

CENA 9 ZŁ
PL ISSN 1420-0065 | NR IND 35 550 X
MIECZNIK
www.deltami.edu.pl

Fizyka
dla rolnika

s. 5

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 2700 egz.



W następnym numerze:
czy i gdzie da się je rozłączyć?



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (625) 2026

Najgorętszy język programowania?
Angielski

Paulina Wawro

str. 1

Nie wszystko złoto, co się świeci

Jarosław Górnicki

str. 4

Fizyka dla rolnika

Bartłomiej Bąk

str. 5



Zadania

str. 7

 Aktualności

LHC przestaje działać!

str. 8

 Lizaki na płaszczyźnie

Bartłomiej Pawlik

str. 9

Matematyka nie jest jeszcze gotowa
na takie problemy

Henry Sinclair-Banks

str. 10

 Piękno nieoczywiste

Marta Fikus-Kryńska

str. 13

Od równowagi szczegółowej do rozkładu
Fermiego–Diraca

Krzysztof Pawłowski

str. 15

Matematyka i polskie wiersze

Aleksy Schubert

str. 17

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: Raz, dwa, trzy,
podłoga parzy...

str. 22

 Niebo w czerwcu

str. 23

 Długości boków trójkąta

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Człowiek o AI (6)

* Analityk danych w firmie farmaceutycznej, autorka gry „Hexbreak”

Gra RPG (ang. *role-playing game*) – gra nastawiona na fabułę, rozwój postaci i podejmowanie decyzji wpływających na przebieg historii. Elementy zręcznościowe nie są najważniejsze, większy nacisk kładzie się na eksplorację świata, dialogi i wybory moralne. Kluczowe jest wcielenie się w bohatera oraz wczucie w jego rolę i opowiadanie historii, często w rozbudowanym, fikcyjnym uniwersum.

W prolog do gry „Hexbreak” można pograć tutaj:
<https://d209qoporefhg6.cloudfront.net/>



Najgorętszy język programowania? Angielski

Vibe coding i demokratyzacja tworzenia

Paulina WAWRO*

Najlepsze pomysły przychodzą mi w biegu. Dosłownie. Na leśnej ścieżce, gdzieś między korzeniami a zadyszka, myśli mają zwyczaj się rozplątywać. Wracalam w głowie do gry RPG, w którą ostatnio grałam, kiedy rozplątała się jedna szczególnie zuchwała: a gdyby postaci w takich grach napędzało AI? Gdyby po wspólnej przygodzie można było z nimi porozmawiać – naprawdę, jak z kimś żywym?

Pewnie wieki dzielą nas od czegoś takiego, pomyślałam. I natychmiast przyszła kolejna myśl, jeszcze zuchwalsza: a co, jakbym sama spróbowała to zrobić?

Więc spróbowałam. I tak powstał „Hexbreak” – moja gra RPG z autorską fabułą, muzyką, grafiką i bohaterami napędzanymi przez sztuczną inteligencję. Projekt, który jeszcze rok wcześniej wymagałby ekipy programistów, grafików i scenarzystów. Zrobiłam go sama, łącznie z silnikiem napisanym w Pythonie i Flutterze – języku, o którym wcześniej nawet nie słyszałam.

Jak to możliwe, zapytacie? Żeby to wyjaśnić, trzeba cofnąć się do pewnego posta, którego nikt wtedy nie wziął na poważnie.

„Najgorętszy nowy język programowania to angielski”

Dwudziestego czwartego stycznia 2023 roku Andrej Karpathy – współzałożyciel OpenAI, były szef AI w Tesli, jedna z najbardziej rozpoznawalnych postaci w świecie sztucznej inteligencji – wrzucił na X jedno zdanie. Brzmiało jak żart:

The hottest new programming language is English (Najgorętszym nowym językiem programowania jest angielski).

Dwa lata później już nikt się z tego nie śmieje.

W lutym 2025 roku ten sam Karpathy użył terminu, który słownik Collinsa ogłosił potem Słowem Roku: *vibe coding*. Opisał go jako „pełne poddanie się aurze, zaakceptowanie wykładniczego wzrostu i zapomnienie, że kod w ogóle istnieje”. Brzmi jak programista po psychodelikach? Otóż nie. To zupełnie poważna koncepcja. W praktyce wygląda tak: opisujesz zwykłym, ludzkim językiem, co chcesz osiągnąć, a sztuczna inteligencja zamienia to w działający program. Nie odpowiada, nie uzupełnia – pisze od zera. I to na poziomie, który jeszcze niedawno wymagał pracy zespołu deweloperów.

Dlaczego AI tak dobrze programuje?

Kod ma jedną cechę, która czyni go idealnym materiałem treningowym dla sztucznej inteligencji: można go zweryfikować. Uruchamiasz program i od razu wiesz, czy działa. Nie ma tu miejsca na interpretację ani subiektywność. Albo kod robi, co ma robić, albo nie. Kropka.

Ta właściwość umożliwiła przełom w uczeniu modeli językowych, znany jako RLVR – Reinforcement Learning with Verifiable Rewards, czyli uczenie ze wzmocnieniem z weryfikowalnymi nagrodami. Jak tłumaczy Karpathy: trenując modele na łamigłówkach matematycznych i programistycznych – gdzie maszynę można automatycznie sprawdzić – modele same zaczynają rozwijać strategie, które dla ludzi wyglądają jak rozumowanie. Uczą się rozkładać problemy na kroki.

Innymi słowy: AI przestaje tylko zgadywać najbardziej prawdopodobną odpowiedź – zaczyna uczyć się strategii prowadzących do poprawnego wyniku.

To zmiana fundamentalna. Wcześniejsze metody wymagały, żeby ludzie ręcznie oceniali, która odpowiedź „wygląda lepiej”. Nowe podejście nie pyta człowieka –

pyta kompilator albo kalkulator: „Czy to jest poprawne?” Jak ujął to jeden z badaczy: przeszliśmy od nagradzania za dobre wrażenie do nagradzania za weryfikowalną prawdę.

Dodajmy do tego miliardy linii kodu, na których te modele trenują – ponad osiemdziesiąt języków programowania, dokumentacja, zgłoszenia błędów, dyskusje techniczne – i mamy przepis na narzędzie, które rozumie nie tylko składnię, ale i kontekst.

Pod koniec 2025 roku, w ciągu zaledwie dwóch tygodni, trzej giganci technologiczni wypuścili swoje najmocniejsze modele do kodowania: Google Gemini 3 Pro, Claude Opus 4.5 od Anthropic i GPT-5.2 od OpenAI. To modele używane dziś w narzędziach takich, jak ChatGPT czy Copilot. Test wydajności SWE-bench Verified, który sprawdza, czy modele potrafią naprawić prawdziwe błędy w istniejących projektach, wszystkie trzy przekraczają teraz osiemdziesiąt procent skuteczności. Rok temu wyniki około siedemdziesięciu procent uchodziły za przełomowe. I żeby było jasne: te modele nie tylko piszą kod. One rozumieją istniejące projekty, poruszają się między plikami, wprowadzają poprawki i pilnują, żeby niczego po drodze nie zepsuć. Jeszcze niedawno taki poziom wymagał lat doświadczenia.

Liczby, w które trudno uwierzyć

Statystyki z 2025 roku jeszcze kilka lat temu brzmiałyby jak science fiction:

Według raportów branżowych czterdzieści jeden procent całego kodu tworzonego na świecie generuje lub wspomaga AI. Nie, to nie pomyłka. Prawie połowa. Osiemdziesiąt cztery procent programistów używa lub planuje używać narzędzi AI, a ponad połowa robi to codziennie.

W marcu 2025 roku Y Combinator – legendarny akcelerator startupów stojący za Airbnb, Dropboxem i Stripe’em – ujawnił statystykę, od której kręci się w głowie: co czwarty startup z zimowej kohorty 2025 ma bazę kodu w dziewięćdziesięciu pięciu procentach wygenerowaną przez sztuczną inteligencję. A Jared Friedman, partner zarządzający YC, dodał: „To nie tak, że finansujemy ludzi bez zaplecza technicznego. Każda z tych osób jest wysoce techniczna. Rok temu zbudowaliby produkt sami – ale teraz prawie cały kod pisze AI”.

Co to oznacza w praktyce? Wykwalifikowany programista potrafi teraz zrobić w weekend to, co jeszcze niedawno wymagało zespołu i miesięcy pracy.

Ale najciekawsze nie są same liczby. Najciekawsze jest to, kto z tej rewolucji korzysta.

Technologia do góry nogami

W kwietniu 2025 roku Karpathy opublikował esej pod tytułem „Power to the people”, w którym zauważył coś niespotykanego: duże modele językowe pokazują dramatyczne odwrócenie typowego

wzorca rozprzestrzeniania się technologii. Dają nieproporcjonalnie dużo zwykłym ludziom, podczas gdy korporacje i rządy mają trudność z szybkim wdrożeniem tej zmiany.

Chwila refleksji. W przeszłości przełomowe technologie trafiały najpierw do rządów i wielkich firm. Pierwszy komputer ENIAC – ważący dwadzieścia siedem ton – liczył trajektorie pocisków dla armii amerykańskiej. Internet zaczynał jako ARPANET: sieć zaprojektowana w latach sześćdziesiątych, żeby połączyć uniwersytety i instytucje wojskowe na wypadek ataku nuklearnego. GPS przez dekady pozostawał zarezerwowany dla wojska; cywile dostali do niego dostęp dopiero w latach osiemdziesiątych, i to w celowo okrojonej wersji. Zwykli ludzie zawsze stali na końcu kolejki.

Z dużymi modelami językowymi jest dokładnie odwrotnie.

ChatGPT stał się najszybciej rosnącą aplikacją konsumencką w historii – czterysta milionów aktywnych użytkowników tygodniowo. Bariera wejścia jest absurdalnie niska: modele są udostępniane tanio (często darmowo), są szybkie, dostępne w telefonie i mówią twoim językiem. Karpathy ujął to następująco: „Bill Gates rozmawia z GPT-4o dokładnie tak samo jak ty. Pieniądze nie kupią lepszego ChatGPT” (co teraz, ze względu na płatne subskrypcje, nie jest już do końca aktualne).

Sytuacja bez precedensu. Pojedynczy człowiek dostaje narzędzie, które zasadniczo zmienia jego możliwości – zanim korporacje zdążą się zorientować, jak to wdrożyć.

Karpathy pisze: „Ludzie mogą teraz vibe-codować aplikacje. O ile mi wiadomo, przeciętny człowiek nigdy nie doświadczył tak spektakularnego, tak szybkiego technologicznego skoku”.

W lipcu 2025 roku Lenny Rachitsky – autor popularnego branżowego biuletynu – zapytał swoich czytelników: co zbudowaliście? W ciągu doby dostał ponad tysiąc odpowiedzi. . . I to jest moja ulubiona część tej historii.

Pewien ojciec kupił córce audiobooka, ale pliki nie były podzielone na rozdziały – a książka miała ich siedemdziesiąt. Napisał skrypt, który automatycznie transkrybuje nagranie i tnie je we właściwych miejscach. „AI napisało kod praktycznie za pierwszym podejściem”. Ten pomysł zainspirował mnie samą do napisania skryptu, który przekształca niewygodne w użyciu audiobooki z YouTube na elegancko podzielone pliki mp3. Gotowe w mniej niż pół godziny.

Inny tata zbudował CarbScan – aplikację do szybkiego szacowania węglowodanów w posiłkach, żeby lepiej zarządzać poziomem glukozy u syna z cukrzycą. Używa jej codziennie.

CarbScan: <https://carbscan.ai/>

Pewien zapobiegliwy ojciec, czekając na narodziny dziecka, stworzył w dwa weekendy aplikację do monitorowania karmień, snu i pieluch.

Pewna mama zbudowała narzędzie, które zamienia emocje dziecka w spersonalizowaną bajkę na dobranoc.

Ktoś zrobił aplikację „Ile warstw ubrań dzisiaj?” – bo istniejące programy pogodowe miały za dużo funkcji. Ma teraz osiemdziesiąt pięć tysięcy użytkowników.

Ile warstw ubrań dzisiaj?: <https://layers.today/>

Dziennikarz New York Timesa zbudował LunchBox Buddy – robisz zdjęcie lodówki, a aplikacja proponuje, co włożyć synowi do pojemnika na drugie śniadanie. Gotowe w dziesięć minut.

LunchBox Buddy: <https://joyful-froyo-b4482b.netlify.app>

Ktoś inny stworzył wizualizator cięcia sklejk: wpisujesz wymiary deski, a program mówi, ile kawałków wyjdzie i ile resztek zostanie.

Mój faworyt? Rozszerzenie do przeglądarki, które pokazuje, ile osób właśnie czyta ten sam artykuł na Wikipedii co ty. Żebyś wiedział, że nie jesteś sam w swojej króliczej norze.

Każdy z tych projektów rozwiązuje problem tak specyficzny, że żadna firma nigdy by się nim nie zajęła. Nie ma w tym biznesu. Ale dla jednej osoby, dla jednej rodziny – to może być dokładnie to, czego potrzebowali. Aplikacje domowej roboty, szyte na miarę.

Ołówek, nie różdżka

Ale żeby nie było nieporozumień: vibe coding nie oznacza, że AI robi wszystko za Ciebie.

Scott H. Young, autor „Zostań ultrasamoukiem”, ujął to trafnie: „Świat, w którym każdy może kodować, to prawdopodobnie świat z mnóstwem szmiry – ale też ze znacznie wyższą poprzeczką dla tego, co naprawdę wartościowe. Vibe coding przerzuca ciężar na ludzi: żeby mieli lepszą wizję, lepsze rozumienie koncepcyjne i lepszy gust”.

Bo AI to tylko narzędzie. Jak ołówek. Tym samym ołówkiem jeden narysuje arcydzieło, a drugi – ludzika z kilku kresek. Ołówek nie wie, co chcesz narysować. Nie wie, czy ma powstać portret czy karykatura, szkic techniczny czy komiks. Ty to wiesz.

Podobnie było z moją grą. Czy wpisałam „zrób mi fajną grę RPG” i dostałam gotowy produkt? Absolutnie nie. Zaczęłam od projektu: rozłożyłam wizję na części składowe, określiłam, co dokładnie chcę osiągnąć i jak poszczególne elementy mają do siebie pasować. „Hexbreak” to powieść wizualna – gatunek gry opowiedzianej przez dialogi, obrazy i wybory gracza, z fabułą o księżniczce i czarodzieju, zakazanej magii i politycznych intrygach. Żeby ją zbudować, potrzebowałam autorskiego silnika, systemu rozgałęzień fabularnych, grafik, muzyki, dubbingu i porządnej dawki pracy nad interfejsem. Bo vibe coding to tylko jedna warstwa. Obok niego istnieje dziś cały ekosystem narzędzi, które robią z opisów słownych rzeczy jeszcze niedawno zarezerwowane dla profesjonalistów: ElevenLabs zamieniło tekst w realistyczny dubbing, Udio skomponowało muzykę na podstawie kilku zdań, a modele Stable Diffusion wygenerowały grafikę.

Nie będę udawać, że szło bez zgrzytów. Silnik pisałam we Flutterze – języku, którego wcześniej nie znałam. Jeśli AI wygenerowało jakąś bzdurę, nie byłam w stanie ocenić poprawności kodu i musiałam polegać na testach funkcjonalnych. A grafika? Postać musi wyglądać tak samo na setkach ujęć, tymczasem modele obrazowe za każdym razem rysują ją odrobinę inaczej, więc potrzeba było wielu manualnych poprawek.

Narzędzia AI tworzyły elementy składowe, ale to ja pisałam intencję – fabułę, logikę, architekturę.

Programiści nie znikną – ale zmienia się to, czym właściwie jest programowanie. Przez dekady zdolność napisania kodu była warunkiem wejścia do świata technologii. Jeśli miałeś pomysł, musiałeś najpierw nauczyć się języka maszyny albo znaleźć kogoś, kto go znał. Kod był wąskim gardłem między wizją a realizacją.

Dziś po raz pierwszy ta przeszkoda zaczyna zniknąć. AI przejmuje dużą część odpowiedzi na pytanie „jak”, zostawiając ludziom pytania trudniejsze: „co” i „po co”. Zamiast pisać każdą linijkę kodu, twórca coraz częściej staje się kimś w rodzaju dyrygenta – określa kierunek, podejmuje decyzje, pilnuje spójności. CEO firmy Anthropic ujął to w ten sposób: „Za rok AI będzie pisało większość kodu, zostawiając ludziom marzenie na większą skalę”. Brzmi górnolotnie, ale w praktyce chodzi o to: jeśli nie musisz spędzać godzin na składni i debugowaniu, możesz więcej czasu poświęcić na decyzje, które naprawdę kształtują projekt.

To nie znaczy, że umiejętności techniczne przestają mieć znaczenie. Wręcz przeciwnie. Za to przestają być jedyną drogą do tworzenia. Coraz częściej o jakości projektu decyduje nie to, kto najszybciej napisze kod, lecz kto lepiej rozumie problem, potrafi zaprojektować system i ma wystarczająco dobre wyczucie, by odróżnić rozwiązanie działające od rozwiązania właściwego.

AI potrafi wygenerować kod. Nadal nie potrafi zdecydować, co warto zbudować.

Demokratyzacja tworzenia

Przez dziesięciolecia istniała przepaść między wizją a realizacją. Żeby ją pokonać, trzeba było lat nauki, zespołu specjalistów albo rezygnacji z ambicji na rzecz czegoś prostszego. Teraz ta przepaść się kurczy. Nie znika – nadal trzeba wiedzieć, co się chce zbudować, i potrafić spojrzeć na efekt krytycznym okiem. Ale próg wejścia gwałtownie spadł.

Jensen Huang, CEO Nvidii, nazywa AI „wielkim wyrównywaczem”. Kiedyś – mówił – trzeba było znać C++ albo Pythona, projektować skomplikowane systemy, uczyć się języka maszyn. Teraz pojawił się nowy język programowania: język ludzki. „Niewielu ludzi zna C++, jeszcze mniej zna Pythona – ale każdy zna język ludzki”.

Po raz pierwszy w historii informatyki to nie człowiek uczy się języka maszyny – to maszyna nauczyła się języka człowieka.

Nie wszystko złoto, co się świeci

* Kontakt: gornicki59@gmail.com

Jarosław GÓRNICKI*

Andriej A. Markow pokazał (1879), że równanie

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \cdot XYZ$$

(nazywane obecnie *równaniem Markowa*) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych i rozwiązania te tworzą drzewo o niezwykłych własnościach (więcej na ten temat w artykule z Δ_{26}^5). Równanie to pozostawało niezauważone przez blisko 30 lat, dopiero Adolf Hurwitz (1907) i Georg Frobenius (1913) odkryli jego wyjątkowość. Zainteresowali się następującym ogólnym problemem: dla jakich liczb naturalnych N, s równanie

$$(1) \quad X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2 = s \cdot X_1 X_2 \dots X_N$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych i jak te rozwiązania wyglądają? Na przykład dla $N = s = 2$ rozwiązaniami równania (1) są wszystkie pary liczb $(X_1, X_2) = (m, m)$, gdzie $m = 1, 2, \dots$. Pokażemy, jak „niezwykle niezwykle” (to słowa Frobeniusa) jest równanie Markowa! W tym celu rozwiążemy mniej skomplikowany problem: dla jakich naturalnych $s \neq 3$ równanie

$$(2) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = s \cdot XYZ$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych?

Twierdzenie 1. Wszystkie rozwiązania równania

$$(3) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$$

w liczbach naturalnych mają postać $(3m, 3n, 3k)$, gdzie (m, n, k) jest dowolnym rozwiązaniem równania Markowa.

Dowód. Jeśli (m, n, k) spełnia równanie $m^2 + n^2 + k^2 = 3 \cdot mnk$, to po pomnożeniu jego obu stron przez 9 otrzymujemy, że $(3m)^2 + (3n)^2 + (3k)^2 = (3m)(3n)(3k)$. Zatem trójka liczb $(3m, 3n, 3k)$ spełnia równanie (3).

W drugą stronę, niech (A, B, C) będzie rozwiązaniem równania (3) w liczbach naturalnych. Pokażemy, że każda z liczb A, B, C jest podzielna przez 3. Z faktu, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3, wynika następująca obserwacja:

Reszta z dzielenia liczby $A^2 + B^2 + C^2$ przez 3 jest równa liczbie tych liczb spośród A, B, C , które nie są podzielne przez 3, o ile jest ich mniej niż trzy, a 0 w przeciwnym wypadku.

Gdyby żadna z liczb A, B, C nie była podzielna przez 3, to iloczyn ABC nie byłby podzielny przez 3, a suma $A^2 + B^2 + C^2$ byłaby podzielna przez 3 (zgodnie z obserwacją). Sprzeczność. Jeśli przynajmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3, to suma $A^2 + B^2 + C^2 = ABC$ jest podzielna przez 3. Wówczas, na mocy obserwacji, wszystkie liczby A, B, C są podzielne przez 3, co kończy uzasadnienie.

Przyjmując $(A, B, C) = (3m, 3n, 3k)$ i dzieląc równanie (3) przez 9, otrzymujemy, że (m, n, k) spełniają równanie Markowa. $\square$

Twierdzenie 2. Równanie

$$(4) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 2 \cdot XYZ$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Dowód. Załóżmy, że (A, B, C) jest rozwiązaniem równania (4) w liczbach naturalnych. Przyjmijmy $d := \text{NWD}(A, B, C) \geq 1$, a wtedy $A = ad$, $B = bd$, $C = cd$ i liczby a, b, c są względnie pierwsze. Wówczas równanie (4) (po uproszczeniu) przyjmuje postać

$$(5) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2abcd.$$

Prawa strona równania (5) jest parzysta. Ponieważ liczby a, b, c są względnie pierwsze, więc nie mogą być wszystkimi parzystymi. Parzystość lewej strony równania (5) implikuje zatem, że jedna z tych liczb jest liczbą parzystą,



Treść twierdzenia 2 była tematem zadania olimpijskiego, zobacz: S. Straszewicz, „Zadania z olimpiad matematycznych”, tom IV, PZWS, Warszawa 1972, zadanie 16.

a dwie inne są liczbami nieparzystymi. Niech, na przykład, $a = 2u$, $b = 2v + 1$, $c = 2w + 1$, gdzie $u, v, w \in \mathbb{N}$. Podstawiając te wartości do równania (5), otrzymujemy

$$4(u^2 + v^2 + w^2 + v + w) + 2 = 4du(2v + 1)(2w + 1).$$

Równość ta jest fałszywa, bo prawa strona jest podzielna przez 4, a lewa – nie. Zatem równanie (4) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Twierdzenie 3. *Dla naturalnego $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.*

Dowód. Będziemy postępować analogicznie do dowodu lematów 1 i 2 z poprzedniego artykułu (Δ_{26}^5). Załóżmy, że dla pewnego naturalnego $s > 3$ równanie (2) ma rozwiązanie (a, b, c) w liczbach naturalnych. Wtedy liczby a, b, c są parami różne. Gdyby, na przykład, $b = c$, to $a^2 = sab^2 - 2b^2 = b^2(sa - 2)$, więc $a = bd$, gdzie d jest liczbą naturalną. Wtedy $b^2d^2 = a^2 = b^2(sbd - 2)$, czyli $d^2 = sbd - 2$, a stąd $2 = d(sb - d)$. Oznacza to, że 2 jest podzielne przez d , zatem $d = 1$ lub $d = 2$. W obu tych przypadkach $sb = 3$, co jest sprzeczne z warunkiem $s > 3$.

Możemy więc przyjąć, że $a > b > c$. Rozważmy trójkąt kwadratowy

$$\Phi_a(x) = x^2 + b^2 + c^2 - sbcx = x^2 - sbcx + (b^2 + c^2).$$

Poza pierwiastkiem a posiada on drugi pierwiastek a' (można go wyznaczyć, korzystając ze wzorów Viète'a), więc rozwiązanie (a, b, c) ma rozwiązanie sąsiednie (a', b, c) .

Ponieważ

$$(b - a)(b - a') = \Phi_a(b) = 2b^2 + c^2 - sb^2c < 3b^2 - sb^2c \leq 3b^2 - sb^2 < 0,$$

więc liczba b leży między liczbami a i a' . A więc $a > b > a'$ i maksymalna współrzędna rozwiązania (a', b, c) jest mniejsza niż maksymalna współrzędna rozwiązania (a, b, c) . Zatem dla każdego rozwiązania (a, b, c) równania (2) z $s > 3$ można skonstruować jego rozwiązanie (a_1, b_1, c_1) z mniejszą maksymalną współrzędną. Oczywiście liczby a_1, b_1, c_1 również są parami różne i możemy przyjąć, że $a_1 > b_1 > c_1$. Powtarzając podane wyżej rozumowanie, uzyskujemy rozwiązanie (a_2, b_2, c_2) równania (2) z $s > 3$, którego maksymalna współrzędna jest jeszcze mniejsza. W ten sposób uzyskujemy nieskończony ciąg rozwiązań równania (2) z $s > 3$, z coraz mniejszymi maksymalnymi współrzędnymi. W zbiorze liczb naturalnych jest to niemożliwe. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że dla $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Prawdziwe jest twierdzenie ogólniejsze (A. Hurwitz, 1907): dla $s > N$ równanie (1) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Dla $s = N \geq 3$ równanie (1) ma rozwiązanie osobliwe $(x_1, x_2, \dots, x_N) = (1, 1, \dots, 1)$, z którego „wyrastają” kolejne rozwiązania. W pozostałych przypadkach jest wiele wyników cząstkowych, jednak kompletnej teorii równania diofantycznego (1) wciąż brak.

Fizyka dla rolnika

*Bartłomiej BAK**

Czy fizyka ma zastosowanie w rolnictwie? Na to pytanie można bez większego namysłu odpowiedzieć: „oczywiście, tak”. Przecież wszystkie maszyny, elektronika, czujniki, systemy nawadniania – to zaprzęgnięta do konkretnych celów fizyka. Spróbujmy więc pogłębić to pytanie: Czy prawa fizyki mogą być wykorzystane w rolnictwie bezpośrednio? Okazuje się, że tak, i w niniejszym artykule zostanie przedstawionych kilka, zdaniem autora najciekawszych, przykładów.

Wiosenne przymrozki – zhora wszystkich ogrodników – z którymi owi ogrodnicy muszą sobie radzić na różne sposoby. Pierwszy, najbardziej intuicyjny, to okrywanie roślin. Istotnie, jest to niezwykle skuteczna i nadal powszechnie stosowana metoda przy uprawach, chociażby truskawek. Tu fizyka jest dość prosta: stosujemy warstwę izolacyjną (w postaci np. agrowłókniny), która chroni przed utratą ciepła. Mało tego, osiadająca rosa, zamarzając na powierzchni, tworzy dodatkową warstwę izolacyjną w postaci lodu (tzw. efekt igloo). Niestety nie sposób zaimplementować tej metody w przypadku sadów, i to z kilku powodów – począwszy od rozmiarów upraw i samych roślin, na kwestiach praktycznych skończywszy.

Co wobec tego należałoby zrobić? Otóż zaprzyjaźnić się z termodynamiką. Okazuje się, że najskuteczniejszą i najczęściej stosowaną metodą* jest polewanie (zraszanie) sadów wodą. Czytelnik Niewtajemniczony zapewne zdziwi się, bo brzmi to jak kompletny nonsens – chcemy ochronić rośliny przed mrozem, po czym polewamy je wodą, która przecież zamarznie! Warto podkreślić, że ta woda faktycznie zamarznie – i tak ma być! Teraz wyjaśnimy dlaczego.

* Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Innym sposobem – nadal stosowanym, aczkolwiek mało praktycznym – jest ogrzewanie powietrza poprzez spalanie różnego rodzaju paliw.

*Przynajmniej w rodzinnych stronach autora, gdzie uprawa jabłoni jest powszechną i dominującą gałęzią rolnictwa.

Gdy woda (np. ta otaczająca pąki) zamarza, jej temperatura pozostaje na poziomie 0°C – jest to temperatura równowagi mieszaniny wody i lodu. Dopiero po całkowitym zamarznięciu wody temperatura lodu może dalej spadać. Oznacza to, że zanim temperatura wewnątrz pąka spadnie poniżej zera, cała otaczająca go warstwa wody musi najpierw zamarznąć. Proces ten wymaga odebrania znacznej ilości energii (tzw. ciepła krzepnięcia), co spowalnia wychładzanie. W efekcie, jeśli mróz trwa krótko, wewnątrz zroszonego pąka może pozostać niezamarznięte.



Okres czasu odnosi się do prywatnej eksperyencji i wspomnień autora, którego noce lat dziecięcych były rozświetlane spektakularną pomarańczową luną pobliskiej szklarni.

Zacznijmy od tego, że woda, którą polewa się sady, bynajmniej nie jest ciepła. Jest to zazwyczaj zwykła woda gruntowa zasysana pompami i ma około kilku stopni. Gdy na zewnątrz temperatura spada poniżej zera, woda faktycznie jest nieco cieplejsza niż pąki i kwiaty, które zamierzamy chronić. Na tym jednak rola wody się nie kończy. Podczas ochładzania się woda oddaje ciepło, i to w każdą stronę, ogrzewając nieznacznie powietrze dookoła i co ważne – także same pąki. Co istotne, proces ten nie ustaje w trakcie zamarzania, gdy woda również oddaje ciepło, które zostaje „uwięzione” pod cienką pokrywą lodową i odizolowane od zimnego otoczenia (wspomniany już efekt igloo). Prostota i skuteczność. Zobaczmy, jak to wygląda w liczbach.

Ciepło krzepnięcia wody c_K wynosi

$$(1) \quad c_K = 334 \text{ kJ/kg},$$

co oznacza, że samo zamarznięcie jednego kilograma wody powoduje wydzielenie energii o wartości 334 kJ. Czy to dużo? Tyle energii ma odważnik o masie 334 kg spuszczone na ziemię z wysokości 100 metrów – z tego punktu widzenia to całkiem sporo.

Spójrzmy na to jeszcze inaczej. Ciepło właściwe wody c_w wynosi:

$$(2) \quad c_w = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)},$$

co oznacza, że potrzeba 4200 dżuli na ogrzanie kilograma wody o 1 kelwin (co odpowiada ogrzaniu o 1 stopień Celsjusza). Łącząc te informacje, uzyskamy następującą konkluzję: gdyby całe ciepło (wyemitowane w trakcie zamarzania pewnej ilości wody) użyć do podgrzania dokładnie tej samej ilości wody, to temperatura tejże wody podniesie się o prawie 80 stopni:

$$(3) \quad \Delta T = \frac{c_K}{c_w} = 79,5 \text{ K} = 79,5^{\circ}\text{C},$$

zakładając, że woda nie zmieni stanu skupienia. Oto jak na pozór nieintuicyjne, niezwykle proste zjawisko skutecznie pomaga chronić uprawy przed negatywnymi skutkami niskich temperatur.

Na koniec warto przytoczyć dygresję związaną z tym tematem w postaci zadania z olimpiady fizycznej. *Jaką temperaturę końcową będzie miała mieszanina jednego kilograma lodu o temperaturze 0°C i pary wodnej o temperaturze 100°C ?* Rozwiązanie tego zadania zostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Inny, niezwykle interesujący efekt również jest związany z uprawą, ale tym razem roślin szklarniowych. Już od zamierzchłych czasów wiadomo, że roślinom do wzrostu i rozwoju niezbędne jest ciepło i światło słoneczne. Łącząc oba te zjawiska z odrobiną sprytu, ludzkość wymyśliła szklarnie – izolowane od warunków zewnętrznych mikroświaty o regulowanej temperaturze, wilgotności czy naświetleniu (w zależności od potrzeb).

Jeszcze nie tak dawno temu (jakieś 10–15 lat) kwestia naświetlenia była rozwiązywana przez lampy świecące światłem żółtopomarańczowym, które jednak obejmowało całe spektrum fal elektromagnetycznych (podobnie jak Słońce, z tym że rozkład natężenia konkretnych kolorów mógł być różny). Jednak wraz z pogłębianiem wiedzy na temat wpływu oświetlenia na wzrost i rozwój roślin wyszło na jaw sporo ciekawych zależności. Okazało się, że pewne rośliny lepiej rosną przy określonej barwie światła, a także że konkretne oświetlenie lepiej wpływa na daną fazę rozwoju. Innymi słowy, nie trzeba świecić całym spektrum bardzo intensywnego światła. Manipulując samym jego kolorem, można znacząco poprawić wydajność hodowli, dodatkowo redukując koszty.

U Czytelnika Zorientowanego powinna zapalić się pewna lampka z następującym skojarzeniem – a czy to przypadkiem nie tego typu korelacja naprowadziła Einsteina na rozwiązanie problemu fotoelektrycznego, zastosowanie i wprowadzenie na dobre mechaniki kwantowej do fizyki, co zapewniło mu zdobycie jedynej w jego karierze Nagrody Nobla. Dokładnie tak! Gwoli przypomnienia, energia światła E zależy od jego częstotliwości ν w następujący sposób:

$$(4) \quad E = h\nu,$$

Oczywiście światło, które nazywamy czerwonym, nie ma jednej, dokładnej długości fali i zajmuje pewien ich zakres, tak samo światło fioletowe.



gdzie $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s oznacza stałą Plancka – fundamentalną stałą fizyki kwantowej. Częstotliwość przekłada się na kolor światła, czyli długość fali λ :

$$(5) \quad \nu = \frac{c}{\lambda},$$

gdzie $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s oznacza prędkość światła w próżni. Oznacza to, że światło czerwone o długości fali około 700 nm ma dużo mniejszą energię niż światło fioletowe, które charakteryzuje się długością fali około 400 nm.

Wracając do meritum – rośliny szklarniowe korzystają z efektu fotoelektrycznego, bo tylko konkretne długości fal są wchłaniane przez stosowane substancje (tu pozostawiam miejsce na dokładniejsze wywody dla znacznie bardziej światłych Kolegów i Koleżanek biologów, biochemików i botaników) i dalej „przetwarzane” (np. energia pozyskana w ten sposób wspomaga produkcję substancji odżywczych). Oznacza to, że zjadane przez nas ogórki i pomidorki całkiem biegle posługują się mechaniką kwantową, która na dobre już zagościła w świecie upraw szklarniowych (co również zmusiło samych hodowców do, przynajmniej pobieżnego, zainteresowania się tą dziedziną fizyki). Cóż, lepszy taki powód niż żaden.

W tym miejscu również warto pozwolić sobie na małą dygresję: teraz niebo nad szklarniami rozświetla już nie intensywnie żółta luna, tylko, w zależności od etapu i rodzaju uprawy, niebieska, fioletowa lub czerwona – ot, warzywna dyskoteka.

Oczywiście wspomniane tutaj przykłady bynajmniej nie wyczerpują tematu, a stanowią początek do dalszych poszukiwań i rozważań nad zastosowaniem „podręcznikowej” fizyki w bezpośrednim użytku.



Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1145. Ciało (punkt materialny) o masie m wykonuje drgania wzdłuż osi x pod działaniem potencjału $V(x) = k|x|^\alpha$, $k > 0$, $\alpha > 1$. Jak okres drgań zależy od energii całkowitej E i masy ciała m ?

F 1146. Elektron i jego antycząstka, pozyton, tworzą związany układ wodoropodobny nazywany pozytronium. Oszacuj energię jonizacji takiego „atomu”.

Wskazówka: energia jonizacji atomu wodoru wynosi około 13,6 eV.

Przygotował Dominik BUREK

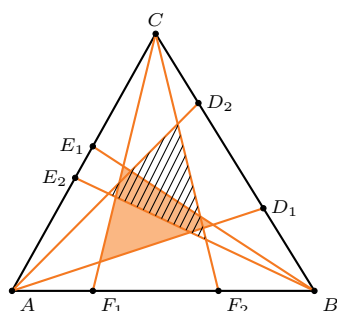
M 1855. W dwunastocyfrowej liczbie A dowolne dwie sąsiednie cyfry tworzą dwucyfrową liczbę pierwszą, przy czym wszystkie te liczby pierwsze (jest ich 11) są parami różne. Jakimi cyframi może kończyć się liczba A ?

M 1856. Króla szachowego ustawiono na pewnym polu szachownicy 8×8 i wykonano nim 64 ruchy tak, że odwiedził wszystkie pola planszy i wrócił na pole początkowe. Ruch nazwiemy *przyjemnym*, jeżeli na skutek jego wykonania zmniejszyła się odległość środka pola, na którym stoi król, od środka szachownicy. Jaka jest największa możliwa liczba przyjemnych ruchów?

M 1857. Na obwodzie trójkąta ABC wybrano punkty $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ w następującej kolejności $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Ponadto

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

Udowodnić, że obwody trójkątów wyznaczonych przez proste AD_1, BE_1, CF_1 oraz AD_2, BE_2, CF_2 są równe.





LHC przestaje działać!

Nie, CERN-owi wcale nie skończyły się fundusze, a fizyka cząstek ma się lepiej niż kiedykolwiek wcześniej. Dlaczego więc nasz największy projekt naukowy zostaje czasowo wstrzymany? Pokróćce wyjaśniamy...

Na początek kilka słów wstępu. LHC (Wielki Zderzacz Hadronów) to akcelerator cząstek zlokalizowany w pobliżu Genewy, służący do badań fizyki wysokich energii. Od 2010 roku dostarcza on dane eksperymentalne, a jego pierwotnym celem było odkrycie bozonu Higgsa. Cel ten udało się osiągnąć już po dwóch latach jego działania, a od tego czasu eksperymenty prowadzone przy LHC koncentrują się na jak najdokładniejszym wyznaczaniu własności tej cząstki.

Po kilkunastu latach pracy dobrze rozumiemy, w jaki sposób bozon Higgsa oddziałuje z bozonami przenoszącymi oddziaływanie elektromagnetyczne i słabe (fotonem, Z^0 i $W^\pm$). Nieco gorzej – choć wciąż na zadowalającym poziomie – poznaliśmy jego sprzężenia z fermionami, w szczególności z kwarkiem b oraz leptonem τ (taonem). Zaobserwowano również rozpady na pary kwarków c oraz mionów; w tych kanałach wciąż brakuje jednak precyzyjnych pomiarów. Dalszy postęp ogranicza dziś przede wszystkim dostępna statystyka danych.

Różnice w czułości pomiarów dla poszczególnych kanałów wynikają z wielu czynników. Najważniejszym z nich jest częstość rozpadu bozonu Higgsa: na przykład rozpad na kwarki b zachodzi w około 58% przypadków, podczas gdy na parę mionów jedynie w około 0,02%. Drugim istotnym czynnikiem jest problem odróżnienia sygnału od tła. Przykładowo, zarówno bozon Higgsa, jak i bozon Z^0 rozpadają się na parę taonów. Rozpady te są bardzo podobne, więc trudno je rozróżnić.

Może się to wydawać kontrintuicyjne, ale pośród petabajtów danych przetwarzanych przez ośrodki obliczeniowe CERN-u brakuje właśnie tych najbardziej interesujących. Zdecydowana większość zdarzeń to przejawy „zwykłej” fizyki – oddziaływań elektromagnetycznych i silnych. Samych bozonów Higgsa wyprodukowano „zaledwie” kilkadziesiąt milionów, jednak ze względu na niewielkie częstości niektórych rozpadów oraz trudności w identyfikacji sygnału w wybranych kanałach analizy opierają się na zaledwie dziesiątkach lub setkach przypadków.

Najprostszym rozwiązaniem wydaje się zwiększenie przepustowości LHC – fachowo nazywanej *światłością* – a tym samym liczby produkowanych bozonów Higgsa. Tu jednak pojawia się ograniczenie natury fizycznej: przy ustalonym obwodzie akceleratora i prędkościach bliskich prędkości światła nie da się po prostu „upchnąć” większej liczby protonów w wiązkę. Zamiast tego protony grupowane są w gęste paczki, zawierające miliardy cząstek, które następnie się zderzają. Efektem ubocznym jest tzw. *pile-up*: pojedyncze zderzenie paczek odpowiada w rzeczywistości kilkudziesięciu jednoczesnym zderzeniom protonów, które trzeba później rozdzielić na etapie analizy danych.

Sposobem na zwiększenie światłości, a tym samym liczby interesujących nas zdarzeń, jest zwiększenie liczby zderzeń przypadających na jedną paczkę protonów.

Niestety, im więcej protonów zderza się jednocześnie, tym trudniej rozdzielić ich produkty. To z kolei wymaga coraz lepszych detektorów – im dokładniej zmierzmy powstające cząstki, tym łatwiej ustalić, z którego zderzenia pochodzą.

Dlatego właśnie Wielki Zderzacz Hadronów wchodzi pod koniec czerwca w stan hibernacji. Przez najbliższe cztery lata LHC będzie wyłączony, aby dać czas głównym detektorom – CMS i ATLAS – na wymianę kluczowych komponentów. Prace technologiczne trwają już od kilku lat i stopniowo wkraczają w fazę produkcji.

Wymiana niektórych elementów detektora jest konieczna także ze względu na ich zużycie. Najbardziej wrażliwą częścią jest detektor śladowy (*tracker*), położony najbliżej punktu zderzenia protonów. Z tego powodu jest on wystawiony na największe dawki promieniowania i przez kilkanaście lat pracy LHC uległ znacznej degradacji – zarówno pod względem czułości, jak i rozdzielczości.

Planowo przerwa potrwa do 2030 roku, kiedy uruchomiony zostanie HL-LHC (od *High Luminosity*), który ma operować przez kolejną dekadę (2030–2041). Najważniejsze zmiany obejmują budowę nowego trackera (detektora mierzącego trajektorie naładowanych cząstek), wysokorozdzielczego kalorymetru HGAL (mierzącego energie hadronów, elektronów i fotonów) oraz zupełnie nowego detektora czasowego o rozdzielczości rzędu 30 ps.

Czytelników zainteresowanych bardziej inżynierskimi aspektami zachęcam do sięgnięcia po dodatkową literaturę na temat nowych detektorów, których konstrukcja znajduje się na granicy współczesnych możliwości technologicznych.

Zgodnie z obecnymi planami w ciągu zaledwie dwóch lat ilość zgromadzonych danych ma się podwoić, a w kolejnych latach tempo ich zbierania jeszcze wzrośnie. Pozwoli to na znacznie dokładniejsze badania rzadkich kanałów rozpadu. Oprócz precyzyjnych pomiarów właściwości bozonu Higgsa planowane są również badania bozonów $W^\pm$ i Z^0 , a także kwarków b i t . Jednym z najbardziej ambitnych celów jest obserwacja produkcji dwóch bozonów Higgsa w jednym procesie, choć obecnie nie jest jasne, czy uda się ją osiągnąć w ramach programu HL-LHC.

Produkcja dwóch bozonów Higgsa jest szczególnie interesująca, ponieważ pozwala zmierzyć siłę oddziaływania bozonu Higgsa na samego siebie.

Warto też zaznaczyć, że nie jest to pierwszy przestój LHC. Wielki Zderzacz Hadronów był już zatrzymywany w latach 2013–2014 oraz 2019–2021. W tych okresach również wymieniano zużyte elementy detektorów i wprowadzano ulepszenia – choć na zdecydowanie mniejszą skalę.

Koniec LHC został więc odłożony w czasie. Nastąpi on najprawdopodobniej po 2041 roku. A co potem – to już zupełnie inna historia...

Wiktor MATYSZKIEWICZ



Bartłomiej PAWLIK

Miesiąc temu przyglądaliśmy się pewnym własnościom podziału płaszczyzny na sześciokąty. Tym razem również będziemy dzielić płaszczyznę, lecz skupimy się na maksymalnej liczbie części, jaką można w ten sposób otrzymać. Dwa klasyczne przykłady w tej tematyce dotyczą prostych i okręgów.

Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n prostych?

Liczba obszarów jest maksymalna tylko wtedy, gdy proste znajdują się w *położeniu ogólnym* (żadne dwie nie są równoległe ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie). Załóżmy bowiem, że do $(n - 1)$ prostych na płaszczyźnie dokładamy kolejną. Jeżeli proste są w położeniu ogólnym, to nowa prosta ma z pozostałymi dokładnie $(n - 1)$ punktów przecięcia – więc jest dzielona na n części (dwie półproste i $(n - 2)$ odcinków). Zatem po dołączeniu do podziału n -tej prostej liczba obszarów zwiększyła się dokładnie o n . W ten sposób wykazujemy, że maksymalna liczba obszarów otrzymanych przy użyciu n prostych to:

$$R_p(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Początkowe wyrazy ciągu $R_p(n)$ to 2, 4, 7, 11 i 16.

Zastanówmy się teraz nad kolejnym pytaniem:

Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n okręgów?

Jeden okrąg dzieli płaszczyznę na dwie części. Gdy w odpowiedni sposób dorysujemy drugi, liczba obszarów zwiększy się o 2. Po odpowiednim dorysowaniu trzeciego okręgu zwiększymy liczbę obszarów o 4, a po narysowaniu czwartego – o 6. Ogólnie, optymalnie ułożonych n okręgów daje liczbę obszarów o $2(n - 1)$ większą niż optymalnie ułożonych $(n - 1)$ okręgów. Dlaczego tak jest? Zachęcam do samodzielnego zastanowienia się nad tym pytaniem.

W każdym razie z powyższej obserwacji wynika, że maksymalna liczba obszarów otrzymanych przy użyciu $n > 0$ okręgów to:

$$R_o(n) = n^2 - n + 2,$$

a początkowe wyrazy ciągu $R_o(n)$ to 2, 4, 8, 14 i 22.

Powyższe dwa zadania należą do klasyki kombinatoryki i często służą dydaktycznie jako jedno z pierwszych przykładów przy wprowadzaniu pojęcia rekurencji.

Połączmy teraz świat okręgów ze światem (pół)prostych: *Lizakiem* nazywamy zbiór punktów będący sumą okręgu i półprostej o początku w środku okręgu, z wyłączeniem promienia okręgu należącego do tej półprostej (patrz rys. 3). Dodajmy, że promień został usunięty z lizaka, zapewne ze względów bezpieczeństwa, aby nie ukłuć się nim podczas ewentualnej konsumpcji. Pod koniec 2025 roku Neil Sloane zadał następujące pytanie:

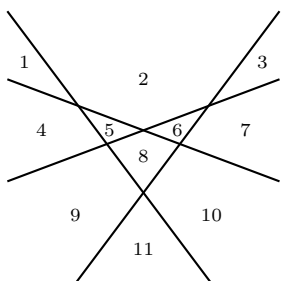
Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n lizaków?

Zauważmy, że dwa lizaki mogą się przeciąć w co najwyżej siedmiu punktach (patrz rys. 4) – i daje to optymalne 10 obszarów. Przy odpowiednim ułożeniu trzech lizaków otrzymujemy największą możliwą liczbę regionów równą 25. Jak wygląda ogólny wzór ciągu? Zapewne jest dość skomplikowany, ale Cutler, Karlsson i Sloane otrzymali ładne oszacowanie górne:

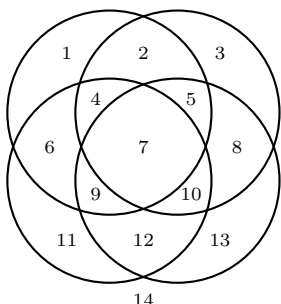
$$R_l(n) \leq \frac{1}{2}(7n^2 - 5n + 2),$$

które niestety nie jest optymalne: ci sami autorzy wykazali, że poprawną odpowiedzią już dla czterech lizaków jest 45, a nie 47. Zapewne lada dzień rozstrzygnie się, czy maksymalna liczba obszarów, którą da się uzyskać, mając do dyspozycji pięć lizaków, to 70 czy 71. A co z sześcioma lizakami? Nie wiadomo.

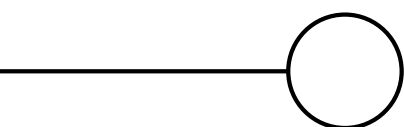
Rys. 1



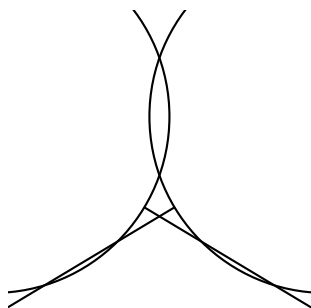
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



David O. H. Cutler, Jonas Karlsson, Neil J. A. Sloane, *Cutting a Pancake with an Exotic Knife* (2025). Sloane na swojej stronie internetowej opublikował również króciutki artykuł *The Lollipop Problem*.

Matematyka nie jest jeszcze gotowa na takie problemy

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski; Max Planck Institute for Software Systems, Kaiserslautern

Henry SINCLAIR-BANKS*

W niniejszym artykule będziemy przyglądać się tzw. funkcji Collatza, która jest zdefiniowana następująco. Dla liczby naturalnej n ,

$$c(n) := \begin{cases} 3n + 1 & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ \frac{n}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Na przykład $c(5) = 16$ oraz $c(16) = 8$.

							19
	9						58
	28						29
	14						88
				15			
				46			44
7	7						
22	22			23			22
11	11	11		70			11
34	34	34		35			34
17	17	17		106	17		17
52	52	52		53	52		52
26	26	26		160	26		26
13	13	13	13	80	13		13
40	40	40	40	40	40		40
20	20	20	20	20	20	20	21
10	10	10	10	10	10	10	64
5	5	5	5	5	5	5	32
16	16	16	16	16	16	16	16
8	8	8	8	8	8	8	8
4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1
:	:	:	:	:	:	:	:

Rys. 1. Ciągi Collatza dla wybranych wartości początkowych

Dla wygody i -krotne złożenie funkcji Collatza będziemy oznaczać przez c^i , przykładowo $c^2(5) = 8$. Funkcję Collatza można iterować dowolnie wiele razy, bo dla dowolnego naturalnego n mamy $c(n) \geq 1$. Na przykład dla $n = 5$ ciąg Collatza to 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ..., cykl (4, 2, 1) powtarza się tu w nieskończoność. Na rysunku 1 możemy zobaczyć więcej przykładów.

W świetle tych przykładów wydaje się, że startując z dowolnej liczby, w końcu osiągniemy cykl (4, 2, 1). To jest dokładnie *Hipoteza Collatza*. Formalnie rzecz biorąc, hipoteza ta mówi, że dla dowolnej liczby n istnieje k takie, że $c^k(n) = 1$.

Udowodnienie hipotezy Collatza jest jednym ze sławnych problemów otwartych w matematyce. Hipotezę przypisuje się przede wszystkim Lotharowi Collatzowi (1937), jednak istnieje kilka twierdzeń powiązanych z jej pierwotnym autorem. W związku z tym hipoteza funkcjonuje pod wieloma nazwami, takimi jak: *ciąg liczb gradowych*, *problem* $(3n + 1)$, *problem syrakuzjański*, *hipoteza Thwaitesa*, *hipoteza Ulama* czy *hipoteza Kakutaniego*.

Opóźnieniem liczby n nazwiemy liczbę iteracji funkcji Collatza przed zbiegnięciem do 1, oznaczamy je $d(n)$. Precyzyjnie: $d(n)$ to najmniejsze k takie, że $c^k(n) = 1$. Przykładowo $d(5) = 5$. Łatwo zauważyć, że $d(2n) = d(n) + 1$, bo $2n$ jest zawsze parzyste. Co ciekawe, nawet małe wartości startowe mogą mieć olbrzymie opóźnienia: ciąg Collatza startujący z $n = 27$ osiąga po drodze 9232, nim ostatecznie trafi do 1 po $d(27) = 111$ iteracjach. Liczba n jest *rekordem opóźnienia*, jeśli jej opóźnienie $d(n)$ jest większe niż opóźnienie każdej liczby mniejszej niż n . Dla przykładu 7 jest rekordem opóźnienia, bo opóźnienia 1, 2, 3, 4, 5 i 6 są mniejsze niż $d(7) = 16$. Tabelę rekordów opóźnienia możemy zobaczyć na rysunku 2.

Zaskakująca natura funkcji Collatza, która objawia się podobieństwami pomiędzy ciągami Collatza na rysunku 1 oraz wydaje się losowymi wartościami opóźnień na rysunku 2, sugeruje, że udowodnienie hipotezy Collatza nie będzie proste! Faktycznie, wielu znanych matematyków pracowało nad tym problemem, sporo już wiemy, ale pełny dowód nie został (jeszcze) znaleziony. Jeffrey Lagarias, znawca hipotezy Collatza, mówi: *To jest wyjątkowo trudny problem, zupełnie poza zasięgiem dzisiejszej matematyki*. Może bardziej znane jest powiedzenie Paula Erdősa, który zapytany o hipotezę Collatza odpowiedział: *Matematyka nie jest jeszcze gotowa na takie problemy*.

Tak jak przy każdym problemie otwartym, mamy dwie naturalne linie ataku: udowodnić hipotezę lub ją obalić. W pozostałej części tego artykułu skupimy się na twierdzeniach i argumentach, które wspierają tezę, że hipoteza jest prawdziwa. Nim to jednak zrobimy, rozważmy możliwość istnienia kontrprzykładu. Są dwa potencjalne typy kontrprzykładów. Pierwszy typ to jakiś cykl, który nie jest trywialnym cyklem (4, 2, 1), a drugi typ to ciąg Collatza, który jest rozbieżny do nieskończoności. Hipoteza Collatza była intensywnie sprawdzana przez komputerowe testy. Od maja 2025 roku wiadomo, że dla wszystkich startowych $n \leq 2^{71}$ ciąg Collatza rzeczywiście osiąga 1. Jeśli chodzi o cykle, to pokazano, że o ile istnieje jakiś nietrywialny cykl będący kontrprzykładem, to jego długość musi wynosić co najmniej $355\,504\,839\,929 \approx 2^{38}$. Jak widać dane sugerują, że zapewne hipoteza Collatza faktycznie jest prawdziwa!

Nim pójdziemy dalej, wprowadźmy zmodyfikowaną wersję funkcji Collatza:

$$s(n) := \begin{cases} \frac{3n+1}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ \frac{n}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

n	$d(n)$	maks.
1	0	1
2	1	2
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
23	25	160
27	111	9232
54	112	9232
73	115	9232
97	118	9232
129	121	9232
:	:	:
871	178	190996
1161	181	190996
:	:	:
6171	261	975400
10971	267	975400
:	:	:
77031	350	21933016
106239	353	104674192
:	:	:
837799	524	2974984576

Rys. 2. Wybrane rekordy opóźnienia oraz maksymalne wartości ich ciągów Collatza, dla $n < 2^{20}$

```

n ← 0
while true:
  m ← n
  while m > 1:
    if m % 2:
      m ← m/2
    else:
      m ← (3m+1)/2
  print(m)

n ← 0
while true:
  m ← n
  while m >= n:
    if m % 2:
      m ← m/2
    else:
      m ← (3m+1)/2
  print(m)

```

Szybowania są bardzo przydatne w praktyce. Powiedzmy, że sprawdziliśmy hipotezę Collatza aż do $n - 1$. Jak omówiliśmy powyżej, jeśli istnieje k takie, że $s^k(n) \in \{1, \dots, n - 1\}$, to wówczas dla n ciąg również zbiega do 1. Jak widać więc, procedura testująca po **prawej** jest o wiele bardziej efektywna niż ta po lewej.

Co prawda dane wskazują na to, że hipoteza Collatza jest prawdziwa, ale dowodu wciąż nie ma. Znane jest natomiast zbliżone twierdzenie, które używa frazy „prawie wszystkie”. Konkretnie: w roku 1976 Rino Terras udowodnił, że **prawie wszystkie liczby naturalne mają skończone szybowanie**. Rozszyfrujmy najpierw sformułowanie „prawie wszystkie”. Oznacza ono, że gdy N rośnie do nieskończoności, to frakcja ciągów Collatza startujących z $n \leq N$, które spadają poniżej startowej wartości, dąży do 1. Bardziej precyzyjnie,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{n \text{ takie, że } n \leq N \text{ oraz } g(n) < \infty\}|}{N} = 1.$$

Żeby zobaczyć, dlaczego twierdzenie Terrasa jest ważne, przyjrzyjmy się, co by się stało, gdybyśmy usunęli

niep.	19	51	83	115	147	179
niep.	29	77	125	173	221	269
parz.	44	116	188	260	332	404
parz.	22	58	94	130	166	202
niep.	11	29	47	65	83	101
???	17	44	71	98	125	152
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Przykład dla pierwszego faktu, $k = 5$ i $b = 19$. Następujące liczby mają te same ciągi parzystości w pierwszych pięciu krokach (patrz tabela powyżej).

$$\begin{aligned}
0 \cdot 2^5 + 19 &= 19, & 1 \cdot 2^5 + 19 &= 51, \\
2 \cdot 2^5 + 19 &= 83, & 3 \cdot 2^5 + 19 &= 115, \\
4 \cdot 2^5 + 19 &= 147, & 5 \cdot 2^5 + 19 &= 179.
\end{aligned}$$

Drugi fakt mówi nam, że wszystkie ciągi parzystości są możliwe. Na przykład łatwo zauważyć, że $(0, 0, 0, 0, 0)$ jest ciągiem parzystości dla liczby 32: 32, 16, 8, 4, 2. Natomiast znalezienie ciągu o parzystości $(1, 1, 1, 1, 1)$ jest mniej oczywiste, ale on również istnieje i zaczyna się od liczby 31: 31, 47, 71, 107, 161.

Ta definicja jest zasadniczo równoważna oryginalnej wersji funkcji Collatza. Jeśli n jest nieparzyste, to $3n + 1$ musi być parzyste, a więc po każdym kroku zastosowanym do liczby nieparzystej następuje krok $\frac{n}{2}$.

Wyobraźmy sobie na chwilę, że weryfikujemy hipotezę i sprawdziliśmy już, że dla wszystkich $n \leq 1000$ ciąg Collatza osiąga 1. Teraz chcemy zobaczyć, co się dzieje dla $n = 1001$.

Zauważmy, że nie musimy pracować liczyć, że $s(1001) = 1502$, $s(1502) = 751$, $s(751) = 1127$, ... aż napotkamy 1, bo wystarczy, że ciąg zejdzie poniżej 1001. Wtedy już wiemy, że w końcu osiągnie 1, tak jak dla wszystkich liczb $n \leq 1000$. Korzystając z tej obserwacji, zdefiniujmy *szybowanie* liczby n , oznaczane przez $g(n)$, jako liczbę iteracji, do czasu gdy zmodyfikowany ciąg Collatza $s^k(n)$ spadnie poniżej początkowej wartości. Formalnie $g(n)$ to najmniejsza liczba k taka, że $s^k(n) < n$. Przykładowo wystarczy tylko dwie iteracje zmodyfikowanej funkcji Collatza dla $n = 1001$, aby osiągnąć 751, więc $g(1001) = 2$. Na marginesie możemy zobaczyć, jak użyć pojęcia szybowania do bardziej efektywnego testowania hipotezy Collatza.

frazę „prawie” i udowodnili silniejsze sformułowanie: „wszystkie liczby naturalne mają skończone szybowanie”. Mając taki fakt, byłoby już łatwo udowodnić hipotezę Collatza przez indukcję. Przypuśćmy, że wszystkie ciągi Collatza zaczynające się liczbami $1, \dots, n$ zbiegają do 1. Dzięki wzmocnionej wersji twierdzenia Terrasa wiemy, że $n + 1$ ma skończone szybowanie. A zatem istnieje k takie, że $s^k(n + 1) \leq n$. To jednak oznacza, że ciąg Collatza zaczynający się w $n + 1$ po k krokach osiągnie liczbę z zakresu $1, \dots, n$, a więc ostatecznie również zbiegnie do 1. Skoro to wzmocnienie jest równoważne hipotezie Collatza, to pozostaliśmy przy rozważaniu oryginalnej wersji twierdzenia Terrasa. Dla jasności: nie wiadomo nic o tym, żeby twierdzenie Terrasa implikowało hipotezę Collatza.

W pozostałej części artykułu naszkicujemy dowód twierdzenia Terrasa. Na początek rozważmy pięć pierwszych elementów zmodyfikowanego ciągu Collatza startującego z 19, są to: 19, 29, 44, 22, 11. Jego *ciąg parzystości* to ciąg zer i jedynek odpowiadający parzystościom odpowiednich wyrazów: $\mathbf{p}_5 = (1, 1, 0, 0, 1)$. Liczba 5 odpowiada długości ciągu parzystości. Zaobserwujmy najpierw dwa eleganckie fakty na temat ciągów parzystości.

Pierwszy fakt mówi, że jeśli b ma ustaloną wartość, to wszystkie ciągi startujące w liczbach $0 \cdot 2^k + b, 1 \cdot 2^k + b, 2 \cdot 2^k + b, 3 \cdot 2^k + b, \dots$ mają te same ciągi parzystości $\mathbf{p}_k$ długości k (patrz przykład na marginesie). Drugi fakt mówi, że dla *każdego* ciągu parzystości $\mathbf{p}_k$ długości k istnieje liczba n z ciągiem parzystości równym dokładnie $\mathbf{p}_k$ (patrz margines). Oba fakty mogą być stosunkowo nietrudno wykazane przez indukcję, ale teraz zajmijmy się ciekawszymi sprawami.

Łącząc oba fakty, uzasadnimy następującą obserwację. Niech n oraz n' będą dwoma startowymi liczbami i niech $\mathbf{p}_k$ oraz $\mathbf{p}'_k$ będą ciągami parzystości długości k odpowiednio dla liczb n oraz n' . Wówczas $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}'_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $n - n'$ jest podzielna przez 2^k . Po pierwsze, jeśli $n - n'$ jest podzielne przez 2^k , to mamy $n = a2^k + b$ oraz $n' = a'2^k + b$ dla pewnych $a, a', b \in \mathbb{N}$ i wówczas z pierwszego faktu wynika, że istotnie $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}'_k$. Z drugiej strony dla każdego ciągu parzystości istnieje liczba startowa, która daje ten ciąg parzystości. Ponieważ jest 2^k różnych ciągów parzystości długości k oraz 2^k różnych reszt modulo 2^k (tzn. wyborów wartości b), to musi istnieć bijekcja pomiędzy ciągami parzystości a resztami. A zatem, jeśli n oraz n' mają te same ciągi parzystości, to n oraz n' muszą mieć równe reszty modulo 2^k .

Będziemy teraz przybliżać zmodyfikowany ciąg Collatza. Przyjrzyjmy się przykładowi dla ciągu parzystości $(1, 1, 0, 0, 1)$. Po pierwszym kroku wartość $n = 19$ wzrosła do $\frac{3n+1}{2} = 29$, a po drugim wzrosła ponownie do $\frac{9n+5}{4} = 44$.

Następnie dwa razy zmalała dwukrotnie do $\frac{9n+5}{8} = 22$ oraz $\frac{9n+5}{16} = 11$. Ostatecznie wartość wzrosła do $\frac{27n+31}{32} = 17$. Możemy przybliżyć z dołu wartość zmodyfikowanego ciągu Collatza, ignorując stałe wartości w licznikach.

$$\begin{array}{ccccccccc} n & \rightarrow & \frac{3n+1}{2} & \rightarrow & \frac{3^2n+5}{2^2} & \rightarrow & \frac{3^2n+5}{2^3} & \rightarrow & \frac{3^2n+5}{2^4} & \rightarrow & \frac{3^3n+31}{2^5} \\ \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\ n & & \frac{3n}{2} & & \frac{3^2n}{2^2} & & \frac{3^2n}{2^3} & & \frac{3^2n}{2^4} & & \frac{3^3n}{2^5} \end{array}$$

Żeby zobaczyć, dlaczego ciąg parzystości $(1, 1, 0, 0, 1)$ zbiega, rozważmy prefiks $(1, 1, 0, 0)$, który ma $d = 2$ nieparzyste kroki spośród $\ell = 4$. Przybliżoną wartością $s^4(n)$ jest $\frac{3^2n}{2^4}$. Ponieważ $3^2 < 2^4$, to przybliżona wartość spada poniżej startowej wartości, czyli $\frac{3^2n}{2^4} < n$. A zatem również dla każdego n o tym ciągu parzystości przybliżone szybowanie wynosi 4 ($\tilde{g}(n) = 4$).

Przybliżone szybowanie jest tak dokładne, że nawet nie jest znana liczba n taka, że $g(n) \neq \tilde{g}(n)$. Co więcej, stawiana jest hipoteza, że zawsze $\tilde{g}(n)$ jest równe $g(n)$!

Ponieważ usunęliśmy jedynie stałe wartości w licznikach, to ta aproksymacja przybliży prawdziwą wartość z dobrą dokładnością. Powiemy, że ciąg parzystości $\mathbf{p}_k$ jest *zbieżny*, jeśli przybliżony ciąg Collatza spada poniżej wartości początkowej. Precyzyjniej mówiąc, jeśli istnieje taki prefiks $\mathbf{p}_k$ długości ℓ , o d nieparzystych krokach, że $3^d < 2^\ell$, to $\mathbf{p}_k$ jest zbieżny. Dla liczby n o zbieżnym ciągu parzystości $\mathbf{p}_k$ mówimy, że minimalne $\ell \leq k$ takie, że $3^d < 2^\ell$, jest *przybliżonym szybowaniem* dla n , oznaczamy je $\tilde{g}(n)$.

Przybliżone szybowanie okazuje się całkiem dokładne. Przyjrzyjmy się ciągowi parzystości $\mathbf{p}_k$, który zbiega w k -tym kroku. Ponieważ zbiega on w ostatnim kroku, to dowolna liczba n o tym ciągu parzystości spełnia $\tilde{g}(n) = k$. Pokażemy teraz, że dla dużych liczb n o ciągu parzystości $\mathbf{p}_k$ szybowanie oraz przybliżone szybowanie są równe.

Po pierwsze $g(n) \geq \tilde{g}(n)$. Przypomnijmy, że przybliżona wartość zmodyfikowanej funkcji Collatza nigdy nie jest większa niż wartość zmodyfikowanej funkcji Collatza. A zatem jeśli $\tilde{g}(n) = k$, to wartości przybliżonego ciągu są powyżej n przez $k - 1$ pierwszych kroków, a więc również i prawdziwe wartości zmodyfikowanego ciągu Collatza są powyżej n przez $k - 1$ pierwszych kroków. A to oznacza, że $g(n) \geq k$.

Z drugiej strony pokażemy, że $g(n) \leq \tilde{g}(n)$. Jeśli $\tilde{g}(n) = k$, to wiemy, że k -ty krok przybliżonego ciągu, czyli $\frac{3^d n}{2^k}$, schodzi poniżej wartości n , a więc $\frac{3^d}{2^k} < 1$. Wiemy, że istnieje stała C taka, że $s^k(n) = \frac{3^d n + C}{2^k}$ (np. dla $n = 19$ stała C wynosi 31). A zatem różnica między wartością $s^k(n)$ a jej przybliżoną wartością jest stałą, która nie zależy od n :

$$s^k(n) - \frac{3^d n}{2^k} = \frac{3^d n + C}{2^k} - \frac{3^d n}{2^k} = \frac{C}{2^k}.$$

Spójrzmy teraz na różnicę pomiędzy przybliżoną wartością zmodyfikowanej funkcji Collatza po k krokach a początkową wartością n : $n - \frac{3^d n}{2^k} = n(1 - \frac{3^d}{2^k})$. Ponieważ $\frac{3^d}{2^k} < 1$, więc oczywiście $1 - \frac{3^d}{2^k} > 0$. Dla każdej stałej $C' \geq 0$ istnieje dostatecznie duże n takie, że $n - \frac{3^d n}{2^k} > C'$. A zatem dla $C' = \frac{C}{2^k}$ otrzymujemy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi:

$$s^k(n) = \frac{3^d n}{2^k} + \frac{C}{2^k} < n.$$

To oznacza, że dla takich n szybowanie $g(n)$ jest równe przybliżonemu szybowaniu $\tilde{g}(n)$. Na marginesie przedstawiamy przykład dla $n = 19$.

Ponieważ dla każdego ciągu parzystości $\mathbf{p}_k$ istnieje próg, powyżej którego szybowanie oraz przybliżone szybowanie są równe, to w szczególności dla ustalonego ciągu parzystości istnieje jedynie skończenie wiele liczb n o tym ciągu parzystości, dla których $g(n)$ jest różne od $\tilde{g}(n)$.

Uzasadnimy teraz, że prawie wszystkie ciągi parzystości są zbieżne. Rysunek 3 pokazuje frakcję zbieżnych ciągów parzystości dla różnych długości ciągu. Zauważmy, że jeśli ciąg parzystości $\mathbf{p}_k$ zawiera taką samą liczbę parzystych i nieparzystych kroków, to jest zbieżny. Wynika to z faktu, że każdy parzysty krok mnoży liczbę n przez $1/2$, a każdy nieparzysty krok przez $3/2$, więc jeśli w ciągu będzie k kroków parzystych i k nieparzystych, to ostateczna wartość wyniesie $\frac{3^k}{2^k} n = \frac{3}{4} n < n$. Można też na sprawę spojrzeć nieco inaczej: okazuje się, że losowo wybrany ciąg parzystości prawdopodobnie jest zbieżny. Żeby ciąg parzystości długości k nie był zbieżny, to musi on zawierać przynajmniej $d \geq \frac{k}{\log_2(3)} > 0,6k$ nieparzystych kroków. Jest tak dlatego, że po $k - d$ parzystych

Wiemy, że dla każdego n o ciągu parzystości $(1, 1, 0, 0, 1)$ zachodzi $s^5(n) = \frac{3^3n+31}{2^5}$. Pytamy, kiedy $s^5(n) < n$.

Jest to równoważne $\frac{3^3n+31}{2^5} < n$, czyli również $n > \frac{31}{5} = 6,2$. A więc dla wszystkich $n > 6,2$ przybliżone szybowanie n jest równe szybowaniu n . Ponieważ 19 ma taki właśnie ciąg parzystości oraz $19 > 6,2$, to $g(19) = \tilde{g}(19)$.

długość k	#zbieżnych	%zbieżnych
1	1	50
2	3	75
3	6	75
4	13	81.25
5	28	87.5
6	56	87.5
7	115	89.84
8	237	92.58
9	474	92.58
10	960	93.75
...	...	...
20	1 021 248	97.39
...	...	...
30	1 060 970 550	98.81

Rys. 3. Liczba oraz frakcja (zaokrąglona do 2 cyfr po przecinku) zbieżnych ciągów parzystości. Zauważmy, że jest 2^k ciągów parzystości długości k

krokach i d nieparzystych krokach przybliżona wartość wynosi $\frac{3^d n}{2^k}$. A więc żeby $\frac{3^d n}{2^k} \geq n$ zachodziło, to liczba nieparzystych kroków musi spełniać $d \geq \frac{k}{\log_2(3)}$. Możemy teraz zastosować nierówność Chernoffa, żeby zaargumentować, że prawie wszystkie ciągi parzystości zawierają mniej niż $\frac{k}{\log_2(3)}$ nieparzystych kroków. Tak naprawdę użyjemy uproszczonej wersji nierówności Chernoffa, którą można sformułować następująco: dla dowolnego $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ prawdopodobieństwo, że na k rzutów uczciwą monetą wypadnie co najmniej $(\frac{1}{2} + \alpha)k$ orłów, wynosi co najwyżej $e^{-2\alpha^2 k}$. Ponieważ $\frac{1}{\log_2(3)} - \frac{1}{2} > 0,1$, to możemy wziąć $\alpha = 0,1$ i dostajemy, że prawdopodobieństwo, że losowy ciąg parzystości długości k jest zbieżny z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - e^{-2(0,1)^2 k} = 1 - e^{-\frac{k}{50}}$. Dla k dążącego do nieskończoności to prawdopodobieństwo dąży do 1, czyli faktycznie prawie wszystkie ciągi parzystości są zbieżne.

Podsumujmy teraz i połączmy w całość wszystkie kawałki dowodu twierdzenia Terrasa. Pokazaliśmy właśnie, że frakcja ciągów parzystości $\mathbf{p}_k$, które nie zbiegają, dąży do zera, gdy długość k dąży do nieskończoności. Przypomnijmy, że jeśli $\mathbf{p}_k$ jest zbieżny, to wtedy wszystkie liczby n o tym ciągu parzystości spełniają $\tilde{g}(n) \leq k < \infty$. Dodatkowo wiemy z poprzednich rozważań, że dla danego ciągu parzystości istnieje tylko skończenie wiele liczb n takich, że $g(n) \neq \tilde{g}(n)$. Łącząc te fakty, możemy wywnioskować, że dla prawie wszystkich n zachodzi $g(n) = \tilde{g}(n) < \infty$. Innymi słowy, **prawie wszystkie liczby mają skończone szybowanie**.

Okazuje się, że znane są nawet wyniki silniejsze niż twierdzenie Terrasa. Dwa tego typu twierdzenia mówią, że minimalna wartość ciągu Collatza $n, c(n), c^2(n), \dots$ jest prawie zawsze równa co najwyżej n^θ . Zauważmy, że jeśli $\theta < 1$, to wtedy $n^\theta < n$, czyli szybowanie n

jest skończone. Pierwsze z tych twierdzeń udowodnił Allouche (w roku 1979) dla $\theta \approx 0,8691$. Następnie wynik ten poprawił Korec (w roku 1994) dla $\theta \approx 0,7924$. Niedawno, w 2019 roku, Terrence Tao udowodnił podobny rezultat: dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ takiej, że $f(n)$ dąży do nieskończoności przy n rosnącym do nieskończoności, minimalna wartość ciągu Collatza startującego z n jest prawie zawsze* mniejsza niż $f(n)$. A więc wybierzmy naszą ulubioną funkcję, która dąży do nieskończoności – może to być przykładowo $\log(\log(\log(n)))$ – i wówczas wiemy, że prawie wszystkie liczby n osiągają wartość mniejszą niż $\log(\log(\log(n)))$, imponujące!

*Pewną wadą wyniku Tao jest to, że „prawie wszystkie” jest tu używane zgodnie z logarytmicznym rozkładem miary, a nie typowym, naturalnym rozkładem.

Chociaż wydaje się, że już jesteśmy „prawie na miejscu”, to jednak luka pomiędzy twierdzeniami Terrasa, Allouche’a, Koreca czy Tao a udowodnieniem hipotezy Collatza wydaje się wymagać istotnie nowego podejścia, spostrzeżeń i pomysłów. Nie wiadomo, czy któreś ze wspomnianych twierdzeń może być użyte do dowodu, że prawie wszystkie liczby startowe mają skończone opóźnienie. Przypomnijmy, że opóźnienie to liczba kroków do czasu osiągnięcia 1, w odróżnieniu od szybowania, które jest liczbą kroków do osiągnięcia liczby mniejszej niż startowa. Nawet jeśli ktoś pokazałby, że prawie wszystkie liczby startowe mają skończone opóźnienie, to wciąż nie wiadomo byłoby, czy rzeczywiście wszystkie (a nie prawie wszystkie) liczby startowe mają skończone opóźnienie. Inaczej mówiąc, nawet jeśli pokażemy wersję hipotezy Collatza dla „prawie wszystkich liczb”, to wciąż pozostaje sporo pracy do udowodnienia pełnej hipotezy Collatza. A swoją drogą, jest całkiem możliwe, że w ogóle hipoteza Collatza jest fałszywa, a odkrycie minimalnego kontrprzykładu tuż za rogiem!

Przetłumaczone z języka angielskiego przez Wojciecha CZERWIŃSKIEGO



Piękno nieoczywiste

Każdy przyzwoity biolog popularyzator powinien przynajmniej raz w życiu napisać o gołcach. I ja pragnę dołączyć do tego zacnego grona.

Gatunek ten pasjonuje naukowców z wielu ważnych powodów, ja zacznę od jego urody. Jest zdecydowanym faworytem w konkursie na najbrzydszego ssaka, a może nawet w ogóle zwierzę, na Ziemi. Za śliczne uznajemy zwierzęta obdarzone gęstym futerkiem, dużymi oczami, uszami i zgrabnymi ruchami. Golec zgodnie z angielską nazwą (*naked mole rat*) jest nagim ni to szczurem, ni to kretem. I choć ludzie lubią nagą skórę u własnego gatunku, ma być gładka, brzoskwiniowa, to tu mamy problem. Pomarszczona i cienka skóra golca jest, owszem, różowa, ale w brązowe plamki, jak ręka starego człowieka, porastają ją tu i ówdzie pojedyncze długie włoski. Zwierzę bardzo źle widzi, ma małe, pokryte grubymi powiekami oczy (odbiera jedynie wrażenie światła), nie ma małżowin usznych, a z pyska wystają dwie pary potężnych siekaczy. Całości dopełnia jego kształt, budowę golec przypomina kielbaskę – nie ma wyraźnie wyodrębnionej głowy, szyi i tułowia, a łapki są rachityczne.

Kiedy mija pierwszy odruch lekkiego obrzydzenia i rodzaju współczucia, natura gołców wciąga. Im bardziej się przyglądam, tym bardziej widzę ukryte piękno.

Golec piaskowy (*Heterocephalus glaber*) to gatunek gryzonia zamieszkujący pustynne obszary Afryki Wschodniej (Kenia, Somalia, Etiopia i Dżibuti). Golce są jednym z dwóch gatunków ssaków, które żyją w koloniach o strukturze eusocjalnej, znanej lepiej u owadów (pszczoł czy mrówek), z podziałem na kasty. Na szczycie hierarchii stoi królowa, jedyna zdolna do rozrodu samica, mająca do dyspozycji od jednego do trzech samców. Reszta osobników to robotnicy i żołnierze, którzy dbają o rozwój kolonii, poszukują pokarmu, opiekują się młodymi, bronią przed intruzami i drapieżnikami. Kolonie tworzy od kilkudziesięciu do blisko 300 osobników, a zasięg wykopywanych korytarzy osiąga nawet 3 km. Golce, przebywając praktycznie całe życie pod ziemią, w gorącym klimacie nie potrzebują futra, utraciły też zdolność do termoregulacji, wydobyte na powierzchnię nie utrzymują właściwej ssakom stałej temperatury ciała.

W wąskich korytarzach i całkowitej ciemności mankamenty urody znikają. Nie ma tu nic zbędnego. Kiełbaskowate ciało umożliwia przemieszczanie się równie sprawnie w przód, jak i w tył. Mijając się, po prostu po sobie przechodzą. Cienka i pomarszczona skóra swobodnie przesuwana się po ciele zwierzęcia, przyciskanie się nie powoduje dyskomfortu i nie wpływa na narządy wewnętrzne. Długie pojedyncze włoski na ciele golca to wibrysy, czyli włosy czuciowe, które pozwalają mu się orientować w ciemności całym ciałem. W odróżnieniu od kretów, golce kopią korytarze w twardej pustynnej ziemi wystającymi poza jamę gębową zębami, dzięki czemu niewielkie odnóża mogą służyć jedynie do przemieszczania się. Królowa, w dobrych warunkach, rodzi młode mniej więcej co 80 dni, przy czym i tu golce są rekordzistami: wielkość miotu może przekraczać nawet 30 młodych. Są one otaczane troskliwą opieką przez robotnice, a karmione na zmiany przez matkę. Choć tu królowa mogłaby się jawić jako wąż wielodzietna matka karmiąca, cała struktura społeczna jest zbudowana na jej agresywnym zachowaniu. Bezustannie szturcha otaczające ją robotnice i robotników, generując stały poziom stresu. Stres hamuje ich płodność. Jest to jednak stan odwracalny. Utrata królowej (jej śmierć lub usunięcie z kolonii) rozpoczyna okres chaosu i brutalnej walki o tron. Bezwzględna i najbardziej agresywna samica zostaje nową królową.

Niezwykłe życie społeczne golców sprawiło, że z naturalnych siedlisk trafiły do laboratoriów. I tam dopiero ukazały się dziwy. Okazało się, że golce mimo niewielkich rozmiarów (ok. 7–10 cm) bardzo długo żyją. Szacunki mówią, że te niewiele większe od myszy gryzonie mogą żyć (przynajmniej w hodowli) ponad 30 lat (odnalazłam informację o osobniku 37-letnim). Na dodatek nie podlegają prawu Gompertza, które mówi, że od momentu osiągnięcia dojrzałości wraz z wiekiem u zwierząt rośnie prawdopodobieństwo śmierci. Ciało golca nie nosi uznanych przez naukę oznak starzenia się, również na poziomie komórkowym. Ich organy i funkcje życiowe, także rozmnażanie, pozostają w zasadzie niezmiennie z upływem czasu. Golce właściwie

nie chorują, do niedawna uważano, że nie rozwijają się u nich nowotwory, obecnie uznaje się, że zdarza się to niezmiernie rzadko. Nie odczuwają pewnego rodzaju bólu, znoszą wysoką zawartość dwutlenku węgla i niski poziom tlenu, są nawet w stanie przeżyć 18 minut całkowicie pozbawione tlenu.

Wszystko to zawdzięczają kilku niezwykłym mechanizmom adaptacyjnym na poziomie komórkowym. Lepiej działają u nich systemy obrony przed uszkadzającymi białka i DNA wolnymi rodnikami, aktywniejsze są enzymy naprawiające uszkodzenia. W warunkach niskiej zawartości tlenu w otoczeniu przestawiają swój metabolizm, czerpiąc energię z rozkładu fruktozy, który nie wymaga, jak w przypadku glukozy, obecności tlenu. Trudne warunki środowiska powodują zwolnienie metabolizmu, spada tempo bicia serca, liczba oddechów, a nawet aktywności mózgu. To tak, jakby golce funkcjonowały fizjologicznie w trybie on-off, w zależności od warunków otoczenia.

Jeśli ktoś z szanownych Czytelników pozazdrościł golcom, przypomnę, że zwierzęta te mają to wszystko, ponieważ żyją w paskudnym dla nas świecie. W wąskich korytarzach panuje całkowita ciemność oraz wysoka wilgotność i temperatura (ok. 42°C). Trudno o dobrą wentylację, stąd stężenie tlenu miejscami jest niskie, a dwutlenku węgla wysokie. Na końcu: życie kolonii uzależnione jest od znalezienia pokarmu po omacku, pod ziemią. Golce odżywiają się dużymi bulwami, które dostarczają nie tylko energii, ale także wody. Jedna bulwa może wykarmić całe gniazdo, jednak znalezienie jej pod ziemią przekracza możliwości jednego czy kilku osobników. Tylko zbiorowy wysiłek nieustannego kopania tuneli daje szansę na przetrwanie.

Sposób funkcjonowania społecznego golców wzbudza jednak wątpliwość. Jaki sens ma dominacja jednej samicy, zawężenie całej kolonii do kolejnych braci i siostr o małej zmienności genetycznej? Czy agresja ze strony królowej nie jest czynnikiem destabilizującym współpracę i relacje w grupie? Artykuł z kwietnia br. w *Science Advances* opisuje nowy, nieznany dotąd mechanizm przejścia władzy w kolonii golców. W warunkach indukowanych w laboratorium udało się doprowadzić do pojawienia się trzech płodnych samic w jednej kolonii i do przejścia „władzy” przez jedną z nich bez przejawów agresji i śladów walki. Pokojowe przejście tronu nastąpiło w warunkach przedłużającego się stresu dla całej kolonii.

Golce walczą brutalnie o władzę wtedy, kiedy warunki są relatywnie stałe i dobre. Kiedy dzieje się źle, nastaje pokój, spada agresja, zwiększają się szanse na regenerację kolonii. Pięknie. Zupełnie odwrotnie niż u nas – i tu akurat można by wziąć przykład.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

„Peaceful queen succession in the naked mole rat”. Abeywardena S. C. i wsp., *Science Advances* 12 (2026).

„Forever young? Naked mole rats may know the secret”. Kupferschmidt K., *Science* 356 (2018).

„Naked Mole-Rats Demonstrate Profound Tolerance to Low Oxygen, High Carbon Dioxide, and Chemical Pain”. Amoroso V. G. i wsp. *Animals* 13 (2023).

Od równowagi szczegółowej do rozkładu Fermiego–Diraca

* Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Krzysztof PAWŁOWSKI*

Czytelniku, czy wiesz, że gdy czytasz ten artykuł, cząsteczki powietrza odbijają się od Ciebie, ogrzewają Cię, wywierają na Ciebie ciśnienie i zderzają się ze sobą. Są w ciągłym ruchu, ale jako całość tworzą stan równowagi i pozornie „nic wokół Ciebie się nie dzieje”. Ta stabilność wynika z zasady równowagi szczegółowej – bohaterki tego artykułu. Popatrzmy, jak ta intuicyjna i bardzo ogólna zasada, stosująca się do wszystkich układów fizycznych, pozwala wyprowadzić wielkie równania fizyki statystycznej: rozkład Boltzmanna, rozkład Bosego–Einsteina oraz rozkład Fermiego–Diraca.

Przyjrzyjmy się powietrzu w stanie równowagi. Niektóre cząsteczki powietrza są szybkie, inne wolne. Gdybyśmy przyjrżeli się im z bliska, zobaczylibyśmy, że ich prędkości często zmieniają się na skutek zderzeń. Pomimo tych ciągłych zmian powietrze wokół nas nie wypłynie nagle z naszego pokoju ani nie zacznie się samoistnie nagrzewać. To oznacza, że w świecie mikroskopowym prędkości i położenia cząstek zmieniają się, pozostając blisko globalnych średnich. Aby to miało miejsce, każde fizyczne zdarzenie i zdarzenie do niego przeciwne powinny zachodzić średnio tak samo często – wtedy układ będzie „globalnie” stabilny. To jest właśnie zasada równowagi szczegółowej – stwierdzenie, że dla dowolnego procesu w układzie równowagowym proces do niego odwrotny powinien zachodzić z tym samym prawdopodobieństwem. Jeśli więc w gazie dwie cząstki o energiach E_1 i E_2 zderzają się ze sobą tak, że po zderzeniu ich energie wynoszą E_3 i E_4 , to proces odwrotny – spotkanie się dwóch cząstek o energiach E_3 i E_4 i takie ich zderzenie, że przyjmą energie E_1 i E_2 – powinien zdarzać się z tą samą częstością.

Zobaczmy, jakie są konsekwencje tej zasady, gdy połączymy ją z naszą intuicją. Zastanówmy się, jak często dochodzi do zderzenia cząstek o danych energiach E_1 i E_2 ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, warto najpierw pomyśleć, jaka jest szansa na to, że losowa cząstka ma energię E_1 . Zapewne będzie to prawdopodobieństwo proporcjonalne do tego, ile cząstek właśnie ma tę energię – oznaczmy tę liczbę (całkowitą) przez N_1 , natomiast N_2 niech oznacza liczbę cząstek o energii E_2 itd. Natomiast średnią liczbę cząstek o energii E oznaczmy funkcją $N(E)$ – to jest funkcja „globalna”, którą chcielibyśmy znaleźć. Naturalnym założeniem wydaje się przyjęcie, że liczba zderzeń cząstek o energiach E_1 i E_2 powinna być proporcjonalna do liczby ich par:

$$P(E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4) = cN_1N_2.$$

Liczby N_1 oraz N_2 nawet w układzie równowagowym zmieniają się w czasie. Powyższe równanie, zakładając niezależność obsadzeń energii E_1 oraz E_2 po uśrednieniu po długim czasie pozwoli policzyć średnią liczbę procesów ($E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4$):

$$(1) \quad P_{\text{sr}}(E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4) = cN(E_1)N(E_2).$$

Zauważmy, że o ile chwilowa liczba cząstek o danej energii (np. N_1) musi być liczbą naturalną, to średnie obsadzenie jest dowolną liczbą nieujemną. Tak jak można mieć średnio 1/3 jajka na wytłaczankę (np. gdy mamy jedno ostatnie jajko w wytłaczance oraz dwie puste wytłaczanki, to mamy średnio 1/3 jajka na wytłaczankę), tak samo nie ma problemu z tym, że daną energię będzie miało średnio np. pół cząstki.

Skoro układ ma być w równowadze szczegółowej, to proces odwrotny, przez analogiczne rozumowanie zachodzący z prawdopodobieństwem cN_3N_4 , powinien zachodzić średnio tak samo często:

$$\begin{aligned} cN(E_1)N(E_2) &= P_{\text{sr}}(E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4) = P_{\text{sr}}(E_3, E_4 \rightarrow E_1, E_2) \\ &= cN(E_3)N(E_4). \end{aligned}$$

Powyższe równanie po wyciągnięciu logarytmu z obu jego stron oraz wprowadzeniu nowej funkcji $g(E) = \ln N(E)$ można przepisać w nieco prostszej postaci

$$g(E_1) + g(E_2) = g(E_3) + g(E_4).$$

Równowaga termodynamiczna to taki stan układu, który jest stacjonarny i w którym nie ma tzw. makroskopowych pływów. Pręt, którego jeden koniec jest stale podgrzewany, a drugi schładzany, nie osiągnie stanu równowagi – osiągnie stan stacjonarny, ale wewnątrz pręta będą zachodziły „przepływy ciepła”, tzn. makroskopowe procesy wywołane podtrzymywaną z zewnątrz różnicą temperatur na końcach.

Kiedy rozważamy energie, których wartości mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to może się okazać, że prawdopodobieństwo wylosowania konkretnej wartości energii jest zawsze równe zero. Żeby uniknąć tego rodzaju problemów, możemy np. podzielić zakres energii na przedziały ustalonej długości i pytać o prawdopodobieństwo, że energia znajdzie się w danym przedziale. Długość przedziału może być dowolnie mała i zwykle na końcu rozważań wykonuje się przejście graniczne z długością przedziału dążącą do zera.

Czytelnik Dociekliwy może mieć duże zastrzeżenia do równania (1). Jednym z nieoczywistych założeń jest przyjęcie, że współczynnik c jest niezależny od energii. Wyprowadzenie można poprawić, bez zmiany toku rozumowania, zakładając, że współczynnik c jest funkcją energii $c = c(E_1, E_2, E_3, E_4)$, ale symetryczną ze względu na zamianę $(E_1, E_2) \rightarrow (E_3, E_4)$.

Rozwiązanie równania (2), przy założeniu różniczkowalności g , przebiega następująco. W szczególnym przypadku, gdy $x = E - \delta$, $y = \delta$, $w = E + \delta$, a $z = -\delta$, równanie można sprowadzić do postaci $g'(x) = g(0)$. Skoro pochodna funkcji g jest stała, to funkcja ma postać $g(x) = ax + b$.

Od 20 maja 2019 roku Międzynarodowe Biuro Miar i Wag ustaliło wartość stałej Boltzmanna na $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$. Tym samym stała Boltzmanna stała się podstawową wielkością używaną do definicji wielu jednostek SI.

Zasada Boltzmanna przydaje się w każdym układzie, w którym interesuje nas liczba cząstek o danej energii w konkretnej temperaturze. Bezpośrednim zastosowaniem jest m.in. wzór barometryczny (opisujący spadek gęstości i ciśnienia wraz z wysokością), ale wzór Boltzmanna pojawia się w wielu miejscach. Pozwala na przykład obliczyć, ile elektronów pokona przerwę energetyczną w półprzewodnikach, co jest kluczowe dla działania elektroniki, czy oszacować nikłą nadwyżkę spinów mierzonych w urządzeniach NMR, co z kolei umożliwia precyzyjne obrazowanie medyczne w szpitalach.

Bezpośrednią konsekwencją tego wzoru jest istnienie kondensatu Bosego–Einsteina – nietypowej fazy materii, ale też poprawny opis działania lasera czy wspomniany w tekście opis rozkładu energii wypromieniowanej przez ciała w stałej temperaturze.

Pamiętamy przy tym, że energia ma być zachowana w tym procesie, tzn. $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$. Prowadzi nas to do równania funkcyjnego – szukamy funkcji $g(x)$ spełniającej równanie

$$(2) \quad g(x) + g(y) = g(w) + g(z) \quad \text{dla} \quad x + y = w + z.$$

To duże ograniczenie na funkcję g – jedynym ciągłym rozwiązaniem jest funkcja liniowa $g(E) = aE + b$, dająca następujący wzór na średnią liczbę cząstek o energii E :

$$N(E) = \exp(g(E)) = A \exp(aE).$$

Zauważmy, że gdyby współczynnik a był dodatni, to uzyskalibyśmy niefizyczny wynik – równowaga wymagałaby, aby średnia liczba cząstek o energii E rosła wraz z ich energią. Energia jest nieograniczona z góry, a tym samym cząstek byłoby nieskończenie wiele. Ta sprzeczność prowadzi do wniosku, że współczynnik a musi być ujemny. Wykonując eksperymenty i wprowadzając pojęcie temperatury T , możemy, w zgodzie z obecnymi konwencjami, ustalić, że $a = -1/(k_B T)$, gdzie k_B to stała Boltzmanna, uzyskując wzór:

$$N(E) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right).$$

To bardzo ważny wynik – odtworzyliśmy tzw. rozkład Boltzmanna, czyli zależność liczby cząstek o energii E od wartości tej energii!

Rozkład Boltzmanna, mimo że stosuje się do wielu sytuacji fizycznych, zawodzi w odniesieniu m.in. do rozkładu energii emitowanej przez ciała w stałej temperaturze. Problem został rozwiązany przez Plancka, który założył kwantowanie energii, tworząc podwaliny mechaniki kwantowej. Czy zasadę równowagi szczegółowej można stosować w świecie kwantowym? Otóż można, chociaż czasami trzeba zmodyfikować wzór na prawdopodobieństwo (1)! Oprócz wyprowadzenia podanego powyżej rozważymy jeszcze dwie inne wersje. Pierwsza uwzględni cząstki „towarzyskie”, które tym częściej uzyskują daną energię, im więcej cząstek taką energię już ma. Cząstki drugiego typu, wręcz przeciwnie, nigdy nie uzyskują energii, którą jakaś cząstka już ma. Dla pierwszego typu cząstek rozważymy taką modyfikację równania (1):

$$P(E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4) = c N_1 N_2 (N_3 + 1) (N_4 + 1).$$

Taka postać spełnia warunek „towarzyskości”, gdyż szansa, że cząstka uzyska energię E_3 jest wzmocniona przez czynnik $N_3 + 1$, a jednocześnie jeśli prawie żadna cząstka nie miała energii E_3 lub E_4 , to równanie jest bliskie poprzedniej wersji (1), o którym wiadomo, że sprawdza się w wielu sytuacjach. Ponownie powołując się na zasadę równowagi szczegółowej, otrzymujemy:

$$N(E_1) N(E_2) (N(E_3) + 1) (N(E_4) + 1) = N(E_3) N(E_4) (N(E_1) + 1) (N(E_2) + 1),$$

które prowadzi do:

$$\frac{N(E_1)}{N(E_1) + 1} \frac{N(E_2)}{N(E_2) + 1} = \frac{N(E_3)}{N(E_3) + 1} \frac{N(E_4)}{N(E_4) + 1}.$$

Po wyciągnięciu logarytmu z obu stron powyższego równania otrzymujemy ponownie równanie funkcyjne (2) tylko dla funkcji $\tilde{g}(E) = \ln \frac{N(E)}{N(E)+1}$. Powtarzając rozumowanie z poprzedniej części artykułu dla $\tilde{g}(E)$, uzyskujemy inny wzór na liczbę cząstek o energii E :

$$(3) \quad N_{B-E}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) - 1}.$$

To kolejny przełomowy wzór w fizyce, znany jako rozkład Bosego–Einsteina. Te „towarzyskie” cząstki nazywamy bozonami. Najpierw Satyendra Bose przyjął, że tak zachowują się cząstki światła, czyli fotony. Albert Einstein zaproponował rozwinięcie tego pomysłu na atomy. Należy zauważyć, że w typowych warunkach, gdy $E \gg k_B T$, nie trzeba się przejmować bozonową naturą materii i przybliżone prawo Boltzmanna daje wystarczająco dobre przybliżenie.

Wprowadzając wzór (3) około 1924 roku, Bose i Einstein nie wiedzieli jeszcze o istnieniu cząstek „introwertyków”, tych drugiego typu. Formalnie spełniają one

zakaz Pauliego, który zabrania dwóm identycznym cząstkom być na tym samym poziomie energetycznym. Prowadzi to do następującego prawdopodobieństwa przejścia:

$$P(E_1, E_2 \rightarrow E_3, E_4) = c N_1 N_2 (1 - N_3) (1 - N_4).$$

Zauważmy, że powyższy wzór daje zero, jeśli w układzie w danej chwili byłaby cząstka na poziomie E_3 lub E_4 – wzór gwarantuje więc spełnienie zakazu Pauliego. Powtórzenie rozumowania z poprzedniej części artykułu, prowadzi do wzoru

$$N_{F-D}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1},$$

Rozkład Fermiego–Diraca jest nieoceniony w wielu sytuacjach – od zrozumienia tablicy Mendelejewa poprzez opisy ruchu elektronów, zrozumienie półprzewodników aż po zastosowania astrofizyczne, takie jak wyjaśnianie cyklu życia gwiazd i obliczanie wielkości gwiazdy neutronowej.

powszechnie znanego jako rozkład Fermiego–Diraca. W tym rozkładzie średnia liczba cząstek o danej energii jest zawsze mniejsza niż 1.

Okazuje się, że cząstki elementarne budujące materię to zwykle fermiony – fermionami są elektrony, protony czy neutrony. Jeśli jednak parzysta liczba fermionów utworzy jeden atom, wtedy cały atom będzie się zachowywał jak bozon. Wiele cząstek elementarnych odpowiedzialnych za oddziaływania jest bozonami. Bozonem jest też cząstka światła, czyli foton. A co decyduje o tym, że dana cząstka jest fermionem lub bozonem? To już osobna historia, której niestety nie da się wyjaśnić, używając pojęcia równowagi szczegółowej.

Matematyka i polskie wiersze

Aleksy SCHUBERT*

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski; poeta piszący pod pseudonimem Alx z Poewiki

Niedawno zespół *Coma* przypomniał śpiewaną pierwotnie przez Andrzeja Zauchę piosenkę *Przybysze z Matplanety* ze słowami Magdaleny Wojtaszewskiej i muzyką Rafała Błażejewskiego oraz Marcelego Latoszka.

Fraszka Jana Kochanowskiego *Na matematyka* mogłaby uchodzić za trafne, niemal ostateczne podsumowanie relacji między matematyką a sztuką poezji. Umówmy się bowiem, że choć w obu dziedzinach podstawową materią pracy jest słowo, to matematycy dążą przede wszystkim do maksymalnej jednoznaczności wyrazu, podczas gdy poeci z upodobaniem zanurzają się w robiących wrażenie wieloznacznościach i niejasnościach. Nic więc dziwnego, że przedstawiciele jednej z tych sztuk łatwo okopują się na swoich pozycjach, uznając drugich co najwyżej za ufoludków – dziwnych przybyszy z jakiejś *Matplanety*, którzy, owszem, posiadają może u siebie pewien *podzbiór tęgich walców*, lecz niewiele mają wspólnego z prawdziwym życiem. Drugim z kolei, równie łatwo jest uznać poetyckie wytwory tych pierwszych za całkowicie niezrozumiałe wodolejstwo. Tymczasem obie te dziedziny mogą z siebie czerpać twórcze inspiracje, o czym spróbuję tutaj nieco opowiedzieć.

Zanim jednak przejdę do właściwego wątku mojej tu prozy, chciałbym wyjaśnić, czym niniejszy tekst jest, a czym nie jest. Przede wszystkim nie jestem literaturoznawcą, który spędził całe życie na zgłębianiu relacji między matematyką a polską poezją; nie należy więc traktować tego tekstu jako głosu eksperta w tej dziedzinie. Jest to raczej zbiór kilku – mam nadzieję – interesujących punktów zaczepienia, ukazujących wybrane powiązania poezji z matematyką, na jakie udało mi się natrafić w swoich czytelnicznych przygodach z matematyką, bez ambicji wyczerpania tematu. Z pewnością można wskazać w nim luki oraz istotne pominięcia, za które z góry przepraszam. Być może jednak w przyszłości znajdzie się ktoś, kto podejmie się stworzenia pełniejszego obrazu tych relacji. Nie byłoby też od rzeczy, gdyby niniejszy tekst został zinterpretowany jako wyraz potrzeby zaistnienia takiego opracowania.

Tymczasem, do rzeczy. Gdy byłem w pierwszej klasie liceum, ktoś zapytał mnie, czy znam trygonometryczną rymowanekę. Odpowiedziałem przecząco, więc zaraz usłyszałem taki oto tekst:

*W pierwszej wszystkie są dodatnie,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus.*

Na początku trudno mi było tutaj znaleźć rymy i może nie one są w tym tekście najważniejsze. Ważniejszy od rymów jest rytm. Rytm zaś uzyskany jest tutaj przez powtarzanie wzorca: sylaba akcentowana–sylaba nieakcentowana oraz używanie na przemian wersów ośmio- i sześciosylabowych. Młody adept matematyki chętnie sobie taki wierszyk przyswoi, bo mu będzie łatwiej zapamiętać ważne zależności matematyczne. Może jednak też zaprzysiąc się z faktem, iż tekst ten ma wewnętrzną strukturę, wewnętrzną zasadę kompozycyjną, którą opisuje się wzorami i liczbami. To matematycy lubią. I warto tu wspomnieć, że ogromne połacie polskiej poezji, może niestety tej starszej i mniej modnej obecnie, są ułożone w takie numeryczne wzorce, które w bardziej popularnym fasonie nazywa się trzynastozgłoskowcem (tu warto sobie przypomnieć „Pana Tadeusza” Adama Mickiewicza), w nieco mniej popularnym jedenastozgłoskowcem (tu warto sobie przypomnieć „Monachomachię” Ignacego Krasickiego, z której pochodzi powiedzonko *prawdziwa cnota krytyk się nie boi*). Myślę, że całkiem przyjemnie czyta się te utwory przy dźwiękach również bardzo starych, ale też nasyconych regularnymi wzorcami, sonat Domenico Scarlattiego. Pytanie, dlaczego najpopularniejszy jest trzynastozgłoskowiec, może być ciekawym zadaniem dla matematyka-kognitywisty.

Warto tu podkreślić, że taki styl wpisywania w utwory różnych matematycznych prawidłowości miał swoje źródło w przekonaniu, iż liczby są nośnikiem uniwersalnej, wiecznej struktury, która ma pochodzenie boskie. Mnóstwo tego typu śladów i prawidłowości znajdziemy w „Boskiej Komedii” Dantego Alighieri. Regularność związana z zastosowanym w kompozycji systemem liczbowym nadaje utworom niezwykle charakter, niecodzienne brzmienie. Tak oto matematyczne pojęcie stoi za centralnym motywem kompozycyjnym dawniejszej poezji, ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby trafiło tam i dzisiaj, czego dowodzą utwory francuskiej grupy OuLiPo. Niestety możliwości te na gruncie poezji polskiej nie zostały jak dotąd szerzej rozwinięte.

Co jednak rozwinięte zostało? Jeden ważny sposób, w jaki matematyka i jej idee pojawiają się w polskiej poezji, to wyrażanie zauroczenia Platońskimi cechami pojęć matematycznych – te jako doskonałe i wieczne budzą podziw. Tego rodzaju emocje, nieraz wpadające w egzaltację, znajdziemy w *Matematyce* Juliana Tuwima czy bardzo długim poemacie *Nieskończoność* Zbigniewa Bieńkowskiego. Nie chciałbym się tutaj wpisywać w poczet *kpiarzy* z wiersza *Ostrzeżenie* Wisławy Szymborskiej, bo sam nie należę do tych, co *wolą czwartek od nieskończoności* i chętnie przyznam, że nieskończoność jest jednym z tych pojęć matematycznych, które uważam za ciekawe i niezwykle, a jestem matematykiem, bo ta dziedzina ma urok jedyne w swoim rodzaju. Choć pewnie bliżej mi do stonowanego podziwu z wiersza *Liczba Pi* Wisławy Szymborskiej.

Nie da się jednak ukryć, że taka Platońska doskonałość i wielkość często bywają przytłaczające. Właśnie tego rodzaju emocję znajdziemy w wierszu Tuwima *Rachunek*, gdzie *rojne stubiliony* i *mnożące czarne katy* przytłaczają i budzą mroczny niepokój. W podobnym duchu rozwija się też wiersz *Wielka liczba* Wisławy Szymborskiej, gdzie ogromna, natarczywie przygniatająca liczba mieszkańców Ziemi sprawia, że jako jej rezydenci czujemy, iż nasze życie to *kilka znaków pazurkiem na piasku*.

Jest pewna grupa wierszy, w których różne pojęcia matematyczne przewijają się jako wygodne, acz przygodne rekwizyty, budujące narrację i obrazy w wierszu. Znajdziemy w tym stadku *linię prostą* w *Panu Cogito i wyobraźni* Zbigniewa Herberta, *Madrygał probabilistyczny* wśród wierszy Stanisława Barańczaka, a *funkcje*, *ciąg* i *kwadrat* rozsiane po poezji Mirona Białoszewskiego. Matematyka z właściwym sobie „bestiarium” pojęć potrafi znaleźć swoje miejsce w tych tekstach poetyckich i wykonuje solidną pracę, inspirując wyobraźnię do wędrówek w mniej typowe rejony, a język do poszerzania swojej dziedziny.

Skoro mowa o Białoszewskim, jednym z najważniejszych przedstawicieli poezji lingwistycznej, to warto przywołać krótki utwór innego twórcy tego nurtu – Tymoteusza Karpowicza, z tomu *Rozwiązywanie przestrzeni*:

Szersze omówienie tych zależności można znaleźć np. w książce *Dante: Numerological Studies* Johna J. Guzzardo, a przyjemny skrótik na temat tych zależności w artykule prof. Mirosława Lachowicza „Intuicja matematyczna w Raju?” (Δ_{21}^9).

O grupie tej pisał swego czasu prof. Mirosław Lachowicz w artykule „Matematyka i literatura: OuLiPo” na łamach *Delt*y (Δ_{25}^{11}).





przejście graniczne – wyłina

już przez stulecia zamiast skrzydeł
husarz polski niósł miotłę
dla baby jagi pod bronowicami:
mijał twardowskich faustów farysów
peer gyntów w ineksprymablach
a cybernetycznie prawo ich do kroku
granice liczby zerami sprawdzały –
husarz zaszumiał miotłą – przeszedł
jak pterodaktyl przez rozmiękły krzemień
ale przy cieniu zbyt długim celnicy
króciutkim zerem dokoła stwardnieli –
husarz przeżegnał się odkłamywał miotłę
cień pocałował łzą polał odstawił
raz jeszcze siebie odegrał wyłina

W tym tekście eksperymentalne zestawienie rekwizytów historycznych (husarz), baśniowych (Baba Jaga) oraz matematycznych (przejście graniczne) tworzy unikalną przestrzeń myślową. To przestrzeń, w której można pozwolić sobie na intelektualną zabawę: co by było, gdyby z husarzem „prześć do granicy”? Gdyby próbować opisać jego istotę jako funkcję czy jakiś rodzaj zmiennej dążącej do nieskończoności? Czy da się go potraktować jak liczbę – przybliżaną z coraz większą dokładnością wyrażaną liczbą o coraz dłuższej kolejce zer przed pierwszą cyfrą znaczącą? A może husarz i tak wymknie się takiemu pojęciowemu opisowi – i na końcu, niezależnie od matematycznych procedur, stanie „okoniem” gotowy do najbardziej przyziemnych czynności: otrzepania kłaków z przasnej miotły i ponownego wykorzystania zużytej, cielesnej wyłiny? Jest w tym wierszu miejsce na więcej zabawy, ale dalsze wielokrotne jego czytanie połączone z ozdabianiem go zestawem własnych skojarzeń i wędrówek interpretacyjnych zostawiam już Czytelnikom.

Na koniec podzielę się kilkoma słowami o dwóch wierszach, w których pojęcia matematyczne bezpośrednio nie występują, ale ich obecność jest dla mnie, matematyka, tak oczywista, że trudno mi się powstrzymać przed dodaniem wzmianki o nich. Pierwszy z nich to utwór *Dworzec* Wisławy Szymborskiej. W wierszu tym *nieprzyjazd do miasta N* stosunkowo szybko kojarzy się z pustką, nicością, czyli z zerem – bardzo ważnym wynalazkiem matematycznym. Brak osoby bliskiej, która odeszła, jest niezwykle dojmujący w tym wierszu. Czasem, gdy napotykam tę liczbę w swoim matematycznym życiu, chcąc głębiej *poczuć* znaczenie tego pojęcia, przywołuję w swojej pamięci właśnie ten utwór.

Drugi tekst to wiersz *Z zabaw i gier dziecięcych* Andrzeja Bursy. Końcowe

jak ci się nic nie przysni
r e m i s

to niezwykle uderzające przypomnienie, że zdeterminowanie gry – tak często obecne w matematycznych modelach growych – nie jest wcale cechą oczywistą i wymaga nieraz sporo pracy nad konstrukcją modelu, żeby rzeczywiście miało miejsce, żeby rzeczywiście dało się skorzystać z różnego rodzaju przewidywalnych zachowań wynikających z jego istnienia.

Gra jest zdeterminowana, jeśli jej zasady nie dopuszczają remisów.

Wyłania się z tych kilku drobnych wycieczek obraz relacji między matematyką a poezją, który niekoniecznie da się zamknąć w ramach odpychania dwóch obcych sobie światów. Widać z tego, że możliwe jest twórcze ich współistnienie z bogatymi

wzajemnymi powiązaniami. Matematyka nie musi w poezji występować jawnie – w postaci wzorów, liczb czy definicji – by realnie na nią oddziaływać: bywa obecna w rytmie, strukturze, w idei granicy, zera czy nieskończoności, w sposobach porządkowania doświadczenia i w napięciach między tym, co policzalne, a tym, co wymyka się rachunkowi. Poezja z kolei potrafi nadać pojęciom matematycznym ciężar emocjonalny i egzystencjalny, którego nie da się ująć w definicjach. Jeśli więc gdzieś między jednoznacznością a wieloznacznością, rygiem a swobodą, precyzją a niedopowiedzeniem rodzi się przestrzeń wspólna – to właśnie tam matematyka i poezja spotykają się najciekawiej, wzajemnie się dopełniając i inspirując. Może się na ich styku pojawić też uśmiech, jak w wierszyku *Trudny rachunek* Juliana Tuwima. Sprawdźcie sami, czego doliczyły się tam jego bohaterki.

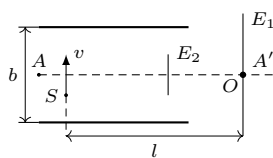
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
806 ($WT = 2,01$), 807 ($WT = 3,1$)
z numeru 11/2025

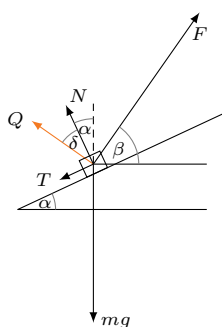
Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6–40,44
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3–36,28
Krzysztof Zygan	Lubin	34,85
Ryszard Woźniak	Kraków	34,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	18–29,41
Paweł Kubit	Kraków	21,82
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3–21,66
Zbigniew Galias	Kraków	1–16,30



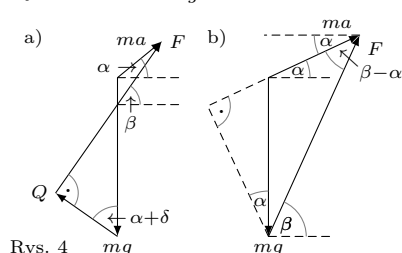
Rys. 1



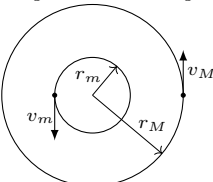
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

813. Oznaczmy początkową odległość między cząstkami przez r , a wartość bezwzględną ich ładunku przez q . Cząstki obiegają środek masy układu po okręgach (rys. 5) o promieniach $r_m = Mr/(m+M)$ i $r_M = mr/(m+M)$ z prędkościami v_m i v_M takimi, że $mv_m = Mv_M$. Z drugiej zasady dynamiki $kq^2/r^2 = mv_m^2/r_m = m(m+M)v_m^2/(Mr)$, stąd

$$(1) \quad kq^2/r = m(m+M)v_m^2/M.$$

Załóżmy, że prędkość cząstki o masie m wzrosła n razy. Mamy układ dwóch cząstek o przeciwnych zwrotach prędkości, w chwili początkowej oddalonych od siebie o r . Badanie ich ruchu możemy zastąpić badaniem ruchu jednej cząstki o masie zredukowanej $\mu = mM/(m+M)$ i prędkości

Zadania z fizyki nr 820, 821

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

820. Punktowe źródło światła monochromatycznego, S , o długości fali $\lambda = 6000\text{Å}$ umieszczono między dwoma nieruchomymi równoległymi zwierciadłami płaskimi, oddległymi od siebie o $b = 3\text{ cm}$ (rys. 1). W dużej odległości $l = 1\text{ m}$ od źródła umieszczono ekran E_1 , na którym powstaje obraz interferencyjny, utworzony przez dwie wiązki światła odbite od zwierciadeł. Bezpośredni strumień światła od źródła zasłonięty jest ekranem E_2 . W płaszczyźnie ekranu E_1 na osi symetrii układu AA' umieszczony jest odbiornik O , który rejestruje sygnał proporcjonalny do natężenia padającego na niego światła. Rozmiar odbiornika jest mały w porównaniu z szerokością pasm interferencyjnych na ekranie E_1 . Uwzględniając tylko jednokrotne odbicia światła od zwierciadeł, znaleźć częstotliwość zmiennego sygnału rejestrowanego przez odbiornik podczas ruchu źródła w kierunku prostopadłym do zwierciadeł z prędkością $v = 0,1\text{ mm/s}$.

821. Okrągłą płytkę o średnicy $d = 40\text{ mm}$ i grubości $a = 0,5\text{ mm}$ położono ostrożnie na powierzchni wody. Dzięki napięciu powierzchniowemu płytka nie utonęła, a w miejscu zetknięcia jej górnej powierzchni z powierzchnią wody kąt między nimi okazał się równy 90° (rys. 2). Wyznaczyć gęstość materiału płytki. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 0,073\text{ N/m}$.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2026

Przypominamy treść zadań:

812. Na drewnianą pochylnię tworzącą kąt α z poziomem wciągana jest za pomocą sznurka skrzynia. Współczynnik tarcia skrzyni o pochylnię wynosi μ . Pod jakim kątem do poziomu należy skierować sznurek, aby z najmniejszym wysiłkiem wciągać skrzynię z zadany przyspieszeniem a ?

813. Dwie cząstki o masach m i M oraz ładunkach o jednakowych wartościach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach, poruszają się po okręgach pod wpływem przyciągania elektrycznego. Wartość prędkości cząstki o masie m momentalnie zwiększono, nie zmieniając przy tym kierunku prędkości. Ile razy co najmniej wzrosła ta wartość, jeżeli w wyniku tego cząstki rozleciały się na nieskończoną odległość od siebie?

812. Na skrzynię działają siły: ciężkości mg , tarcia T , reakcji podłoża N i naciągu sznurka F (rys. 3). Wypadkowa Q sił reakcji i tarcia tworzy z prostopadłą do pochylni kąt δ taki, że $\tan \delta = T/N = \mu N/N = \mu$. Oznacza to, że przy zmianie wartości i kierunku siły F , kierunek siły Q pozostaje niezmienny. Rysunek 4 ilustruje równanie ruchu skrzyni: $ma = mg + Q + F$. Siła F ma minimalną wartość przy zadanym a , gdy jest prostopadła do kierunku Q . Z rysunku 4a widać, że kąt nachylenia do poziomu siły $F_{\min}$ wynosi

$$(1) \quad \beta = \alpha + \delta = \alpha + \arctg \mu.$$

Wartość minimalnej siły naciągu sznurka rośnie ze wzrostem przyspieszenia a i przy pewnej jego wartości a_0 składowa siły $F_{\min}$ prostopadła do pochylni będzie miała taką samą wartość jak analogiczna składowa siły ciężkości. Siły reakcji i tarcia, a tym samym ich wypadkowa Q , staną się przy tym równe zero. Równanie ruchu dla $a \geq a_0$, $ma = mg + F_{\min} = 0$, ilustruje rysunek 4b. Widać z niego, że

$$(2) \quad \beta = \alpha + \arctg (g \cos \alpha / (a + g \sin \alpha)).$$

Dla $a = a_0$ wyrażenia na β z (1) i (2) są sobie równe, stąd $a_0 = g(\cos \alpha / \mu - \sin \alpha)$.

Ostatecznie

$$\beta = \begin{cases} \alpha + \arctg \mu & \text{dla } 0 \leq a \leq a_0, \\ \alpha + \arctg (g \cos \alpha / (a + g \sin \alpha)) & \text{dla } a > a_0. \end{cases}$$

początkowej równej prędkości względnej cząstek m i M :

$$(2) \quad v = nv_m + v_M = v_m(n + m/M).$$

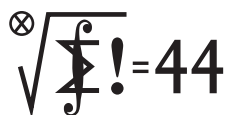
Najmniejsza wartość tej prędkości, która pozwala oddalić się do nieskończoności, wynika z zasady zachowania energii:

$$(3) \quad \mu v^2/2 - kq^2/r = 0.$$

Korzystając z równań (1)–(3), otrzymujemy równanie na n : $n + m/M = \pm \sqrt{2}(m+M)/M$. Rozwiązanie pierwsze odpowiada sytuacji, gdy prędkość cząstki m ma zwrot zgodny z prędkością v_m , drugie, gdy ma zwrot przeciwny. Ostatecznie:

$$n = (m/M) [\sqrt{2}(1 + M/m) - 1].$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
909 ($WT = 2,42$) i 910 ($WT = 1,63$)
z numeru 11/2025

Stanisław Bednarek	Łódź	42,30
Roksana Słowik		41,56
Marian Łupieżowiec	Gliwice	40,52
Mikołaj Pater		40,40
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,19
Jędrzej Biedrzycki		35,81
Janusz Fiett	Warszawa	32,71

915. Funkcja f jest parzysta, więc $f'(0) = 0$. Dwa okręgi, o jakich mowa w części (a) – jeżeli istnieją – muszą być (w początku układu współrzędnych) styczne do osi poziomej oraz do wykresu funkcji f , wciśniętego pomiędzy nie (jeden okrąg położony w górnej półpłaszczyźnie, drugi w dolnej). Jeżeli r jest promieniem każdego z nich, wówczas dolny półokrąg górnego okręgu ma równanie

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Symetryczny do niego górny półokrąg dolnego okręgu ma równanie różniące się od powyższego jedynie znakiem. Zadanie sprowadza się do pytania, czy istnieje liczba $r > 0$ taka, że

$$(1) \quad |f(x)| < \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{gdy} \quad 0 < |x| \leq r.$$

I teraz:

(a) Zakładamy, że istnieje $f''(0)$; zatem

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

(druga z powyższych równości to definicja f'' jako pochodnej funkcji f' ; a pierwsza równość to reguła de l'Hospitala).

Wybermy i ustalmy liczbę $c > |f''(0)|$. Z uwagi na granicę (2) moduł ilorazu $f(x)/x^2$ jest mniejszy od $c/2$ dla x bliskich 0; czyli istnieje $\delta > 0$ o własności

$$(3) \quad |f(x)| < \frac{cx^2}{2} \quad \text{gdy} \quad 0 < |x| \leq \delta.$$

Wystarczy teraz ustalić dowolną liczbę dodatnią $r \leq \min\{\delta, 1/c\}$. Gdy $0 < |x| \leq r$, oszacowanie (3) działa, zatem

$$\frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} > \frac{x^2}{2r} \geq \frac{cx^2}{2} > |f(x)|$$

Zadania z matematyki nr 923, 924

Redaguje Marcin E. KUCZMA

923. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych k, m takie, że $k!(k! + 6) = 3m!$.

924. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną; $n \geq 2$. Funkcje f, g są określone wzorami: $f(x) = x^n - x$, $g(x) = x^{2n} - x$. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki: $f(a) = 1$, $g(b) = 3a$. Ustalić (w zależności od n), która z liczb a, b jest większa.

Zadanie 924 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2026

Przypominamy treść zadań:

915. Funkcja parzysta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z wartością $f(0) = 0$, ma w całym zbiorze $\mathbb{R}$ ciągłą pochodną.
(a) Udowodnić, że jeśli f ma w punkcie 0 pochodną drugiego rzędu (skończoną), to istnieją dwa przystające okręgi takie, że początek układu współrzędnych jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f z każdym z tych okręgów.
(b) Podać przykład pokazujący, że bez założenia istnienia $f''(0)$ teza części (a) nie musi zachodzić.

916. Wzdłuż okręgu należy rozmieścić groszki w trzech różnych kolorach; mamy k groszków jednego koloru, l groszków drugiego, m groszków trzeciego koloru. Znaleźć warunek algebraiczny wiążący liczby k, l, m , konieczny i dostateczny na to, by istniało rozmieszczenie, w którym żadne dwa groszki jednakowego koloru nie sąsiadują.

– a to jest wymagany warunek (1), uzasadniający tezę części (a).

(b) Przykład: $f(x) = |x|^{3/2}$. Ta funkcja parzysta ma ciągłą pochodną:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^{1/2} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -\frac{3}{2}|x|^{1/2} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

(wartość $f'(0) = 0$ wyznaczona z definicji pochodnej).

Niech r będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Dla $0 < x < r^2$ mamy $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} > \frac{x^2}{r}$, co zaprzecza spełnieniu warunku (1), i tym samym zaprzecza tezie części (a).

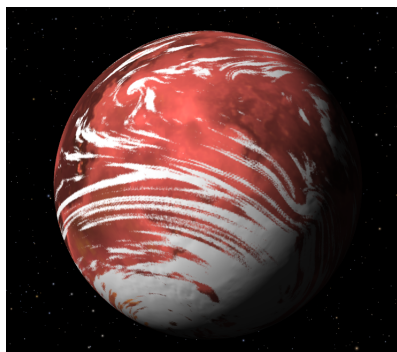
916. Układ nierówności $k \leq l + m$, $l \leq m + k$, $m \leq k + l$ jest warunkiem koniecznym: jasne, że jeśli pewien kolor zajmuje więcej niż połowę pozycji, to pewne dwie pozycje w tym kolorze sąsiadują.

Ten sam układ nierówności jest też warunkiem dostatecznym: oznaczmy literami K, L, M kolory reprezentowane odpowiednio przez liczności k, l, m . Możemy b.s.o. założyć, że $m \geq k$, $m \geq l$. Układamy „w kółko” m groszków M . Pracujemy w trybie *insert*; każde miejsce między dwoma kolejnymi groszkami M nazwijmy *dołkiem* (ang. *socket*). Wrzucamy k groszków K pojedynczo do różnych dołków. Zostaje $m - k$ ($\leq l$) dołków pustych. Wrzucamy do nich $m - k$ groszków L ; a pozostałe $l + k - m$ groszków L wrzucamy pojedynczo do dołków (dowolnie wybranych) zajętych przez groszki K . Wszystkie dołki są teraz zajęte przez co najmniej jeden groszek. W niektórych są po dwa groszki (różnych kolorów); nadajemy każdej takiej parze dowolną orientację, aby uzyskać pożądaną konfigurację cykliczną; gotowe.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Wizja artystyczna planety L 98-59d.
Źródło: <https://science.nasa.gov>

W tym momencie wiemy, że masa planety jest jeszcze mniejsza, bo tylko 1,64 masy Ziemi.

Super-Ziemia to typ planet pozasłonecznych. W zależności od definicji masa tego typu planety może wahać się od 1 do 10 mas Ziemi.

Określenie „super-Ziemia” nie oznacza, że na powierzchni planety panują warunki zbliżone do ziemskich. Definicja dotyczy tylko rozmiaru, masy i gęstości planety.

Gazowy karzeł to typ egzoplanety mniejszej od Neptuna, ale większej od Ziemi, posiadającej grubą atmosferę składającą się z wodoru i helu oraz skaliste jądro. Tego typu planety są powszechne w galaktyce, choć nie występują w Układzie Słonecznym. Ich masa wynosi zazwyczaj do 10 mas Ziemi.

Pojawił się więc problem: skoro nie jest gazowym karłem ani planetą skalistą, to czym jest planeta L 98-59d? Odpowiedzi na to pytanie mogą dostarczyć symulacje komputerowe. Grupa naukowców z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Oksfordzkiego, kierowana przez dr. Harrisona Nichollsa, przeprowadziła tego typu analizę. W dużym uproszczeniu badacze zasymulowali wiele możliwych scenariuszy powstania i ewolucji planety, przyjmując jako wynik końcowy jej zaobserwowane parametry: masę, rozmiar, gęstość oraz skład atmosfery. Następnie spośród wszystkich możliwych scenariuszy wyłonili najbardziej prawdopodobny, czyli taki, który najlepiej odpowiada obserwacjom. Wyniki ich badań wskazują, że obserwowana gęstość L 98-59d i aktualny skład jej atmosfery są zgodne jedynie z bardzo wąskim zakresem warunków początkowych potencjalnie panujących w momencie narodzin planety.

Oczywiście symulacje komputerowe uwzględniają znane nam procesy fizyczne i chemiczne.

Zgodnie z tymi scenariuszami L 98-59d rozpoczęła swoje istnienie jako gazowy karzeł, z gęstą i bogatą w wodór atmosferą oraz stosunkowo niewielkim jądrem (zbudowanym głównie z węgla). Z czasem

... a powietrze śmierdzi. Tak w skrócie można opisać zaproponowany nowy rodzaj małych planet pozasłonecznych.

Planeta L 98-59d została odkryta w 2019 roku dzięki obserwacjom przeprowadzonym przez kosmiczny teleskop TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite). Zaobserwowano ją metodą tranzytów, czyli poprzez zarejestrowanie spadku jasności gwiazdy, który występuje, gdy planeta przechodzi na tle tarczy gwiazdy, blokując niewielką część jej promieniowania. Planeta orbituje wokół czerwonego karła o masie około 30% masy Słońca, a cały układ znajduje się mniej więcej 35 lat świetlnych od Ziemi. Ponadto planeta L 98-59d okrąża swoją gwiazdę w ciągu 7,5 dnia ziemskiego. Jak do tej pory nic szczególnie zaskakującego. Ot typowa planeta pozasłoneczna.

L 98-59d wyróżnia jednak jej rozmiar i masa. W momencie odkrycia promień planety oszacowano na 1,5 promienia Ziemi, natomiast jej masa była tylko ~ 2 razy większa od masy Ziemi. Mamy więc do czynienia z tzw. super-Ziemią, ale o zaskakująco niskiej gęstości (zaledwie około połowy gęstości Ziemi). Tak niewielka gęstość wyklucza więc, aby była to planeta skalista, taka jak Ziemia lub Mars. Pozostają dwie możliwości, a przynajmniej tak początkowo sądziliśmy. L 98-59d mogła być gazowym karłem, czyli takim mini-Neptunem, albo planetą w całości pokrytą wodą. Oczywiście ta druga hipoteza pobudziła wyobraźnię nie tylko naukowców. Szybko wykonano obserwacje atmosfery L 98-59d przy użyciu Kosmicznego Teleskopu Hubble’a.

Obserwacje te wykluczyły hipotezę gazowego karła, ponieważ w atmosferze planety nie wykryto wystarczających ilości wodoru i helu. Świetna wiadomość! Wszystko wskazywało na to, że L 98-59d jest wodnym światem, planetą pokrytą niesamowicie głębokimi oceanami pod stosunkowo cienką skorupą lodu. Taka interpretacja dominowała wśród naukowców mniej więcej przez rok. Do czasu kolejnych obserwacji. Tym razem wykonanych za pomocą nowiutkiego wtedy Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba. Przekreśliły one nasze marzenia o „drugiej Ziemi”, ujawniając prawie całkowity brak wody i tlenu w atmosferze L 98-59d. Zamiast tego zaobserwowano duże ilości siarki, w postaci dwutlenku siarki i siarkowodoru. Oznacza to, że planecie bliżej zapachem do zgniłych jaj niż do orzeźwiającej morskiej bryzy.

planeta ochładzała się i kurczyła, a atmosfera utraciła wodór, który został zastąpiony związkami siarki nieustannie uwalnianymi przez globalny... ocean magmy, pokrywający planetę od miliardów lat.

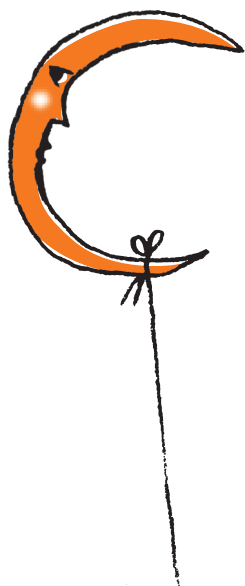
Historia L 98-59d, jej właściwości oraz panujące na niej warunki są tak odmienne od wszystkiego, co wcześniej obserwowano dla planet o podobnych rozmiarach (zarówno w naszym Układzie Słonecznym, jak i poza nim), że może ona zapoczątkować istnienie nowej klasy egzoplanet. L 98-59d łamie dotychczasowy podział na gazowe karły i światy wodne, jednocześnie pokazując nowe, wcześniej nieznane ścieżki ewolucji małych planet. Skłania nas też do refleksji... Czego jeszcze możemy nie wiedzieć o planetach pozasłonecznych?

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Oparte na:

- [1] Amélie Gressier i inni (2024), „Hints of a Sulfur-rich Atmosphere around the 1.6R Super-Earth L98-59d from JWST NIRSpec G395H Transmission Spectroscopy”, *The Astrophysical Journal Letters*, 975:L10.
- [2] Harrison Nicholls i inni (2026), „Volatile-rich evolution of molten super-Earth L 98-59 d”, *Nature Astronomy*.



W połowie roku Słońce znajdzie się na szczycie swojej dorocznej wędrówki po niebie. Rano (polskiego czasu) 21 czerwca osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki i tym samym zacznie się astronomiczne lato na naszej półkuli. A także półrocze, w którym każdy kolejny dzień jest krótszy, a każda kolejna noc – dłuższa i ciemniejsza. W czerwcu następuje najwcześniejszy wschód oraz najpóźniejszy zachód Słońca w krajach położonych na północ od równika. Pierwsze wydarzenie nastąpi już 17 czerwca, drugie zaś – tydzień później. Miesiąc ten sprzyja również najbardziej powstawaniu obłoków srebrzystych i łuku okołohoryzontalnego. Z jednej strony, Słońce chowa się pod horyzont najpłycej, z drugiej – wędruje najwyżej nad widnokręgiem.

W czerwcu nachylenie ekliptyki do horyzontu jest niezbyt korzystne zarówno rano, jak i wieczorem. W naszym rejonie świata najciekawiej zapowiada się wieczorne niebo na początku miesiąca. Krótco po zmierzchu nisko nad północno-zachodnią częścią nieboskłonu można dostrzec trzy planety Układu Słonecznego: Merkurego, Wenus i Jowisza. Pierwsza z wymienionych planet dąży do maksymalnej elongacji wschodniej w połowie miesiąca, kiedy to oddali się od Słońca na duże jak na nią 24° . Lepiej ją jednak obserwować w pierwszych dniach czerwca, gdy jej jasność przekracza 0^m . Potem osłabnie do prawie $+1^m$ i zginie w zorzy wieczornej. Merkury godzinę po zachodzie Słońca zajmie pozycję na wysokości około 6° tuż na lewo od punktu NW widnokręgu.

Odszukanie Merkurego ułatwią świecące znacznie jaśniej Wenus i Jowisz. Merkurego należy szukać w odległości jakichś 15° na godzinie 4 względem Wenus, która dąży do sierpniowej maksymalnej elongacji wschodniej, wynoszącej ponad 46° . Niestety wtedy jej obserwacje na dużych północnych szerokościach geograficznych utrudni słabe wieczorne nachylenie ekliptyki. W czerwcu planeta przejdzie z gwiazdozbioru Bliźniąt do Lwa, zbliżając się 19 dnia miesiąca na mniej niż 1° do jasnej gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Do końca czerwca jasność Wenus zwiększy się do $-4,1^m$, a jej tarcza urośnie do $16''$, zmniejszając przy tym fazę do 68%.

Jowisz zbliża się do koniunkcji ze Słońcem pod koniec lipca, tworząc z Wenus na niebie dość ciasną parę. Pod koniec pierwszej dekady czerwca planety zbliżą się do siebie na odległość 2° . Nieco dalej na prawo i w górę od Jowisza towarzystwa dotrzyma im para najjaśniejszych gwiazd Bliźniąt Polluks i Kastor. Odróżnienie obu planet od siebie jest łatwe, ponieważ Jowisz świeci o ponad 2^m słabiej od Wenus. Pod koniec miesiąca Jowisz stanie się niewidoczny i Wenus zostanie sama po zmierzchu.

Na pożegnanie Merkurego i Jowisza w drugiej połowie czerwca z planetami spotka się Księżyc w fazie cienkiego sierpa. Nów Srebrnego Globu przypada 15 czerwca rano naszego czasu i 16 czerwca jego tarcza w fazie 5% pokaże się 5° pod Polluksem. Jednocześnie południowy brzeg księżycowej tarczy zbliży się na 1° do Merkurego, a 8° na lewo odeń znajdzie się Jowisz. Dobę później naturalny satelita Ziemi zbliży się na niecały stopień do Wenus. Wszystko to niestety na wysokości nie większej niż 10° nad widnokręgiem.

Dwa dni przed I kwadrą 21 czerwca Księżyc w fazie 28% zajmie pozycję 3° na lewo od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Dwa dni po niej natomiast dotrze on na podobną odległość do Spiki, najjaśniejszej

gwiazdy Panny, zwiększając przy tym fazę tarczy do 69%. Pełnia Srebrnego Globu przypada 29 czerwca i zastanie go na tle gwiazdozbioru Strzelca, gdzie utworzy trójkąt prawie równoramienny z gwiazdami Nunki (σ Sgr) i Kaus Australis (ϵ Sgr), dwiema najjaśniejszymi z widocznych u nas gwiazd tej konstelacji. 27 czerwca spotka się on zaś z Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą Skorpiona, zbliżając się doń na 4° .

Prawie w tym samym miejscu Księżyc przebywał w nocy z 31 maja na 1 czerwca. Na początku miesiąca nachylenie ekliptyki o świcie jest wciąż niekorzystne, stąd mimo sporej początkowo fazy Srebrny Glob nie wzniesie się w tym okresie wyżej niż około 20° ponad widnokrąg. 8 czerwca Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, a dwa dni później zbliży się na 5° do Saturna. 13 czerwca natomiast jego tarcza w bardzo małej fazie 6% przejdzie 6° od Marsa. Dostrzeżenie szczególnie Czerwonej Planety nie jest jednak proste, gdyż do godziny 3:30 zdąży się ona wzniesić na wysokość zaledwie 5° , a jasność $+1,3^m$ sprawi, że do jej dostrzeżenia niezbędna może okazać się lornetka. Saturn świeci blaskiem $+0,9^m$, znajduje się też nieco wyżej, stąd jego dostrzeżenie jest wyraźnie łatwiejsze.

Jak co roku w trzeciej dekadzie czerwca promieniują meteory z roju Bootydów. Ich radiant znajduje się mniej więcej w tym samym miejscu co styczniowych Kwadrantydów. Dotychczas uważano, że maksimum ich aktywności przypada około 27 czerwca. Według najnowszych danych ma ono miejsce 5 dni wcześniej. Są to bardzo wolne meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością zaledwie 18 km/s, a można spodziewać się kilkunastu zjawisk na godzinę. Około godziny 1 radiant roju wznosi się na ponad 60° nad zachodnią częścią firmamentu.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 7



Rozwiązanie zadania F 1145.

Podczas ruchu energia całkowita E pozostaje stała i wynosi (t oznacza czas):

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x).$$

Ruch odbywa się między punktami:

$$x_{\pm} = \pm \left| \frac{E}{k} \right|^{1/\alpha} = \pm x_0.$$

Wprowadźmy nową zmienną $u = x/x_0$. Otrzymamy równanie:

$$E = \frac{m}{2} x_0^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + k x_0^\alpha u^\alpha = \frac{m}{2} x_0^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + E |u|^\alpha,$$

bo $k x_0^\alpha = E$. Mamy więc:

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m x_0^2} (1 - |u|^\alpha)}.$$

Pełny okres drgań to ruch od $x = -x_0$ do $x = x_0$ i z powrotem do $x = -x_0$, a w zmiennej u od $u = -1$ do $u = 1$ i z powrotem do $u = -1$. Potencjał jest symetryczny względem $x = 0$, $V(-x) = V(x)$, a więc pełny okres drgań T wynosi:

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{2E}} x_0 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^\alpha}}.$$

W powyższym wzorze całka jest po prostu liczbą zależną od wartości α . Po podstawieniu x_0 otrzymujemy, że

$$T \propto m^{1/2} E^{1/\alpha - 1/2} k^{-1/2}.$$



Rozwiązanie zadania F 1146.

W pierwszym przybliżeniu możemy posłużyć się modelem Bohra atomu wodoru. W tym modelu energie E_n kolejnych stanów atomu wodoru opisuje wzór postaci:

$$E_n = -\frac{\mu A}{n^2}.$$

We wzorze tym n jest główną liczbą kwantową stanu, A – stałą zawierającą wyłącznie uniwersalne stałe fizyczne (stałą Plancka, ładunek elementarny, przenikalność elektryczną próżni), a μ jest masą zredukowaną układu elektron-proton (masa elektronu m_e , masa protonu m_p):

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_p}{m_e + m_p} \approx m_e.$$

Przybliżona równość wynika z faktu, że masa protonu jest około 1840 razy większa od masy elektronu. W przypadku „atomu” złożonego z elektronu i pozytonu o obu masach równych masie elektronu masa zredukowana $\mu = m_e/2$ i energie stanów pozytronium mają wartości dwukrotnie mniejsze od energii atomu wodoru. Energia jonizacji pozytronium wynosi więc około 6,8 eV.



Rozwiązanie zadania M 1855.

(a) Dwucyfrowa liczba pierwsza nie może kończyć się na 2, 4, 5, 6 ani na 8. Zatem liczba pierwsza zaczynająca się od jednej z tych cyfr może wystąpić jedynie na początku liczby A .

Dwucyfrowych liczb pierwszych zaczynających się na 1, 3, 7 lub 9 jest dokładnie 10, a mianowicie:

11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

Ponieważ w liczbie A występuje 11 różnych dwucyfrowych liczb pierwszych, wszystkie one muszą się pojawić. Spośród nich tylko jedna zaczyna się na 9, jest to 97. Natomiast na cyfrę 9 kończą się dokładnie dwie liczby: 19 oraz 79. Zatem jedna z nich musi znajdować się na końcu liczby A , co dowodzi, że liczba A musi kończyć się cyfrą 9. Przykładem takiej liczby jest $A = 417971137319$.



Rozwiązanie zadania M 1856.

Odpowiedź. 44.

Pokażemy, że nieprzyjemnych ruchów jest co najmniej 20, a więc liczba ruchów przyjemnych nie przekracza 44. Ponumerujemy pola planszy zgodnie z ich odległością od środka, jak na rysunku. Pola z tym samym numerem są w jednakowej odległości od środka, a mniejszy numer oznacza pole bliższe środkowi.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Każdy ruch z pola oznaczonego liczbą 1 nie zmniejsza odległości od środka, a więc jest nieprzyjemny; takich ruchów jest co najmniej 4. Ruch z pola oznaczonego liczbą 2 może być przyjemny jedynie wtedy, gdy prowadzi na pole z numerem 1. Na planszy jest 8 pól z numerem 2 oraz tylko 4 pola z numerem 1, zatem co najmniej 4 ruchy z pól z numerem 2 są nieprzyjemne.

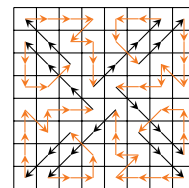
Rozważmy teraz ruchy prowadzące na pola z numerami nie mniejszymi niż 6. Takie ruchy nie mogą wychodzić z pól o numerach 1 i 2 i będą przyjemne tylko wtedy, gdy wyjdą z pól o numerze co najmniej 7. Pól o numerze co najmniej 7 jest 20, natomiast pól o numerze co najmniej 6 jest 32, stąd co najmniej $32 - 20 = 12$ ruchów tego typu jest nieprzyjemnych.

Łącznie otrzymujemy co najmniej

$$4 + 4 + 12 = 20$$

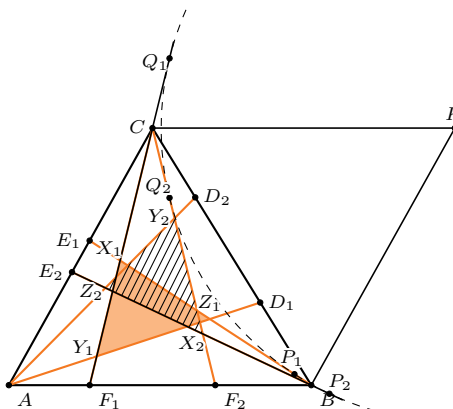
ruchów nieprzyjemnych, a więc najwyżej $64 - 20 = 44$ ruchy przyjemne.

Na rysunku obok pokazano przykład obejścia planszy, w którym liczba przyjemnych ruchów (oznaczonych kolorem) jest równa 44.



Rozwiązanie zadania M 1857.

Skorzystamy z zadania 1849 (Δ_{26}^4). Niech proste z treści zadania wyznaczają trójkąty $X_1Y_1Z_1$ oraz $X_2Y_2Z_2$ (zgodnie z oznaczeniami na rysunku).



Wybermy punkt K tak, aby czworokąt $ABKC$ był równoległobokiem. Z zadania wynika, że punkt K jest równoodległy od prostych BE_1, CF_1, BE_2, CF_2 . Istnieje zatem okrąg o środku K , styczny do tych prostych w punktach P_1, Q_1, P_2, Q_2 . Z równości odcinków stycznych otrzymujemy: $BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2$. Analogicznie dostajemy:

$$CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2, \quad AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2.$$

Sumując te trzy równości, otrzymujemy równość obwodów trójkątów $X_1Y_1Z_1$ oraz $X_2Y_2Z_2$, co kończy dowód.



Długości boków trójkąta

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Mówimy, że liczby $a, b, c > 0$ są długościami boków trójkąta, gdy istnieje trójkąt ABC , w którym $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Fakt ten jest równoważny każdemu z punktów poniższego twierdzenia, jednak dowód tej równoważności jest tematem na oddzielną opowieść – zależy od tego, jakie wybierzemy aksjomaty lub model płaszczyzny – dlatego żadnego dowodu tu nie napiszę; tym bardziej, że będziemy zajmować się jedynie algebraiczną stroną tego tematu. A teraz zapowiedziane

Twierdzenie. Niech $a, b, c > 0$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$;
- (1') $c < a + b$, w sytuacji, gdy $c = \max\{a, b, c\}$;
- (2) $a > |b - c|$, $b > |c - a|$, $c > |a - b|$;
- (2') $a > |b - c|$, w sytuacji, gdy $a = \min\{a, b, c\}$;
- (3) $|a - b| < c < a + b$;
- (4) istnieją liczby $x, y, z > 0$, dla których $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

Dowód. Najpierw skorzystamy z równoważności $|t| < M \iff t < M \wedge -t < M$, prawdziwej dla $t, M \in \mathbb{R}$, aby pozbyć się wszystkich wartości bezwzględnych. Punkty (1), (2) i (3) stają się identyczne, a więc są równoważne.

(2) $\Rightarrow$ (2'). Nierówność w (2') jest jedną z nierówności w (2).

(2') $\Rightarrow$ (1'). Liczba a jest najmniejsza spośród a, b, c , więc co najmniej jedna z liczb b, c jest największa. W (2') mamy $a + b > c$ i $a + c > b$, zatem jedna z tych nierówności spełnia warunek (1').

(1') $\Rightarrow$ (1). Jeśli c jest największa spośród a, b, c , to $b \leq c < a + c$ i analogicznie $a < b + c$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Zachodzi nierówność $a = y + z < y + z + 2x = b + c$ i dwie analogiczne.

(1) $\Rightarrow$ (4). Liczby $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$ są dodatnie i spełniają równości $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$.

Warto podkreślić, co dają punkty primowane. Zamiast sprawdzić trzy nierówności, wystarczy jedną: najdłuższy bok jest krótszy od sumy pozostałych dwóch albo najkrótszy bok jest dłuższy od bezwzględnej różnicy pozostałych dwóch.

Podstawienie (4) zamienia problem związany z długościami boków trójkąta na problem z liczbami dodatnimi, na które już nie ma żadnych dodatkowych warunków, i przez to są prostsze w obsłudze. To podstawienie ma interpretację geometryczną – okrąg wpisany w trójkąt ABC o bokach długości a, b, c daje nam x, y, z jako odległości od wierzchołków trójkąta do odpowiednich punktów styczności (zob. rysunek).

Na koniec jeszcze jeden użyteczny

Fakt. Jeśli istnieje liczba $x > 0$, dla której $a, b, c \in [x, 2x]$, to liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta.

Dowód. Tak po prostu: $a + b \geq x + x = 2x > c$.

Mała rzecz, a potrafi uciechować. Ale uwaga – ta implikacja działa tylko w jedną stronę. Na przykład dla liczb 3, 5 i 7 taki przedział $[x, 2x]$ nie istnieje, a są one długościami boków trójkąta.

Zadania

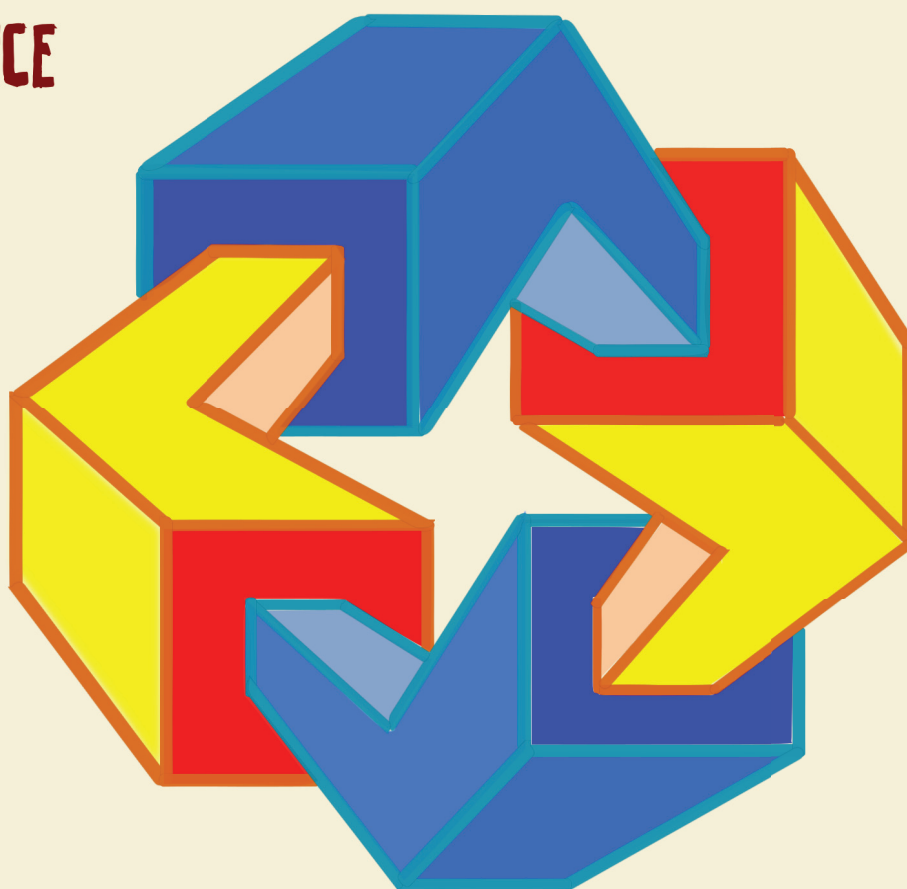
1. Dane są liczby dodatnie x, y i z . Wiadomo, że liczby x, y i z są długościami boków pewnego trójkąta. Uzasadnić, że $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ i $\sqrt{z}$ również są długościami boków trójkąta.
2. Dowieść, że jeśli a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$.
3. Wybrano 7 liczb (niekoniecznie różnych) z przedziału $(1, 8)$. Udowodnić, że pewne trzy z nich są długościami boków trójkąta.
4. Liczby x, y, z są długościami boków pewnego trójkąta. Liczby $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ również są długościami boków trójkąta. Wykazać, że $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{yz + zx + xy} < \frac{3}{2}$. (XVII WLM)
5. Dany jest trójkąt ABC . Niech r_a będzie promieniem okręgu stycznego do prostych AB i AC , którego środek leży na odcinku BC . Analogicznie definiujemy r_b i r_c . Udowodnić, że z odcinków o długości r_a, r_b i r_c można zbudować trójkąt. (XVI WLM)
6. Dowieść, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ca + a^2}$.

KOMPLETNIE CO INNEGO, A JEDNAK TO SAMO

69. SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

20–24 SIERPNIĄ 2026 r.

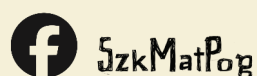
GLIWICE



Politechnika
Śląska



Wydział
Matematyki
Stosowanej



smp.uws.edu.pl