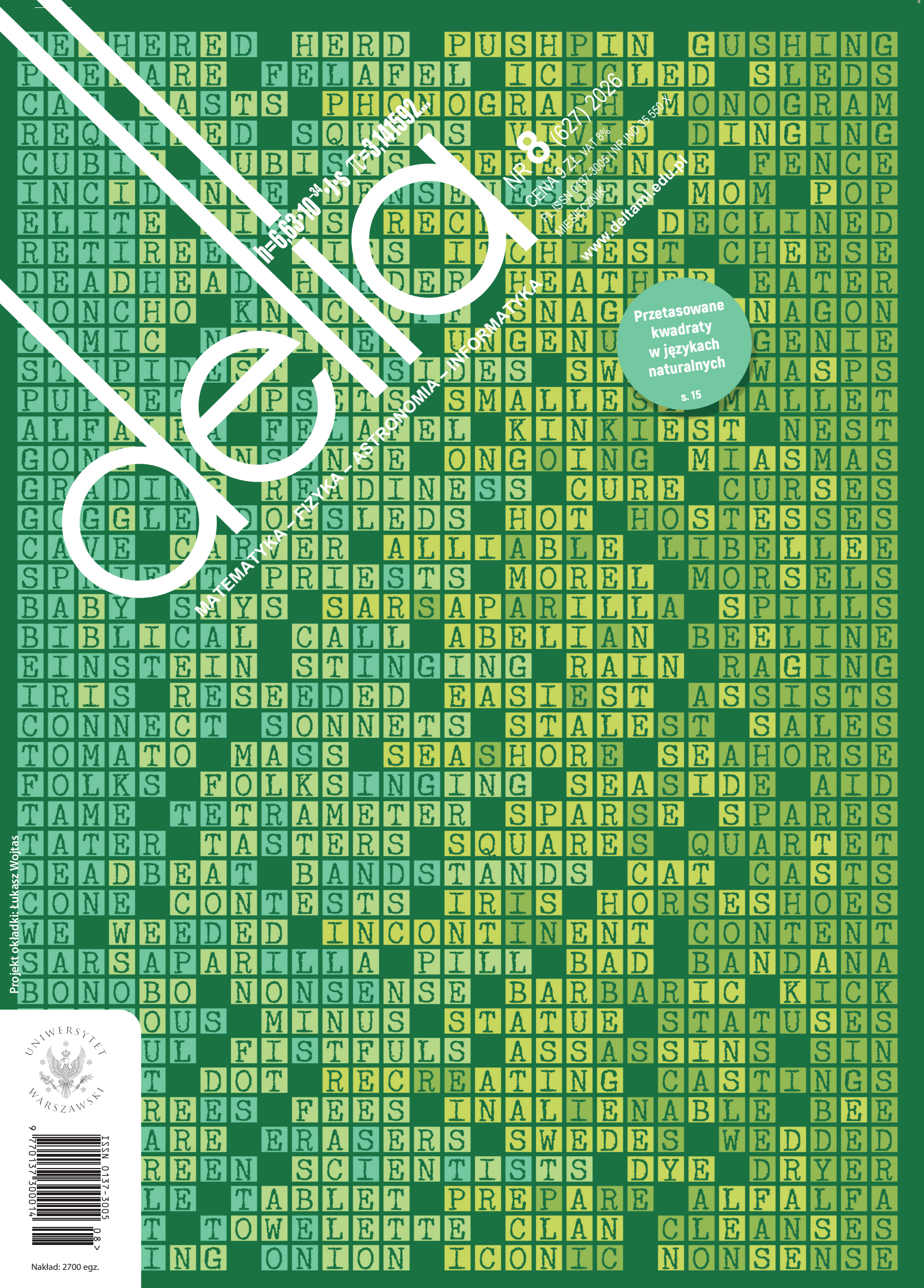




ISBN 978-3-005-13000-1
T-3-14-1592

NP 8 (627) 2026
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 NRP ID 35 5507
MIESIĄCZNIK
www.deltamedia.pl

Przetłumaczone
kwadraty
w językach
naturalnych
s. 15

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

Projekt okładki: Łukasz Wojtas



Nakład: 2700 egz.

SPIS TREŚCI

NUMERU 8 (627) 2026

Niesforne sprężyny

*Zofia Makowska, Łukasz Gładczuk,
Jan Turczynowicz*

str. 1

Kształt i opór, część 1/4: kula, walec,
stożek ścięty

Jarosław Górnicki

str. 4

 Niebo nade mną, grzyby pode mną
Marta Fikus-Kryńska

str. 6

Nie ma tekstu zbyt ludzkiego...

Jakub Ryłow

str. 8

O badaniu i pożytkach
z siarczku molibdenu

Robert Szoszkiewicz

str. 11

 Przetasowane kwadraty w językach
naturalnych

Bartłomiej Pawlik

str. 14

 Zadania

str. 15

Francuska misja geodezyjna 1792–1799

Grzegorz Łukaszewicz

str. 16

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: 73% obserwacji

str. 22

 Niebo w sierpniu

str. 23

 Grafy gier

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W następnym numerze dowiemy się,
do czego służy ten przyrząd.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.
Skład systemem $\text{\LaTeX}$ wykonała Redakcja.
Druk: Silverprint

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

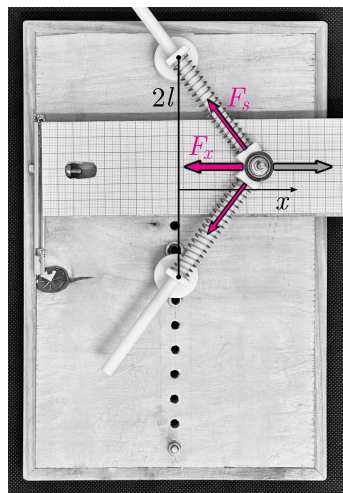
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Niesforne sprężyny

Zofia MAKOWSKA[†], Łukasz GŁADCZUK^{†,*}, Jan TURCZYNOWICZ^{†,‡}

[†] Klub Naukowy Fenix,
[‡] Wydział Fizyki, Uniwersytet
Warszawski,
* Autor do korespondencji:
lukasz@fenix.club



Rys. 1. Układ doświadczalny składa się z dwóch sprężyn symetrycznie przymocowanych do masy, które mogą swobodnie poruszać się w kierunku lewo-prawo. Przyłożenie siły zewnętrznej powoduje wychylenie masy do położenia x , w którym wypadkowa sił sprężystości F_x równoważy tę siłę. (Proces konstrukcji układu przedstawiono na nagraniu: <https://youtu.be/JA5ku3y6oAY>)

Skok i pamięć

Dwa pozornie identyczne eksperymenty mogą zakończyć się różnymi wynikami, jeśli układ *pamięta*, co działo się wcześniej – na przykład wcześniejsze odkształcenia, pobudzenia czy namagnesowanie. Spinacz może raz przyciągać się do lodówki, a innym razem nie. To jeden z wielu codziennych przykładów *pamięci materii*.

W fizyce taką zależność stanu układu od jego historii (a więc od drogi dojścia do danego stanu) nazywamy histerezą. Przykład ze spinaczem jest klasyczną ilustracją histerezy magnetycznej: namagnesowanie ferromagnetyka zależy nie tylko od aktualnej wartości zewnętrznego pola magnetycznego, lecz także od tego, w jakim polu materiał znajdował się wcześniej. Co więcej, namagnesowanie może utrzymywać się nawet po usunięciu pola zewnętrznego. Zmiana magnetyzacji takiego materiału również nie jest prosta: aby ją odwrócić, trzeba przyłożyć pole w przeciwnym kierunku i o odpowiednio dużym natężeniu. Dlatego mówimy, że ferromagnetyk *pamięta* historię zmian pola.

Histereza nie jest jednak pojęciem zarezerwowanym jedynie dla ferromagnetyków. Występuje także w układach mechanicznych, jak choćby w popularnej zabawce *pop-it*, gdzie każdy „klik” odpowiada nagłemu przeskokowi układu z jednego lokalnego położenia równowagi do drugiego. Analogiczny efekt można odtworzyć w prostym modelu: masie przymocowanej do dwóch identycznych sprężyn (rys. 1).

Sprężyny w tym układzie zamontowano tak, aby mogły swobodnie się ścisnąć i rozciągać, a dzięki zastosowaniu łożysk również obracać się wokół punktów zaczepienia. Jeden z końców każdej sprężyny przymocowano do podstawki, natomiast drugi połączono w punkcie, w którym umieszczono dodatkową masę.

Gdy sprężyny są lekko ściśnięte, masa niechętnie pozostaje w położeniu środkowym i ucieka na jedną ze stron, przez co układ przyjmuje kształt litery „V”. Jeśli znajdzie się w jednym położeniu równowagi, może w nim pozostać, mimo że symetrycznie po drugiej stronie istnieje równoprawne położenie stabilne.

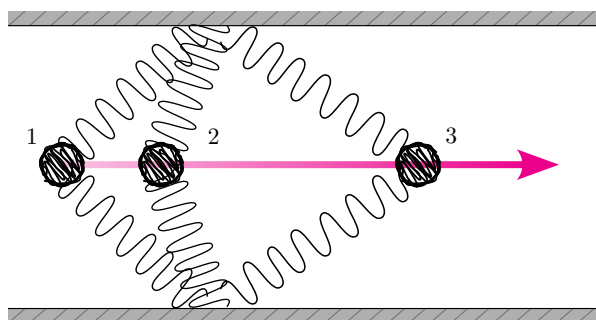
Gdzie w tym wszystkim kryje się histereza? Najprościej zobaczyć ją, zadając krótkie pytanie pomocnicze: *Co się stanie, gdy pociągniemy masę?* – odpowiedź brzmi: *to zależy*. Nie tylko od parametrów układu, ale także od tego, w którym stanie równowagi masa znajduje się w danej chwili.

Jeśli masa jest po lewej stronie (położenie 1 na rys. 2), to przykładając siłę w prawo, przesuujemy ją w stronę środka, jednocześnie ściskając sprężyny (położenie 2). Gdy przyłożona siła przekroczy pewną krytyczną wartość, masa

gwałtownie przeskoczy do prawego położenia równowagi (położenie 3). Dalsze przykładanie siły w tym samym kierunku prowadzi już tylko do rozciągania sprężyn. Zachowanie to jest analogiczne do ferromagnetyka w zewnętrznym polu magnetycznym, gdzie położenie masy odgrywa rolę magnetyzacji, a przyłożona siła rolę zewnętrznego pola magnetycznego.

Mechanizm pętli histerezy

Zachowanie masy zamocowanej na sprężynach możemy opisać matematycznie. Przyjmijmy, że wskutek przyłożenia siły masa zostaje wychylona o odległość x od środka układu (rys. 1). Zewnętrznej sile przeciwstawiają się sprężyny. Wskutek rozciągania lub ściskania wytwarzają one siłę dążącą do przywrócenia masy do położenia równowagi.



Rys. 2. Kolejne położenia masy ciągniętej w prawo przy stopniowo rosnącej sile. Na początku układ znajduje się w lewym położeniu równowagi (1). Następnie masa przesuwa się w stronę środka układu (2), a sprężyny ulegają ściśnięciu. W pewnym momencie następuje jednak gwałtowny przeskok: masa przechodzi na prawą stronę, sprężyny zaczynają się rozciągać, a dalsze zwiększanie siły powoduje coraz większe oddalanie się masy od środka układu (3)

Zgodnie z prawem Hooke'a każda sprężyna działa siłą wzdłuż swojej osi. Jej wartość wynosi

$$F_s = k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0),$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyn, l_0 ich długością swobodną, natomiast l oznacza odległość punktów zaczepienia od osi symetrii układu. Po zsumowaniu sił od obu sprężyn składowe poprzeczne znoszą się, a składowa wzdłuż osi x przyjmuje postać

$$(1) \quad F_x = 2kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right).$$

Aby dodatkowo uprościć opis, wprowadzamy zmienne bezwymiarowe: siłę $f = F_x/(kl_0)$, wychylenie $z = x/l_0$ oraz parametr $\lambda = l/l_0$ (omówienie wielkości bezwymiarowych można znaleźć w Δ_{24}^{12} , w tekście Jana Turczynowicza). W tych zmiennych równanie upraszcza się do postaci

$$(2) \quad f = 2z \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + z^2}} \right).$$

Widzimy, że relacja między bezwymiarową siłą f a bezwymiarowym wychyleniem z zależy tylko od jednego parametru: stałej λ , będącej stosunkiem odległości punktów zaczepienia od osi symetrii do długości swobodnej sprężyn.

Gdy $\lambda > 1$, sprężyny są zawsze rozciągnięte. Wówczas, przy braku siły zewnętrznej, jedynym położeniem równowagi jest środek układu ($z = 0$). Dla $\lambda < 1$: w położeniu środkowym sprężyny są ściśnięte, więc nawet najmniejsze zaburzenie powoduje, że masa ucieka na jedną ze stron. W takim przypadku $z = 0$ jest położeniem równowagi nietrwałej, a nowe położenia równowagi odpowiadają sytuacji, w której sprężyny mają długość swobodną, tzn.

$$z = \pm \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Interesującym pytaniem jest, jak wychylenie z zależy od siły f , czyli jak wygląda funkcja $z(f)$. Odwrócenie równania (2) nie jest łatwym zadaniem, a w pewnym zakresie parametrów zależność ta może być wielowartościowa. Przykłady takich funkcji odwrotnych pokazano na rysunku 3.

Opisywane przez nas zjawisko histerezy zachodzi tylko w przypadku $\lambda < 1$. Dla niewielkich wartości siły równanie (2) ma trzy możliwe rozwiązania: masa może być wychylona zgodnie z kierunkiem działania siły (punkt C), po stronie przeciwnej (punkt A) albo znajdować się w pobliżu osi $z = 0$ (punkt B). Rozwiązanie pośrednie (punkt B) jest jednak niestabilne.

Na podstawie równania (2) można wyznaczyć kryterium przejścia między położeniami równowagi. Poruszając się wzdłuż dolnej gałęzi wykresu $z(f)$, masa pozostaje w tym położeniu tylko do pewnej krytycznej wartości siły

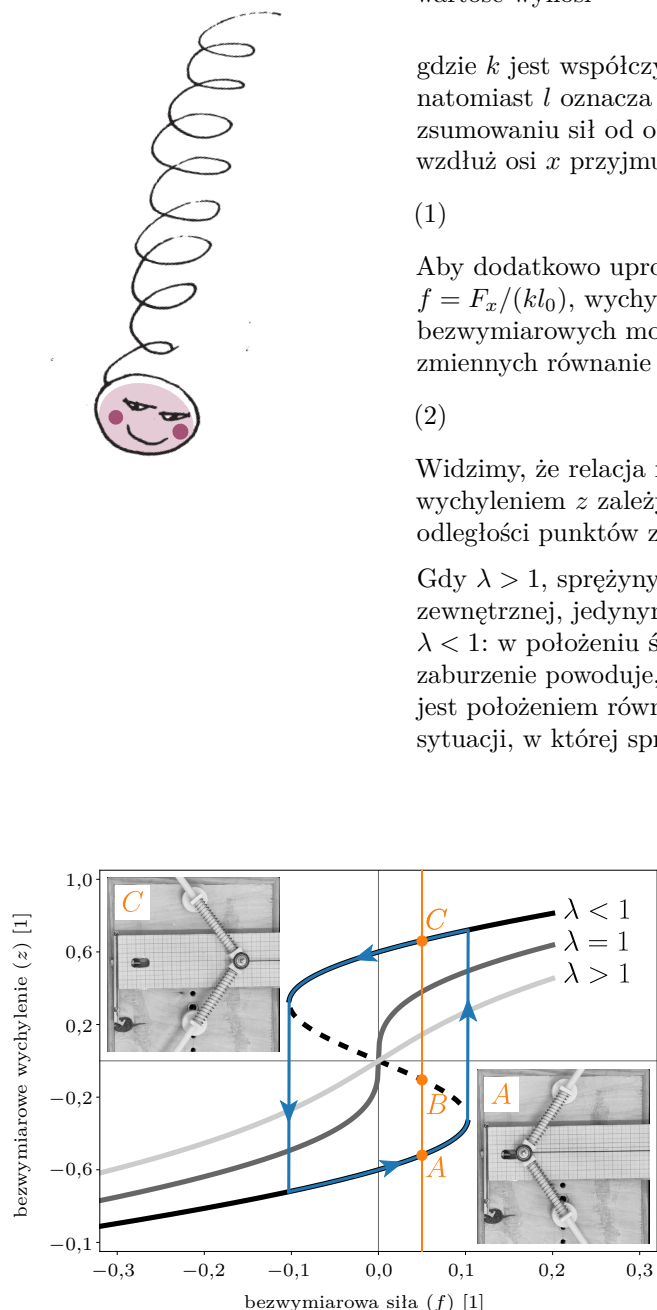
$$(3) \quad f_c = \sqrt{\lambda^{4/3} - \lambda^2} (\lambda^{-2/3} - 1),$$

odpowiadającej krytycznemu wychyleniu

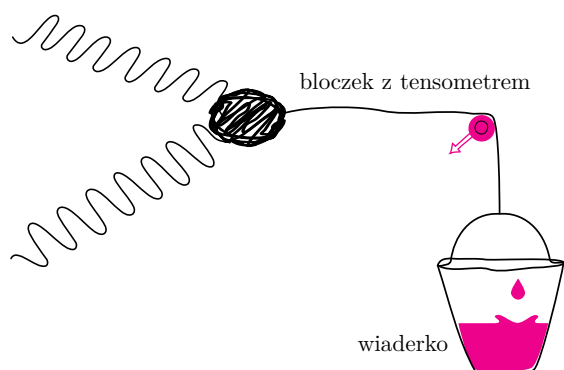
$$(4) \quad z_c = -\sqrt{\lambda^{4/3} - \lambda^2}.$$

Po przekroczeniu tej wartości rozwiązanie odpowiadające dolnej gałęzi przestaje istnieć, a masa gwałtownie „przeskakuje” do jedynego dostępnego położenia równowagi na górnej gałęzi wykresu.

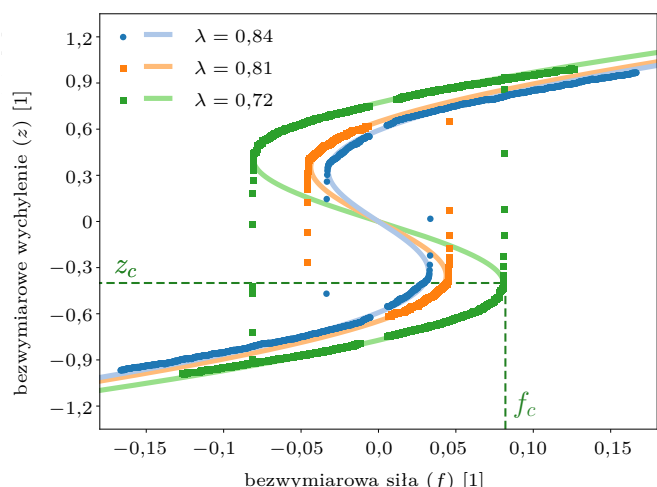
Aby wrócić na drugą stronę (na dolną gałąź), nie wystarczy już samo zmniejszenie siły. Trzeba przyłożyć ją w przeciwnym kierunku i przekroczyć wartość krytyczną $-f_c$. W efekcie, podczas zwiększania i zmniejszania siły układ podąża różnymi gałęziami rozwiązania, co prowadzi do powstania *pętli histerezy*.



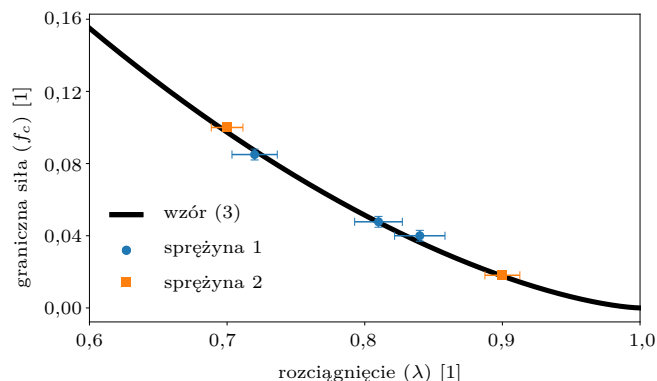
Rys. 3. Wychylenie masy z w funkcji przyłożonej siły f , obliczone na podstawie równania (2), dla przypadków, gdy sprężyny są: ściśnięte ($\lambda < 1$), neutralne ($\lambda = 1$) i rozciągnięte ($\lambda > 1$). Linia przerywaną oznaczono rozwiązania niestabilne. Gdy sprężyny są ściśnięte, przy tej samej wartości siły mogą istnieć różne położenia równowagi (A, B, C). Stany stabilne A i C zilustrowano fotografiami. Niebieskie strzałki wskazują trajektorię ruchu w przypadku wystąpienia pętli histerezy



Rys. 4. Zewnętrzna siła była przykładana za pomocą wiaderka z wodą połączonego linką przechodzącą przez bloczek. Bloczek zamocowano na tensometrze, co umożliwiło ciągły pomiar siły



Rys. 5. Zmierzone pętle histerezy: punkty przedstawiają dane pomiarowe, a linie ciągłe przewidywania teoretyczne. Pomiaru zostały wykonane dla różnych wartości bezwymiarowego parametru λ (niepewność ± 0.02)



Rys. 6. Graniczna siła przeskoku $f_c(\lambda)$ dla dwóch różnych sprężyn, o długościach swobodnych $7,4 \pm 0,1$ cm i $10,6 \pm 0,1$ cm. Linia ciągła przedstawia przewidywania równania (3)

Pętla na stole

Skoro już wiemy, co podpowiada matematyka, czas sprawdzić, czy rzeczywistość faktycznie gra według tych samych reguł. W tym celu zbudowaliśmy prosty układ złożony z dwóch sprężyn i masy, do której przymocowana była linka (rys. 1). Linkę przełożyliśmy przez bloczek, a na jej końcu zawiesiliśmy wiaderko, do którego stopniowo nalewaliśmy wodę (rys. 4).

Lejąc wodę, zwiększaliśmy obciążenie, a tym samym siłę działającą na masę. Aby dokładnie zmierzyć tę siłę, do bloczka przymocowaliśmy tensometr. Mierzył on wartość proporcjonalną do przyłożonej siły, równą $F\sqrt{2}$ (czynniki $\sqrt{2}$ wynikał z geometrii układu). Ruch masy rejestrowaliśmy kamerą. Dzięki temu mogliśmy precyzyjnie wyznaczyć zależność położenia x od przyłożonej siły F w kolejnych chwilach czasu, zarówno podczas zwiększania, jak i zmniejszania obciążenia. Mierząc niezależne parametry układu, takie jak stała sprężystości k , oraz długość swobodną sprężyn l_0 , wyznaczyliśmy bezwymiarowe wielkości: f , z .

Po zestawieniu wyników w formie wykresów zobaczyliśmy, jak dane zaczynają „rysować” to, co wcześniej widzieliśmy tylko w równaniach (rys. 5)! Przy krytycznej wartości siły masa przeskakiwała między stabilnymi położeniami równowagi, a punkty pomiarowe układały się zgodnie z teoretycznie przewidzianymi krzywymi. Pomiaru powtórzyliśmy dla kilku rozstawów sprężyn i za każdym razem otrzymywaliśmy pętlę histerezy, której rozmiar zmieniał się wraz z parametrami układu (rys. 6).

Wyniki te pokazują, że histereza nie musi być związana ani z magnesami, ani z egzotycznymi materiałami. Może pojawić się już w prostym układzie mechanicznym złożonym z dwóch sprężyn i masy, jeśli tylko geometria układu dopuszcza więcej niż jedno stabilne położenie równowagi. W takiej sytuacji odpowiedź układu na przyłożoną siłę zależy nie tylko od jej aktualnej wartości, lecz także od drogi, którą układ przebył, aby znaleźć się w danym położeniu. Innymi słowy, nawet tak prosty układ może mieć własną pamięć.

Podziękowania

Powyższa praca jest efektem przygotowań drużyny Klubu Naukowego Fenix do Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków 2025, podczas którego zespół w składzie: Zofia Makowska (kapitan), Błażej Gorzałek, Mateusz Tarczyński, Piotr Bacciarelli-Grobelny oraz Krzysztof Maksymowicz, pod opieką Jana Turczynowicza oraz Łukasza Gładczuka, zdobył srebrny medal.

Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków przeznaczony jest dla uczniów szkół średnich. O eliminacjach do poprzednich edycji turnieju pisaliśmy w Δ_{24}^{10} i Δ_{25}^{10} . Można tam znaleźć przykłady zadań turniejowych z poprzednich lat.

Kształt i opór, część 1/4: kula, walec, stożek ścięty

* Kontakt: gornicki59@gmail.com



Portret Isaaca Newtona (G. Kneller, 1689) ze zbiorów *The Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge*. Newton osiwił w wieku 30 lat, ale do końca życia zachował długie, gęste, faliste włosy. Nigdy nie nosił peruki, jak to było wówczas w modzie

Jarosław GÓRNICKI*

W filmie *Die another day* z 2002 roku (polski tytuł *Śmierć nadejdzie jutro*) agent 007 dostaje od Q samochód, który może być niewidzialny. Czy istnieją rzeczy niewidzialne wykonane z nieprzezroczystego materiału, przez które można widzieć bez zniekształceń? Zauważmy, że „niewidzialność” to pojęcie niejednoznaczne. Technologia *stealth* pozwala samolotowi być niewidzialnym dla radaru. Pochłania on fale radiowe emitowane przez radar i ich nie odbija, ale my ten samolot widzimy. Ustalmy zatem, że obiekt niewidzialny to taki, który jest niewidzialny dla ludzkiego oka, w ramach optyki geometrycznej. Pokażemy, że niewidzialność dla ludzkiego oka jest możliwa! Uzyskamy to dzięki geometrii powierzchni; własność materiału nie ma z tym nic wspólnego. Zanim o tym powiemy, poznamy zaskakujące odkrycia Newtona dotyczące... oporu ośrodka.

Isaac Newton (1642–1727) w wieku 23 lat dostrzegł działanie powszechnej siły grawitacji, wymyślił nowe metody rachunkowe (rachunek różniczkowy i całkowity) i opisał naturę światła. W latach 1669–1701 piastował stanowisko *Lucasian Professor of Mathematics* w Cambridge (Trinity College). W maju 1684 roku (gdy miał 42 lata) zaczął pisać książkę *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Napisał ją po łacinie w formie nawiązującej do *Elementów* Euklidesa. Praca nad nią trwała do kwietnia 1686 roku, a jej pierwsze wydanie ukazało się w 1687 roku. Treścią nie były nagłe ośnienia, lecz długotrwałe, głębokie przemyślenia Newtona z lat wcześniejszych.

Na *Principia* składają się definicje, aksjomaty, czyli prawa ruchu, Księga I i II, obie o ruchu ciał, Księga III o układzie świata oraz Komentarz ogólny. Księga I dotyczy ruchu zachodzącego bez jakiegokolwiek ośrodka stawiającego opór. Księga II to opis ruchu w ośrodku stanowiącym opór. Księga III to zastosowanie zasad opisanych w dwóch pierwszych księgach do wyjaśnienia działania i budowy Układu Słonecznego: skutki grawitacji, orbity planet i komet, spłaszczenie Ziemi i planet, zaburzony ruch Księżyca, zjawisko pływów, precesja punktu równonocy.

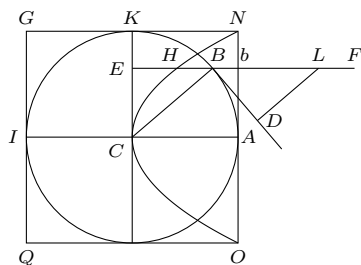
W tym precyzyjnym planie część tekstu Newton poświęcił zagadnieniom szczegółowym (przypominają one dygresje). Niektóre z nich przez blisko 300 lat budziły zdziwienie. Tak było z problemem aerodynamicznym, który spróbujemy omówić. *Problem aerodynamiczny* polega na znalezieniu kształtu powierzchni, która napotyka najmniejszy opór podczas ruchu w danym ośrodku. W naszej prezentacji pójdziemy śladami Newtona, rozważając możliwie prostą sytuację. W Księdze II *Principiów* znajdujemy

Stwierdzenie XXXIV. *Niech w rozrzedzonym ośrodku składającym się z jednakowych cząstek rozmieszczonych w jednakowych wzajemnych odległościach poruszają się kula i cylinder [walec], które mogą być wpisane w sześciang o tym samym boku, z jednakowymi prędkościami w kierunku osi cylindra. Wówczas opór kuli będzie o połowę mniejszy od oporu cylindra.*

Znajomość treści *Principiów* nie jest powszechna, więc zaczniemy od niezbędnych wyjaśnień. Przez ruch rozumiemy ruch postępowy: ciało porusza się w jednym kierunku, bez obrotu. Ośrodek, w którym zachodzi ruch, jest nieruchomy i jednorodny (wszędzie taki sam). Ośrodek jest rozrzedzony, gdy jego cząstki są daleko od siebie i są nieruchome (temperatura ośrodka jest bliska zera bezwzględnego). Każda z nieruchomych cząstek ma ustaloną masę m i jest idealnie sprężystą kulą. Samo ciało jest również idealnie sprężyste, więc mała kulka, zderzając się z ciałem, odbija się od niego zgodnie z prawem: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Dla wygody przyjmijmy, że to nie ciało porusza się w nieruchomym ośrodku, lecz odwrotnie, nieruchome ciało umieszczone jest w ośrodku poruszającym się ze stałą prędkością v . Porównamy siły oporu, jakie działają na nieruchomą kulę i nieruchomy walec (opisane w Stwierdzeniu XXXIV), gdy ciała te uderzane są przez poruszające się

Przypomina to sytuację, gdy ciało porusza się w górnych warstwach atmosfery, gdzie powietrze jest rozrzedzone i zimne, lub też w przestrzeni międzygwiezdnej.

Przyjęte tu założenie prowadzi do poprawnych konkluzji, bo działanie ośrodka na ciało jest takie samo, niezależnie czy ciało porusza się w nieruchomym ośrodku, czy też cząstki ośrodka uderzają w nieruchome ciało z taką samą prędkością w danym kierunku. Ignorujemy również, że odbite cząstki mogą zderzać się z cząstkami nacierającego ośrodka i ruch ośrodka może stać się chaotyczny.

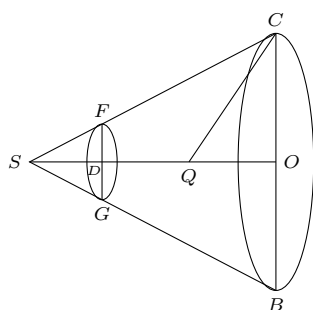


Rys. 1

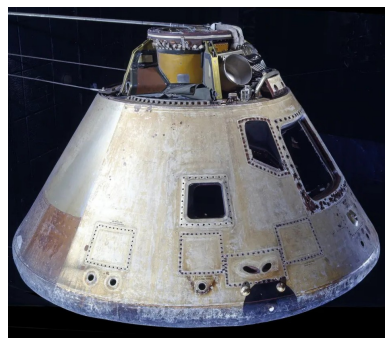
Idealizując sytuację, ignorujemy fakt, że odbite cząstki mogą zaburzać tor ruchu cząstek podążających na spotkanie z bryłą, tworząc rozmaite zawirowania.

Istotnie, jeśli wzdłuż ON ustalimy oś X , $Ab = CE = x$, gdzie $-r \leq x \leq r$, wzdłuż ACI ustalimy oś Y , to $y = H(x) = \frac{1}{r} \cdot BE^2 = \frac{1}{r}(r^2 - x^2)$.

O objętości paraboloidy wpisanej w walec pisałem w Δ_{16}^{11} .



Rys. 2



Moduł dowodzenia Skylab 4 umożliwił powrót na Ziemię załogi ze stacji kosmicznej *Skylab* (1974)

Punkt x_0 można wyznaczyć, korzystając z rachunku pochodnych lub bez jego pomocy (jak?).

cząsteczki ośrodka. Newton posługuje się proporcjami odcinków i nie stosuje wektorów. Aby dostosować rozważania do współczesnych umiejętności, wykorzystamy jednak trygonometrię i układ współrzędnych.

Załóżmy, że kula i walec wpisane są w jeden sześciąt i obie bryły zostały przecięte płaszczyzną zawierającą oś walca AI (rys. 1). Na kulę i walec działają niezależnie cząstki ośrodka poruszające się w kierunku FE (równolegle do osi walca). Wszystkie cząstki niosą taki sam pęd. Niech odcinek LB reprezentuje pęd cząstki uderzającej w kulę i niech $LB = CB = r$. Jeżeli BD jest styczną do powierzchni kuli w punkcie B , to kąt $\angle LBD = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, nazywamy *kątem natarcia*. Wtedy składowa pędu prostopadła do stycznej ma wartość $LD = LB \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$. W wyniku zderzenia składowa ta zmienia zwrot na przeciwny i przekazuje kuli pęd równy dwukrotności tej składowej, skierowany w stronę jej środka masy. Rzut tej składowej na kierunek BE ma wartość $LD \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin^2 \alpha$. Jest to właśnie ta interesująca nas część przekazywanego pędu. Analogiczne wkłady od wszystkich cząstek sumują się i przyczyniają do ruchu kuli wzdłuż osi BE , natomiast składowe prostopadłe do osi BE wzajemnie się znoszą. Z przystawiania trójkątów $\triangle DLB \sim \triangle EBC$ mamy $LD = BE$ i $\sin \alpha = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{r}$. Interesującą nas część pędu cząstki padającej w punkcie B , ale zaczepioną w punkcie b , reprezentuje odcinek $bH = r \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{r} \cdot BE^2$. Gdy punkt B przemieszcza się wzdłuż półokręgu od punktu K do punktu A , to przemieszcza i zmienia się odcinek bH tak, że punkt H zakreśla parabolę. Obrót tej paraboli wokół osi AC ogranicza paraboloidę, którą zajmują wszystkie odcinki bH tworzące składowe pędów wszystkich cząstek padających na kulę, które po zsumowaniu powodują zmianę pędu kuli w kierunku FE . Walec opisany na tej paraboloidzie tworzą wszystkie odcinki $bE (= r)$, które po zsumowaniu (i pomnożeniu przez 2, ze względu na odbicie sprężyste cząstki) dają zmianę pędu kuli spowodowaną przez wszystkie cząstki padające na walec z tego samego kierunku w jednostce czasu. Efektywna siła oporu jest proporcjonalna do tego przekazu pędu w jednostce czasu. Paraboloida wpisana w walec ma objętość o połowę mniejszą od objętości tego walca, stąd wynika teza. $\square$

W świetle dewizy Newtona *hypotheses non fingo* (nie stawiam hipotez) ciekawsze są jego komentarze (*scholium*) do omawianej propozycji. Ponieważ mała powierzchnia będzie miała mały opór, musimy określić rozmiar poszukiwanej powierzchni. Newton zakłada, że powierzchnia ta ogranicza figurę wypukłą i jest powierzchnią obrotową (a więc symetryczną).

Problem. Określ wymiary stożka ściętego o promieniu podstawy $OC = r$ i wysokości $OD = 2a$ stawiającego najmniejszy opór podczas ruchu w kierunku OS w rozrzedzonym ośrodku.

Niech $OS = x \geq 2a$ i kąt $\angle CSO = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Na powierzchnię stożka działają niezależnie cząstki ośrodka poruszające się w kierunku SO , wszystkie niosące taki sam pęd P zarówno co do wartości, jak i kierunku. Z podobieństwa trójkątów $\triangle SOC \sim \triangle SDF$ mamy $DF = r \cdot \frac{x-2a}{x}$. Na kołową podstawę o polu $\pi \cdot DF^2 = \pi \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}$ działają cząsteczki, każda przekazując pęd $2P$. Kąt natarcia cząsteczki na tworzącą stożka ma miarę α , więc przekazany stożkowi pęd (prostopadły do tworzącej i skierowany do wnętrza stożka) jest równy $2P \cdot \sin \alpha$, gdzie $\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}$, a jego składowa w kierunku SO wynosi $2P \cdot \sin^2 \alpha$. Zatem całkowity pęd przekazany stożkowi jest sumą pędów $2P$ w każdym punkcie koła o polu $\pi \cdot DF^2$ oraz pędu $2P \cdot \sin^2 \alpha$ w każdym punkcie pierścienia o polu $\pi \cdot OC^2 - \pi \cdot DF^2$. Jeśli przez k oznaczmy stały czynnik, to efektywny opór jest równy

$$k \left[\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} \right) \cdot \frac{r^2}{x^2 + r^2} \right] = kr^2 \cdot \frac{(x-2a)^2 + r^2}{x^2 + r^2},$$

gdzie $x \geq 2a$. Osiąga on wartość najmniejszą w punkcie, w którym jest minimum funkcji:

$$f(x) = \frac{(x-2a)^2 + r^2}{x^2 + r^2} \quad \text{dla } x \geq 2a,$$

a to ma miejsce dla $x_0 = a + \sqrt{a^2 + r^2}$.



Voyager 1 (1977), który opuścił Układ Słoneczny w 2012 r.

Otrzymana odpowiedź jest zgodna z konstrukcją wskazaną przez Newtona: „połowimy odcinek OD w Q i przedłużamy OQ do S tak, aby QS było równe QC . Wówczas S jest wierzchołkiem stożka, którego część [stożek ścięty $COBGDF$] jest rozwiązaniem problemu”.

Z przeprowadzonych rozważań wynika również, że kąt $\angle CSB$ jest zawsze ostry. □

I mamy niespodziankę, wśród stożków o danej podstawie i wysokości najmniejszy opór w rozrzedzonym ośrodku stawia stożek ścięty (!), i to niezależnie od początkowych wartości r i $2a$. Dodatkowo, im mniejszy stosunek $\frac{2a}{r}$, tym większa będzie część płaska. Czy więc rzeczywiście „odwrócona patelnia” to najbardziej opływowa powierzchnia w rozrzedzonym ośrodku?

Wnioski te wydawały się tak absurdalne, że uznano je za błąd geniusza, były ignorowane (niezrozumiane?) przez 300 lat, aż do XX wieku, gdy rozpoczęła się eksploracja kosmosu. . .



Niebo nade mną, grzyby pode mną

Jeśli jest lato i myślisz o grzybach, bardzo słusznie. Jeśli jest jesień i myślisz o grzybach, jeszcze lepiej. W sumie, bez względu na porę roku i doby powinniśmy myśleć o grzybach. Bo sieć cieniutkich nitek, która zawarta jest w wierzchniej warstwie naszych łądów ma kolosalne znaczenie. Od niej zależy dobrostan roślin łądowych. I, co tu dłużej ukrywać, nasz.

Wszystko zaczęło się od trufl. Albert B. Frank, niemiecki botanik, w 1885 roku badał możliwość sprowadzenia trufl do Prus. Odkrył niezwykłą rzecz: korzenie niektórych roślin były ściśle splątane ze strzępkami grzybni, a związek ten wydawał się korzystny dla obu stron. Dotąd obecność dziwnych struktur i strzępek grzybni w korzeniach roślin uważano za chorobę, pasożytnictwo lub, w najlepszym razie, za niedbałość przy pobieraniu próbek. Opublikowana przez Franka teoria o mikoryzie (ukuł ten termin od greckich słów *mykes*, grzyb oraz *rhiza*, korzeń) spotkała się z krytyką środowiska naukowego. Tymczasem Frank słusznie założył, że strzępki grzybni rozszerzają zasięg rośliny w glebie, dostarczają jej wody i związków nieorganicznych, głównie fosforanów i azotanów, ale także cynku i miedzi. Grzyb zyskuje związki organiczne do odżywiania.

Przypomnę tylko, że to, co potocznie nazywamy grzybem (zarówno takim w lesie, jak i w zapomnianym słoiku z dżemem), jest jedynie widoczną na zewnątrz małą częścią grzybiego ciała. Reszta to cienkie nitkowate struktury otoczone ścianą komórkową, nie zawsze podzielone na wyraźnie odrębne komórki, jak to jest u roślin i zwierząt. Mogą one stanowić długie, zawierające wiele jąder kanały. Ciało, które wyrasta na powierzchni, służy jedynie rozmnożeniu się za pomocą zarodników, roznoszonych wiatrem lub wodą na duże odległości.

W mikoryzie związek korzeni rośliny i strzępek może być różny. W przypadku drzew najczęściej strzępki grzybni gęsto oplatają korzeń i wchodzi w przestrzenie międzykomórkowe tkanek rośliny, jest to tzw. mikoryza zewnętrzna. W przypadku mikoryzy arbuskularnej strzępki wnikają do wnętrza komórek, a ściślej mówiąc, pod ścianę komórkową, tworząc silnie rozgałęzione arbuskule, twory, przez które zachodzi wymiana substancji. Struktura błony komórkowej pozostaje nienaruszona.

Uważa się, że około 90% gatunków roślin łądowych wchodzi w związki mikoryzowe, co nie jest dziwne, bo to dzięki temu powiązaniu rośliny mogły „wyjść z wody” około 470 milionów lat temu. Wtedy powierzchnia Ziemi była uboga w składniki mineralne, a pierwsze rośliny nie miały jeszcze dobrze wykształconych korzeni. Cieniutkie strzępki grzybów pozwalały zwiększyć zasięg i powierzchnię chłonną. Dowody na tę hipotezę pochodzą z badań kopalnych oraz analiz genetycznych współczesnych grzybów mikoryzowych. Niektórzy badacze uważają, że to mikoryza pozwoliła roślinom osiągnąć wielką różnorodność i opanować ogromną część powierzchni Ziemi.

Rosnąca liczba badań nad mikoryzą pokazuje, że rola grzybów jest większa, niż jedynie dostarczanie minerałów i wody. Grzyby wytwarzają także hormony roślinne, które po wnikięciu do organizmu rośliny regulują jego wzrost i rozwój. Grzyby wydzielają do gleby antybiotyki, zmniejszając prawdopodobieństwo zakażenia rośliny patogenami. Rośliny w związku z grzybem są bardziej odporne na stres: na skrajne



temperatury, toksyny czy niekorzystne pH. Dla części gatunków powstanie mikoryzy jest koniecznym warunkiem rozwoju.

Badania kanadyjskiej naukowczyny Suzanne Simard wykazały olbrzymi wpływ mikoryzy na kondycję lasu oraz jej rolę w komunikacji drzew między sobą, także międzygatunkową. Przez wiele lat badań Simard wykazała, że sieć mikoryzowa jest kluczem do funkcjonowania całego ekosystemu. Drzewa wymieniają między sobą związki organiczne przez grzybnie, także międzygatunkowo (!), a kierunek przekazywania substancji zależy od tego, które drzewo jest bardziej w „potrzebie”, na przykład z braku dobrego światła do fotosyntezy. Drzewa-matki wysyłają młodym drzewom wyrosłym z ich nasion więcej węgla i substancji odżywczych niż niespokrewnionym osobnikom. Drzewa zaatakowane przez szkodniki (np. owady) lub w stresie wysyłają przez grzybnie sygnały, dzięki czemu inne drzewa uruchamiają systemy obronne. W ostatnich etapach życia stare drzewo intensywnie zasila sieć mikoryzową, oddając wszystko, by wzmocnić młode osobniki. Monokultury sadzonych i „pielonych” lasów są słabe, bo bez wsparcia sieciowego innych gatunków sadzonki iglaste znacznie częściej chorują i umierają. W obliczu stresu klimatycznego (wyższych temperatur i susz) zależność drzew od podziemnych sieci grzybowych drastycznie rośnie.

Nowe możliwości – używanie modeli sztucznej inteligencji i masowa analiza wielu próbek – ujawniają wymiar globalny roli mikoryzy. Naukowcy zaangażowani w badania stworzyli SPUN (*Society for the Protection of Underground Networks*), publikują dane i próbują przebić się z głosem o konieczności ochrony podziemnych sieci. W opublikowanej w *Science* w czerwcu 2026 roku pracy skupiającej się na mikoryzie arbuskularnej.

Z 16 000 próbek gleby pobranych z różnych ekosystemów (lasy, łąki, sawanny itd.) na świecie oznakowano, ile strzępek mikoryzowych znajduje się w określonej objętości gleby. Następnie użyto modelu uczenia maszynowego i stworzono mapy przewidujące gęstość grzybni dla każdego obszaru lądowego na Ziemi. Dzięki temu powstała pierwsza globalna mapa mikoryzy arbuskularnej. Na podstawie analizy 300 000 próbek strzępek grzybni rosnących w laboratorium przeliczono oszacowaną długość strzępek na biomasę grzybowej sieci. Wyniki zostały przedstawione na mapie świata pod nazwą „A Hidden Infrastructure”. Są doprawdy oszałamiające. Badacze oszacowali, że w górnej warstwie gleby na Ziemi (do 20 cm) znajduje się około $1,1 \times 10^{17}$ km żywych strzępek grzybów mikoryzowych. Jest to, według przeliczeń, około 300 megaton czystego węgla organicznego, co stanowi 4–6 razy więcej niż masa węgla w ciałach wszystkich ludzi na Ziemi.

Można to porównać do odkrycia, że pod powierzchnią Ziemi istnieje gigantyczna biologiczna infrastruktura transportowa, przez którą przepływa część węgla pobieranego z atmosfery. Skoro sieć jest tak rozległa i zawiera setki milionów ton biomasy, nie można jej ignorować przy analizowaniu globalnego cyklu węgla.

Mikoryza arbuskularna stanowi 70% mikoryzy, głównie dotyczy roślin zielnych. Niestety ponad 90% łąd, który pokryty jest tymi roślinami, nie jest chronione. Jednocześnie średnia gęstość grzybni mikoryzy arbuskularnej na gruntach rolnych jest o blisko 50% niższa niż w naturalnych ekosystemach. Staje się jasne, że trzeba je chronić, także ze względu na zdolności gleby bogatej w mikoryzę do magazynowania węgla.

Profesor Susan Simard w swoim wystąpieniu w ramach TED mówi o lesie jak o rodzaju inteligentnego organizmu, w którym drzewa i inne rośliny komunikują się ze sobą przez sieć podziemnych połączeń. W jej rodzinnej Kanadzie, w Terrasse-Vaudreuil, niedaleko Montrealu 9 czerwca tego roku przyjęto uchwałę, która uznaje drzewa za osoby mające prawo do obrony i dobrego życia. Zastanawiam się, czy da się powiedzieć, gdzie osoba drzewa się kończy. Czy tam gdzie jej korzenie, czy sięga dalej niezmiernie złożonym system biologicznych kanałów? A może to wszystko to jedna osoba?

Wspomniane publikacje:

Frank A.B., Trappe J.M.: On the nutritional dependence of certain trees on root symbiosis with belowground fungi (an English translation of A.B. Frank's classic paper of 1885). *Mycorrhiza* 2005.

Stewart J. D. i wsp.: Global density and biomass of arbuscular mycorrhizal fungal networks. *Science* 2026.

Simard S.W.: Net transfer of carbon between ectomycorrhizal tree species in the field, *Nature* 1997.

Mapa dostępna na stronie organizacji SPUN: a-hidden-infrastructure.spun-earth/story/a-hidden-infrastructure

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Człowiek o AI (8)

* Student, Uniwersytet Warszawski

Mintz, S., *Apparently, I'm a Bot*, Inside Higher Ed, kwiecień 2025.

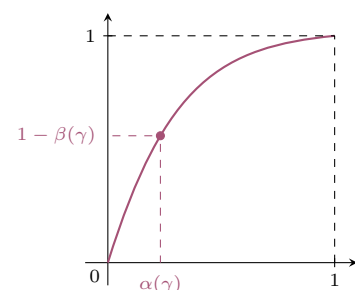
Sadasivan, V. S., Kumar, A., Balasubramanian, S., Wang, W., Feizi, S., *Can AI-Generated Text be Reliably Detected?*, arXiv:2303.11156v4, preprint, 2025. Kod źródłowy eksperymentów dostępny pod adresem: github.com/vinusankars/Reliability-of-AI-text-detectors.

Kirchenbauer, J. i in., *A Watermark for Large Language Models*, 2023.

Li, Y. i in., *MAGE: Machine-Generated Text Detection in the Wild*, 2024.

Krishna, K. i in., *Paraphrasing Evades Detectors of AI-Generated Text, but Retrieval is an Effective Defense*, 2023.

Mitchell, E. i in., *DetectGPT: Zero-Shot Machine-Generated Text Detection Using Probability Curvature*, 2023.



Przykładowa krzywa ROC

Nie ma tekstu zbyt ludzkiego...

Jakub RYŁOW*

Steven Mintz, profesor historii na Uniwersytecie Teksasńskim w Austin, napisał w swojej karierze ponad osiemset esejów. Kiedy pewnego dnia wrzucił jeden z nich do popularnego detektora AI, otrzymał wynik: **100% wygenerowane przez sztuczną inteligencję**. Tekst opisywał spektakl muzyczny, który Mintz widział osobiście, w sali z pięćdziesięcioma widzami, bez żadnego nagrania ani śladu w internecie. Detektor nie przejął się tym szczegółem. To samo narzędzie oceniło przemówienie gettyńburskie Lincolna jako stuprocentowo maszynowe, a esej Orwella *Shooting an Elephant* z 1936 roku jako podejrzany w ponad połowie. Jest w tym pewna poetycka sprawiedliwość: dzieło człowieka będącego twórcą opisu świata, w którym myślozbrodnię wykrywa się na podstawie stylu wypowiedzi, pada ofiarą algorytmu wykrywającego myślozbrodnię na podstawie stylu wypowiedzi. Orwell napisał *Rok 1984* jako ostrzeżenie. Nikt nie spodziewał się, że będzie też instrukcją obsługi detektora plagiatów. Atmosfera podejrzliwości wobec dobrze napisanego tekstu jest bowiem jak najbardziej orwellowska: im staranniej piszesz, tym bardziej jesteś podejrzany.

Można by uznać te przypadki za błędy implementacji konkretnych narzędzi. Jednak w 2025 roku Sadasivan, Kumar, Balasubramanian, Wang i Feizi opublikowali artykuł *Can AI-Generated Text be Reliably Detected?*, w którym wykazali, że problem nie leży w implementacji. Problem leży w naturze zadania, co wyjaśnimy poniżej.

Rodzaje detektorów

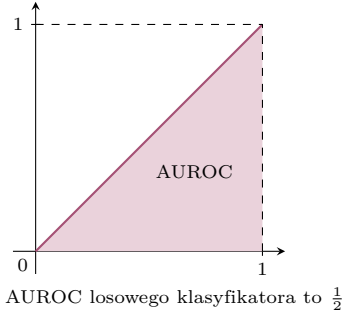
Istnieją różne sposoby na wykrywanie tekstów wygenerowanych przez AI. Mamy na przykład detektory oparte na tzw. *znakach wodnych*. Niektóre modele celowo generują tekst z ukrytym wzorcem statystycznym, preferując tokeny z tzw. zielonej listy, by możliwe było wykrycie źródła pochodzenia tekstu metodami analizy statystycznej. Druga klasa to detektory oparte na sieciach neuronowych, trenowane binarnie na parach tekstów ludzkich i maszynowych. Trzecia to detektory *oparte na wyszukiwaniu*: dla danego tekstu sprawdzają, czy nie ma semantycznie doń podobnego w bazie wielu tekstów wygenerowanych przez konkretny model. Oczywiście są również inne pomysły. Na przykład narzędzie DetectGPT opiera się na obserwacji, że (w dużym uproszczeniu) jeśli model maszynowy lekko zmodyfikuje tekst wygenerowany przez maszynę, to efekt nie powinien wyglądać na jeszcze bardziej maszynowy.

Jak oceniane są detektory?

Detektory nie tylko oceniają, ale i same są oceniane – jak to się robi? Możemy w (nie tak znowu dużym) uproszczeniu przyjąć, że każdy detektor to pewna funkcja D , która dowolnemu tekstowi s przypisuje liczbę $D(s) \in [0, 1]$. Liczba ta jest siłą przekonania detektora o tym, że tekst s został wygenerowany przez AI. Ostatecznie jednak badacz chce być w stanie rozróżniać między tekstami sztucznymi a wytworzonymi przez człowieka. W tym celu ustala pewien próg $\gamma \in [0, 1]$ i wszystkie teksty s , dla których $D(s) \geq \gamma$ uznaje za sztuczne. Oczywiście zdaje on sobie sprawę z tego, że zapewne popełnia błędy. Mogą one być dwojakiego rodzaju: może błędnie uznawać teksty człowieka za sztuczne (jak w opisanych na wstępie przykładach) oraz odwrotnie. Prawdopodobieństwo popełnienia pierwszego typu błędu to $\alpha(\gamma) := \mathbb{P}_H(D(S) \geq \gamma)$, tzn. zakładamy, że S jest losowym słowem wytworzonym przez człowieka. Analogicznie, szansa na drugi błąd to $\beta(\gamma) := \mathbb{P}_{AI}(D(S) < \gamma)$.

Nietrudno zauważyć, że funkcja $\alpha(\gamma)$ jest malejąca, zaś funkcja $\beta(\gamma)$ jest rosnąca. Punkty $(\alpha(\gamma), 1 - \beta(\gamma))$ dla wszystkich $\gamma \in [0, 1]$ tworzą zatem pewną „rosnącą” krzywą, łączącą punkt $(0, 0)$ z punktem $(1, 1)$. Określa się ją skrótem ROC (ang. *Receiver Operator Characteristic*; nazwa sięga II Wojny Światowej, za jej pomocą oceniano skuteczność radarów). Od dobrego detektora oczekujemy, że można do niego dobrać próg γ dający możliwie niskie wartości $\alpha(\gamma)$ i $\beta(\gamma)$,

tn. że jego krzywa ROC przechodzi możliwie blisko (w jakimś sensie) punktu $(0, 1)$. Wobec monotoniczności ROC sensownym sposobem pomiaru tej bliskości jest pole powierzchni obszaru przez nią ograniczonego. Jest to klasyczny sposób pomiaru jakości detektora (nie tylko tekstów), oznaczany jako AUROC(D) (*Area Under ROC*) lub, trochę krócej, AUC(D).



Zobaczmy, jak działają te pojęcia na przykładzie dość żalostnego detektora, który nawet nie patrzy na dostarczony mu tekst s , tylko daje losową liczbę z przedziału $[0, 1]$. Wówczas $\beta(\gamma) = 1 - \alpha(\gamma) = \gamma$, więc krzywa ROC to wykres funkcji $y = x$ na $[0, 1]$, a także AUROC = $\frac{1}{2}$. Jest to również rozsądny punkt odniesienia – każdy sensowny detektor powinien mieć AUROC większe od $\frac{1}{2}$.

AUROC a odległość między rozkładami

Nie zaskoczy nikogo stwierdzenie, że im bardziej podobne do ludzkich teksty generuje sztuczna inteligencja, tym trudniejsze zadanie stoi przed detektorami. Można jednak mieć nadzieję na to, że jeśli tylko jest między tymi źródłami tekstów jakakolwiek „statystyczna” różnica, to odpowiednio „silny” detektor będzie sobie rozsądnie radził z odróżnianiem jednych od drugich.

Okazuje się, że nie jest tak dobrze. Aby się o tym przekonać, wprowadźmy następujący sposób mierzenia odległości między losowością tekstów ludzkich i maszynowych. Jest to tzw. *odległość całkowitego wahania* między dwoma rozkładami prawdopodobieństwa. Niech, tak jak wcześniej, AI oznacza losowość (formalnie: rozkład prawdopodobieństwa) wszystkich możliwych sekwencji tokenów generowanych przez model językowy, a H – analogiczną charakterystykę tekstów ludzkich. Wtedy odległość całkowitego wahania między nimi określona jest wzorem

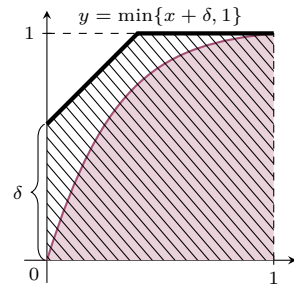
$$TV(H, AI) = \sup_{A \subseteq \Omega} |\mathbb{P}_{AI}(S \in A) - \mathbb{P}_H(S \in A)|,$$

gdzie Ω jest przestrzenią wszystkich możliwych tekstów. Intuicja jest raczej prosta – pytamy o maksymalną, bezwzględną różnicę między prawdopodobieństwami wygenerowania tekstu należącego do zbioru A dla wszystkich możliwych wyborów A .

Zauważmy, że

$$|(1 - \beta(\gamma)) - \alpha(\gamma)| = |\mathbb{P}_{AI}(D(s) \geq \gamma) - \mathbb{P}_H(D(s) \geq \gamma)| \leq TV(H, AI).$$

Oznaczając prawą stronę powyższej nierówności przez δ , otrzymujemy, że krzywa ROC jest ograniczona z góry przez wykres funkcji $y = x + \delta$, a nawet $y = \min\{x + \delta, 1\}$. Miarę AUROC jakości detektora możemy zatem oszacować z góry przez pole pod wykresem funkcji $y = \min\{x + \delta, 1\}$, czyli $\frac{1}{2} + \delta - \frac{\delta^2}{2}$. Morał: przy odpowiednio małych wartościach odległości całkowitego wahania *każdy* detektor staje się niewiele bardziej użyteczny niż losowe zgadywanie.



AUROC (oznaczone kolorem) szacuje się z góry przez pole zakresowanego obszaru, czyli $\frac{1}{2} + \delta - \frac{\delta^2}{2}$, gdzie $\delta = TV(H, AI)$

Atak przez parafrazowanie: jak AI ukrywa AI

Powyższa obserwacja dotyczy detektorów w świecie bez atakujących. Sadasivan i współautorzy pokazują, że w świecie z atakującymi sytuacja jest jeszcze gorsza. Wystarczy *rekurencyjne parafrazowanie*: tekst S generowany przez model L zastępujemy przez $P(S)$, następnie $P(P(S))$ i tak dalej, gdzie P jest dowolnym modelem parafrazującym.

Po pięciu rundach z modelem DIPPER (11 miliardów parametrów) wskaźnik wykrywalności znaków wodnych spada z 99,3% do 9,7%. Już dwie rundy wystarczają, by zejść poniżej 50% wykrywalności. AUROC detektora DetectGPT spada po parafrazie z 0,965 do 0,25 – poniżej wartości odpowiadającej losowemu zgadywaniu. Jakość parafraz prawie nie cierpi: 89% oceniono w badaniu MTurk jako gramatycznie doskonałe.

Spójność z powyższymi obserwacjami jest pełna: parafrazowanie zbliża rozkład przetworzonego tekstu do rozkładu ludzkiego, zmniejsza odległość całkowitego wahania, a wraz z nią skuteczność detektora.

Touvron, H. i in., *Llama 2: Open Foundation and Fine-Tuned Chat Models*, arXiv preprint, 2023. LLaMA-2-7B-Chat pełnił rolę „parafrazera”. Paradoksalnie: AI ukrywa AI.

Zhang, S. i in., *OPT: Open Pre-Trained Transformer Language Models*, arXiv preprint, 2022. Modele OPT-1.3B i OPT-13B były celami ataków.

Rajpurkar, P. i in., *SQuAD: 100 000+ Questions for Machine Comprehension of Text*, 2016. Benchmark SQuAD-v2 potwierdził zachowanie treści po parafrazie.

Gu, C. i in., *On the Learnability of Watermarks for Language Models*, arXiv preprint, 2024.

Quach, K., *Professor Freezes Student Grades After ChatGPT Claimed AI Wrote Their Papers*, The Register, 2023. Studenci pisali. Profesor zamroził oceny. Nierówność $AUROC \leq \frac{1}{2} + \delta - \frac{\delta^2}{2}$ kiwała głową.

Kosmyna, N. i in., *Your Brain on ChatGPT: Accumulation of Cognitive Debt When Using an AI Assistant for Essay Writing Task*, 2025. Badanie wstępne, przed pełną recenzją; autorzy zalecają ostrożność interpretacyjną.

Gerlich, M., *AI Tools in Society: Impacts on Cognitive Offloading and the Future of Critical Thinking*, 2025. Badanie na 666 uczestnikach potwierdziło mediującą rolę tego zjawiska między używaniem AI a osłabieniem myślenia krytycznego.

Salatino, A. i in., *Influence of AI Behavior on Human Moral Decisions, Agency, and Responsibility*, 2025. Bierne poleganie na AI osłabia nie tylko pamięć, lecz także poczucie sprawczości i odpowiedzialności moralnej.

Liang, W. i in., *GPT Detectors are Biased Against Non-Native English Writers*, 2023. Detektory karzą też obcokrajowców piszących po angielsku – za pisanie z akcentem.

Podobny los spotkał dwukropek, wyliczenia i zdania wielokrotnie złożone. Interpunkcja jako dowód winy.

Zob. Sourati, Z., Ziabari, A.S., Dehghani, M., *The Homogenizing Effect of Large Language Models on Human Expression and Thought, Trends in Cognitive Sciences*, marzec 2026; oraz popularnonaukowe omówienie: Chayka, K., *A.I. Is Homogenizing Our Thoughts*, *The New Yorker*, 25 czerwca 2025.

Fowler, G. A., *We Tested a New ChatGPT-Detector for Teachers. It Flagged an Innocent Student*, *The Washington Post*, 2023; Al-Sibai, N., *AI Plagiarism Detection Software Keeps Falsely Accusing Students of Cheating*, *Futurism*, 2023.

Kiedy detektor atakuje niewinnych

Artykuł bada też kierunek odwrotny: jak sprawić, by tekst *ludzki* wyglądał jak tekst wyprodukowany przez AI. W przypadku metod opartych na znakach wodnych wystarczy wielokrotnie zapytać model o następnik danego słowa, by statystycznie odtworzyć zieloną listę, która z założenia powinna być prywatna. Dysponując tą wiedzą, napastnik komponuje zdania bogate w tokeny z zielonej listy i detektor uznaje go za znakowany model. AUROC detektora wodnego spada w eksperymencie z 0,998 do 0,013 – narzędzie klasyfikuje teksty ludzkie jako maszynowe z taką samą pewnością, z jaką wcześniej klasyfikowało poprawnie.

Scenariusz z detektorem opartym na wyszukiwaniu jest jeszcze prostszy i etycznie bardziej niepokojący. Nauczyciel prosi model o sparafrazowanie eseju studenta. Model zapisuje parafrazę w swojej bazie. Detektor porównuje oryginał studenta z parafrazą i ogłasza plagiat. Student pisał sam. Matematycznie trywialne. Etycznie nieakceptowalne.

Mózg na zwolnieniu: po co w ogóle pisać samemu

Do tej pory mówiliśmy o tym, co AI robi z detektorami. Warto zapytać, co robi z piszącymi. Wyniki są równie niepokojące. Zespół MIT Media Lab pod kierownictwem Natalii Kosmyny wyposażył 54 studentów z obszaru Bostonu w czepki EEG i przez cztery miesiące obserwował aktywność ich mózgów podczas pisania esejów. Aktywność mierzona wskaźnikiem Dynamic Directed Transfer Function (dDTF) – przepływem informacji między obszarami mózgu odpowiedzialnymi za funkcje wykonawcze, przetwarzanie semantyczne i regulację uwagi – była niższa o 55% u studentów piszących z pomocą ChatGPT niż u piszących bez żadnych narzędzi. 83% studentów z grupy ChatGPT nie potrafiło po zakończeniu badania przypomnieć sobie kluczowych twierdzeń ze swoich własnych esejów. Efekty utrzymywały się nawet po „odstawieniu” modelu: studenci, którzy zaczęli od ChatGPT, a potem pisali samodzielnie, wykazywali niższą aktywność neuronową niż ci, którzy od początku pracowali bez wspomagania.

Mechanizm leżący u podstaw tego zjawiska to *cognitive offloading* – przenoszenie wysiłku poznawczego na narzędzie zewnętrzne. Skumulowany efekt powtarzanego delegowania wysiłku intelektualnego badacze nazywają *dlugiem poznawczym* – oprocentowanym zaciąganiem pożyczki od własnego mózgu. Mózg rządzi się zasadą *use it or lose it*: obwody regularnie nieużywane ulegają osłabieniu.

Za co naprawdę karzą detektory

Wróćmy do Mintza, Lincolna i Orwella. Detektory nie mierzą proveniencji. Mierzą wzorce powierzchniowe: formalność stylu, regularność składni, brak potknięć, przemyślane przejścia między akapitami. Dobra proza ma dokładnie te cechy. W świecie detektorów nie ma tekstu zbyt ludzkiego – jest tylko tekst na tyle niestaranny, by nie wzbudzić podejrzeń.

Do podejrzanych sygnałów należy też pauza – znak interpunkcyjny obecny w prozie od Stendhala po Miłosza, stosowany wszędzie tam, gdzie przecinek jest za słaby, a nawias zbyt urzędowy. Detektory nauczyły się, że AI lubi pauzy, i wyciągnęły z tego wniosek odwrotny do zamierzonego: że każdy, kto ich używa, jest podejrzany.

Logiczną konsekwencją jest homogenizacja: pisz jak wszyscy, myśl jak wszyscy, nie wyróżniaj się nawet minimalnie ponad popositą średnią – bo niestandardowość jest dziś dowodem winy. Efekt jest dość groteskowy: pewien serwis oferuje za opłatą uszlachetnianie tekstu w kierunku usterkowości – przez celowe wstawienie błędów gramatycznych i zastąpienie formalnych łączników czymś mniej starannym. Żeby brzmieć jak człowiek, trzeba nauczyć się pisać gorzej.

Zestawienie obu wątków ujawnia paradoks strukturalny. Studenci używający AI piszą szybciej, ale pamiętają mniej i tracą poczucie autorstwa. Studenci

piszący bez AI, lecz dobrze, są oskarżani o użycie AI. Obserwacja Sadasivana i współautorów wyjaśnia, dlaczego ten paradoks jest nieusuwalny: gdy $TV(M, H)$ jest małe, detektor nie może odróżnić obu grup – i nie odróżnia.

Warto jednak odnotować, że entuzjazm, z jakim niektórzy rozsyłają dowody bezskuteczności detektorów, jest sam w sobie zastanawiający. *The lady doth protest too much, methinks...*

Szekspir, W., *Hamlet*, akt III, scena 2.

Konkluzja

Detektory mogą być użytecznym narzędziem pomocniczym pod warunkiem, że nikt nie traktuje ich wyniku jako dowodu. Pewnym paradoksem jest fakt, że konsekwencją postępującego rozwoju technologicznego (który w teorii miał gwarantować wiarygodność i weryfikować wiele kwestii niemierzalnych, takich jak zaufanie) jest rozmycie tej pewności i precyzji w wielu aspektach, pozostawiając dużo miejsca na domysły, tutaj akurat w kwestii przypisania autorstwa do wybranego dzieła. Jednocześnie otwiera to drogę na zupełnie nieścisłe metody weryfikacji: intuicję, przecucie, wrażenie, czy dany tekst powstał samodzielnie, czy nie.

Bot – program komputerowy, który nie jest człowiekiem, lecz próbuje imitować jego działania, np. tworzyć teksty czy prowadzić rozmowy.

Das, M. R., *Turn-It-In: AI Fails Students for Not Using AI*, Firstpost, 2023; Weiss, M., *Deepfake Bot Submissions to Federal Public Comment Websites Cannot Be Distinguished from Human Submissions*, Technology Science, 2019.

Profesor Mintz jest botem. Lincoln jest botem. Orwell – autor ostrzegający przed światem, w którym myśl jest przestępstwem – jest botem. ChatGPT przechodzi test człowieczeństwa z wynikiem lepszym niż wszyscy trzej razem wzięci. Studenci, którzy oddali pisanie modelowi, nie pamiętają własnych esejów. Studenci, którzy pisali samodzielnie i pisali dobrze, zostali oskarżeni o plagiat. Nie ma tekstu wystarczająco ludzkiego, są tylko teksty za mało dokładnie przetestowane na użycie AI.

Tekst powstał bez użycia AI.

O badaniu i pożytkach z siarczku molibdenu

*Wydział Chemii oraz Centrum Nauk Biologiczno-Chemicznych, Uniwersytet Warszawski
rszoszkiewicz@chem.uw.edu.pl

Robert SZOSZKIEWICZ*

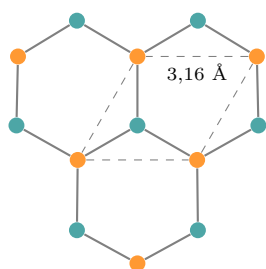
Fizykochemia powierzchni, która wyłoniła się wskutek używania teorii, metod i narzędzi badawczych z zakresu zarówno fizyki, chemii, jak i inżynierii materiałowej, bardzo pręźnie rozwijała się już w latach 80. i 90. ubiegłego wieku. Obecnie, wraz pojawieniem się tzw. materiałów dwuwymiarowych (2D) oraz niesamowitego rozwoju rozmaitych metod mikroskopowych, przeżywa kolejny renesans.

W terminologii naukowej taką operację złuszczenia określamy mianem *eksfoliacji mechanicznej materiałów objętościowych*. Po jej dokładniejszy opis można sięgnąć do artykułu *O tajemnicach eksfoliacji, czyli co łączy grafen z odklejaniem etykiet z cenami z Δ_{15}^3* .

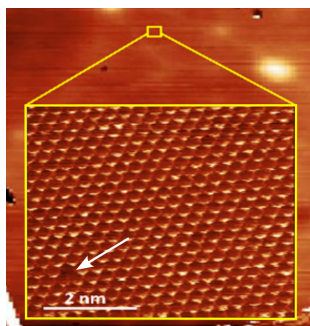
Materiały dwuwymiarowe to pewna klasa materiałów krystalicznych, których właściwości chemiczne i fizyczne bardzo silnie zależą od grubości. Z reguły są to niemalże atomowo cienkie warstwy. W najprostszy sposób można je otrzymać poprzez złuszczenie mikroskopowych kryształów. Taka operacja jest możliwa dlatego, że atomy w poszczególnych warstwach materiałów dwuwymiarowych połączone są z sobą silnymi wiązaniami kowalencyjnymi, zaś poszczególne warstwy łączą się z sobą słabymi oddziaływaniami o naturze elektrostatycznej, określanymi mianem oddziaływań van der Waalsa. Ze względu na skład atomowy i właściwości chemiczne wyróżnić można wiele klas takich materiałów, na przykład: grafen i jego pochodne, azotek boru i jego pochodne, dichalkogenki metali przejściowych, perowskity i *MXeny*.

O grafenie można było przeczytać w *Delcie*, w artykule *Grafen i spółka*, Δ_{21}^5 .

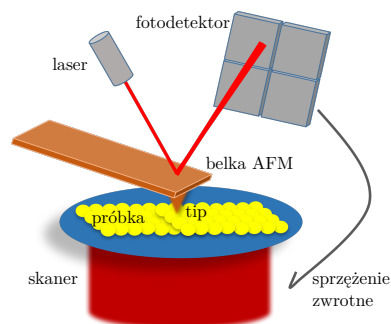
Rewolucja w świecie materiałów 2D została zapoczątkowana przez otrzymanie w 2004 roku *grafenu*, czyli pojedynczej warstwy atomów węgla ułożonych w jednej płaszczyźnie, w tzw. sieci heksagonalnej, a więc strukturze przypominającej plaster miodu, tyle że atomowo cenniejszy. Okazało się, że ma on – przewidziane przez wcześniejsze rozważania teoretyczne – niezwykle własności, jak na przykład niemalże bezstratne przewodnictwo elektronowe.



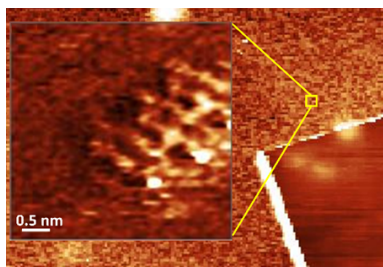
Warstwa MoS_2 widziana z góry. W górnej jej części są tylko atomy siarki (na żółto), poniżej atomy molibdenu (na niebiesko), a jeszcze niżej znów atomy siarki (niezaznaczone)



Struktura atomowa górnej (siarkowej) struktury kryształów MoS_2 z widocznym uporządkowaniem przypominającym plaster miodu oraz jedną wakancją siarkową (wskazaną strzałką)



Schemat działania mikroskopu sił atomowych (AFM) w konfiguracji podstawowej



Termicznie wyprodukowana warstwa amorficznych tlenków MoO_3 pokrywająca powierzchnię MoS_2 z widocznymi w powiększeniu atomowymi zarodkami trójtlenku molibdenu przypominającymi ożebrowanie kadłubów statków. W prawej dolnej części obrazka obszar czystego MoS_2

Na przestrzeni ostatnich 15 lat jeden z dichalkogenków metali przejściowych, a mianowicie: dwusiarczek molibdenu (MoS_2), zaskarbił sobie renomę porównywalną do grafenu. A stało się to dlatego, że kryształy MoS_2 , które kiedyś wykorzystywane były jako smary stałe, znalazły znacznie cenniejsze zastosowania. Najważniejsze to zastosowania w nanoelektronice opartej na materiałach 2D, gdyż mikroskopowe płatki MoS_2 łuszczą się podobnie jak grafit, a więc są źródłem cienkich warstw stanowiących strukturę 2D. Na takich strukturach obecnie buduje się warstwowe układy mikroelektroniczne, gdyż najczęściej występujące odmiany polimorficzne kryształów MoS_2 wykazują właściwości półprzewodnikowe, a więc można na nich budować tranzystory. Co więcej, cienkie warstwy MoS_2 znalazły również zastosowanie jako katalizatory ważnych reakcji chemicznych, jak np. otrzymywanie wodoru z hydrolizy wody czy wiązania i konwersji dwutlenku węgla. A i na tym nie koniec, gdyż kryształy te wykazują również bardzo ciekawe właściwości fotoelektryczne i znalazły już zastosowanie jako różnego rodzaju czujniki czy przetworniki światła. Wszystkie te struktury są mikroskopijnych wielkości, a więc stanowią rzeczywisty wkład nanotechnologii w rozwój nowych technologii.

Niestety każdy układ elektroniczny, w tym oparty na MoS_2 , grzeje się w trakcie swojej pracy i (co wykazano już niemalże dekadę temu) lokalne temperatury w tranzystorach opartych na bardzo cienkich warstwach MoS_2 potrafią przekroczyć ponad 250°C ! Stąd też rozwój nanoelektroniki opartej na MoS_2 pociąga za sobą konieczność badań podstawowych związanych z reakcją kryształów MoS_2 na ciepło. W szczególności ważne jest zrozumienie reakcji cienkich warstw MoS_2 na ciepło dostarczone lokalnie, czyli w skalach, w których układy te będą działać, a są to długości rzędu dziesiątek nanometrów. Właśnie to jest jednym z celów naszych badań (grupa badawcza: Maksymilian Ruta, dr Saeed Sovizi oraz kierujący – Robert Szoszkiewicz).

Zanim dokładniej opiszę ciekawe zjawiska zaobserwowane przy poddawaniu MoS_2 wysokiej temperaturze, skrótkowo przedstawię podstawowe urządzenie badawcze, czyli mikroskop sił atomowych (AFM, *Atomic Force Microscope*). Sercem tego instrumentu jest mikroskopijna belka (zwana również dźwignią), której jeden koniec jest unieruchomiony, a drugi zakończony niemalże atomowo ostrą końcówką, tzw. *tipem*. Konstrukcja tego urządzenia pozwala na detekcję rozmaitych oddziaływań między owym ostrym końcem a dowolną powierzchnią poprzez monitorowanie ugięcia końca belki z *tipem* za pomocą wiązki światła odbijającej się od tejże belki ponad *tipem*. Zmiany ugięcia belki są następnie zamieniane na sygnał elektryczny, którego pomiar umożliwia obliczenie siły. Całość dopełnia tzw. *skaner*, pozwalający na bardzo precyzyjną zmianę położenia próbki w trzech kierunkach. W tzw. podstawowej konfiguracji mikroskopu AFM próbka umieszczona jest nad skanerem. Urządzenie to potrafi mierzyć bardzo małe siły, rzędu sub-nanoniutonów, oraz bardzo małe przesunięcia, rzędu sub-nanometrów.

Powróćmy do termicznych własności dwusiarczku molibdenu. W temperaturach powyżej 400°C zachodzi nie tylko degradacja termiczna badanych próbek, ale i produkcja znaczącej ilości „nowych” materiałów [1]. Z kolei już w nieco poniżej 300°C na powierzchniach badanych kryształów MoS_2 pojawiają się trójkątne wżerki, które powiększają się w trakcie dalszego wygrzewania. Trójkątny kształt obserwowanych zagłębień można wytłumaczyć na podstawie heksagonalnej symetrii w płaszczyznach MoS_2 [2].

Mechanizmy prowadzące do powstawania owych trójkątnych wżerek wskutek trawienia termicznego wcale nie są oczywiste. Na podstawie doniesień literaturowych za najbardziej prawdopodobny proces startowy uznaliśmy dysocjację (tj. rozszczepienie) atomów cząsteczkowego tlenu w otoczeniu wakancji siarkowych (czyli braków atomów siarki). Obecnie uważamy, że reakcja ta inicjuje kaskadę dalszych procesów powodujących powstanie zarówno tlenków siarki, jak i tlenków molibdenu. W niższych temperaturach, tj. około 300°C , oba te produkty chętnie opuszczają środowisko reakcji – ze względu na lotność dwu- i trójtlenków siarki oraz skłonności do sublimacji tlenków molibdenu.



W wyższych temperaturach w wyniku bardziej gwałtownego przebiegu reakcji trawienia termicznego część powstających tlenków molibdenu może pozostać na powierzchni trawionego i utlenianego disiarczku molibdenu. Ciekawym aspektem tych badań jest jednak fakt, iż cienkie warstwy tlenków molibdenu, a w szczególności najstabilniejszy z nich, α - MoO_3 , może – podobnie jak MoS_2 – wykazywać właściwości półprzewodnikowe.

Lokalna detekcja obecności α - MoO_3 wydawała się początkowo bardzo trudna, gdyż wspomniane cienkie warstwy α - MoO_3 są przezroczyste optycznie, chętnie ulegają sublimacji i trudno je wykryć typowymi metodami fizykochemicznymi. Co więcej, chemia związków molibdenu jest niezwykle skomplikowana, ponieważ pojawić się mogą łańcuchy tlenkowe, tzw. politlenki, a także hydraty tlenków molibdenu i ich hydroksytlenki. Szczegółowa detekcja chemiczna tlenków molibdenu w sub-mikroskali została opisana w pracy [3]. Detekcja taka stała się możliwa dzięki użyciu belki AFM jako mikromiotły „zamiatającej” lokalnie utworzone na powierzchni MoS_2 nanoklastry tlenków molibdenu w większe skupiska, których już sub-mikrometrowe rozmiary pozwoliły na ich pełną chemiczną identyfikację – i przyporządkowanie w ponad 99% do struktur MoO_3 . To ostatnie stało się możliwe przy użyciu absorpcyjnej spektroskopii rentgenowskiej (XAS, *X-ray Absorption Spectroscopy*) z użyciem wiązki synchrotronowej pozwalającej na większą niż w przypadku alternatywnych metod precyzję i rozdzielczość przestrzenną.

W publikacji [4] potwierdzono lokalne powstawanie pojedynczych cząstek MoO_3 oraz ich oligomerów (związków chemicznych niewielkiej liczby powtarzających się fragmentów) na podstawie bardzo dokładnych pomiarów AFM z rozdzielczością atomową i z wykorzystaniem metod symulacyjnych (opartych na teorii funkcjonału gęstości, DFT). Studia te zostały rozwinięte w kolejnej publikacji [5], w której pokazujemy lokalną obecność krystalitów α - MoO_3 – rozdzielonych na podstawie stosownych długości wiązań, a zmierzonych w powietrzu (!) z użyciem nowatorskich metod konduktywnych mikroskopii AFM. Krystality te są niejako zanurzone w amorficznej strukturze cienkich warstw MoO_3 . Nawiasem mówiąc, badania te dostarczyły również odpowiedzi na pytanie, czemu obecność MoO_3 nie była dotychczas obserwowana metodami spektroskopii Ramana.

W kolejnej z prac przeprowadzaliśmy badania wygrzewania powierzchni krystalitów MoS_2 za pomocą bardzo lokalnego źródła ciepła, stanowiącego tzw. gorący tip AFM, który to jest zdolny wywoływać stymulowane ciepłem reakcje chemiczne w skalach niemalże atomowych. Okazało się jednak, iż zamiast przewidywanego trawienia termicznego oraz utleniania zaobserwowaliśmy jedynie spowodowaną ciepłem trwałą deformację badanych próbek. Wy tłumaczenie tego zjawiska znajduje się w pracy [6].

Warto również wspomnieć, iż opisywane badania eksperymentalne wybranych reakcji chemicznych na powierzchniach materiałów dwuwymiarowych plasują się na styku chemii, fizyki oraz inżynierii materiałowej i w celu dokładniejszego opisu wymagają również metod obliczeniowych. Część chemiczna związana jest nie tylko z opisem stechiometrycznym badanych reakcji, ale również z syntezą lokalnie domieszkowanych materiałów 2D do dalszych badań, która obecnie wykracza poza eksfoliację mechaniczną i obejmuje zazwyczaj tzw. procesy syntezy hydrotermalnej. Część fizyczna to opis mechanizmów obserwowanych reakcji, a także skomplikowane badania eksperymentalne z udziałem częstokroć „domowo” modyfikowanego sprzętu badawczego lub też nowych metod badawczych, tu m.in. na bazie mikroskopii sił atomowych czy synchrotronów. I wreszcie stosowane metody obliczeniowe to symulacje za pomocą metod DFT lub metody uczenia maszynowego. Z pewnością jest jeszcze wiele do odkrycia!

Opisywane badania mogły zostać zrealizowane dzięki wsparciu finansowemu otrzymanemu z Narodowego Centrum Nauki (NCN) w Krakowie (grant Opus), grantów z programu IDUB realizowanego obecnie na Uniwersytecie Warszawskim, a także grantów dostępowych do pomiarów XAS w Narodowym Centrum Promieniowania Synchrotronowego „Solaris” w Krakowie. Osoby zainteresowane tą tematyką serdecznie zapraszam do współpracy naukowej w celu dalszego zgłębiania tajemnic materiałów 2D. Więcej informacji na stronie: <https://szoszlalab.ckc.uw.edu.pl/>.

Literatura

- [1] *Microscale insight into oxidation of single MoS_2 crystals in air*, Journal of Physical Chemistry C, 121, 26027-26033 (2017).
- [2] *Microscopic kinetics of heat-induced oxidative etching of thick MoS_2 crystals*, Journal of Physical Chemistry C, 123, 22123-22129 (2019).
- [3] *Direct identification of surface bound MoO_3 on single MoS_2 flakes heated in dry and humid air*, Advanced Materials Interfaces, 2100328, 11 pages (2021);
- [4] *MoS_2 oxidative etching caught in the act: formation of single $(\text{MoO}_3)_n$ molecules*. Nanoscale Advances, 4(21), 4517-4525 (2022).
- [5] *Detailed work function and structural investigations of layered MoO_3 onto SiO_2 and MoS_2 in air*. Applied Surface Science, 669, 160578 (2024).
- [6] *Thermochemical nanolithography and hot plate heating of 2D MoS_2 and CrSBr flakes in air*. Journal of Physical Chemistry Letters, 17, 1136-1146 (2026).



Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

If you spend all day shuffling words around, you can make anything sound bad, Morty.

Rick Sanchez

Anagram W' słowa W powstaje poprzez przedstawienie kolejności liter w słowie W .

Kombinatoryka na słowach to dyscyplina z pogranicza matematyki dyskretnej i informatyki teoretycznej. Naukowcy publikujący artykuły z tej dziedziny często okraszają przywoływane definicje finezyjnymi przykładami zaczerpniętymi z języka naturalnego. Trudno im się dziwić: chociażby przy wyjaśnianiu, czym jest *anagram* niełatwo oprzeć się pokusie przywołania wyrażen **ELEVENPLUSTWO** i **TWELVEPLUSONE**.

Zatem, ze względu na swoją nietrywialną strukturę, łakomym kąskiem do poszukiwań ciekawych przykładów są *przetasowane kwadraty*.

Kwadrat jest słowem, które otrzymujemy poprzez „sklejenie” (konkatenację) dwóch kopii tego samego słowa: łącząc ze sobą dwie kopie **MA**, otrzymujemy **MAMA**, a z dwóch **HOTS** dostajemy **HOTSHOTS**. Można na to spojrzeć tak, że kwadrat to takie słowo o parzystej liczbie liter, że jeżeli pokolorujemy pierwszą połowę na fioletowo, a drugą na zielono, to części fioletowa i zielona są takie same: **KANKAN**.

O przetasowanych kwadratach pisaliśmy z czysto kombinatorycznego punktu widzenia w poprzednim Kącie: Δ_{26}^7

Za *nietrywialny* przetasowany kwadrat uznajemy taki, który nie jest kwadratem. W rozważanych wyrażeniach nie rozróżniamy wielkości liter, pomijamy spacje, znaki interpunkcyjne i diakrytykę.

Jan Szejko znalazł swoje przykłady 24 sierpnia 2024 roku, podczas 67. *Szkół Matematyki Poglądowej* w Siedlcach.

Przetasowany kwadrat stanowi pewne uogólnienie pojęcia kwadratu – jest to słowo, dla którego *istnieje* takie kolorowanie każdej litery na jeden z dwóch ustalonych kolorów (pozostańmy przy zielonym i fioletowym), że otrzymane ciągi liter – oba czytane od lewej do prawej – są takie same. Pierwszym znanym przypadkiem *nietrywialnego* przetasowanego kwadratu w języku naturalnym jest wyrażenie

Nina, mima mama,

odkryte w lipcu 2023 roku przez Andrzeja Rucińskiego z Poznania. Zauważmy, że ma ono 12 liter, a przykładowe kolorowanie to **NINAMIMAMAMA**.

Nieco ponad rok później Jan Szejko z Warszawy odkrył 20-literowe wyrażenie

czaszeczka szczekacza,

i 22-literowe

dziedziczenie czekanika,

których przykładowe kolorowania to

CZASZECZKASZCZEKACZA i **DZIEDZICZENIECZEKANIKA**.

Co warto podkreślić, Ruciński i Szejko zastosowali dwa diametralnie odmienne podejścia do poszukiwania przykładów: pierwszy korzystał jedynie z siły własnego umysłu, natomiast drugi posłużył się swoimi umiejętnościami programistycznymi.

Póki co, powyższe przykłady stanowią jedyne znane przetasowane kwadraty w języku polskim. Świat zna jednak kilka okazów pochodzących z języków francuskiego i angielskiego. Najdłuższy znany obecnie przetasowany kwadrat to 48-literowy

In nine innings, Eagles battle Boston to soar near Wien win,

którego autorem jest Savinien Kreczman z Liège. Innym przykładem przetasowanego kwadratu jego autorstwa jest francuskie

Le geste léger se termine et mine tes pions espions

czy też angielski anagram przetasowanego kwadratu Rucińskiego (!):

Man, I am an imam.

Kreczman nie korzystał z pomocy komputera. Stwierdził, że tworzenie długich przykładów jest dużo łatwiejsze niż szukanie krótkich – jak sam to ujął, „wystarczy kontrolować końcówkę”, czyli przy układaniu wyrażenia liczba liter i ich układ musi się „mniej więcej” zgadzać na początku, po czym należy szukać odpowiednich słów, które będą pasować do zakończenia zdania.

Inne podejście zastosował Lucas Mol z Kamloops, który postanowił poszukać – przy użyciu komputera – dwuwyrazowych sentencji w języku angielskim. Znalazł w ten sposób 9659 przetasowanych kwadratów! Poniżej prezentujemy kilka z nich:

<i>abelian beeline</i>	<i>folks folksinging</i>	<i>rain raging</i>
<i>assassins sin</i>	<i>iconic nonsense</i>	<i>referees fees</i>
<i>bad bandana</i>	<i>kinkiest nest</i>	<i>swaps wasps</i>
<i>barbaric kick</i>	<i>ominous minus</i>	<i>tomato mass</i>
<i>einstein stinging</i>	<i>prepare fela fel</i>	<i>we weeded</i>

Więcej przetasowanych kwadratów Mola można znaleźć na okładce niniejszej *Delty*.

Wszystkie przetasowane kwadraty Kreczmana i Mola zostały odkryte na przełomie czerwca i lipca 2025 roku. Jeżeli udałoby Ci się stworzyć, Czytelniku, inne przykłady nietrywialnych przetasowanych kwadratów w językach naturalnych, to koniecznie mi je przyslij! Może nawet komuś uda się znaleźć takie słowo (lub zdanie) w języku naturalnym, które przetasowane ze sobą da słowo lub zdanie w tym samym języku, tak jak ostatni przytoczony przykład Mola czy też francuskie słowo *tuteurer*? To by było coś!



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1149. Stacjonarny satelita Ziemi zderzył się czołowo z niewielkim meteoroidem (okrucem skalnym poruszającym się w przestrzeni kosmicznej). W wyniku zderzenia prędkość satelity zmniejszyła się do $\alpha = 0,99$ wartości v_0 przed zderzeniem i nie zmieniła kierunku, a położenie i masa m satelity nie uległy zmianie. Jak zmienił się okres obiegu Ziemi przez satelitę?

F 1150. Trasa wakacyjnej wycieczki szkolnej jest tak zaplanowana, żeby uczniowie mogli przyjrzeć się kolejno powierzchniom Ziemi, Wenus i Merkurego podczas lotu na niskich (tj. blisko powierzchni planet), kołowych orbitach. Widoki są niezapomniane, a czas pełnego okrążenia każdej z planet jest niemal taki sam i wynosi około 85 minut. Co na tej podstawie można powiedzieć o wewnętrznej budowie odwiedzanych planet?

Przygotował Dominik BUREK

M 1861. Czy można umieścić trójkąt równoboczny wewnątrz sześciokąta foremnego w taki sposób, aby każdy wierzchołek sześciokąta *widział* wszystkie wierzchołki trójkąta? (Punkt A jest widoczny z punktu B , jeżeli odcinek AB nie zawiera punktów wewnętrznych trójkąta).

M 1862. Dany jest wielomian f stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, którego współczynnik przy najwyższej potęgde jest równy 1 lub -1 . Wiadomo, że f ma trzy różne pierwiastki, z których każdy jest kwadratem liczby naturalnej. Udowodnić, że w ciągu liczb

$$|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|, \dots$$

występuje kwadrat liczby naturalnej.

M 1863. Rozważamy wszystkie liczby 100-cyfrowe podzielne przez 19. Udowodnić, że liczba tych spośród nich, które nie zawierają cyfr 4, 5, 6, jest równa liczbie tych spośród nich, które nie zawierają cyfr 1, 4, 7.

Rozwiązania na str. 24

Francuska misja geodezyjna 1792–1799

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

Podboje będą przychodzić i odchodzić, ale to dzieło przetrwa.

Napoleon Bonaparte



Jean Baptiste Delambre (1749–1822)



Pierre-François Méchain (1744–1804)



Rys. 1. Koło powtarzające Borda przeznaczone do precyzyjnych pomiarów geodezyjnych, zbudowane dla ekspedycji w pracowni Etienne'a Lenoira
Źródło: Rama, CC BY-SA 3.0 FR via Wikimedia Commons

Problem ujednolicenia systemu miar

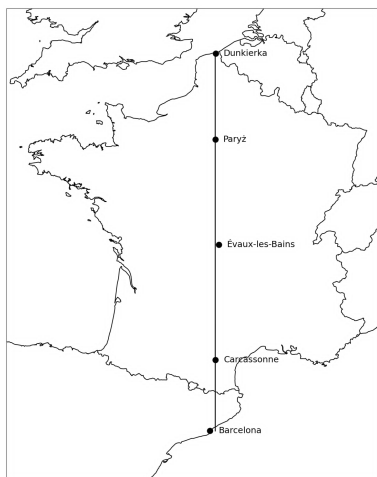
Uczni Oświecenia wyrażali opinię – wynikającą z *nakazu rozumu* – że jednostki miar powinny być uniwersalne, takie same dla wszystkich. To ułatwi wiele aspektów życia społecznego, np. wymianę handlową, badania naukowe czy podróżowanie. Ideały Rewolucji Francuskiej były zgodne ze wskazaniami uczonych w nowym, ważnym aspekcie – równości wszystkich ludzi.

Wszyscy powinni być równi wobec prawa, mieć taki sam dostęp do wszystkich rzeczy, w tym do uniwersalnych jednostek miar. W szczególności, aby być własnością wszystkich, jednostka długości powinna opierać się na zrozumiałych dla każdego podstawach, a nie być ustanowioną arbitralnie. Po wcześniejszym rozważeniu innych propozycji w marcu 1791 roku Zgromadzenie Narodowe zaaprobowало propozycję nowej jednostki – *jednego metra*, równego w zamyśle jednej dziesięciomilionowej długości części południka, od bieguna północnego do równika. Kula ziemiska jest bowiem wspólna dla wszystkich, ponadto, jak zakładano, jej kształt jest niezmienny w czasie, a wszystkie południki są równe.

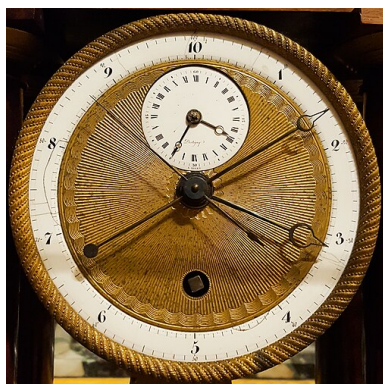
Komisję proponującą powyższą definicję jednego metra stanowili akademicy: Jean-Charles de Borda, Marquis de Condorcet, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Antoine-Laurent Lavoisier i Gaspard Monge.

Oczywistym szkopułem tego wyboru określenia nowej jednostki długości był sam problem zmierzenia długości południka oraz koszty przedsięwzięcia, stanowiące w przybliżeniu trzykrotną wartość wszystkich rocznych wydatków operacyjnych Akademii. Projekt opierał się na zmierzeniu, metodą triangulacji, długości południka przechodzącego przez centrum Obserwatorium Paryskiego, od dzwonnicy w Dunkierce do zamku Montjuïc w Barcelonie (rys. 2). W rezultacie metr zdefiniowano jako dziesięciomilionową część długości południka od równika do bieguna, ekstrapolowaną dla przyjętego spłaszczenia Ziemi na biegunie; po rozważeniu wyników badań przeprowadzonych przez Francuską Misję Geodezyjną w latach 1792–1799 i wyników pomiaru łuku południka w Ekwadorze ustalonego przez Francuską Misję Geodezyjną w Ekwadorze w latach 1735–1744, zobacz [Ferreiro, 2011], [Łukaszewicz, 2024]. Nowa ekspedycja miała do dyspozycji bardzo precyzyjny instrument pomiarowy, tzw. koło powtarzające Borda (rys. 1), uzasadniający podjęcie po raz kolejny obliczenia długości południka paryskiego. Sam Jean-Dominique Cassini (Cassini IV) przyznał: „*Instrumenty mojego ojca i dziadka pozwalały na pomiar z dokładnością do piętnastu sekund; instrument pana Borda może mierzyć z dokładnością do jednej sekundy*”.

W czerwcu 1792 roku rozpoczęto realizację projektu. Z Paryża wyruszyło dwóch członków Akademii Francuskiej, uczniów Jérôme'a Lalande'a, czołowego francuskiego astronoma – Jean Baptiste Delambre udał się na północ, a Pierre-François Méchain na południe. Obaj powrócili do Paryża dopiero w listopadzie 1798 roku, po serii mrozących krew w żyłach przygód, opisanych w fascynującej książce [Adler, 2002]. Planowanie projektu i początek jego realizacji odbyły się jeszcze w czasach chylącej się ku upadkowi monarchii, która ostatecznie upadła w sierpniu 1792 roku. We wrześniu ustanowiono Republikę. W lutym i marcu 1793 roku rozpoczęły się kolejno wojny pomiędzy Francją a Prusami i Francją a Hiszpanią, w sierpniu zlikwidowano Akademię Francuską, a we wrześniu rozpoczął się terror, który zakończył się w lipcu 1794 roku zgilotynowaniem Robespierre'a, a w międzyczasie spotkało to wielu uczonych francuskich, w tym Antoine'a-Laurenta Lavoisiera (8 maja 1794 r.). Nastąpił czas spokojniejszy, zakończono wojny, a w czerwcu 1795 roku restytuowano Akademię Francuską. Następnie zaczyna się epoka Napoleona, który już w maju 1796 roku



Rys. 2. Południk przechodzący przez Paryż, od Dunkierki do Barcelony



Rys. 3. Francuski zegar dziesiętny z czasów Rewolucji Francuskiej. Duża tarcza pokazuje cyframi arabskimi dziesięć godzin dnia dziesiętnego, podczas gdy mała tarcza pokazuje cyframi rzymskimi dwa 12-godzinne okresy standardowego dnia 24-godzinne
Źródło: DeFacto, CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons



Rys. 4. Metr standardowy na placu Vendôme w Paryżu, przy Hotelu de Bourvallais. W widocznych miejscach w miastach i miasteczkach Francji umieszczano taki metr standardowy dla użytku mieszkańców, czasem w postaci pręta przytwierdzonego do ściany
Źródło: Chabe01, CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons

najeżdżał Włochy, a dwa lata potem rozpoczął ekspedycję na Egipt, z której powrócił w październiku 1799 roku, aby miesiąc później dokonać zamachu stanu i przewrotu.

Po burzliwych dyskusjach w Międzynarodowej Komisji Miar i Wag, która obradowała w Paryżu od września 1798 roku, aby ostatecznie zaakceptować w czerwcu 1799 roku dane pomiarów południka zebrane przez Delambre'a i Méchaina, w czerwcu tego samego roku ostateczny, platynowy wzorzec metra został przedstawiony legislaturze.

Od decyzji Napoleona, jako Pierwszego Konsula, a potem Imperatora, a także (od 1801 r.) przewodniczącego Akademii Francuskiej, w kwestii wprowadzenia we Francji i rozpowszechnienia w podległych mu krajach jednostki jednego metra zależało bardzo dużo. Przypomnijmy tylko w skrócie, że w 1801 roku system metryczny został oficjalnie obowiązującym systemem pomiarowym we Francji, a w 1812 roku, tuż przed inwazją na Rosję, Napoleon nałożył na ten system pewne restrykcje, kierując się nastrojami społecznymi. Ostatecznie system metryczny obowiązuje we Francji dopiero od 1840 roku.

Projekt spotkał się ze zdecydowanym sprzeciwem prawie całego społeczeństwa. Jedno to pomysły uczonych w służbie szaleństw Rewolucji (do tych ostatnich należał zegar dziesiętny o dziesięciu godzinach, stu minutach i stu sekundach, wprowadzony na krótko, używany w latach 1794–1800, rys. 3), a drugie to codzienne życie zwykłych Francuzów. Ówczesne szacunki mówią o istnieniu we Francji okresu *ancien régime* oszalałającej liczby 250 000 różnych jednostek wag i miar, pod blisko ośmioma setkami nazw. Liczby te mówią o przywiązaniu do tradycji i lokalnych zwyczajów. Używane miary i wagi były jak najbardziej racjonalne, gdyż służyły ochronie rynków lokalnych w małych miasteczkach, a także były zgodne z ochroną tzw. ekonomii uczciwej. Na przykład cena chleba mogła być stała, ale w latach nieurodzajów chleb był mniejszy i każdy to rozumiał. Stare miary były antropometryczne. Odnosiły się do nakładu ludzkiej pracy, areal rolny mógł być mierzony według liczby zbieranych z niego plonów, co zależało od jakości ziemi i innych czynników, a nie liczbą „niehumanitarnych” arów czy hektarów. *Nasze metody pomiarów określają, kim jesteśmy i co cenimy.* (Również dzisiaj nakłada się z góry na nasze życie rozmaite normy ujednolicające, które czasem bardzo nas uwierają i przeciwko którym się buntujemy).

Przeciwko nowej definicji jednego metra protestowali także niektórzy uczeni. Krytykowane były trudy i ogromne koszty przedsięwzięcia, a także wątpliwość związana z dokładnym ustaleniem tej jednostki. Do tego dochodziły koszty jej powszechnego wprowadzenia w życie, w tym wyprodukowanie ogromnej liczby kijów mierniczych o długości jednego metra oraz nauczanie, a wcześniej przekonanie ludności do posługiwania się nimi (rys. 4). To ostatnie było bardzo trudne. Używanie niektórych starych metod zachowało się we Francji gdzieś tam jeszcze długo, nawet w XX wieku.

Kłopoty z danymi

W świecie naukowym zainteresowanie przedsięwzięciem misji geodezyjnej i jej wynikami było duże. Na ostatnim etapie wyznaczania przez Delambre'a północnej linii bazowej w pobliżu Melun uczestniczył Pierre-Simon Laplace i główny inżynier kraju. Przyjechali też na krótko, w roli obserwatorów, inni uczeni, między innymi główny astronom Francji Jérôme Lalande, Louis-Antoine Bougainville oraz Alexander von Humboldt.

Od września 1798 roku Międzynarodowa Komisja Miar i Wag czekała w Paryżu na dane misji geodezyjnej Delambre'a i Méchaina oraz zatwierdzenie, po stosownych przeliczeniach, kluczowej liczby – długości jednego metra. Delambre dostarczył swoje dane na czas, podczas gdy Méchain zwlekał z dostarczeniem swoich. Dlaczego? Sprawa wyjaśniła się dużo później, już po śmierci tego ostatniego, w 1804 roku, kiedy to Delambre, otrzymawszy jego pełną dokumentację, odkrył pewne matactwa Méchaina. Problem z danymi

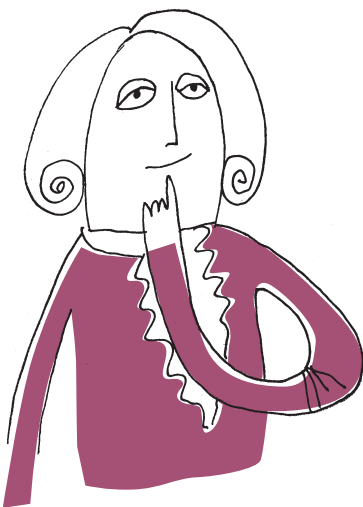
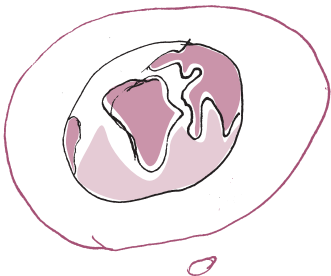
Méchaina polegał na tym, że podczas pomiarów w Barcelonie w latach 1792 i 1793 uzyskał on dwa różne wyniki szerokości geograficznej, różniące się o blisko 3 sekundy kątowne. Pomiary były wykonane w Zamku Montjuïc oraz w jego hotelu. Zamiast zgłosić niespodziewaną rozbieżność, Méchain sfalszował część danych, obawiając się, że podważy to jego reputację perfekcjonisty, oraz skandalu. Zapisywał dane ołówkiem na luźnych kartkach, co pozwalało mu na późniejsze dopasowywanie liczb tak, aby wynik końcowy wydawał się bardziej spójny i zgodny z oczekiwaniami. Należy podkreślić, że Méchain był człowiekiem uczciwym, a to, co zrobił, było jego osobistym dramatem, następstwem wzięcia na siebie pełnej odpowiedzialności za niezgodność pomiarów i niezgody na tę niezgodność. Méchain prezentował niewłaściwe, z dzisiejszego punktu widzenia, podejście do pojęcia *błędu*. Niezgodności pomiarów szerokości geograficznej Barcelony z 1792 i 1793 roku nie były wynikiem niedbalstwa, mogły być natomiast wynikiem wielu czynników, takich jak zużycie się pewnych elementów koła powtarzającego Bordy, zniekształceń pomiarów z przyczyn atmosferycznych, nieznanych wówczas anomalii grawitacyjnych czy dołączenia do pomiarów dodatkowych gwiazd. Problem, z którego Méchain nie zdawał sobie sprawy, wynikał także z niezrozumienia w owym czasie różnicy między *precyzją* pomiarów (wewnętrzną spójnością wyników pomiarów) i ich *dokładnością* (stopniem, w jakim wyniki te zbliżają się do „prawidłowej odpowiedzi”). Dążenie do doskonałej precyzji nie gwarantowało dokładności, np. w przypadku wady aparatu pomiarowego.

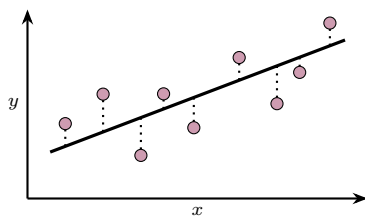
Kiedy członkowie Komisji przeliczyli dane ekspedycji, każdy na swój sposób – Legendre na przykład użył wyrafinowanej geometrii na elipsoidzie – odkrył dwie szokujące niespodzianki. Po pierwsze, spłaszczenie Ziemi na biegunach było według tych pomiarów ponad dwa razy większe od tego otrzymanego pół wieku wcześniej w misji Ekwadorskiej, 1/150 wobec 1/334 (rys. 6). Po drugie, potwierdziły się wcześniejsze podejrzenia Laplace’a i geodety Rogera Boskovicha, że Ziemia najprawdopodobniej nie jest bryłą obrotową, że ma duże nieregularności. Méchain w liście do kolegi pisał:

Nasze obserwacje pokazują, że krzywizna Ziemi jest niemal kołowa od Dunkierki do Paryża, bardziej eliptyczna od Paryża do Évauux, jeszcze bardziej eliptyczna od Évauux do Carcassonne, a następnie powraca do poprzedniej eliptyczności od Carcassonne do Barcelony. Dlaczego więc Ten, który ukształtował nasz glob własnymi rękami, nie dołożył większej staranności...? Tego oni nie potrafią pojąć. Jak to się stało, że zgodnie z prawami ruchu, ciężaru i przyciągania, które Stwórca zapewne ustanowił, zanim przystąpił do dzieła, pozwolił tej źle uformowanej Ziemi przybrać tak nieregularny kształt, dla którego nie ma lekarstwa, chyba że musiałby zacząć od nowa?

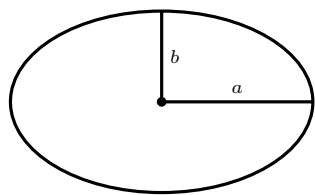
W tej sytuacji założenie o równości wszystkich południków traciło sens, a w konsekwencji implikowało bezsensowność całego przedsięwzięcia misji geodezyjnej.

Coś trzeba było z tym zrobić, jakoś to ukryć (!) przed sponsorami i niewtajemniczonymi w pomiary, by przedstawić światu oczekiwaną liczbę – długość jednego metra. Oczywiście nikt tu nie chciał oszukiwać; na naradach Komisji uznano, po dalszych obliczeniach, że wynik spłaszczenia Ziemi na biegunie sprzed pół wieku jest jednak bardziej wiarygodny, a o domniemanej nieregularności kształtu Ziemi nie należy wspominać. Komisja przedstawiła liczbę 443,296 wyrażoną w starej jednostce paryskiej *ligne* (1 *ligne* to jedna dwunasta cala). Wkrótce przystąpiono do wykonania niezwykle kosztownego, platynowego wzorca metra. Zajął się tym osobiście wybitny producent instrumentów Etienne Lenoir, ten sam, w którego pracowni powstało koło powtarzające Bordy. Uroczysta ceremonia prezentacji platynowej sztaby odbyła się 22 czerwca 1799 roku. Podniosłe przemowy wygłosili wybitni uczeni, w tym Pierre-Simon Laplace. Wtajemniczeni bardzo dobrze zdawali sobie sprawę, że obliczenia Komisji i, co za tym idzie, platynowy wzorec jednego metra to tylko pozory prawdy.





Rys. 5. Metoda najmniejszych kwadratów dla niewiadomej zależności liniowej. Na podstawie dziewięciu rozstrzelonych pomiarów na rysunku znajdujemy spodziewaną dla danego zagadnienia zależność liniową przez nałożenie warunku, że suma kwadratów długości odcinków zaznaczonych liniami przerywanymi ma być najmniejsza z możliwych



Rys. 6. Splatczenie Ziemi przy biegunach jest określone wzorem $\frac{a-b}{a}$. Podstawiając do niego dane a i b przyjęte obecnie (WGS-84), otrzymujemy w przybliżeniu $\frac{1}{298}$. Splatczenie $\frac{1}{334}$ przyjęte przez Komisję w roku 1799 jest bliższe obecnemu od splatczenia $\frac{1}{150}$ obliczonego na podstawie danych misji geodezyjnej 1792–1799

$$S = 2a\pi \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)!^2}{(2^i \cdot i!)^4} \cdot \frac{e^{2i}}{2i-1} \right) \\ = 2a\pi \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right)$$

Rys. 7. Szereg C. Maclaurina z 1742 roku. Symbol e oznacza mimośród elipsy, czyli $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$

Dziś wiadomo, że błędy pomiarowe są nieuniknione i należy posługiwać się uśrednieniami i metodami statystycznymi. Już na początku XIX wieku dane tejsze misji geodezyjnej opracowano zupełnie inaczej. Legendre w swoim artykule z 1805 roku pierwszy użył metody najmniejszych kwadratów (rys. 5). Pięć lat później Gauss rozwinął i pogłębił tę metodę, wprowadzając podejście probabilistyczne, które z kolei udoskonalił Laplace w latach 1810–1811. W ten sposób w latach 1806–1811 narodziła się nowa teoria naukowa, teoria błędów.

Okazało się, że dane uzyskane przez Delambre’a i Méchaina były, biorąc pod uwagę ówczesną wiedzę, bardzo precyzyjne, a niezgodności były spowodowane kilkoma czynnikami, w tym nieregularnością kształtu samej Ziemi.

Metr dziś

Z powyższej historii nie należy wysnuwać wniosku, że misja geodezyjna była bezsensowną kląpą. Rzeczywiście, wobec nieoczekiwanego faktu nieregularności kształtu Ziemi, nawet bardzo dokładne obliczenie długości południka paryskiego, czy jakiegokolwiek innego, nie wypełniłoby postawionego zadania. Jednakże sukcesy misji geodezyjnej osiemnastego wieku były ogromne i wielorakie: naukowe, społeczne i polityczne. Ich szczegółowe omówienie można znaleźć w książce [Alder, 2002]. Najważniejsze, że prawie cały świat posługuje się dziś uniwersalną jednostką miary, jednostką jednego metra, z wzorcem spoczywającym w postaci platynowej sztaby w Sèvres pod Paryżem. Mimo że przyjęta obecnie definicja jednostki nie opiera się już ani na długości południka, ani na wzorcu z Sèvres, to jej wartość praktycznie nie zmieniła się. Błąd pozostał!

No dobrze, ale jaki błąd, w stosunku do czego? Ano, do obecnie przyjętego modelu WGS-84 (World Geodetic System 1984) zakładającego, że Ziemia jest elipsoidą obrotową, powstałą z obrotu elipsy o półosiach $a = 6378137$ m i $b = 6356752,31$ m, względem krótszej osi. Pozwala to na obliczenie obwodu elipsy (równej długości południków na elipsoidzie), a jedna czwarta obwodu elipsy to długość południka od równika do bieguna. Oczywiście teraz można zdefiniować „błąd”. Okazuje się, że jest on wręcz mikroskopijny, co świadczy o niesamowitej precyzji osiemnastowiecznych pomiarów. Obliczmy ten błąd z dużym przybliżeniem. Gdyby elipsa była kołem o promieniu R , to jej obwód S byłby równy $2\pi R$, według znanego ze szkoły wzoru. Liczbę tę można aproksymować liczbą wymierną z dowolną dokładnością. Niestety w ogólnym przypadku nie ma zamkniętego prostego wzoru na obwód elipsy. Dowolnie dokładne przybliżenie obwodu elipsy można otrzymać np. z jego przedstawień w postaci rozmaitych szeregów liczbowych, np. z (wolno zbieżnego) szeregu C. Maclaurin’a z 1742 roku (rys. 7), ale są też bardzo dokładne *przybliżenia* w postaci prostych wzorów zamkniętych. Jednym z nich jest wzór podany przez hinduskiego geniusza matematycznego S. Ramanujana w 1914 roku,

$$S \approx \pi \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right) \quad \text{dla } b \approx a.$$

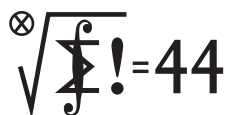
Wzór ten daje dokładną wartość dla koła. Wstawiając nasze wartości a i b do tego wzoru, jako długość jednej czwartej południka otrzymujemy $S/4 = 10\,001\,965$ m. Odejmując od tej wartości $10\,000\,000$ m, otrzymujemy niecałe 2 kilometry, wobec czego różnica długości jednego metra osiemnastowiecznych i współczesnych ustaleń nie przekracza 0,2 milimetra. Fantastyczny wynik!

W bardzo ciekawym artykule [Weintrit, 2013] zawarte są dalsze wzory i metody przybliżonego obliczenia długości południka, uwzględniające też metodę Jeana Baptiste’a Delambre’a, znakomitości naukowej przełomu XVIII i XIX wieku.

Bibliografia

- [Alder, 2002] K. Alder, *The Measure of All Things. The Seven-Year Odyssey that Transformed the World*, Little, Brown 2002.
- [Ferreiro, 2011] L. D. Ferreiro, *Measure of the Earth. An Enlightenment Expedition that Reshaped our World*, Basic Books, New York 2011.
- [Łukaszewicz, 2024] G. Łukaszewicz, *W poszukiwaniu prawdziwego kształtu Ziemi – Maupertuis w Laponii*, Delta 6/24.
- [Weintrit, 2013] A. Weintrit, *So, What is Actually the Distance from the Equator to the Pole? – Overview of the Meridian Distance Approximations*, TransNav - the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation, Vol.7, No.2, 2013.

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
913 ($WT = 2,37$) i 914 ($WT = 2,28$)
z numeru 1/2026

Roksana Słowik	42,93
Krzysztof Kamiński	41,33
Marian Łupieżowiec	40,52
Jędrzej Biedrzycki	39,60
Janusz Olszewski	37,74
Janusz Fiett	37,18
Łukasz Merta	31,54
Tomasz Wietecha	31,43
Piotr Kumor	30,85
Paweł Kubit	29,64

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2026

Przypominamy treść zadań:

919. W trzech pojemnikach rozmieszczone są fasolki (skończenie wiele). Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu wybieramy dwa pojemniki; zawartość tego, w którym jest mniej fasolek podwajamy, przesypując odpowiednią ilość fasolek z tego, w którym jest więcej (gdy jest po równo, wybór jest dowolny). Udowodnić, że niezależnie od rozmieszczenia początkowego można – iterując to postępowanie – opróżnić jeden z pojemników.

920. Niech $r(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - (uv)^{1/2}$ dla $u, v \geq 0$. Dowieść, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych $a, b, c \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq 2 \cdot \max\{r(a, b), r(b, c), r(c, a)\}.$$

919. Załóżmy, że w pewnym momencie w pojemnikach A, B, C znajduje się, odpowiednio, a fasolek, b fasolek, c fasolek, przy czym $a \geq b \geq c$. Dzielimy b przez c (z resztą): $b = qc + r$ ($0 \leq r < c$). Zapisujemy q w postaci binarnej: $q = k_0 + 2k_1 + \dots + 2^nk_n$, gdzie $k_i \in \{0, 1\}$, $k_n = 1$. Wykonujemy serię n ruchów, w których wysypujemy do pojemnika C kolejno $c, 2c, 4c, \dots, 2^nc$ fasolek, pobierając je z pojemników A, B według zasady:

jeśli $k_i = 0$, bierzemy 2^ic fasolek z A ;

jeśli $k_i = 1$, bierzemy 2^ic fasolek z B

($i = 0, \dots, n$). Łącznie z pojemnika A wyprowadzamy w ten sposób nie więcej niż $c + 2c + 4c + \dots + 2^{n-1}c$, czyli mniej niż 2^nc fasolek; a ponieważ $2^nc \leq qc \leq b \leq a$, znaczy to, że zawartość pojemnika A była wystarczająca dla wykonania opisanej procedury.

Z pojemnika B fasolki były brane przy napotykanju jedynek w rozwinięciu q . Łącznie wyszło stamtąd dokładnie qc fasolek. Zostało ich r , czyli mniej niż c (możliwe, że w A zostało jeszcze mniej).

Tak więc moc zawartości najslabiej wypełnionego pojemnika zmalała; wielkość ta jest pólnieziennikiem opisanej procedury. Powtarzając procedurę, doprowadzamy tę wartość do zera.

920. Przyjmijmy (b.s.o.), że $a \leq b \leq c$. Ponieważ $r(u, v) = \frac{1}{2}(u^{1/2} - v^{1/2})^2$, zatem największą z trzech liczb w nawiasie po prawej stronie podanej nierówności jest $r(c, a)$. Zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1) \quad \frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2}.$$

Jest to prawda, gdy $a = b = c$ lub gdy $a = 0$; dalej przyjmujemy $c > a > 0$.

Ustalmy a, c i potraktujmy $b \in [a, c]$ jako zmienną. Pochodna wyrażenia po lewej stronie (1) (względem b), równa $\frac{1}{3}(1 - (ac)^{1/3}b^{-2/3})$, jest funkcją rosnącą zmiennej b , co oznacza, że samo to wyrażenie jest funkcją wypukłą tej zmiennej. Osiąga zatem wartość największą, gdy $b = a$ lub $b = c$. Należy więc wykazać, że

$$(2) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{3}(2a + c) - a^{2/3}c^{1/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2} \\ &\text{ i } \frac{1}{3}(a + 2c) - a^{1/3}c^{2/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2}. \end{aligned}$$

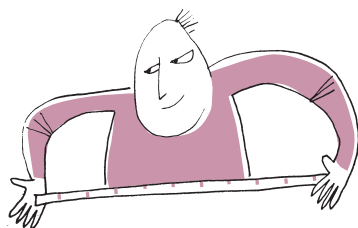
Dalej nie będziemy korzystać z tego, że $a \leq c$. Wobec uzyskanej w ten sposób symetrii wystarczy zająć się jedną z tych nierówności, na przykład tą drugą. Przepiszmy ją w postaci

$$(3) \quad \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) + a^{1/3}c^{2/3} \geq 2(ac)^{1/2}.$$

Korzystając najpierw z nierówności między średnimi ważonymi (A i G) o wykładnikach $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, a następnie z nierówności między zwykłymi średnimi (A i G), dostajemy to, o co chodzi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) + a^{1/3}c^{2/3} &\geq a^{2/3}c^{1/3} + a^{1/3}c^{2/3} \\ &\geq 2(a^{2/3}c^{1/3} \cdot a^{1/3}c^{2/3})^{1/2} = 2(ac)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wykazana została nierówność (3), więc i jedna z (symetrycznych) nierówności (2), więc i nierówność (1) – więc i teza zadania.



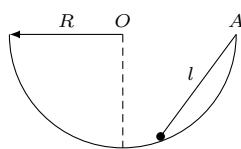
Klub 44 F



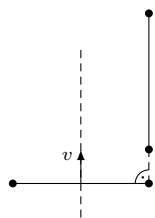
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
810 ($WT = 3,1$), 811 ($WT = 2,27$)
z numeru 1/2026

Paweł Perkowski Ożarów Maz. 7-44+2,44
Andrzej Nowogrodzki

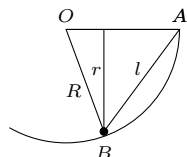
Chocianów	3-36,90
Tomasz Wietecha Tarnów	18-35,76
Krzysztof Zygan Lubin	34,85
Marian Łupieżowiec	
Gliwice	3-22,96
Paweł Kubit Kraków	22,44



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2026

Przypominamy treść zadań:

816. Wahadło matematyczne o długości l przyćepione jest w punkcie A z wewnętrznej strony doskonale gładkiej półsfery o promieniu R (rys. 1). Punkt A znajduje się na okręgu o promieniu R , oś symetrii półsfery jest pionowa. Zakładamy, że $l < R\sqrt{2}$. Znaleźć częstość małych drgań wahadła po wewnętrznej powierzchni półsfery.

817. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa jednakowe hantle, przedstawione na rysunku 2. Każdy z nich składa się z cienkiego nieważkiego pręta o długości l , do którego końców przymocowane są jednakowe masywne kulki o zaniedbywalnych rozmiarach. Jeden z hantli spoczywa, drugi porusza się ruchem postępowym z prędkością v , skierowaną równoległe do hantla spoczywającego. Z jaką prędkością zacznie poruszać się nieruchomy hantel po zderzeniu sprężystym?

816. Ciężarek wahadła porusza się podczas drgań po łuku okręgu o promieniu r , leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do wielkiego okręgu półsfery. Z rysunku 3 widać, że

$$r = l\sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2}}.$$

Wahadło na półsferze jest równoważne zwykłemu wahadłu o długości nici r . Stąd jego częstotliwość małych drgań wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2}}}}.$$

Dla $l = \sqrt{2}R$, $\omega = \sqrt{g/R}$. Jest to częstość małych drgań swobodnych ciała na dnie półsfery. Gdy $l \ll R$, $\omega = \sqrt{g/l}$. Element powierzchni, na której zachodzą drgania, wyraża się w pionową płaszczyznę.

817. Po zderzeniu hantle nieruchomy zaczyna poruszać się ruchem postępowym z prędkością v_2 , ruch drugiego hantla jest złożeniem ruchu postępowego jego środka masy z prędkością v_1 oraz ruchu obrotowego względem środka masy z prędkością kątową ω . Zderzenie jest sprężyste, co oznacza, że energia kinetyczna układu zachowuje się:

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mv_2^2}{2} + \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

gdzie m jest masą kulki,

$$I = \frac{2ml^2}{4} = m\frac{l^2}{2}$$

momentem bezwładności hantla względem jego środka masy, stąd

$$(1) \quad v^2 = v_2^2 + v_1^2 + l^2\frac{\omega^2}{2}.$$

Na układ w płaszczyźnie poziomej nie działają z zewnątrz żadne siły, obowiązują więc zasada zachowania pędu układu:

$$(2) \quad v = v_1 + v_2.$$

Możemy też skorzystać z zasady zachowania momentu pędu względem dowolnego punktu na płaszczyźnie, najwygodniej względem punktu O , gdzie znajduje się środek hantla poruszającego się w chwili zderzenia:

$$(3) \quad 0 = 2mv_2\frac{l}{2} - I\omega.$$

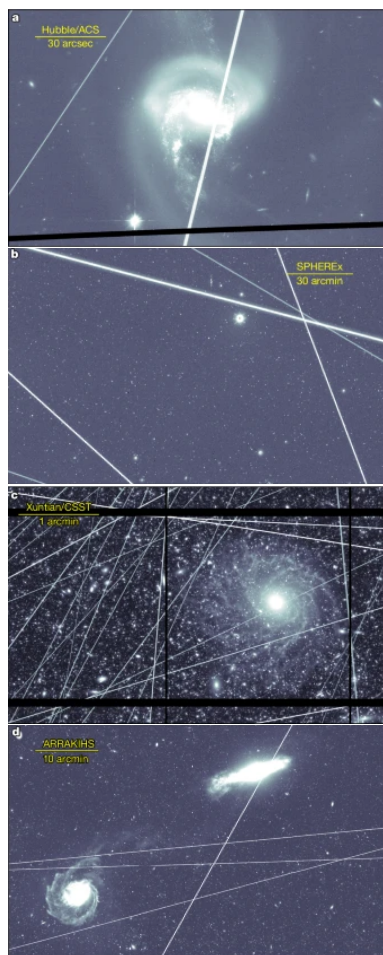
Rozwiązując układ równań (1)–(3), otrzymujemy szukany wynik:

$$v_2 = \frac{2v}{3}.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Symulacje przedstawiające wpływ konstelacji satelitów na obserwacje obecnych teleskopów kosmicznych (a) Hubble'a, (b) SPHEREx oraz planowanych misji: (c) chińskiego teleskopu kosmicznego Xuntian (planowany start w 2027 r.) oraz (d) europejskiego teleskopu kosmicznego ARRAKHS (planowany start w 2030 r.).
Źródło: Alejandro S. Borlaff i inni, Nature volume 648, pages 51–57 (2025)

Astronomowie radzą sobie, jak mogą, ślady na zdjęciach są usuwane przez specjalne oprogramowanie oparte na uczeniu maszynowym. Jednak utracone informacje nigdy nie mogą być w pełni odzyskane. Obraz nigdy nie będzie tak dokładny jak w przypadku obserwacji bez zakłóceń.

Prognozy są bezlitosne. Problem będzie się pogłębiał i obejmie coraz większą liczbę teleskopów, w tym także kosmiczny Teleskop Hubble'a. W momencie pisania tego artykułu łączna liczba satelitów zgłoszonych do akceptacji w najbliższych latach przez amerykańską Federalną Komisję Łączności (FCC) oraz Międzynarodowy Związek Telekomunikacyjny (ITU) wynosi niemal dwa miliony (!). Dla porównania, obecnie na niskiej orbicie okołozemskiej znajduje się około 20 000 satelitów. Wśród planowanych projektów znajdują się konstelacje satelitów mające zawierać orbitalne centra danych, zaprojektowane do obsługi obliczeń związanych ze sztuczną inteligencją (na przykład

Niestety w tym miesiącu zamiast zaprezentować opis fascynującego odkrycia, chciałabym się podzielić smutną wiadomością. Otóż nocne niebo jest już prawie całkowicie zanieczyszczone przez sztuczne satelity, a sytuacja będzie się tylko pogarszać.

W czerwcu badacze z Centrum Badawczego Ames NASA poinformowali, że 73,3% obserwacji wykonanych między majem a wrześniem ubiegłego roku przez nowy teleskop kosmiczny SPHEREx (Spectro-Photometer for the History of the Universe, Epoch of Reionization, and Ices Explorer) było zanieczyszczonych co najmniej jednym śladem sztucznego satelity. Średnio na jedno zdjęcie obszaru nieba wykonane przez ten teleskop przypadało 2,18 śladu sztucznego satelity. Raport ten potwierdził wcześniejsze symulacje i przewidywania astronomów, którzy ostrzegali, że megakonstelacje satelitów zagrażają badaniom Wszechświata.

Problem zatłoczonej niskiej orbity i wpływu sztucznych satelitów na obserwacje astronomiczne nie jest nowy (pisałam już o nim w 2022 r. w Δ_{22}^6). Światło odbite przez sztuczne satelity tworzy jasne smugi na zdjęciach Wszechświata rejestrowanych przez teleskopy w całym zakresie widma elektromagnetycznego, gdy przelatują przez ich pole widzenia. Te ślady często przyćmiewają słabe światło obiektów, które faktycznie chcemy obserwować, takich jak galaktyki, gwiazdy, asteroidy czy planety pozasłoneczne. Dotychczas jednak problem dotyczył głównie teleskopów naziemnych. Ale SPHEREx jest teleskopem kosmicznym (!), znajdującym się na orbicie 700 km nad powierzchnią Ziemi! Okazuje się, że nawet to nie gwarantuje już niezakłóconych obserwacji astronomicznych.

SPHEREx to również jeden z najnowszych teleskopów kosmicznych. Wystrzelono go 11 marca 2025 roku i od maja tego samego roku wykonuje zdjęcia Wszechświata w promieniowaniu podczerwonym. W ciągu dwóch lat satelita czterokrotnie zeskanuje całe niebo, zbierając dane o ponad 300 milionach galaktyk i ponad 100 milionach gwiazd w Drodze Mlecznej. Na tej podstawie utworzy mapę nieba o rozdzielczości przewyższającej wszystkie dotychczasowe obserwacje. Tego typu obserwacje wymagają zastosowania długich czasów naświetlania, aby uchwycić światło bardzo słabych obiektów astronomicznych, oraz rejestrowania zdjęć bardzo dużych fragmentów nieba podczas pojedynczej ekspozycji. Niestety oba te czynniki zwiększają prawdopodobieństwo przecięcia kadru przez przelatujące satelity. A stawka jest wysoka, bo dzięki tym obserwacjom uzyskamy dane do weryfikacji hipotez dotyczących początków Wszechświata, procesów formowania i ewolucji galaktyk oraz składu chemicznego gwiazd i dysków planetarnych we wczesnych fazach ich formowania się.

SpaceX On-Orbit Data Centers). Jeśli plany te zostaną zrealizowane, symulacje przewidują, że praktycznie każde zdjęcie wykonane przez obecne i przyszłe teleskopy naziemne i kosmiczne będzie naznaczone śladem satelitów. I to nie jednym, a dziesiątkami. W przypadku SPHEREx średnio na każdym obrazie może pojawić się aż 189 smug.

Jeżeli zapowiadane konstelacje satelitów faktycznie powstaną, utracimy możliwość precyzyjnych obserwacji Wszechświata, a zdjęcia astronomiczne będą wyglądały tak jak symulacje pokazane na marginesie.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Oparte na publikacji Alejandro S. Borlaff i inni „SPHEREx confirms predictions for artificial satellite trail pollution in Low Earth Orbit” arXiv:2605.27501, przyjęte do publikacji w The Astronomical Journal (AJ) oraz na publikacji Alejandro S. Borlaff, Pamela M. Marcum i Steve B. Howell „Satellite megaconstellations will threaten space-based astronomy” Nature volume 648, pages 51–57 (2025).



Większość ciekawych zdarzeń w sierpniu zajdzie na niebie porannym, gdzie coraz lepiej widoczne są planety Saturn i Neptun, a z tła nieba zaczyna wyłaniać się Uran. W pierwszych dniach miesiąca o świcie można dostrzec Merkurego, a po przerwie spowodowanej koniunkcją ze Słońcem na nocne niebo powróci Jowisz. Wszystkie te planety odwiedzi zbliżający się do nowiu Księżyc.

2 sierpnia pierwsza planeta od Słońca osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą nieco ponad 19° . Merkury o świcie zajmie pozycję na wysokości zaledwie 5° , trochę na prawo od punktu NE widnokregu. W jego odnalezieniu pomoże para najjaśniejszych gwiazd Bliźniąt – Kastor i Polluks. Planety należy szukać w odległości około 8° , najpierw na godzinie 4, a potem 6 względem Polluksa. Przez ten czas tarcza planety skurczy się od $8''$ do $6''$, przy rosnącej jasności od $+0,4^m$ do -1^m i fazy od 35% do 75%.

11 sierpnia między Polluksem a Merkurym przejdzie Księżyc w fazy 4%, 1,5 dnia przed nowiem. Do obu ciał niebieskich zabraknie mu wtedy po mniej więcej 5° . 4 dni później Merkury minie Jowisza w odległości mniejszej niż 1° , pół godziny przed wschodem Słońca planety zdążą się wzniesć na wysokość 5° . Jeśli uda się je dostrzec (niezbędne mogą okazać się lornetka lub teleskop), to ich odróżnienie nie sprawi kłopotu, gdyż Jowisz jest o $0,7^m$ jaśniejszy.

W kolejnych dniach Merkury zginie w blasku Słońca, Jowisz natomiast szybko poprawi swoją widoczność i stanie się ozdobą porannego nieba. Na razie jego tarcza ma średnicę $32''$, ale do opozycji wyraźnie urośnie. Największa planeta Układu Słonecznego przebywa na tle gwiazdozbioru Raka, jakieś 6° na południowy wschód od M44, jasnej gromady otwartej gwiazd.

Srebrny Glob zaczął sierpień w fazy 95% na tle gwiazdozbioru Wodnika i w dniach 3–4 sierpnia odwiedzi najpierw Neptuna, a następnie Saturna, zbliżając się doń na odległość, odpowiednio, 4° i 6° . W tym sezonie obserwacyjnym Saturn nie jest już tak dobrym wskaźnikiem do odszukania Neptuna jak w poprzednim. W grudniu dystans między obiema planetami spadnie do $6,5^\circ$. Teraz jest to więcej niż 10° . Około godziny 3 obie planety są bliskie górowania na wysokości jakichś 40° . Saturn świeci blaskiem $+0,6^m$, przy średnicy tarczy $19''$. Blask Neptuna wynosi $+7,8^m$ i jest on widoczny dopiero przez teleskop lub większą lornetkę niecałe 5° na północny wschód od gwiazdy 29 Psc.

6 sierpnia Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, świecąc na tle gwiazdozbioru Barana, a dobę później zbliży się na 2° do Plejad w Byku. Naturalny satelita Ziemi spędzi w tym gwiazdozborze jeszcze dwie kolejne noce, mijając najpierw Aldebarana w odległości 10° , a następnie zbliżając się na 4° do El Nath, gwiazdy wspólnej dla Byka i Woźnicy, zwiężając przy tym sierp do 18%. W zaczynającym się właśnie sezonie obserwacyjnym Uran zakreśli pętlę na linii łączącej Aldebarana z Plejadami prawie w połowie odległości między nimi. Obecnie Uran znajduje się około 1° od gwiazdy 5. wielkości ω Tau również w kierunku Plejad. Gwiazda jest o $0,7^m$ jaśniejsza.

Wieczorem 12 sierpnia Srebrny Glob przejdzie przez nów, okraszony całkowitym zaćmieniem Słońca. Pas fazy całkowitej przejdzie m.in. przez wschodnią Grenlandię, na zachód od Islandii i północną część Hiszpanii, opuszczając Ziemię w okolicach Balearów. Najdłużej zjawisko potrwa 220 s na zachód od Islandii, w Hiszpanii czas ten skróci się do około 100 s, lecz tam zaćmienie zdarzy się przy zachodzącym Słońcu, nisko nad widnokresem. Tak samo zresztą, jak u nas. Przez Polskę przebiegnie granica zaćmienia i na linii mniej więcej Giżycko–Płock–Nysa faza maksymalna wystąpi w momencie zachodu Słońca. Na południe od tej linii dzień skończy się jeszcze przed nią. Nad naszym krajem Księżyc zakryje około 87% średnicy tarczy słonecznej.

Nów Księżyca bardzo dobrze zgrywa się z maksimum aktywności corocznego roju meteorów Perseidów. Promieniają one od 17 lipca do 24 sierpnia, a w nocy maksimum ich radiant znajduje się na pograniczu gwiazdozbiorów Perseusza i Kasjopei. Nad ranem wznosi się on na wysokość 60° . Według prognoz tegoroczny rój nie zaimponuje liczbą zjawisk. Można liczyć na wyraźnie poniżej 100 meteorów na godzinę.

W następnych dniach Księżyc zagości na niebie wieczornym, ze względu jednak na niekorzystne nachylenie ekliptyki pozostanie on słabo widoczny prawie do I kwadry 20 sierpnia, gdy w odległości 5° minie Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona. 16 sierpnia w fazy 19% zbliży się on na 6° do Wenus, która właśnie osiągnęła maksymalną elongację wschodnią, ale oba ciała Układu Słonecznego znikną za widnokresem godzinę po Słońcu.

W nocy z 27 na 28 sierpnia Srebrny Glob przejdzie przez pełnię, zanurzając się przy tym w cień Ziemi. Niestety nie całkowicie. Polska znowu ma pecha, gdyż do zjawiska dojdzie nad samym ranem naszego czasu, przy jaśniejącym niebie. Księżyc dotrze do półcienia naszej planety o godzinie 3:23, a faza częściowa zacznie się o 4:33. Srebrny Glob zajdzie około godziny 6, jeszcze przed fazą maksymalną wynoszącą 93%.

Ariel MAJCHER

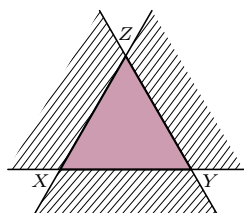
Rozwiązania zadań ze strony 15



Rozwiązanie zadania M 1861.

Niech XYZ będzie danym trójkątem równobocznym.

Wszystkie punkty, z których widać wierzchołki trójkąta XYZ , leżą wewnątrz trzech kątów wierzchołkowych do kątów wewnętrznych tego trójkąta.



Jeżeli każdy z tych kątów zawiera dokładnie dwa wierzchołki sześciokąta, to jego główne przekątne nie mogą być współpękowe. W przeciwnym razie dwa nieprzyległe wierzchołki sześciokąta leżą w tym samym kącie, na przykład w kącie wierzchołkowym do kąta przy wierzchołku X . Oznaczmy je przez A i B . Wówczas

$$\angle AXB \leq 60^\circ,$$

a zatem odpowiedni łuk AXB leży na zewnątrz sześciokąta, co jest sprzeczne z założeniem, że punkt X leży wewnątrz sześciokąta.



Rozwiązanie zadania M 1862.

Z założeń wynika, że

$$f(x) = \pm(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2),$$

gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leq b \leq c$. Połóżmy

$$n = ac + bc - ab.$$

Jest to liczba całkowita dodatnia, gdyż

$$n > bc - ab = b(c-a) \geq 0.$$

Ponadto

$$n - a^2 = ac + bc - ab - a^2 = (a+b)(c-a),$$

$$n - b^2 = ac + bc - ab - b^2 = (a+b)(c-b),$$

$$n - c^2 = ac + bc - ab - c^2 = (a-c)(c-b).$$

Zatem

$$f(n) = \pm(n-a^2)(n-b^2)(n-c^2)$$

jest równe

$$\mp(a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2.$$

Wobec tego

$$|f(n)| = (a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2,$$

a więc $|f(n)|$ jest kwadratem liczby naturalnej.



Rozwiązanie zadania M 1863.

Niech $S = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ oraz $T = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$. Zdefiniujemy funkcję $f: S \rightarrow T$ wzorem

$$f(x) = 3x \bmod 19.$$

Łatwo sprawdzić, że $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 9$, $f(7) = 2$, $f(8) = 5$, $f(9) = 8$, więc rzeczywiście f jest bijekcją z S na T . Jej funkcja odwrotna jest zdefiniowana przez

$$g(y) = -6y \bmod 19,$$

gdyż $g(f(x)) \equiv -18x \equiv x \pmod{19}$ oraz $f(g(y)) \equiv -18y \equiv y \pmod{19}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór wszystkich 100-cyfrowych liczb podzielnych przez 19, które nie zawierają cyfr 4, 5, 6, a przez $\mathcal{B}$ zbiór wszystkich 100-cyfrowych liczb podzielnych przez 19, które nie zawierają cyfr 1, 4, 7.

Każdej liczbie $A = \overline{a_{99}a_{98} \dots a_0} \in \mathcal{A}$ przyporządkowujemy liczbę

$$F(A) = \overline{f(a_{99})f(a_{98}) \dots f(a_0)}.$$

Ponieważ cyfry liczby A należą do S , cyfry liczby $F(A)$ należą do T , zatem $F(A)$ nie zawiera cyfr 1, 4, 7. Ponadto pierwsza

cyfra A jest niezerowa i $f(x) = 0$ zachodzi tylko dla $x = 0$, więc $F(A)$ jest nadal liczbą 100-cyfrową.

Ponadto dla $A \in \mathcal{A}$ mamy:

$$F(A) \equiv f(a_0) + 10f(a_1) + \dots + 10^{99}f(a_{99})$$

$$\equiv 3a_0 + 10 \cdot 3a_1 + \dots + 10^{99} \cdot 3a_{99}$$

$$\equiv 3A \equiv 0 \pmod{19},$$

a więc $F(A) \in \mathcal{B}$.

Podobnie dla $B = \overline{b_{99}b_{98} \dots b_0} \in \mathcal{B}$ definiujemy

$$G(B) = \overline{g(b_{99})g(b_{98}) \dots g(b_0)}.$$

Wtedy $G(B) \in \mathcal{A}$, a z zależności $g \circ f = \text{id}_S$ i $f \circ g = \text{id}_T$ wynika, że $G \circ F = \text{id}_\mathcal{A}$ oraz $F \circ G = \text{id}_\mathcal{B}$. Zatem F jest bijekcją między $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, więc $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.



Rozwiązanie zadania F 1149.

Początkowy okres obiegu satelity wynosił dobę, tj. $T_0 = 24$ godziny. Przed zderzeniem satelita stacjonarny poruszał się po orbicie kołowej. Przyjmijmy, że promień tej orbity wynosił R , prędkość v_0 spełniała wówczas związek $v_0^2 = GM/R$, w którym G jest stałą grawitacji, a M masą Ziemi. Po zderzeniu satelita pozostaje w odległości R od Ziemi, a jego prędkość zmalała do wartości αv_0 , ale pozostaje prostopadła do promienia wodzącego. Punkt zderzenia staje się więc apogeum nowej orbity eliptycznej. Po zderzeniu moment pędu satelity wynosi $L = m\alpha v_0 R$, a energia całkowita

$$E = \frac{m\alpha^2 v_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}.$$

Podczas ruchu po orbicie energia i moment pędu pozostają stałe. Dla znalezienia długiej półosi orbity musimy teraz wyznaczyć odległość w perigeum r . Prędkość w perigeum jest prostopadła do promienia wodzącego r i wynosi: $v = L/(mr) = \alpha v_0 R/r$. Ze wzoru na energię całkowitą otrzymujemy:

$$E = \frac{m\alpha^2 v_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

a po podstawieniu v i skorzystaniu ze związku $v_0^2 = GM/R$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{\alpha^2}{2} - 1 = \frac{R}{r} \left(\frac{\alpha^2 R}{2r} - 1 \right),$$

którego rozwiązaniem są apogeum $r = R$ i perigeum $r = \alpha^2 R / (2 - \alpha^2)$. Długa półos orbity wynosi więc $a = (r + R)/2 = 1/(2 - \alpha^2)$. Po skorzystaniu z prawa Keplera otrzymujemy ostatecznie:

$$T = T_0 (2 - \alpha^2)^{-3/2}.$$

Liczbowo $T = 0,9709T_0 \approx 23,30$ godziny, czyli około 23 godziny 18 minut.



Rozwiązanie zadania F 1150.

Według opisu lot wokół każdej z planet odbywał się z odpowiednią dla tej planety I prędkością kosmiczną, a wszystkie okresy obiegu były sobie niemal równe. Pierwsza prędkość kosmiczna v_I dla planety o masie M i promieniu R spełnia znane wszystkim równanie (G jest stałą grawitacji):

$$v_I^2 = \frac{GM}{R}.$$

Korzystamy ze związków v_I z okresem obiegu T oraz M ze średnią gęstością planety ρ i otrzymujemy:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{4\pi R^3 \rho G}{3R}.$$

Otrzymujemy:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}.$$

Wniosek: niemal jednakowe czasy obiegu wskazują na niemal równe średnie gęstości Ziemi, Wenus i Merkurego. Podstawienie $T = 85$ minut oraz $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ prowadzi do $\rho = 5,429 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. W tablicach można znaleźć wartości $5,513 \cdot 10^3$; $5,243 \cdot 10^3$; $5,427 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, odpowiednio, dla Ziemi, Wenus i Merkurego.



Grafiy gier

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przed lekturą warto zajrzeć do poprzedniego kącika, w którym są potrzebne definicje i przykłady. *Graczem I* nazywamy tego, który rozpoczyna grę, a *gracz II* to jego przeciwnik. Będziemy też rozróżniać grę (na przykład *szachy*) od *rozgrywki* (partii).

Przez *pozycję* rozumiemy sytuację w rozgrywce na jej początku lub po ruchu jednego z graczy. Pozycja składa się z dwóch części: *stanu* (w większości gier to po prostu „wygląd” planszy) i informacji, który z graczy ma ruch. Jest to informacja niezbędna – na przykład w *warcabach* są takie ułożenia pionków, w których ruch mogą mieć zarówno białe, jak i czarne; traktujemy to jako dwie różne pozycje.

Dla każdej gry kombinatorycznej możemy zbudować strukturę zwaną *grafem pozycji*.

Wierzchołki tego grafu odpowiadają pozycjom, a zorientowane krawędzie – ruchom (czyli $A \rightarrow B$, jeśli gracz może wykonać ruch z pozycji A do pozycji B). Pozycja początkowa jest jedyną, z której strzałki wyłącznie wychodzą. Końcowe pozycje to takie, z których nie wychodzi już żadna strzałka – określają one jednoznacznie wynik rozgrywki. Na rysunku obok widać graf pozycji gry *hex* na planszy 2×2 (z dokładnością do symetrii).

Najłatwiejsze do analizy są gry, które zawsze kończą się zwycięstwem jednego z graczy (remis jest niemożliwy). Poniższe rozważania dotyczą właśnie takich gier.

Pozycję nazwiemy *rozstrzygniętą*, jeśli w rozgrywce rozpoczynającej się od niej jeden z graczy może zapewnić sobie zwycięstwo niezależnie od poczyną przeciwnika. Jest jasne, że:

- jeśli w pozycji A gracz może wykonać ruch do wygranej dla niego pozycji, to pozycja A również jest dla niego wygrana;
- jeśli w pozycji B wszystkie ruchy gracza prowadzą do przegranej dla niego pozycji, to pozycja B jest również dla niego przegrana.

To pozwala na proste sformułowanie uniwersalnej strategii: gracz, jeśli tylko może, wykonuje ruch do pozycji dla niego wygranej.

Twierdzenie. W grach kombinatorycznych bez remisów każda pozycja jest rozstrzygnięta. W szczególności, w każdej takiej grze jeden z graczy ma strategię wygrywającą (krócej: każda gra jest rozstrzygnięta).

Dowód. Dla każdej pozycji jej *głębokość* nazwiemy największą możliwą liczbę ruchów od tej pozycji do zakończenia rozgrywki. Jeśli pozycja ma głębokość 0, to jest końcowa i jest rozstrzygnięta z definicji. Ustalmy $d \geq 1$ i założmy indukcyjnie, że rozstrzygnięte są wszystkie pozycje o głębokościach mniejszych od d . Z każdej pozycji można wykonać ruch wyłącznie do pozycji o mniejszych głębokościach, więc możemy rozstrzygnąć wszystkie pozycje z głębokością d na podstawie wcześniej wymienionych reguł. Ze względu na skończoność gry, rozstrzygniemy w ten sposób wszystkie pozycje. Należy do nich również pozycja początkowa. □

Dowód twierdzenia dostarcza nam metodę rozstrzygnięcia pozycji – „od końca”.

Wracamy teraz do gier z możliwym remisem. Można udowodnić (przeprowadzając analogiczne rozumowanie lub wywnioskować – jak? – bezpośrednio z twierdzenia), że albo jeden z graczy ma strategię wygrywającą, albo obaj mają strategię zapewniającą co najmniej remis.

To straszne! Z powyższego wynika, że każda idealna rozgrywka w grze kombinatorycznej skazana jest na z góry określony rezultat. Jednak wielu ludzi gra, a w niektóre gry organizowane są nawet mistrzostwa świata: *szachy*, *go*, *hex*, *gomoku*... A to dlatego, że znalezienie strategii jest znacznie trudniejszym problemem od wykazania jej istnienia. Nawet bardzo małe gry mogą mieć skomplikowane grafy – tu namawiam Czytelnika do podjęcia daremnej próby narysowania grafu pozycji gry kółko i krzyżyk na planszy 3×3 .

W niektórych grach zamiast grafu pozycji możemy rozważyć *graf stanów*, ze strzałkami $S \rightarrow T$, jeśli ze stanu S gracz mający ruch może go wykonać do stanu T . Warunkiem jest to, że dla każdego stanu obaj gracze mają ten sam zestaw stanów, do których mogą przejść, wykonując ruch. Jest tak, dla przykładu, w grze *chrup!* i w grze *Wythoffa*. Dzięki takiemu podejściu mamy do 50%^{*} mniej sytuacji do rozstrzygnięcia, w stosunku do grafu pozycji. Na rysunku obok widać graf stanów gry *chrup!* na czekoladzie 3×2 (z dokładnością do symetrii).

Jeśli remis jest niemożliwy, to każdy stan można określić jako wygrany (W) bądź przegrany (P) dla gracza, który aktualnie ma ruch. Przypisanie wartości stanom jest analogiczne jak wcześniej: stan P to taki, z którego wszystkie ruchy prowadzą do stanu W, a stan W – w którym co najmniej jeden ruch prowadzi do stanu P. Rozumując analogicznie jak w przypadku grafu pozycji, możemy każdemu stanowi przypisać W lub P. Strategia polega na wyborze, o ile to możliwe, stanu P – czyli przegranej dla naszego przeciwnika, który będzie miał wtedy ruch.

Na koniec dwie porady praktyczne.

- (1) Ustalając strategię wygrywającą dla jednego z graczy, wystarczy rozważyć tylko te pozycje lub stany, które wystąpią w grze podczas stosowania tej strategii – nie trzeba analizować całego grafu.
- (2) Wygodnym zabiegiem jest uznawanie pozycji w oczywisty sposób rozstrzygniętych jako końcowe.

Zadania

1. Rozstrzygnąć wszystkie pozycje/stany następujących gier:
 - (a) *dominacja* na planszy 3×3 ,
 - (b) *gra Wythoffa* na planszy 6×4 .
2. Jakim ruchem powinien rozpocząć grę *chrup!* na czekoladzie 4×3 gracz I?
3. Znaleźć przykładową strategię wygrywającą dla jednego z graczy w grze:
 - (a) *hex* na planszy 4×4 ,
 - (b) *dominacja* na planszy 4×4 .

^{*}wynik niezależnych badań wykonanych przez redakcję *Delty*

Wskazówki do zadań

1. Najlepiej narysować graf pozycji dla *dominacji* i graf stanów dla gry *Wythoffa*.
Ciekawostka: stan typu P w grze Wythoffa to $(\lfloor k\phi \rfloor, \lfloor k\phi^2 \rfloor)$, $\lfloor k\phi \rfloor$ dla całkowitych dodatnich k , przy czym $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Można narysować uproszczony graf stanów, postępując się praktyczną poradą (2). W grze *chrup!* w oczywisty sposób rozstrzygnięte są czekolady $n \times 1$, czekolady $n \times n$ z usuniętym kwadratem $(n-1) \times (n-1)$ oraz wszystkie niedochodzące czekolady $n \times 2$ (zob. następny kącik). Aby zmniejszyć przewagę rozpoczynającego, na turniejach stosuje się prawo *zamiany*: po wykonaniu przez gracza I pierwszego ruchu gracz II zamienia swój ruch, może zdecydować, że zamienia się rolęmi z graczem I, przejmując jego kolor i wykonany ruch.
(b) **Ciekawostka.** Gracz II wygrywa na planszach 1×1 i 5×5 , a na pozostałych $n \times n$ dla $n \leq 11$ – gracz I. Dla $n \geq 12$ nie wiadomo.

29. Dolnośląski Festiwal Nauki 2026

WROCLAW
12-19.09

LĘGNICA
21-27.09

WOŁÓW
21-23.09

DZIERŻONIÓW
1-2.10

GŁOGÓW
5-7.10

ZIEMIA KŁODZKA
8-9.10

Bystrzyca Kłodzka,
Szczyna, Międzyziesie

STRZELIN
12-13.10

JELENIA GÓRA
15-16.10

**ZĄBKOWICE
ŚLĄSKIE
I ZIEBICE**
15-17.10

ZGORZELEC
20-21.10

BOLESŁAWIEC
22-23.10

LUBIN I POLKOWICE
27-28.10

WAŁBRZYCH
26-30.10

POZNAJ POLSKIE
PAMIĘTAJ



festiwal.wroc.pl

WSTĘP WOLNY! * WSTĘP WOLNY!
ponad
2000
wydarzeń

