

deltad

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

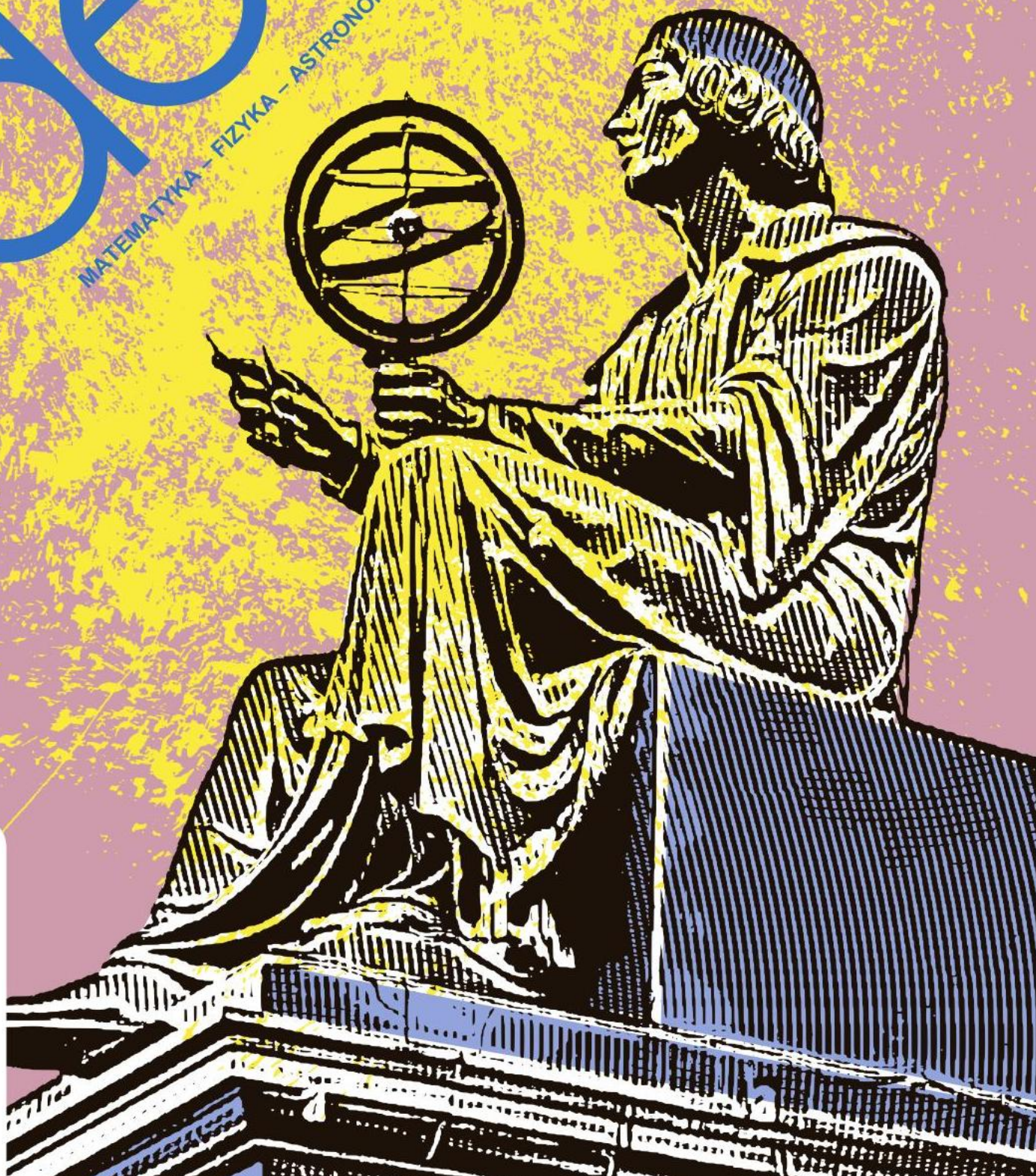
NR 9 (628) 2026

CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 I NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

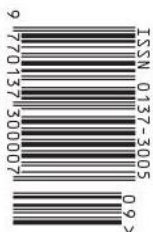
www.deltami.edu.pl

Astrolabium
sferyczne

s. 1



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 2700 egz.

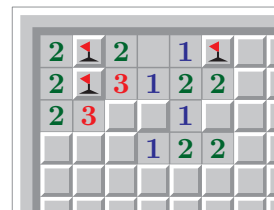


SPIS TREŚCI

NUMERU 9 (628) 2026

Astrolabium sferyczne <i>Aleksander Kołodziej</i>	str. 1
O obozie <i>Math Beyond Limits</i>	str. 4
Problem Waringa i funkcje gęstości w teorii liczb <i>Michał Gos</i>	str. 5
 Hipoteza Gilbreatha <i>Bartłomiej Pawlik</i>	str. 8
 Przez ucho igielne <i>Marta Fikus-Kryńska</i>	str. 8
Kształt i opór, część 2/4 Nie tylko czapka Newtona <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 10
 Zadania	str. 12
Informatyczny kącik olimpijski (139): Spóźnienia przy okrągłym stole <i>Bartosz Kostka</i>	str. 13
Czy AI gra w geometrię? <i>Mateusz Krukowski</i>	str. 14
Trójkąty w kratkę <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 16
<i>Daj mi jedno słowo...</i> <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 17
 Aktualności Jeden kolajder, by wszystkimi rządzić	str. 18
Klub 44	str. 20
 Prosto z nieba: Starsza niż Słońce	str. 22
 Niebo we wrześniu	str. 23
 „Kradzież” strategii <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:
jak grać, żeby nie wpaść na minę?



Kto pamięta tę grę?

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana, Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.
Skład systemem $\text{\LaTeX}$ wykonała Redakcja.
Druk: Silverprint

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



*Nauczyciel fizyki w szkołach ponadpodstawowych



Rys. 1. Pomnik Mikołaja Kopernika w Warszawie. W lewej ręce astronom trzyma astrolabium sferyczne, a w prawej cyrkiel. (Źródło: Wikipedia)

†Wymienię tylko kilka z nich, choć z pewnością jest ich dużo więcej: Muzeum Collegium Maius Uniwersytetu Jagiellońskiego, Centrum Wiedzy i Nowych Technologii w Parzynie, Narodowe Muzeum Techniki w Warszawie, Muzeum Mikołaja Kopernika we Fromborku.

††Historyczni siostrzeńcy i siostrzenice Mikołaja Kopernika (dzieci jego siostry Katarzyny) to: Katarzyna, Krystyna, Regina, Jerzy i Albrecht. W artykule pozostaniemy jednak przy Ani i Tomku.



Rys. 2. Astrolabium sferyczne (rekonstrukcja), Muzeum Mikołaja Kopernika we Fromborku

†††Najjaśniejsza gwiazda w gwiazdozbiorze Małego Psa.

Astrolabium sferyczne – zwane też sferą armilarną – to chyba najbardziej rozpoznawalny przyrząd Mikołaja Kopernika. Dostrzeżemy go choćby na pomniku astronoma przed Pałacem Staszica w Warszawie (rys. 1). Choć pomnik może sugerować, że przyrząd ten jest niewielki i poręczny, to jednak prawda jest inna. Większe średnice kół tworzących astrolabium pozwalają na odczytanie kątów z większą dokładnością, Kopernik korzystał więc z przyrządu o dużych rozmiarach. Instrument ten w autentycznej skali (rys. 2) oglądać możemy w licznych muzeach w Polsce†.

Wielość kół tworzących astrolabium może sugerować, że jest niezwykle skomplikowane w użytkowaniu. Mam nadzieję jednak, że po lekturze tego tekstu obsługa przyrządu okaże się znacznie prostsza, a może nawet dziecinnie prosta. Zapraszam Cię, Czytelniku, do nauczania się odczytywania z tego przyrządu wartości współrzędnych sferycznych obserwowanej gwiazdy. Zgodnie ze słowami samego Kopernika: *dla obserwacji położen Księżyca i gwiazd buduje się (...) przyrząd, który Ptolemeusz nazywa astrolabium.*

By proces nauki uczynić przystępniejszym, a może i atrakcyjniejszym, zrealizujemy go w formie imaginowanego dialogu z Mikołajem Kopernikiem (jego wypowiedzi poprzedzam literą „M”). Będziemy mieli szansę wcielić się w rolę młodych adeptów asystujących Mistrzowi przy pomiarach – jego siostrzenicy Ani i siostrzeńca Tomka††.

Nim jednak przejdziemy do meritum, pragnę zachęcić do wyposażenia się w fizyczny egzemplarz astrolabium sferycznego, by następnie własnoręcznie ustawić przyrząd i odczytać z niego współrzędne obserwowanej gwiazdy. Modele do złożenia instrumentów Kopernika można zakupić w internecie (przykład takiego modelu widać na rysunkach 3 i 5). Może również uda się je wytworzyć samodzielnie? Do tego zachęca pan Piotr Duczmal z obserwatorium w Parzynie w ramach bezpłatnego projektu *Spójrz na Kopernika*. Zachęcam do udziału!



Scena pierwsza

Ania i Tomek odwiedzają swojego wuja Mikołaja kilka razy w roku. Dzięki tym wizytom nabrali już pewnego warsztatu obserwacyjnego i biegłości w posługiwaniu się pojęciami astronomicznymi. I tym razem nie może być inaczej – na pewno się czegoś nauczą!

Frombork, ogród przy domu Kopernika

M: Aniu! Tomku! Jakże miło was widzieć! Tak długo was już tu nie było!

A: O tak, my też się stęskniliśmy!

W końcu do ciebie przyjechaliśmy! Nie mogę się doczekać deseru pani Shilling!

Wieczorem

A: Wujku Mikołaju! Co będziemy teraz robić?

M: Nauczmy się korzystać z astrolabium sferycznego. Chodźcie! Świetnie!

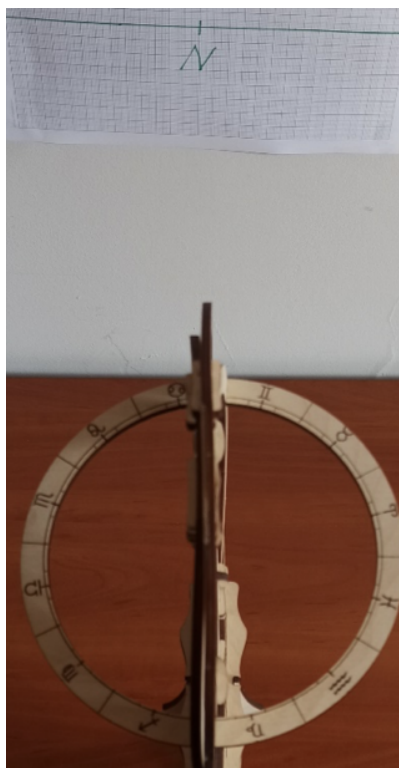
M: W pierwszym kroku ustawimy przyrząd w kierunku północnym. Pomóżcie mi je obrócić – ustawmy pionową płaszczyznę największego zewnętrznego koła tak, by znalazła się w niej Gwiazda Polarna (rys. 3).

A: Widzę ją, wujku, jest tam!

M: Świetnie Aniu, w rozpoznawaniu gwiazd chyba prześcignęłaś już Tomka.

Ale Procjona†††, to wciąż ja szybciej odnajduję!

A: Ahaaa, to się okaże dopiero w zimie, braciszku!



Rys. 3. Astrolabium po poprawnym ustawieniu. Horyzont reprezentuje pozioma linia na ścianie, a kierunek północny oznaczono literą N na horyzoncie

[†]Podobnej sztuczki używa się dzisiaj w teleskopach na montażu zwanym „paralaktycznym”. Jedną z osi obrotu celuje w biegun nieba, dzięki czemu śledzenie wybranej gwiazdy, planety lub Księżyca w ciągu nocy sprowadza się do obrotu przyrządu wokół tylko tej jednej osi.

^{††}Po więcej ilustracji kolejnych ustawień astrolabium odsyłamy do cyfrowej wersji artykułu dostępnej na naszej stronie www.deltami.edu.pl/.

^{†††}Matematycy piszą swe dzieła dla matematyków – to zdanie z przedmowy Kopernika do traktatu „O obrotach [sfer niebieskich]”.

M: Oboje jesteście znakomici, a ja lubię się z wami podroczyć. Ale wracamy do pracy. Najpierw ustalmy precyzyjne nazewnictwo – kół w astrolabium mamy wiele. Numerujemy je kolejno, od zewnątrz ku środkowi. Największe i najbardziej zewnętrzne koło będę nazywał pierwszym, następne, nieco mniejsze, drugim itd. Wszystko jasne?

No pewnie, prościzna!

M: Pierwsze koło potrzebujemy nachylić tak, by oś obrotu łącząca je z drugim kołem wskazywała na biegun północny sfery niebieskiej. Jeśli wycelujemy w gwiazdę polarną, powinno to być wystarczająco dokładne.

A: To proste! Wystarczy nachylić ją pod kątem 54 stopni i 21 minut kątowych nad poziomem.

M: Rzeczywiście, dokładnie tyle wynosi szerokość geograficzna Fromborka: 54 stopnie, 21 minut i 27 sekund łuku...

Wujku, ustawione.

M: Dobra robota! Od tego momentu pierwsze koło pozostanie już nieruchome – wcale nie będziemy go ruszać. Jak myślicie – po co celowaliśmy w Gwiazdę Polarną osią obrotu drugiego koła względem pierwszego? W jaki sposób okaże się to użyteczne?

A: Odpowiedź nasuwa się sama: w ciągu doby sfera niebieska wykonuje pełen obrót wokół Gwiazdy Polarnej (dokładniej rzecz ujmując: wokół północnego bieguna nieba znajdującego się bardzo blisko tej gwiazdy). Zatem kręcąc drugim kołem wokół tej osi, będziemy odtwarzać, śledzić ruch nieba następujący wraz z upływem minut i godzin.

Obracając drugim kołem, będziemy obracać równocześnie trzecim, czwartym i kolejnymi, których ruch względem drugiego będzie zablokowany pokrętłami. Dzięki temu śledzenie wybranej gwiazdy w czasie godzin obserwacji będzie sprowadzało się do obrotu samym tylko drugim kołem^{††}!

M: Znakomicie! Jak widzicie, astronomowie potrafią zadbać o wygodę w czasie swych obserwacji.

A: Wujku, skoro drugim kołem – a wraz z nim wszystkimi kolejnymi – należy obracać wraz z upływem minut i godzin, to w jakim ustawieniu powinno znaleźć się ono w tym momencie?

M: Brawo! To jest docieklivość, jakiej teraz potrzebujemy! Przypatrzcie się – co się zmienia, gdy obracamy drugim kołem, a wraz z nim trzecim.

Do trzeciego koła przymocowane jest prostopadłe do niego inne koło z narysowanymi symbolami znaków zodiaku. Gdy obracamy drugim kołem, a wraz z nim trzecim, wtedy płaszczyzna tego koła znaków zodiaku zmienia się!

A: No jasne! Trzeba obracać, aż płaszczyzna koła zodiaku będzie zgodna z płaszczyzną zodiaku widocznego na niebie^{††}!

M: Dokładnie! Radzicie sobie znakomicie! Obracajcie, aż koło zodiaku ustawi się w płaszczyźnie wyznaczonej przez gwiazdozbiory zodiakalne, Księżyc i Słońce. Płaszczyznę tę nazywamy też ekliptyką.

A: Ekli-czym?

M: Ekliptyka to płaszczyzna, w której leży orbita Ziemi w jej ruchu wokół Słońca. Na niebie ekliptykę widzimy jako pas, po którym pozornie porusza się Słońce. Księżyc i planety również widzimy poruszające się po tym pasie.

Wujku, ale przecież Ziemia się nie rusza. Tata mówi, że nikt nie uwierzy w teorię ruchu Ziemi.

M: Ma prawo do takiej opinii. Ale rozumiesz: nie muszę przekonać wszystkich – przynajmniej na początku. Ważne, że rozumieją mnie inni matematycy^{†††} – chociaż niektórzy z nich.

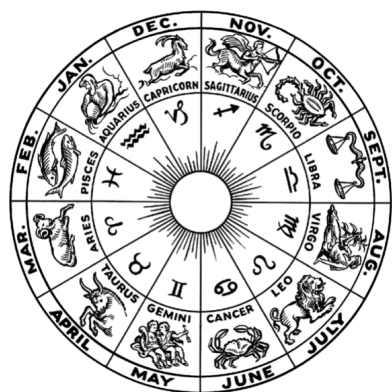
A: Dla pozostałych to zbyt skomplikowane?

M: Potem inni im wytłumaczą. Są przekonania, na zmianę których potrzeba wiele czasu.

Aniu, pomóż. To drugie koło trochę się przyblokowało.

M: Jak myślicie, co teraz? Czy symbole znaków zodiaku wskazują na właściwe części nieba?

A: Aha! Czyli teraz trzeba pokręcić trzecim kołem wraz z przymocowanym prostopadłe do niego kołem zodiaku, tak by pozostawiając płaszczyznę zodiaku (ekliptykę) niezmienną, umieścić symbole zodiaków w odpowiednich miejscach!



Rys. 4. Symboly znaków zodiaku, wraz z łacińskimi nazwami i miesiącem, w trakcie którego się rozpoczyna dany znak. Na przykład znak Barana zaczyna się w dniu równonocy wiosennej – 21 marca, Rak w dniu przesilenia letniego – 22 czerwca, Waga równonocy jesiennej – 23 września, Koziorożec w dniu przesilenia zimowego – 22 grudnia.
Źródło: Wikipedia

† Obecny kalendarz, zwany gregoriańskim, wprowadzono dopiero w 1582 roku, czyli 39 lat po śmierci astronoma. Jednak już Kopernik prowadził obserwacje służące wyznaczeniu daty równonocy wiosennej. Badania prowadził, by wesprzeć przygotowania do reformy kalendarza.

†† Nazywa się je, odpowiednio, rokiem zwrotnikowym i rokiem gwiazdowym. Różnica pomiędzy długością obu jednostek jest rezultatem precesji osi ziemskiej.



Rys. 5. Na czwartym kole przesunięto celownik tak, by wskazywał na Regulusa (aby można było dostrzec tę gwiazdę, patrząc przez dwa celowniki po przeciwnych stronach czwartego koła). Celownik wskazuje na czwartym kole szerokość ekliptyczną równą około 12°

Tylko jak to zrobić? Czy symbol znaku Ryb skierować w stronę gwiazdozbioru Ryb?

M: Niezupełnie. Znaki zodiaku zgadzały się z gwiazdozbiorami, gdy ustalali je chaldejscy astronomowie kilka wieków przed Chrystusem. Teraz znaki są przesunięte względem gwiazdozbiorów mniej więcej o jeden gwiazdozbiór.

A: Z gwiazdozbiorem Ryb sąsiadują od lewej gwiazdozbiory Wodnika i Barana. Na który z nich wycelować symbol znaku Barana na przyrządzie?

M: Na Barana.

To na co wskazują znaki zodiaku, skoro nie na swoje gwiazdozbiory?

M: Zatrzymajmy się chwilę nad tym pytaniem. Czy gwiazdozbiory na pasie ekliptyki są równych rozmiarów?

A: Oczywiście, że nie! Ryby są ogromne, a Baran malutki!

M: Otóż to! Natomiast starożytni Chaldejczycy podzielili ekliptykę na 12 równych części. Każdą z nich nazwali zgodnie z gwiazdozbiorem, który znajdował się w tamtym rejonie nieba.

A jak wybrali miejsca rozdzielające tych 12 części?

M: Punkty oddzielające znaki to równonocy i przesilenia – dzielą ekliptykę na 4 części. Każdą z nich następnie podzielono na kolejne trzy. Tak uzyskano 12 znaków. Znak Barana zaczyna się w momencie, w którym rozpoczyna się astronomiczna wiosna (rys. 4).

A: Czyli co roku 21 marca!

M: Niezupełnie. Okazuje się, że czas od jednej równonocy wiosennej do kolejnej nie jest dokładnie taki sam jak czas, po którym Słońce wykona pełen (pozorny) obieg po sferze niebieskiej, wracając do tego samego punktu, np. w gwiazdozbiorze Barana. Nasz obecny kalendarz, zwany juliańskim[†], nie uwzględnia tej różnicy. W rezultacie obecnie równonoc wiosenna przypada około 5 marca.

Hmmm... , czyli są dwa różne sposoby odmierzenia roku? Pierwszy: od jednej równonocy wiosennej do kolejnej, drugi: to czas, po którym Słońce wróci do tego samego położenia względem gwiazd stałych^{††}?

M: Bardzo dobrze to ująłeś, Tomku. Dobry z ciebie astronom będzie!

A: A ze mnie?

M: Z ciebie też! Kobiety od dawna odgrywają ważną rolę w rozwoju astronomii. Dobra, to ustawiamy znak Barana na gwiazdozbiór Ryb.

A: Tak mnie zaciękało... Czy położenie Słońca na niebie, w którym zachodzi równonoc wiosenna, ma jakąś specjalną nazwę?

M: Tak. Nazywa się punktem Barana.

Czyli punkt Barana znajduje się w gwiazdozbiorze Ryb?!

M: Mówilem, że szybko łapiecie.

A: Wujku, wszystko ustawione! Co robimy?

M: Teraz użyjemy naszego przyrządu do pomiaru położenia wybranej gwiazdy i podamy jego współrzędne ekliptyczne.

Uuuuuu. Brzmi świetnie, w końcu!

M: Ja bardzo lubię Regulusa – tę gwiazdę przy przedniej łapie Lwa. Nieraz była mi bardzo przydatna. Wyznamy jej położenie.

A: Ok, celuję w nią.

Ej, daj mi też.

M: Bardzo dobrze. Najpierw upewnijcie się, że większe koła (pierwsze, drugie i trzecie) są zablokowane i pozostaną nieruchome. Teraz obracamy czwarte koło tak, by jego płaszczyzna zawierała wybraną gwiazdę (naszego Regulusa). Następnie przesuwacie celowniki z obu stron koła, by patrząc z jednego przez drugi, dojrzeć gwiazdę (rys. 5).

M: Świetnie. Skoro już wycelowaliście i widzicie go dokładnie, to zablokujecie koła przyrządu. Tomku, odczytaj, proszę, współrzędną szerokości ekliptycznej z czwartego koła. Jej wartość na podziałce wskazuje celownik.

Szerokość geograficzna, yyy, przepraszam, szerokość ekliptyczna wynosi plus 12 stopni. Hmm... , to w sumie logiczne, że ta wartość nie może być zbyt duża – przecież gwiazdozbiór Lwa, do którego należy Regulus, leży na ekliptyce, a ekliptyka ma zerową szerokość ekliptyczną, tak jak równik ma zerową szerokość geograficzną!



† Galileusz, Dialog o dwóch najważniejszych Układach Świata: Ptolemeuszowym i Kopernikowym. Edward Ligocki, s. 366. Cytat za: tłum. Andrzej Kajetan Wróblewski, „Historia Fizyki”, Wydawnictwo Naukowe PWN, str. 106.

M: Doskonale! Aniu, odczytałabyś, proszę, z kolei długość ekliptyczną?

A: Pewnie! Skoro Regulus leży w gwiazdozbiorze Lwa, to z pewnością będzie w znaku. . . Panny! Ach to przesunięcie!

M: Poradziłaś sobie znakomicie. Czy widzisz podziałkę na kole ze znakami zodiaku? W której części znaku się znajduje?

A: W trzech czwartych znaku Panny. . . Po dokładniejszym odczytaniu i chwili obliczeń szacuję, że. . . jego długość ekliptyczna jest równa 149 stopni! Udało nam się!

M: Przybijcie piątki! I żółwika! A teraz pora na jakiś deser, zasłużyliście na nagrodę!

A: Hura!

Uwielbiam desery twojej gosposi, pani Anny Schilling!

M: Ja też! Pani Anna nazywa te ciastka kopierniczkami. Ha, ha!

Koniec sceny pierwszej

Niech będzie mi wolno zamiast własnego zakończenia przytoczyć słowa Galileusza, które, mam nadzieję, wzbudzą i pogłębią uznanie i szacunek wraz z autentycznym podziwem dla naszego wybitnego rodaka:

Raz jeszcze trzeba tu wielkim głosem obwieścić chwałę wspaniałej przenikliwości Kopernika, a jednocześnie wyrazić ubolewanie nad jego niefortunnym losem, że nie żył w naszych czasach, [...] wiemy bowiem, że Jowisz – niemalże druga Ziemia – nie tylko w otoczeniu jednego Księżyca, lecz nawet czterech księżyców w ciągu 12 lat dokonuje jednego obiegu dookoła Słońca [...].[†]

O obozie *Math Beyond Limits*

Maths Beyond Limits to wyjątkowa inicjatywa, która zrzesza młodych miłośników matematyki z całego świata. Już od ponad 10 lat organizujemy bezpłatne obozy matematyczne. W 2026 roku obozy odbywają się w trzech krajach: Bośni i Hercegowinie (wiosną), Szwecji (latem) oraz w Polsce (na jesieni). „Znakiem firmowym” naszych obozów jest ich unikalny format, kładący nacisk na otwartość i współpracę. W każdym bloku uczestnicy mogą wybierać spośród kilku różnych zajęć matematycznych o różnorodnej tematyce. Podczas *Time Academic* *Unscheduled* mają okazję zgłębić zagadnienia poznane na zajęciach wspólnie z innymi uczestnikami bądź tutorami prowadzącymi zajęcia. Uczestnicy mają również możliwość podzielenia się swoją pasją, wygłaszając 30-minutowe odczyty na wybrane przez siebie tematy. W tym i kolejnych numerach *Delty* Czytelniczy będą mogli odnaleźć artykuły napisane przez autorów takich prezentacji.

MBL to jednak coś więcej niż sama matematyka. Po ciężkim wysiłku umysłowym nadchodzi czas na relaks i w tej sferze również mamy wiele do zaoferowania: od pieszych wędrówek poprzez maraton zagadek logicznych po różnorodne warsztaty organizowane przez samych uczestników. To niezwykła okazja do poznania pasjonatów matematyki z najróżniejszych zakątków globu (w ostatnim roku w Polsce gościliśmy uczestników i tutorów z aż 25 krajów!) i zawarcie przyjaźni, które przetrwają lata.

Zachęcamy do zapoznania się ze szczegółami na naszej stronie internetowej: mathsbeyondlimits.eu lub w mediach społecznościowych. Choć sam obóz przeznaczony jest dla licealistów, starsze osoby mogą tworzyć społeczność MBL jako tutorzy, do czego również serdecznie zapraszamy!

Uczestnicy poprzedniej edycji obozu Maths Beyond Limits w Rycerze Dolnej, 7–20 września 2025 roku.



Problem Waringa i funkcje gęstości w teorii liczb

Michał GOS*

*Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Teoria liczb wyróżnia się wyjątkowo intensywnym stosowaniem narzędzi pozostałych działów matematyki. W tej dziedzinie nierzadko okazuje się, że badanie prostych do sformułowania problemów wymaga szeroko zakrojonej rozbudowy znanych metod, co historycznie przyczyniało się do prężnego rozwoju innych dziedzin. Poniżej zajmujemy się przykładem takiego problemu. Przypomnijmy najpierw następujące:

Twierdzenie 1 (Lagrange). *Każdą liczbę naturalną można wyrazić jako sumę czterech nieujemnych kwadratów.*

Dowód, choć niekrótki, można uzyskać skromnymi środkami elementarnej algebry i arytmetyki modularnej reszt kwadratowych. W 1770 roku Edward Waring zapostulował następujące uogólnienie twierdzenia Lagrange’a, które zostało udowodnione dopiero w 1909 roku przez Davida Hilberta:

Twierdzenie 2 (Waring–Hilbert). *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $g \in \mathbb{N}$ takie, że każdą liczbę $n \in \mathbb{N}$ można zapisać jako $n = x_1^k + \dots + x_g^k$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_g$.*

Najmniejsze g spełniające warunek twierdzenia 2 oznaczmy jako $g(k)$. Tak więc $g(2) = 4$, zaś Waring przypuszczał, że $g(3) = 9$ oraz $g(4) = 19$ (co okazało się prawdą). Obok hipotezy Goldbacha, problem Waringa stał się jednym z ważniejszych obszarów badań *addytywnej teorii liczb*. W niniejszym artykule przedstawimy szkic dowodu tego klasycznego już twierdzenia.

Dla wstępnej oceny trudności zadania, możemy łatwo otrzymać oszacowanie dolne wartości $g(k)$ przez sprytny wybór $n = 2^k \cdot \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 1$. Wtedy $n < 3^k$, więc $x_1, \dots, x_{g(k)} \in \{0, 1, 2\}$. Niech a z tych liczb przyjmuje wartość 1, b z nich wartość 2. Mamy $n = a + b \cdot 2^k$, skąd $b \leq \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor \leq \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 1$, a zatem

$$g(k) \geq a + b = n - (2^k - 1)b \geq 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2.$$

Patrząc na wykładniczy wzrost wartości $g(k)$, możemy porzucić nadzieję na dowód konstruktywny, jaki można przeprowadzić w przypadku twierdzenia 1. Zastosujemy inne podejście – zamiast konstruować odpowiednie przedstawienie danej liczby n jako sumy k -tych potęg, będziemy badać zbiór wszystkich liczb postaci $x_1^k + \dots + x_l^k$ dla określonego l . Oznaczmy przez $\mathcal{S}_k$ zbiór $\{m^k : m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, gdzie $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ to zbiór nieujemnych liczb całkowitych. Sumą Minkowskiego zbiorów $A, B \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ będziemy nazywać zbiór $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$; będziemy też domyślnie pisać $lA = A + \dots + A$ (mamy l „składników” po prawej stronie). Twierdzenie 1 możemy więc zapisać w postaci $4\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Chcielibyśmy opisać, jak dużą „część” zbioru $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ stanowią zbiory $l\mathcal{S}_k$ dla kolejnych liczb $l \in \mathbb{N}$ oraz znaleźć kryteria określające, kiedy $l\mathcal{S}_k = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Jeśli Czytelnik miał okazję poznać olimpijskie zastosowania analitycznej teorii liczb (nie jest to potrzebne do lektury tego artykułu), może on skojarzyć w tym miejscu pojęcie *gęstości naturalnej* $d(A)$ dla zbioru $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definiujemy ją jako granicę przy $n \rightarrow \infty$ wyrażenia $\frac{A(n)}{n}$, gdzie $A(n) = |A \cap \{1, \dots, n\}|$. Intuicyjnie, mierzy ona dokładnie to, jaką „część” zbioru $\mathbb{N}$ stanowi podzbiór A ; do naszych celów jest ona jednak wybrakowana. Po pierwsze, ciąg liczb $\{\frac{A(n)}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ nie musi posiadać dobrze określonej granicy – do opisu „gęstości” zbioru A za pomocą tego ciągu potrzebne byłyby wtedy bardziej techniczne pojęcia analityczne. Po drugie, nawet „najgęstszy” przypadek $d(A) = 1$ nie pozwala stwierdzić, że $A = \mathbb{N}$.

Badając zagadnienia addytywnej teorii liczb, matematyk rosyjski Lew Schnirelman wprowadził „ostrzejszą” funkcję gęstości, zwaną dziś *gęstością Schnirelmana*. Dla zbioru $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$, oznaczamy ją przez $\delta(A)$ i definiujemy jako

Hipoteza Goldbacha (1742) głosi, iż każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Do dziś pozostaje nierozstrzygnięta, choć udowodniono wiele słabszych sformułowań i powiązanych twierdzeń.

Przedstawiamy tylko drobną część zjawisk i teorii powiązanych z problemem Waringa. Czytelnik Zainteresowany znajdzie pełniejszy przegląd w Rozdziale 8 *Teorii Liczb* W. Narkiewicza (WN PWN, Warszawa 2003).

Oszacowanie $g(k) \geq 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$ podał L. Euler około 1772 roku. Na tej podstawie wysunął on śmiałą hipotezę, że $g(k)$ jest równe podanej wartości ograniczenia dolnego. Obecnie wiemy, że jest to prawda dla $k \leq 471\,600\,000$ oraz że może istnieć co najwyżej skończona liczba wyjątków; w ich (hipotetycznym) przypadku, dokładne wartości $g(k)$ również są opisane.

Artykuł w Δ_{16}^3 autorstwa Tomasza Kobosa przedstawia obfitą selekcję standardowych metod. Czytelnik Zainteresowany znajdzie więcej zadań olimpijskich z zakresu analitycznej teorii liczb w odpowiednim skrypcie broszury MIKO 2023/24 pod adresem <https://mikomath.org/editions/>.

Czytelnik Zaciekawiony zechce zbadać w tym miejscu gęstość naturalną zbioru liczb, których zapis dziesiętny zaczyna się od 1.



Czytelnik Skrupulatny może zapytać, czy wynik ten da się poprawić. Okazuje się, że tak: H.B. Mann wykazał, że dla $A, B \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takich, że $0 \in A \cap B$ i $1 \in A \cup B$, zachodzi nawet $\delta(A+B) \geq \min\{1, \delta(A) + \delta(B)\}$.

Uwagę przykuwa kombinatoryczny charakter powyższych wyników, mimo analitycznej definicji gęstości Sznirelmana $\delta(A)$ – to za sprawą jej wygodnej interpretacji w ramach nierówności $A(n) \geq \delta(A)n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Do dowodu lematu 3 konieczne są zaawansowane narzędzia analityczne lub żmudne obliczenia. Czytelnik Zawzięty może znaleźć elementarne uzasadnienie oparte na tych drugich w książce *Three Pearls of Number Theory*, A.Y. Khinchin (Graylock Press, Rochester, NY, 1952), dostępnej online. Dowód analityczny zawarty jest w *Teorii Liczb* W. Narkiewicza (WN PWN, Warszawa 2003).

infimum (największe ograniczenie dolne) zbioru $\{\frac{A(n)}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, to jest największą liczbę $\delta \in \mathbb{R}$ taką, że $\frac{A(n)}{n} \geq \delta$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zaznaczmy, że każdy podzbiór liczb rzeczywistych posiada dobrze określone infimum. Ponadto z definicji $\delta(A)$ natychmiast wynika, że $\delta(A) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Zatem $\delta(A)$ zapewnia „gęstościowe” kryterium na zajęcie $A = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dla zbioru A zawierającego 0. Okazuje się, że mówi o wiele więcej w sytuacji, gdy rozważamy sumy Minkowskiego lA dla $l \in \mathbb{N}$ zdefiniowane powyżej:

Twierdzenie 3 (Sznirelman). *Jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zawiera 0 i spełnia $\delta(A) > 0$, to istnieje $g \in \mathbb{N}$ takie, że $gA = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Zbiór $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ spełniający tezę twierdzenia 3 nazywamy *bazą* zbioru liczb naturalnych. Powyższy wynik otwiera drogę do dowodu twierdzenia 2 – wystarczy wykazać $\delta(lS_k) > 0$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$. Zaznaczmy, że warunek twierdzenia 3 dla zbioru $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ na bycie bazą $\mathbb{N}$ nie jest warunkiem koniecznym – mamy wszak $\delta(S_2) = 0$, ale $4S_2 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dowód twierdzenia 3 opiera się na opisie przyrostu gęstości Sznirelmana dla sumy Minkowskiego $A + B$ w porównaniu do gęstości składników A, B i jest konsekwencją dwóch kolejnych lematów:

Lemat 1. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zawierających 0 zachodzi $\delta(A+B) \geq \delta(A) + \delta(B) - \delta(A)\delta(B)$.*

Dowód. Do wykazania $\delta(A+B) \geq c$ wystarczy $(A+B)(n) \geq cn$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wypiszmy elementy $A \cap \{1, \dots, n\}$: $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r \leq n$, gdzie $r = A(n) \geq \delta(A)n$. Oznaczmy $B_i = B \cap \{1, \dots, a_{i+1} - a_i - 1\}$ dla $i \in \{0, \dots, r\}$ przy dodatkowym oznaczeniu $a_0 = 0$ i $a_{r+1} = n+1$ (niekoniecznie $a_{r+1} \in A$).

Zbiory $\{a_i\}_{i=1}^r$ oraz $\{a_i\} + B_i$ dla $i \in \{0, \dots, r\}$ stanowią rozłączne podzbiory $(A+B) \cap \{1, \dots, n\}$ – zatem $(A+B)(n) \geq A(n) + \sum_{i=0}^r B(a_{i+1} - a_i - 1)$. Z definicji gęstości Sznirelmana $B(a_{i+1} - a_i - 1) \geq \delta(B)(a_{i+1} - a_i - 1)$, więc otrzymujemy

$$(A+B)(n) \geq A(n) + \sum_{i=0}^r \delta(B)(a_{i+1} - a_i - 1) = A(n) + \delta(B)(n - r),$$

gdyż prawa suma „teleskopuje się”. Zapis prawej strony jako $(1 - \delta(B))A(n) + n\delta(B)$ i podstawienie $A(n) \geq \delta(A)n$ dają żądaną nierówność. $\square$

Lemat 2. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zawierających 0 i spełniających $\delta(A) + \delta(B) \geq 1$ zachodzi $A+B = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Dowód. Rozważmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ – pokażemy, że $n \in A+B$. Jeżeli $n \in A \cup B$, to sytuacja jest jasna. W przeciwnym razie zbiory $A \cap \{1, \dots, n\}$ oraz $B' = \{n - b : b \in B \cap \{1, \dots, n\}\}$ są zawarte w $\{1, \dots, n-1\}$. Jednocześnie $A(n) + B'(n) = A(n) + B(n) \geq (\delta(A) + \delta(B))n \geq n$. Te dwa zbiory muszą zatem mieć niepuste przecięcie – dlatego istnieją $a \in A, b \in B$ takie, że $a = n - b$, czyli $n = a + b \in A+B$. $\square$

Dowód twierdzenia 3. Tezę lematu 1 możemy zapisać alternatywnie jako $1 - \delta(A+B) \leq (1 - \delta(A))(1 - \delta(B))$. Z indukcji matematycznej wynika teraz, że $1 - \delta(A_1 + \dots + A_l) \leq \prod_{i=1}^l (1 - \delta(A_i))$, w szczególności $\delta(lA) \geq 1 - (1 - \delta(A))^l$ dla $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zawierającego 0. Jeśli więc $\delta(A) > 0$, to istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że $\delta(lA) > \frac{1}{2}$, a wtedy $2lA = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ na mocy lematu 2. $\square$

Przystępujemy do dowodu twierdzenia 2. Chcemy znaleźć $l \in \mathbb{N}$ takie, że $\delta(lS_k) > 0$ – wystarczy wykazać, że dla pewnego $c > 0$ zachodzi $(lS_k)(n) \geq cn$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ oznaczmy przez $r_{l,k}(m)$ liczbę uporządkowanych nieujemnych krotek $(x_1, \dots, x_l)$ spełniających równanie $x_1^k + \dots + x_l^k = m$, to jest:

$$r_{l,k}(m) = |\{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l : x_1^k + \dots + x_l^k = m\}|.$$

Nie obędzie się, niestety, bez lematu *deus ex machina*:

Lemat 3 (Linnik). *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieją takie $l \in \mathbb{N}$ i stała $\alpha(k) > 0$ zależna tylko od k , że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $r_{l,k}(m) \leq \alpha(k)m^{\frac{l}{k}-1}$.*

Powyższe oszacowanie może wydać się przypadkowe; uwydatnimy jego rolę, poprzedzając jego zastosowanie (nieudaną) próbą dowodu.

Dowód twierdzenia 2. Oszacujemy sumę $\sum_{m=0}^n r_{l,k}(m)$ od góry i od dołu dla $n \in \mathbb{N}$ – porównanie oszacowań zapewni nam oczekiwaną nierówność.

Zauważmy, że jeśli $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ spełniają $0 \leq x_i \leq \left(\frac{n}{l}\right)^{1/k}$ dla $i \in \{1, \dots, l\}$, to z całą pewnością zachodzi $x_1^k + \dots + x_l^k \leq n$ – zatem dolne oszacowanie dla $\sum_{m=0}^n r_{l,k}(m)$ zapewni liczba uporządkowanych krotek $(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$ spełniających powyższy warunek. Z reguły mnożenia, jest ich $(\lfloor \left(\frac{n}{l}\right)^{1/k} \rfloor + 1)^l \geq \left(\frac{n}{l}\right)^{l/k}$.

Szukając elementarnego ograniczenia górnego, moglibyśmy postąpić podobnie – jeśli $x_1^k + \dots + x_l^k = m$ ma być spełnione dla $m \in \mathbb{N}$, z pewnością dla $i \in \{1, \dots, l\}$ musi zachodzić $0 \leq x_i \leq m^{1/k}$. Z reguły mnożenia, odpowiednich krotek jest $(\lfloor m^{1/k} \rfloor + 1)^l \leq (m^{1/k} + 1)^l = m^{l/k} (1 + m^{-1/k})^l$, przy czym ostatnia równość jest prawdziwa dla $m > 0$. Czynniki $(1 + m^{-1/k})^l$ nietrudno ograniczyć od góry stałą $\beta(l) > 0$, np. $\beta(l) = 2^l$. Mamy zatem:

$$\sum_{m=0}^n r_{l,k}(m) \leq 1 + \sum_{\substack{m=1, \\ r_{l,k}(m) > 0}}^n \beta(l) m^{l/k} \leq 1 + \beta(l) n^{l/k} (l\mathcal{S}_k)(n),$$

korzystając z $(l\mathcal{S}_k)(n) = |\{m \in \{1, \dots, n\} : r_{l,k}(m) > 0\}|$. Porównując ograniczenia górne i dolne, mamy $1 + \beta(l) n^{l/k} (l\mathcal{S}_k)(n) \geq l^{-l/k} n^{l/k}$. Niestety nie jest to wystarczająco mocna nierówność: przekształcając ją, otrzymujemy jedynie $(l\mathcal{S}_k)(n) \geq \frac{l^{-l/k}}{\beta(l)} - \frac{1}{n^{l/k} \beta(l)}$; po prawej stronie nie otrzymaliśmy składnika cn dla żadnej stałej $c > 0$.

Teraz łatwo jest dostrzec rolę lematu 3 – wybierając $l \in \mathbb{N}$ przewidziane przez niego i wyznaczając ograniczenie górne analogicznie, otrzymamy nierówność

$$1 + \alpha(k) n^{\frac{1}{k}-1} (l\mathcal{S}_k)(n) \geq l^{-l/k} n^{l/k}.$$

Pozostaje podzielić obie strony przez $\alpha(k) n^{\frac{1}{k}-1}$ – składnik „+1” po lewej stronie okazuje się tu nieistotny i ostatecznie wnioskujemy istnienie stałej $c > 0$ takiej, że $(l\mathcal{S}_k)(n) \geq cn$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co daje $\delta(l\mathcal{S}_k) > 0$. $\square$

Zastosowania gęstości Sznirelmana i twierdzenia 3 nie kończą się na problemie Waringa; pracując nad zagadnieniem hipotezy Goldbacha, Sznirelman wykazał:

Twierdzenie 4 (Sznirelman). Istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można wyrazić jako sumę nie więcej niż l liczb pierwszych.

Dowód tego twierdzenia przebiegnie podobnym szlakiem co dowód twierdzenia 2; ponownie, jego sednem jest niełatwy do wykazania lemat, oparty na analitycznej teorii liczb ($\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych):

Lemat 4. Zachodzi $d(2\mathbb{P}) > 0$, to jest zbiór $2\mathbb{P}$ ma dodatnią gęstość naturalną.

Dowód twierdzenia 4. Jeżeli zbiór $2\mathbb{P}$ ma dodatnią gęstość naturalną, z pewnością to samo tyczy się zbioru $2\mathbb{P}^*$, gdzie $\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \cup \{0, 1\}$. Skoro $d(2\mathbb{P}^*) > 0$ oraz $1 \in 2\mathbb{P}^*$, to również $\delta(2\mathbb{P}^*) > 0$. Ponieważ $0 \in 2\mathbb{P}^*$, więc z twierdzenia 3 wnioskujemy, że istnieje $c \in \mathbb{N}$ takie, że $2c\mathbb{P}^* = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zatem każdą liczbę $n \in \mathbb{N}$ można przedstawić w postaci sumy $p_1 + \dots + p_i + j$, gdzie $i, j \leq 2c$. Pozostaje rozważyć kilka przypadków wartości liczby j , by zapisać ją w postaci sumy liczb pierwszych 2 i 3 o ograniczonej przez c liczbie składników (w przypadku $j = 1$ należy zastąpić n przez $n - 2$). $\square$

Wariacje na temat problemu Waringa są liczne; wspomnijmy na koniec o jeszcze jednej z nich. Zamiast $g(k)$ z twierdzenia 2, rozważmy $G(k)$ – najmniejszą możliwą liczbę $l \in \mathbb{N}$ taką, że każdą dostatecznie dużą liczbę $n \in \mathbb{N}$ można zapisać jako $x_1^k + \dots + x_l^k$ dla pewnych $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. W kontraście do wartości $g(k)$, obecnie znane są jedynie wartości $G(2) = 4$ i $G(4) = 16$. Wiadomo również, że $G(k) < g(k)$ dla $k > 2$. Okazuje się, że $G(k)$ rośnie o wiele wolniej niż w tempie wykładniczym (jak $g(k)$); najostrzejsze znane obecnie ograniczenie górne ma postać $G(k) \leq k(\log k + \log \log k + C)$ dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Najmniejsza liczba l spełniająca warunki twierdzenia 4 nosi nazwę *stałej Sznirelmana* s_0 . Wskażmy dwa obecnie najlepsze jej oszacowania z góry: $s_0 \leq 6$ wynika z opublikowanej w 2014 pracy Terrence’a Tao, zaś $s_0 \leq 4$ wynika z tzw. *słabej hipotezy Goldbacha*, której dowód został ogłoszony w 2013 roku przez Haralda Helfgotta, jak dotąd nie został jednak opublikowany w recenzowanym czasopiśmie.

Czytelnik znajdzie dowód lematu 4 w Rozdziałach 4, 5, 8 ww. *Teorii Liczb* W. Narkiewicza (WN PWN, Warszawa 2003).





Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Jednym z centralnych zagadnień w teorii liczb jest badanie odległości pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi. Są to tzw. *prime gaps*, w encyklopedii OEIS występujące jako ciąg A001223, którego n -ty wyraz to różnica między $(n+1)$ -szą i n -tą liczbą pierwszą:

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, ...

Rozważany ciąg kryje wiele tajemnic świata liczb pierwszych. Przykładowo słynną hipotezę o liczbach pierwszych bliźniaczych można wyrazić następująco: liczba 2 występuje w ciągu *prime gaps* nieskończenie wiele razy.

W roku 1958 Norman Gilbreath – ówczesny student matematyki na UCLA – zauważył ciekawą zależność dotyczącą kolejnych iteracji ciągów różnic.

Tworzymy ciągi liczb naturalnych w następujący sposób. Pierwszym ciągiem jest ciąg liczb pierwszych. Drugi ciąg to ciąg różnic kolejnych elementów ciągu pierwszego (od liczby większej odejmujemy mniejszą) – czyli wspomniany wyżej ciąg *prime gaps*. Na trzeci ciąg składają się wartości bezwzględne różnic kolejnych elementów ciągu drugiego, na czwarty – wartości bezwzględne różnic kolejnych elementów ciągu trzeciego i tak dalej. Poniżej prezentujemy początkowe elementy kilku początkowych ciągów otrzymanych w ten sposób:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, ...

1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 0, 4, 4, 2, 2, 4, ...

1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 2, 2, ...

1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 0, 2, ...

1, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 2, ...

Hipoteza Gilbreatha stanowi, że, począwszy od drugiego, każdy tak otrzymany ciąg zaczyna się od liczby 1.

Już od chwili jej sformułowania hipoteza Gilbreatha wzbudziła żywe zainteresowanie wśród matematyków. Wystarczy wspomnieć, że zaledwie trzy lata później Wacław Sierpiński umieścił ją wśród pierwszych zagadnień (pomiędzy hipotezą Goldbacha a rozkładem liczb naturalnych na iloczyn liczb pierwszych) omawianych w znakomitej książeczce *Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych*. Na zakończenie wypada dodać, że obserwacja Gilbreatha pojawiła się (bez dowodu) w pracy francuskiego matematyka François Protha już 80 lat wcześniej. Podsumowując, hipoteza podzieliła los wielu innych zależności matematycznych, które na trwałe związały się z nazwiskiem innej osoby niż ta, która jako pierwsza je zaobserwowała. Przypuszczenie Gilbreatha do dziś czeka na dowód lub kontrprzykład.



Przez ucho igielne

Przyzwyczałam się do myśli, że jestem sobą. Ja: moje całe ciało, odtąd – dotąd, i już. Czasem jednak czuję się nieswojo, kiedy myślę o tym, że w moim wnętrzu dzieją się rzeczy, o których nie mam pojęcia. Część mnie czymś się żywi, dzieli się, gdzieś się przemieszcza, rośnie lub zmniejsza się, a część umiera (w sposób zaplanowany lub nie). Co gorsza, ta wewnętrzna komórkowa niezależność ode mnie dotyczy także, a może szczególnie, mózgu, tego organu, który lubię z moim poczuciem „ja” utożsamiać.

Tymczasem jesteście (dorośli) zbiorem kilkudziesięciu bilionów komórek.

I czasem łatwiej jest zrozumieć, jak działa nasze ciało, patrząc na losy tych pojedynczych podstawowych bytów. Wszak początek ludzkiego życia to jedna komórka, która zaczyna się dzielić.

Rozwój mózgu to proces wieloetapowy. Polega nie tylko na powstawaniu nowych neuronów, lecz także na ich precyzyjnej migracji w miejsca, gdzie tworzą się tzw. jądra oraz kora mózgowa. Nowopowstające neurony są niewielkie, mają

8–12 mikrometrów średnicy, czyli około jedną dziesiątą grubości ludzkiego włosa. Najpotężniejszym ładunkiem wewnątrz niewielkiego „ciała” jest jądro komórkowe o średnicy niewiele mniejszej niż sama komórka. Początkowo komórka ma niemal kulisty kształt, ale wkrótce wysuwa długą wypustkę, a jej ciało wydłuża się, przyjmując charakterystyczną dwubiegunową postać. Następnie do przodu przesuwane jest jądro komórkowe – proces nazwany nukleokinezą – po czym przemieszcza się tylna część komórki. W efekcie neuron porusza się serią niewielkich „kroków”, nieustannie zmieniając swój kształt. W przypadku neuronów, które mają tworzyć korę mózgową, ruch ten odbywa się po włóknach gleju promienistego (to inny rodzaj komórek nerwowych, wspierających prawidłowy rozwój mózgu), które tworzą rusztowanie rozciągające się od komórek mózgu do jego powierzchni. To jak wspinalaczka po linach. Neurony migrujące do kory mogą pokonywać kilka milimetrów, a niekiedy nawet kilka centymetrów, co oznacza, że komórka o średnicy około 10 mikrometrów może przebyć dystans przekraczający tysiąckrotność własnych wymiarów. Migracja pojedynczego neuronu odbywa się z prędkością kilkunastu do kilkudziesięciu mikrometrów na godzinę, miliony komórek wykonują ten proces równocześnie. Neurony powstające wcześniej zatrzymują się w głębszych warstwach, natomiast neurony urodzone później migrują obok nich i osiedlają się bliżej powierzchni, dzięki czemu mózg ma charakterystyczną architekturę warstwową.

To, czego dokonują komórki, jest tym bardziej imponujące, że wymaga przeciskania się pomiędzy innymi już osiadłymi komórkami oraz włóknami i strukturami zewnątrzkomórkowymi przez szczeliny o średnicy nawet kilku mikrometrów. W tym celu komórki wydłużają się i przelewają przez najwęższe miejsca, kłopot stanowi wspomniane wcześniej duże jądro komórkowe. W zwykłych komórkach jądro jest strukturą dość sztywną, dzięki wewnętrznie, pod otoczką, położonej warstwie białek z grupy lamin. Lamin m.in. chronią materiał genetyczny przed zniekształceniami właśnie. W neuronach jest jednak inaczej, lamin jest znacznie mniej, dzięki czemu jądro komórkowe w trakcie przeciskania się może ulegać odkształceniom. To jednak ma poważne konsekwencje.

W czerwcu br. w tygodniku *Nature* ukazał się artykuł, w którym zespół naukowców z pracowni prof. Mineko Kengaku z Japonii opisuje, co dokładnie dzieje się z DNA w trakcie migracji neuronów. Praca została wykonana na myszach, organizmach modelowych, u których rozwój jest bardzo dobrze zbadany.

Trzy rodzaje komórek nerwowych badano w laboratorium, „zmuszając” je do przejścia przez bardzo wąskie kanaliki (o średnicy 3 mikrometrów) między dwoma komorami. Okazało się, że w jądrze w trakcie przejścia powstawały dwuniciowe pęknięcia helisy DNA. Mechaniczny nacisk powoduje zatem uszkodzenia DNA, które są śmiertelnym zagrożeniem dla życia komórki. Takie pęknięcia powoduje na przykład promieniowanie gamma, jeden z bardziej mutagennych i zabójczych dla komórek czynników. Naprawa takich pęknięć jest najczęściej procesem nieprecyzyjnym, skutkującym w dużych mutacjach lub zaburzeniach struktur chromosomów.

Eksperymenty japońskich badaczy pokazały jednak, że powstanie dwuniciowych pęknięć jest normalnym zjawiskiem towarzyszącym migracji zdrowych neuronów. I że pęknięcia te po 24 godzinach znikają,

nie powodując widocznych mutacji ani śmierci komórek. Uszkodzenia są zatem skutecznie naprawiane.

Dalsze eksperymenty wykazały, że dzieje się tak dzięki aktywności białka Top2. Jest to enzym, który do tej pory znany był z tego, że likwiduje zbyt duże naprężenia nici DNA. Dzieje się to w trakcie odczytywania lub kopiowania materiału genetycznego. Skręcone dwie nici DNA są wtedy rozciągane i rozdzielane, bo białka prowadzące reakcje odczytują informację z pojedynczych nici. Tak powstałe „oczko” przesuwa się wzdłuż helisy, przez co z przodu i z tyłu powstają niekorzystne dla długiej cząsteczki „superskręty”. To tak, jakbyśmy dwużyłowy skręcony helikalnie sznurek rozdzielili, ciągnąc za każdą z nici na boki. Top2, aby zmniejszyć naprężenia, przecina dwie nici i utrzymując je razem przekłada przez pętlę powstałe przez zniekształcenia, po czym ponownie je łączy. Jest to precyzyjna procedura, wpisana w standardowe „życie” wielokrotnie zwiniętych długich łańcuchów DNA.

Top2 odpowiada zatem za szybkie znikanie podwójnych pęknięć w jądrach przeciskających się neuronów. Jak zatem dzieje się, że pęknięcia nie powodują widocznych uszkodzeń (mutacji) w DNA? Istnieje mechanizm, dzięki któremu pęknięcia nie powstają w losowych miejscach, a jedynie tam, gdzie nie ma ważnych dla życia genów. Są to tzw. sekwencje niekodujące, sekwencje powtórzone i rejony, które są pozostałościami ewolucyjnymi po wirusach. Jeśli tam powstanie błąd przy ponownym łączeniu pękniętych nici, nie będzie niósł ze sobą żadnych konsekwencji.

Myślę z podziwem o moich komórkach, które, ryzykując życiem, przeciskały się przez wiele dni, aby dotrzeć do celu, tworząc pofałdowaną korę mózgową. Chciałabym nawet im powiedzieć: dobra robota! Choć trochę mi szkoda, że ta robota, jakby nie moja.

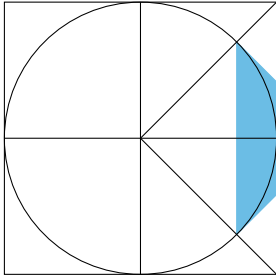
“Confined migration induces non-lethal DNA damage in developing neurons”, Zhejiang Zhang i wsp. *Nature* 654, 2026.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

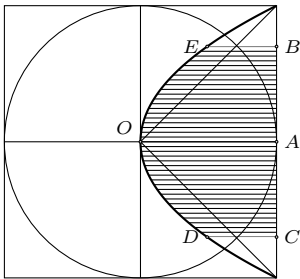
Kształt i opór, część 2/4

Nie tylko czapka Newtona

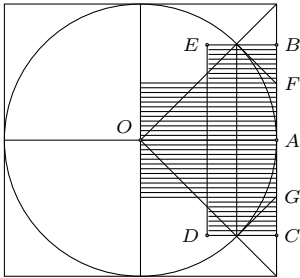
* Kontakt: gornicki59@gmail.com



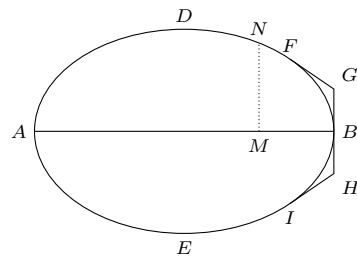
Rys. 1. Czapka Newtona



Rys. 2. Aby ułatwić obliczenia, odcinki reprezentujące efektywną siłę oporu działającą na dany punkt powierzchni mają swój początek na ścianie sześcianu



Rys. 3



Rys. 4

Jarosław GÓRNICKI*

Ustalmy kulę i walec o takich wielkościach, że bryły te mogą być wpisane w sześciany o tym samym boku (dla ustalenia uwagi równym 2). W części pierwszej pokazaliśmy, że w rozrzedzonym ośrodku, gdy bryły te poruszają się z takimi samymi prędkościami w kierunku osi walca, kula stawia o połowę mniejszy opór niż walec. Czy w rozważanej sytuacji, w sześcianie, można utworzyć bryłę o objętości większej niż kula, a jednocześnie stawiającą w ruchu mniejszy opór niż kula? Odpowiedź – tak! – jest nieco zaskakująca.

Stożek ścięty, którego tworząca nachylona jest do osi stożka pod kątem 45° , nazywamy *czapką Newtona* (rys. 1). Wykażemy, że nałożenie na kulę, prostopadłe do kierunku ruchu, czapki Newtona o promieniu podstawy $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ i wysokości $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ zmniejsza opór stawiany przez taką bryłę podczas ruchu (w rozrzedzonym ośrodku).

Jak w części pierwszej, założmy, że na kulę działają niezależne cząstki ośrodka poruszające się w kierunku AO, wszystkie z takim samym pędem zarówno co do wartości, jak i kierunku. Niech odcinek AO (o długości 1) reprezentuje pęd cząstki uderzającej w bryłę. Posłużymy się rozważaniami z uzasadnienia Stwierdzenia XXXIV (patrz część 1/4). Opór, jaki stawia fragment powierzchni kuli wycięty przez walec o osi AO i promieniu podstawy $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, jest co do wartości równy objętości zaznaczonego fragmentu paraboloidy obrotowej BEODC (rys. 2). Ponieważ $BE = CD = \frac{1}{2}$ (jeśli OA utożsamimy z nieujemną częścią osi rzędnych OY, to nasza parabola ma równanie $y(x) = x^2$), a objętość odcinka paraboloidy EOD jest równa połowie objętości walca na niej opisanego, więc objętość fragmentu paraboloidy BEODC jest równa $\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi$.

Obliczmy teraz opór, jaki (przy tych samych warunkach) na tym samym obszarze stawia czapka Newtona ustawiona prostopadłe do kierunku ruchu. Opór ten jest równy, co do wartości liczbowej, objętości walca o osi AO i promieniu podstawy $AF = AG = \sqrt{2} - 1$, powiększony o objętość rury BECD (otrzymanej przez usunięcie z walca BEDC walca o osi AO i promieniu podstawy $AF = AG$), gdzie $BE = CD = \frac{1}{2}$ (rys. 3). Z części I wiemy, że efektywny opór powierzchni bocznej czapki Newtona (stożka ściętego) jest równy $AO \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, więc stąd $BE = CD = \frac{1}{2}$. Łączna objętość opisanych tu brył jest równa:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AF^2 = \pi \left(\frac{1}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 \right).$$

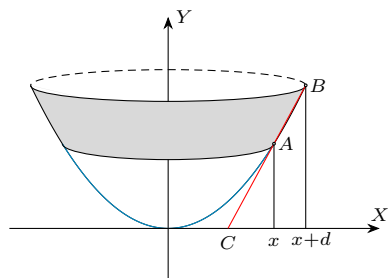
Ponieważ $\frac{1}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 < \frac{3}{8}$, więc kula z czapką Newtona stawia mniejszy opór niż kula bez czapki! $\square$

Prawdziwe jest ogólniejsze stwierdzenie Newtona (zawarte w *Principiach*, Księga II, *Scholium* do Stwierdzenia XXXIV): (...) jeśli bryła ADBE powstaje w wyniku obrotu eliptycznej lub owalnej figury ABDE wokół osi AB oraz jeśli generująca figura jest styczna do trzech prostych FG, GH i HI w punktach F, B i I w taki sposób, że GH jest prostopadłe do osi w punkcie styczności B oraz FG i HI przecinają się na prostej GH pod kątami FGB i BHI równymi 135° , to bryła powstająca w wyniku obrotu figury ADFGHIE wokół tej samej osi AB napotyka mniejszy opór niż poprzednia figura, zakładając, że każda z nich porusza się naprzód wzdłuż osi AB w kierunku B.

Dalszy tekst Newtona zaskakuje jeszcze bardziej – to rozwiązanie ogólnego problemu aerodynamicznego.

Problem aerodynamiczny. Wyznaczyć powierzchnię obrotową (o wysokości H, której podstawą jest okrąg o promieniu R), która ogranicza obszar wypukły i stawia najmniejszy opór podczas ruchu postępowego w rozrzedzonym ośrodku.

Newton zawarł rozszerzone wyjaśnienie swojego rozwiązania problemu aerodynamicznego w liście z 1694 roku do Davida Gregory'ego z Oksfordu.



Rys. 5

Newton podał właściwą odpowiedź, ale nie wyjaśnił, jak do niej doszedł. Chętni mogą spojrzeć na szkic współczesnego rozwiązania problemu (podanego między gwiazdkami). Daje to pewne wyobrażenie o wiedzy matematycznej Newtona w 1687 roku.

* * *

Założmy, że powierzchnię obrotową uzyskujemy przez obrót wykresu funkcji wypukłej i niemalejącej $y = f(x)$, gdzie $x \in [0, R]$, $f(0) = 0$ i $f(R) = H > 0$. Na wykresie funkcji f wybieramy dwa punkty, A i B , tak blisko siebie, że odcinek AB jest jego dobrym przybliżeniem. Podczas obrotu wokół osi Y odcinek ten zakreśla powierzchnię boczną stożka ściętego. Jeśli cząstki ośrodka uderzają z pędem P w kierunku osi Y , to w punkcie A przekazany pęd w kierunku osi Y wynosi $2P \cdot \sin^2(\angle CAx) = 2P \cdot \cos^2(\angle ACx)$. Zatem efektywny opór powierzchni bocznej stożka ściętego o tworzącej AB jest (w przybliżeniu) równy $2P \cdot 2\pi \cdot x \cdot d \cdot \cos^2(\angle ACx)$. Ponieważ kąt $\alpha(x) := \angle ACx$ tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie A – a jak pamiętamy, $f'(x) = \tan(\alpha(x))$ – więc po skorzystaniu z zależności $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$ otrzymujemy $\cos^2 \alpha(x) = \frac{1}{1+[f'(x)]^2}$.

Dzieląc teraz wykres funkcji na małe odcinki, sumując opory na wszystkich pierścieniach, otrzymujemy całkowity opór stawiany przez powierzchnię otrzymaną z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Y jako

$$2\pi \cdot 2P \int_0^R x \cdot \cos^2 \alpha(x) dx = 2\pi \cdot 2P \int_0^R \frac{x}{1+[f'(x)]^2} dx.$$

Problem sprowadza się więc do znalezienia funkcji f , dla której całka

$\int_0^R \frac{x}{1+[f'(x)]^2} dx$ przyjmuje wartość najmniejszą przy dodatkowym warunku,

że $f(R) - f(0) = H$. Uprościmy to sformułowanie, wprowadzając oznaczenie

$u(x) := f'(x)$. Ponieważ $\int_0^R u dx = \int_0^R f'(x) dx = f(R) - f(0) = H$, więc teraz

problem ma postać:

Problem (N). Wyznaczyć funkcję $u(x)$, dla której całka $\int_0^R \frac{x}{1+u^2} dx$ przyjmuje wartość najmniejszą przy warunku $\int_0^R u(x) dx = H$.

Uprościmy Problem (N), zastępując go problemem bez ograniczeń: spośród wszystkich nieujemnych funkcji $u(x)$ wyznaczyć taką, dla której całka

$\int_0^R \left(\frac{x}{1+u^2} + qu \right) dx$ ma wartość najmniejszą, gdzie liczba $q \geq 0$ jest jeszcze

nieokreślonym (dokładnie) parametrem. Zrobimy to tak, że dla każdego x znajdziemy minimum funkcji $L(u) = \frac{x}{1+u^2} + qu$. Oznaczmy przez $u(x)$ wartość minimum tej funkcji, a potem znajdziemy funkcję f spełniającą $f'(x) = u(x)$ dla wszystkich $x \in [0, R]$.

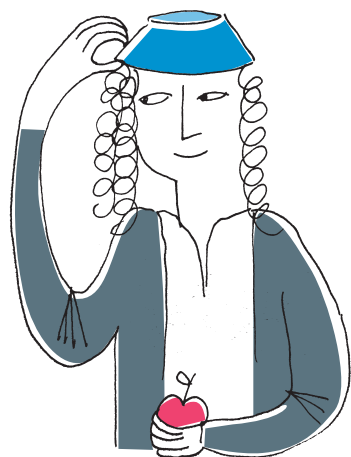
Minimum funkcji $L(u)$ w przedziale $[0, \infty)$ znajdziemy za pomocą pochodnej $L'(u) = -\frac{2xu}{(1+u^2)^2} + q$. Ponieważ $L(u) \rightarrow +\infty$, gdy $u \rightarrow +\infty$, więc funkcja L ma minimum albo w punkcie u , gdzie $L'(u) = 0$, albo na początku przedziału, tj. dla $u = 0$. Jeśli minimum funkcji L jest osiągnięte w punkcie $u \neq 0$, to spełnione są warunki, $L' = 0$ i $L(u) \leq L(0)$, które dają $\frac{q}{x} = \frac{2u}{(1+u^2)^2}$ i $\frac{1}{1+u^2} + \frac{q}{x}u \leq 1$. Stąd otrzymujemy $\frac{1}{1+u^2} + \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} \leq 1$, a po dalszych uproszczeniach $u^2 \geq 1$, więc $u \geq 1$. Oznacza to, że dla dowolnego x wartość u może być wyznaczona z równania

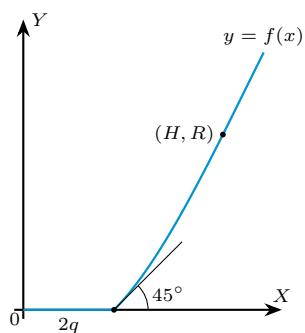
$$(*) \quad x = \frac{q}{2} \left(u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \quad \text{gdzie } u \geq 1.$$

Ponieważ funkcja po prawej stronie jest rosnąca ze względu na zmienną u , więc jej minimum znajduje się w punkcie $u = 1$ i wartość ta jest równa $2q$. Oznacza to, że równanie $(*)$ ustala wzajemnie jednoznaczność między punktami $x \in [2q, \infty)$ i $u \in [1, \infty)$. Dla każdego $x > 2q$ minimum funkcji $L(u)$ jest osiągnięte przy $u > 1$, dla każdego $x \in [0, 2q)$ minimum jest osiągnięte w punkcie $u = 0$,

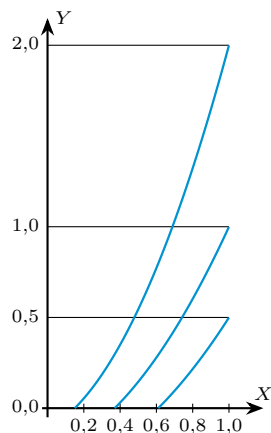
Problem ten zaliczamy dzisiaj do teorii sterowania optymalnego, która w połowie XX wieku wyrosła z rachunku wariacyjnego. Jego dalsze uproszczenie to de facto zastosowanie metody mnożników Lagrange'a, którą Joseph Lagrange (1736–1813) odkrył w wieku 19 lat.

Twierdzenie. Jeśli dla dowolnego x wartość $u = f'(x)$ jest wartością minimalną funkcji $L(u)$ na zbiorze $[0, \infty)$, to f jest rozwiązaniem Problemu (N) dla odpowiednio dobranej wartości H .





Rys. 6. Wykres funkcji $y = f(x)$ na przedziale $[2q, \infty)$ jest styczny w punkcie $x = 2q$ do prostej $y = x - 2q$



Rys. 7. Wykresy funkcji $y = f(x)$ dla $R = 1$ i H przyjmującego wartości 2, 1, $\frac{1}{2}$, odpowiednio
O problemie brachistochny pisaliśmy w Δ_{07}^7 .

natomiast dla $x = 2q$ funkcja $L(u)$ osiąga minimum w dwóch punktach: $u = 0$ oraz $u = 1$. Ponieważ $u(x) = f'(x)$, a przy tym $f(0) = 0$, więc optymalna postać funkcji f jest następująca: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$ jej pochodna jest pierwiastkiem równania $L'(u) = 0$ większym od 1.

Pozostaje znaleźć u z równania $L'(u) = 0$. Niestety nie potrafimy tego zrobić bezpośrednio. Traktujmy więc od teraz u jako parametr (z przedziału $[1, \infty)$), za pomocą którego wyrazimy obie współrzędne punktu $(x(u), y(u))$ na wykresie f ; wzór na funkcję $x(u)$ mamy już w równaniu (*). Ponadto postulujemy $f'(x(u)) = u$, więc ze wzoru na pochodną złożenia:

$$y'(u) = (f(x(u)))' = f'(x(u)) \cdot x'(u) = u \cdot x'(u) = \frac{q}{2} \left(3u^3 + 2u - \frac{1}{u} \right).$$

Całkując obie strony, wyznaczamy $y(u) = \frac{q}{2} \left(\frac{3u^4}{4} + u^2 - \ln u + C \right)$, a warunek $y(u = 1) = 0$ wyznacza nam stałą: $C = -\frac{7}{4}$. Ostatecznie znaleźliśmy równania opisujące wykres funkcji $y = f(x)$ będącej rozwiązaniem postawionego problemu: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$,

$$\begin{cases} x = \frac{q}{2} \left(u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \\ y = \frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} u^4 + u^2 - \ln u - \frac{7}{4} \right), \quad u \geq 1, \end{cases}$$

gdzie q znajdujemy z warunku $f(R) = H$ (rys. 6).

* * *

Rozwiązanie problemu aerodynamicznego podane przez Newtona zaskakuje nawet dzisiaj. Powierzchnia, która w ruchu postępowym stawia najmniejszy opór, musi mieć „płaski czubek”! Wielkość spłaszczenia zależy od wartości H i R , co ilustruje rysunek 7.

Rozwiązanie Newtona przeszło bez echa. Świat nauki zachwycił się problemem brachistochny postawionym przez Johanna Bernoulliego (a więc narodzinami rachunku wariacyjnego, 1696), a potem metodą mnożników Lagrange’a i wspaniałymi osiągnięciami Eulera. Tymczasem Isaac Newton, bez rozgłosu, na kilku stronach *Principiów* (1687) wyprzedził swoją epokę o 300 lat.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1151. W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) protony rozpędzane są do energii $E = 6,5 \text{ TeV} = 6,5 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, a ich tor zakrzywiany jest wówczas przez jednorodne pole magnetyczne o indukcji $7,7 \text{ T}$ wytwarzane przez magnesy nadprzewodzące. Ile wynosi promień R krzywizny toru protonów w LHC? Pole magnetyczne jest prostopadłe do prędkości protonów. Jako prędkość światła przyjmij $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

F 1152. Wkrótce po utworzeniu neutralny mezon rozpadł się na dwa fotony: w kierunku uprzedniego lotu mezonu powstał foton o energii $E_1 = 202,5 \text{ MeV}$, a w kierunku wstecznym – o energii $E_2 = 22,5 \text{ MeV}$. Jaka była masa spoczynkowa m_0 mezonu? Z jaką prędkością poruszał się mezon?

Przygotował Dominik BUREK

M 1864. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n można wybrać cztery różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{n, n+1, \dots, n^2\}$ tak, aby $ab = cd$?

M 1865. Dany jest trójkąt różnoboczny, którego długości boków są liczbami całkowitymi dodatnimi a, b, c . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb

$$ab + 1, \quad bc + 1, \quad ca + 1$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

M 1866. Na kwadratowej planszy 11×11 zaznaczono wszystkie 144 wierzchołki pól. Następnie zaznaczone punkty pokolorowano na pięć kolorów. Jakie jest największe możliwe do uzyskania minimum odległości między dwoma jednokolorowymi punktami?

Rozwiązania na str. 24

Spóźnienia przy okrągłym stole

Pełną treść zadania (z przykładami) można znaleźć na stronie oij.edu.pl/oij20/etap2/zadania/spo/spozad.pdf.

W tym odcinku pochylimy się nad zadaniem *Spóźnienia* z zawodów II stopnia XX Olimpiady Informatycznej Juniorów.

Rozważmy naradę z udziałem N rycerzy siedzących przy okrągłym stole. Każdy rycerz wygłosi jedno przemówienie w kolejności zajmowanych miejsc. Pierwszy zacznie przemawiać pewien rycerz s , po nim głos zabierze rycerz $s + 1$ i tak dalej (przy czym po rycerzu N będzie przemawiał rycerz 1), aż każdy przemówi. Każdy rycerz i jest opisany przez dwa parametry: czas trwania jego przemówienia A_i oraz moment przybycia na spotkanie B_i (zakładamy, że narada zaczyna się w chwili 0). Jeśli nadejdzie kolej rycerza, którego nie ma jeszcze przy stole, wszyscy muszą czekać na jego pojawienie się. Naszym zadaniem jest obliczenie czasu trwania takiego spotkania dla każdej możliwej wartości s .

Na przekór cykлом

Pierwszym krokiem rozwiązania jest eliminacja problematycznego zawijania indeksów na okręgu. Problem ten możemy rozwiązać poprzez połączenie ciągu wejściowego z jego kopią. Możemy więc stworzyć nowe rozszerzone ciągi o długości $2N$, gdzie zachodzą następujące warunki dla $k \in [N + 1, 2N]$:

$$A_k = A_{k-N} \text{ oraz } B_k = B_{k-N}.$$

Dzięki temu każde pełne okrażenie stołu rozpoczynające się od rycerza s można traktować jako spójny podciąg o stałej długości N w tych rozszerzonych ciągach.

Największy spóźniony

Przeanalizujmy sytuację, w której obrady rozpoczyna konkretny rycerz s . Moment zakończenia całego spotkania zależy przede wszystkim od rycerza, na którego przemówienie będziemy musieli czekać ostatni raz. Dla dowolnego rycerza j wyznaczmy więc czas, w którym narada dobiegłaby końca, gdyby to właśnie on był tym wąskim gardłem systemu. Czas ten stanowi po prostu sumę momentu jego przybycia B_j oraz łącznego czasu przemówień jego i wszystkich pozostałych rycerzy przemawiających po nim. Możemy to zapisać następująco:

$$C_j = B_j + \sum_{k=j}^{s+N-1} A_k.$$

Prawdziwy całkowity czas narady W_s oczywiście jest wyznaczany przez tę osobę, która wymusza najpóźniejszy termin jej zakończenia. Szukamy zatem wartości maksymalnej spośród wszystkich uczestników:

$$W_s = \max_{s \leq j < s+N} C_j.$$

Sumy prefiksowe

Aby zoptymalizować sumowanie czasów wystąpień A_k , możemy wprowadzić ciąg sum prefiksowych P , którego elementy definiuje się następująco:

$$P_m = \sum_{k=1}^m A_k.$$

Dzięki temu sumę czasów na dowolnym przedziale od indeksu j do końcowego indeksu $s + N - 1$ możemy obliczyć w czasie stałym, wyznaczając różnicę $P_{s+N-1} - P_{j-1}$. Podstawiając tę zależność do wcześniejszego równania, otrzymujemy nową postać czasu narady determinowaną przez uczestnika j :

$$C_j = B_j + P_{s+N-1} - P_{j-1}.$$

Ostateczny wzór na całkowity czas trwania narady W_s przy starcie od rycerza s przyjmuje wtedy następującą formę:

$$W_s = \max_{s \leq j < s+N} (B_j - P_{j-1}) + P_{s+N-1}.$$

Optymalizacja w oknie

Składnik P_{s+N-1} pozostaje stały dla wybranego rycerza startowego s . Głównym wyzwaniem jest zatem sprawne odnajdowanie wartości maksymalnej wyrażenia $B_j - P_{j-1}$ w oknie o stałej szerokości N .

Jeśli zdefiniujemy nową zmienną $V_j = B_j - P_{j-1}$, zadanie sprowadza się do klasycznego problemu znajdowania ekstremum (w tym przypadku maksimum) w oknie.

Do tego celu możemy skorzystać ze struktury kolejki monotonicznej, która przechowuje w dwustronnej kolejce (*deque*) indeksy elementów w taki sposób, aby na jej początku zawsze znajdował się kandydat na aktualne maksimum. Podczas przesuwania okna w prawo i dodawania nowej wartości V_j usuwamy z końca kolejki wszystkie indeksy, których wartości są mniejsze od nowo przybyłej (mniejsze wartości nigdy nie staną się maksimum, skoro nowa i większa wartość będzie obecna w oknie dłużej). Następnie sprawdzamy, czy element na początku kolejki nie wyszedł już poza zakres okna ze względu na swój indeks i w razie potrzeby go usuwamy. Dzięki tej strategii aktualne maksimum znajduje się zawsze bezpośrednio na początku kolejki. Każdy element jest dodawany i usuwany z kolejki co najwyżej raz.

Ostatecznie zatem jesteśmy w stanie obliczyć wszystkie wartości W_s dla $1 \leq s \leq N$ w złożoności czasowej (i pamięciowej) $\mathcal{O}(N)$.

Bartosz KOSTKA

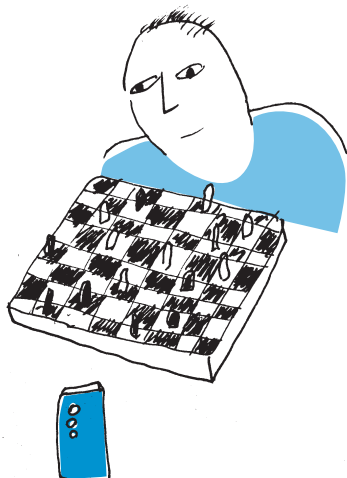
Czy AI gra w geometrię?

Mateusz KRUKOWSKI*

Cykl *Człowiek o AI*, zainaugurowany w Δ_{26}^3 , to świetna okazja do szerszej dyskusji na tematy, którymi od dłuższego czasu męczę nie tylko swoich znajomych, ale i studentów analizy danych oraz uczenia maszynowego na Politechnice Łódzkiej, gdzie pracuję. Wielowymiarowość (*pun definitely intended*) zagadnień związanych ze sztuczną inteligencją sprawiła, że dłuższy moment wahałem się co do warunków początkowych poniższego strumienia świadomości, przelanego na papier. . . znaczy się do LaTeXowego pliku, rzecz jasna. Ostatecznie zauważyłem, że to tekst profesora Marcinkowskiego pt. *Ośiem krótkich uwag z pamiętnika* najdłużej rezonował w neuronach mojego mózgu, i to on (tj. tekst, nie mózg) powinien stanowić punkt wyjścia moich dalszych spekulacji.

Szachowa polemika

W „uwagach z pamiętnika” profesor Marcinkowski słusznie zauważa, że nie ma na świecie nikogo, kto wygrałby w szachy ze swoim telefonem. Zdanie to dzielą wszyscy arcymistrzowie gry królewskiej, na czele z GOAT-em Magnusem Carlsenem, który otwarcie mówi o dominacji krzemowych graczy, chociażby w podcaście *Joe Rogan Experience* (odc. 2275). Co do wyniku meczu człowiek–maszyna wszyscy są zgodni, ale profesor Marcinkowski idzie o krok dalej, przekonując, że telefon *nie rozumie* pozycji figur na szachownicy, on jedynie „liczy warianty”. Nie jestem pewien, jak Autor „uwag z pamiętnika” rozumie „rozumienie”, ale z kontekstu wnioskuję, że chodzi o pewnego rodzaju intuicję, która nie sprowadza się do mechanicznego rachunku możliwych posunięć. Jak się okazuje, tak pojmowana sztuczna intuicja jest fundamentalną składową najlepszych silników szachowych i to dzięki niej telefony rozumieją szachy lepiej niż my.



Jeśli rozważyć szachową pozycję „zero”, to żaden współczesny (a najpewniej i żaden przyszły) komputer nie jest w stanie przeanalizować wszystkich możliwych wariantów rozgrywki. Owszem, silniki takie jak Stockfish rachują szybciej i głębiej niż najlepsi arcymistrzowie, ale nawet one nie są w stanie dotrzeć do końca gry królów. Widzą kilkanaście lub kilkadziesiąt ruchów do przodu, ale drzewo potencjalnych partii jest monstrualnych rozmiarów kolosem, którego nie sposób zobaczyć w całej okazałości. Oznacza to, że komputer gdzieś musi powiedzieć „STOP” (inaczej nie skończyłby liczyć do śmierci termicznej Wszechświata) i podjąć się wyzwania oceny pozycji, na której się zatrzymał. Nie wie, „co będzie dalej”, ale skoro ma ocenić ustawienie figur na szachownicy, to musi użyć swojej. . . intuicji(?).

Jeszcze w latach 90. komputer Deep Blue w legendarnym meczu z Garrym Kasparowem (innym pretendentem do miana szachowej „kozy”) do ewaluacji używał heurystyk postaci „−0,1 punktu za zdwojone piony” lub „+0,2 punktu za zroszowanego króla”. Kolejne dekady pokazały, że nie jest to podejście optymalne, a ludzkie heurystyki stopniowo odeszły do lamusa. Obecnie najmocniejsze silniki, jak Stockfish, Leela Chess Zero czy Komodo Dragon, oceniają pozycje szachowe przy użyciu sieci neuronowych. Sieci te przechodzą długotrwały proces treningowy (tak samo jak arcymistrzowie), w trakcie którego rozgrywają miliardy partii i uczą się na własnych błędach. Docelowo strategia ta okazuje się na tyle skuteczna, że żadna ludzka intuicja zapisana węglem w aksonach nie jest w stanie konkurować z intuicją sztuczną, zapisaną krzemem w naszych komputerach.

Metoda Kartezjusza i powrót do antyku

Wróćmy do artykułu profesora Marcinkowskiego. W jednej z uwag przeprowadza on eksperyment myślowy, w którym Banach ze Steinhausem siedzą w zadymionej kawiarni Szkockiej i dyskutują o problemach, które my znamy z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej 2025. Profesor argumentuje za wyższością lwowskich geniuszy nad sztuczną inteligencją, którzy nie

potrzebowaliby setek zadań testowych, by na serwetkach spisać rozwiązania problemów olimpijskich. Autor przyznaje jednak wyjątkowy status geometrii, z którą AI powinna sobie poradzić nawet bez takowego treningu. „Bo geometria jest z nami od bardzo dawna” pisze Autor, a ja mam nieodparte wrażenie, że nie o sam wiek tej gałęzi matematyki chodzi.

Gdy po raz pierwszy usłyszałem o srebrnym medalu olimpijskim dla AlphaGeometry, byłem przekonany, że sztuczna inteligencja podąża drogą przetartą jeszcze w XVII wieku przez jednego z ojców nowożytnej nauki. Mowa, rzecz jasna, o Kartezjuszu, który blisko 400 lat temu rozpoczął proces algebraizacji geometrii. Do dziś pomysł „wpiszę wszystko w układ współrzędnych i rozwiążę kilka równań” przynosi zaskakująco dobre rezultaty. Przykładem służy zadanie 5 z finału tegorocznej, 77. Olimpiady Matematycznej (zob. margines), gdzie „wystarcza” przyjęcie środka O okręgu (bez straty ogólności o promieniu 1) za początek układu współrzędnych, przy czym oś OX najwygodniej ustawić równoległe do boku BC . W takim układzie mamy $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, -1)$, $C = (x_C, -1)$, $D = (0, -1)$ oraz $M = (\frac{x_B + x_C}{2}, -1)$ i całe zadanie sprowadza się do żmudnych i nudnych rachunków, wyznaczających proste przechodzące przez dwa punkty, proste do nich prostopadłe, ich punkty przecięcia itd.

Dość niespodziewanie (przynajmniej dla mnie) AlphaGeometry nie używa jednak uniwersalnej metody Kartezjusza, a zamiast tego korzysta z klasycznych technik i narzędzi, znanych jeszcze Talesowi czy Pitagorasowi. Studiując publikacje analityków z Google DeepMind, odnoszę wrażenie, że ich sztuczna inteligencja traktuje geometrię podobnie jak szachy, warcaby czy starochińską grę Go. Każdy krok dowodu to kolejny ruch, ale zamiast przesuwac figurę po szachownicy, AI wpisuje okręgi w trójkąty, dorysowuje proste równoległe i rachuje miary kątów. Przyczyną sukcesu tego podejścia wydaje się stosunkowo łatwa „aksjomatyzowalność” geometrii, którą zauważył już Euklides w „Elementach”, a uściślił David Hilbert pod koniec XIX w. AI zwyczajnie potrafi grać w gry (także w geometrię) o jasno zdefiniowanych regułach.

Ostatni bastion ludzkości

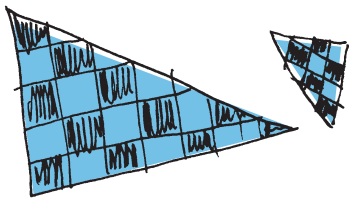
Sukcesy sztucznej inteligencji w rozwiązywaniu problemów olimpijskich mogłyby sugerować, że już niebawem będziemy świadkami narodzin... ekhm... konstrukcji najlepszego matematyka w historii. Odnoszę jednak wrażenie, i tu chyba zgadzamy się z profesorem Marcinkowskim, że wciąż nie pokonałszy głównych przeszkód na drodze do krzemowego uczonego, dla którego dotychczas zgromadzona ludzka wiedza o matematyce będzie jawić się niczym szkolna tabliczka mnożenia. Wspomniane przeszkody sięgają jeszcze początków XX wieku, gdy okazało się (m.in. za sprawą hipotezy continuum czy twierdzenia Gödla), że jednolita aksjomatyzacja całej matematyki jest nieosiągalna. O ile zatem AI potrafi grać w geometrię, to gra w matematykę jest znacznie trudniejsza, gdyż nikt nie jest w stanie spisać jej wszystkich reguł. Co więcej, sami matematycy od dekad kłócą się o reguły już spisane, czego najżywszym przykładem jest podważana zasadność przyjmowania aksjomatu wyboru.

Kolejny (i może poważniejszy) problem łatwo zilustrować na przykładzie gry Nim, w której dwóch graczy naprzemiennie zabiera kamienie z ustalonej liczby stosów. W trakcie swojej rundy gracz wybiera pojedynczy stos, a następnie zabiera z niego dowolnie wybraną przez siebie liczbę kamieni (włącznie z zabraniami całego stosu). Zwycięzcą zostaje ten, kto zbierze ostatni kamień w grze (tzn. jego przeciwnik nie będzie miał już możliwości ruchu). Jak wykazują niedawne badania opublikowane na łamach „Machine Learning”, nawet modele wzorowane na algorytmach ze stajni Google DeepMind nie mogą równać się z najlepszymi graczami ludzkimi w Nim. Przewaga człowieka to bowiem efekt pracy Charlesa L. Boutona, który ponad 120 lat temu opracował strategię wygrywającą, opartą na xor-sumie liczby kamieni na poszczególnych stosach. Mimo całej swej sztucznej inteligencji i syntetycznej intuicji, krzemowi gracze do tej pory nie są w stanie odtworzyć pomysłu Boutona. Wyabstrahowanie

Zadanie 5 z finału 77. OM: Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB , odpowiednio, w punktach D, E, F . Punkty X i Y leżą na prostej EF , przy czym proste BX i CY są prostopadłe do prostej BC . Punkt M jest środkiem odcinka BC . Prosta symetryczna do BX względem MX przecina prostą symetryczną do CY względem MY w punkcie Z . Wykazać, że proste ZD i BC są prostopadłe.

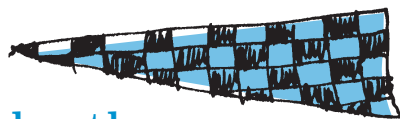
Więcej o grze Nim można poczytać w samej *Delcie* ($\Delta_{10}^7, \Delta_{13}^6$), ale także w oryginalnym artykule Boutona – w tomie 3 (1901-1902) *Annals of Mathematics*, dostępnym pod adresem www.jstor.org/stable/1967631.

Gościwie zachęcam do lektury całego artykułu „Impartial Games: A Challenge for Reinforcement Learning” autorstwa Bei Zhou oraz Sorena Riisa.



złotej reguły rządzącej Nim na ten moment leży poza ich zasięgiem. Łączy się to zapewne z założeniem, że w przeciwieństwie do szachów czy Go Nim ma nieskończenie wiele pozycji startowych, gdyż ani liczba stosów, ani kamieni nie jest z góry ustalona. Stosów może być tysiąc, milion, miliard i tak ad infinitum... Matematycy od czasów paradoksów Zenona z Elei zmagają się z konceptem nieskończoności i zdążyli nabrać już pewnej wprawy w tej materii. Potrafią spojrzeć na nieograniczoną przestrzeń stanów Nim jako całość, wspiąć się na wyższy poziom abstrakcji i wydestylować strategię wygrywającą. Komputery jeszcze do tego nie dojrzały. Chcąc przerechować każdy możliwy stan po kolei, utykają niczym strzała Zenona, która nigdy nie sięga tarczy.

Prowadzi to wszystko do dość optymistycznego wniosku, że póki co my, ludzie, jesteśmy w stanie spojrzeć „głębiej” niż nasi krzemowi rywale. Owszem, liczymy wolniej i gorzej, i w silnie zaksjomatyzowanych systemach komputery biją nas na głowę. Niemniej, jeśli chodzi o wyjście poza utarte schematy i reguły, człowiek nadal potrafi wieść prym nad maszyną. Pytanie tylko: jak długo?



Trójkąty w kratkę

Łukasz RAJKOWSKI

Zastanówmy się, jakie trójkąty możemy narysować na kartce w kratkę tak, by ich wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych? Interesują nas tu ich kształty, a zatem pytanie zadajemy z dokładnością do podobieństwa trójkątów (np. nie odróżniamy trójkąta równobocznego o boku 1 od tego o boku $\sqrt{2}$).

Trójkąt prostokątny równoramienny – wiadomo, . Ale czy każdy trójkąt prostokątny? Gdyby dwa jego boki miały być równoległe do linii kraty, to oczywiście mamy tu pewne ograniczenie: długości jego przyprostokątnych (wyrażone w wielokrotnościach krawędzi kraty) będą całkowite, więc tangensy jego kątów muszą być liczbami wymiernymi. Jednak kratowy trójkąt prostokątny nie musi mieć krawędzi równoległych do linii kraty...

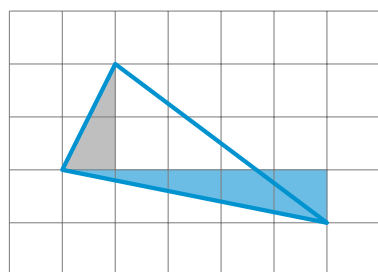
Wymierne tangensy – dobry trop! Jeśli kąty α, β mają wymierne tangensy, to na mocy wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

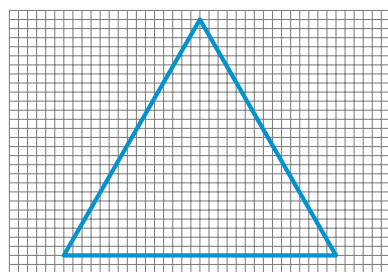
kąt $\alpha + \beta$ również ma wymierny tangens. To samo dotyczy kąta $\alpha - \beta$.

To już załatwia sprawę w pełnej ogólności. Dowolny kąt trójkąta kratowego możemy wyrazić jako sumę lub różnicę kątów *prostokątnych* trójkątów kratowych o przyprostokątnych równoległych do linii siatki (rys. 1). Oznacza to, że wszystkie kąty trójkąta kratowego muszą mieć wymierne tangensy. Działa to również w drugą stronę: jeśli dwa kąty ostre pewnego trójkąta mają tangensy równe $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi, to trójkąt ten można (z dokładnością do podobieństwa) otrzymać, sklejając dwa kratowe trójkąty prostokątne: jeden o przyprostokątnych długości ac i bc , zaś drugi o przyprostokątnych ac i ad .

Nasza obserwacja ma fatalne konsekwencje natury estetycznej. Tangens kąta 60° jest równy $\sqrt{3}$. Nie jest to liczba wymierna, zatem na papierze w kratkę nie znajdziemy niestety trójkąta równobocznego. Na pocieszenie dodajmy, że na kartce standardowego zeszytu w kratkę formatu A5 możemy narysować trójkąt kratowy będący trójkątem równoramiennym o podstawie długości 15 cm (czyli 30 kratek), równoległej do dłuższego boku zeszytu, oraz wysokości 13 cm (rys. 2). Odchylenie kątów tego trójkąta od 60° nie przekracza $0,04^\circ$. Lepiej na kartce A5 się nie da, ale oszustwo i tak jest raczej nie do wychwycenia przez ludzkie oko. Co ciekawe, na kartce w kratkę formatu A4 też nie da się lepiej, ale da się niebanalnie inaczej, tak by żaden z boków nie był równoległy do krawędzi kartki. Jak? Polecamy zastanowić się samemu!



Rys. 1



Rys. 2

Daj mi jedno słowo...

Michał MIŚKIEWICZ

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Opisane tu wydarzenia nie miały miejsca w rzeczywistości. Ale mogły, niewiele brakowało.

Dużą część wakacji spędzam z rodziną w Jantarze koło Stegny. Chcąc nie chcąc, oprócz uroków morza chłonę tam disco polo dobiegające z budek z zakręconymi frytkami, smażalni oraz meleksów – zwłaszcza te ostatnie trudno zignorować, bo mijaniu jadącego meleksa towarzyszy charakterystyczny efekt „zdławienia” muzyki. Hitem lata 2025 było *Daj mi jedno słowo*. Jest to taneczny utwór o tematyce romantycznej, którego emocjonalny charakter podkreśla modulacja – ostatnie powtórzenie refrenu jest śpiewane o pół tonu wyżej niż wszystkie poprzednie. Po pewnym czasie znalazłem już tę piosenkę na pamięć.



Większość utworu jest w tonacji h-moll, ale ostatni refren w c-moll, czyli pół tonu wyżej

Pewnego razu zamyślony siedziałem na ławeczce przy ulicy Morskiej, a przejeżdżający meleks grał to, co zawsze. Dopiero gdy przejechał, a piosenka dobiegła końca, zauważyłem, że tym razem wcale nie usłyszałem modulacji – każdy refren był na tej samej wysokości. Chwilę trwało, zanim do mnie dotarło, czego właśnie byłem świadkiem.

Efekt Dopplera! To właśnie on powoduje, że dźwięk wydaje się wyższy, gdy jego źródło się do nas zbliża, a niższy, gdy się oddala. W mieście najczęściej ten efekt zauważamy, gdy mija nas karetka na sygnale, ale głośne meleksy nad morzem podlegają tej samej prawidłowości. Jeśli stoimy w pewnej odległości od trasy pojazdu, to zmiana częstotliwości jest dość płynna, i stąd wspomniany efekt „dławienia” muzyki, ale przy mijaniu z bliska zmiana jest skokowa. W przytoczonej wyżej historii meleks najwidoczniej mijał mnie dokładnie w momencie modulacji, a efekt Dopplera obniżył słyszane przeze mnie dźwięki dokładnie o pół tonu, tak że nie odnotowałem żadnej zmiany w melodii. Powstaje naturalne pytanie:

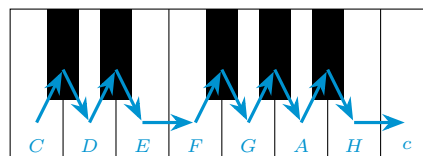
Z jaką prędkością jechał meleks?

Żeby odpowiedzieć, sięgnijmy po odpowiednie formuły. Przyjmijmy, że meleks oddala się z prędkością v i emituje dźwięk o okresie T . Jeśli w punkcie A właśnie wysyła czoło fali, to następne czoło wyśle w punkcie B oddalonym o $d = T \cdot v$. Zanim to czoło dotrze do punktu A , minie czas $\Delta T = \frac{d}{c} = T \cdot \frac{v}{c}$, gdzie c to prędkość dźwięku. To jest właśnie szukana wartość opóźnienia – słyszany przeze mnie dźwięk będzie miał okres $T + \Delta T$, a więc częstotliwość $f_- = \frac{1}{T + \Delta T} = \frac{f}{1 + v/c}$, która jest mniejsza od wyjściowej częstotliwości $f = \frac{1}{T}$.



W przypadku zbliżania się jest podobnie, ale ΔT ma przeciwny znak, i w rezultacie słyszany dźwięk ma częstotliwość $f_+ = \frac{f}{1 - v/c}$, większą od wyjściowej. Ostatecznie więc różnica w odbiorze przed i po minięciu meleksa wyraża się przez iloraz $\frac{f_+}{f_-} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c}$. Ma on odpowiadać jednemu półtonowi... czyli czemu?

Ile to jest półton? Dźwięki odległe o oktawę mają częstotliwości będące w stosunku 1 : 2, np. C odpowiada 65,4 Hz, zaś c to 130,8 Hz. W stroju równomiernie temperowanym oktawę dzielimy na 12 równych półtonów – równych w tym sensie, że częstotliwości dwóch kolejnych dźwięków są zawsze w tym samym stosunku. Oznacza to, że do rozwiązania mamy równanie $(f_+/f_-)^{12} = 2$, czyli $f_+/f_- = 2^{1/12}$.



Chwila rachunków prowadzi nas do wyniku $\frac{v}{c} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$, przy oznaczeniu $\beta := 2^{1/12}$. Uff, sprawa rozwiązana!

Obliczenia na plaży to jednak nie tak łatwa sprawa. Smartfon został w domu, bo i tak nie ma zasięgu, więc musiałem sobie poradzić bez kalkulatora. Przyda się więc garść przybliżeń i mnemotechnik.

Po pierwsze, elementarz każdego plażowicza uczy nas, jak ocenić dystans do nadciągającej burzy. Mianowicie każde 3 sekundy między błyskawicą a grzmotem oznaczają około 1 kilometra odległości. To oznacza, że prędkość dźwięku to mniej więcej $c \approx \frac{1 \text{ km}}{3 \text{ s}} = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (przyjeliśmy tu, że czas dotarcia światła od pioruna do nas jest zanedbywalnie krótki).

Skoro znamy c , to pozostaje wyznaczyć v/c , a to już tylko obliczenia. Półton to niewiele, a więc $\beta \approx 1$ i możemy przyjąć $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2}(\beta - 1)$. Dokładniejsze oszacowanie da nam wzór $e^x \approx 1 + x$, trzeba tylko przypomnieć sobie, że $2 = e^{\ln(2)}$. W ten sposób dostajemy $\beta = e^{\ln(2)/12} \approx 1 + \frac{\ln(2)}{12}$ i w rezultacie $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(2)}{12}$.

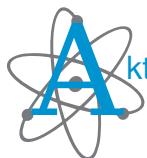
Tylko ile to jest $\ln(2)$? Wzór $\ln(x) \approx x - 1$ jest użyteczny jedynie dla $x \approx 1$, a $x = 2$ to już jednak dość daleko. Dlatego posłużymy się sztuczką:

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{4/3}{2/3}\right) = \ln(4/3) - \ln(2/3) \approx \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Po tych wszystkich zabiegach otrzymujemy ostateczny wynik, od którego tak wiele zależy:

$$v \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{12} \cdot 1200 \text{ km/h} \approx 33 \text{ km/h}.$$

Meleksy mają ograniczenie prędkości do 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (powyżej wymagana jest rejestracja). Cóż, ten widocznie się rozpędził, zjeżdżając z góry!



Jeden kolajder, by wszystkimi rządzić

Choć Wielki Zderzacz Hadronów nie jest już młody, to wciąż daleko mu do emerytury. Przyjdzie jednak dzień, w którym LHC zawiesi przysłowiowe buty na kołku i odda miejsce młodszemu kolajderowi. Wiemy już, że nastąpi to około 2041 roku – przynajmniej według obecnych planów. Kto jednak będzie następcą LHC? Nad tym zarządzający CERN-em głowią się już teraz, bo od ich decyzji zależy kierunek rozwoju fizyki wysokich energii na kolejne dekady.

W niniejszym artykule spróbujemy dokonać przeglądu głównych propozycji. By jednak się z tym zmierzyć, trzeba zacząć od fundamentów.

Co właściwie chcemy badać?

Dzisiejszy obraz fizyki cząstek – a zwłaszcza fizyki najwyższych energii – kształtowany jest przez jedno odkrycie i jeden brak odkrycia. Tym pierwszym jest bozon Higgsa, czyli cząstka odpowiedzialna za mechanizm nadawania mas pozostałym cząstkom Modelu Standardowego. Drugim jest natomiast brak śladów jeszcze cięższych cząstek – takich jak supersymetryczni partnerzy czy dodatkowe bozony Higgsa – których mimo intensywnych poszukiwań nie udało się odnaleźć w LHC. Skłania to wielu fizyków do pytania, czy samo zwiększanie energii zderzeń jest wystarczającą drogą do odkrycia nowej fizyki na obecnym etapie badań.

Ten drugi fakt przyczynił się do popularyzacji idei precyzyjnych pomiarów znanych już obiektów. Poza tym, że są one celem samym w sobie – w końcu pozwalają coraz dokładniej badać prawa natury – zachowują również czułość na fizykę wykraczającą poza Model Standardowy. Co więcej, im większa precyzja pomiaru, tym większa szansa na dostrzeżenie subtelnych odstępstw od jego przewidywań.

A co miałyby być głównym obiektem takich badań? Oczywiście wspomniany już bozon Higgsa. Mimo że odkryto go już piętnaście lat temu, wciąż wiemy o nim zaskakująco niewiele. Znamy jego masę oraz siłę sprzężeń do najcięższych fermionów i bozonów, ale nadal nie zmierzono jego naturalnej szerokości rozpadu, a kształt jego potencjału – odpowiedzialnego za mechanizm łamania symetrii elektroslabej – pozostaje w dużej mierze nieznany.

Perspektywa ta wydaje się na tyle obiecująca, że środowisko fizyki wysokich energii zdecydowało, iż kolejnym dużym projektem powinno być zbudowanie tzw. fabryki Higgsów – akceleratora dostarczającego możliwie największą liczbę wyjątkowo czystych zdarzeń z bozonem Higgsa.

Taśma produkcyjna Higgsów

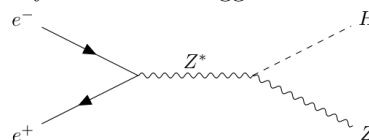
Produkcja bozonu Higgsa może odbywać się na dwa sposoby – poprzez zderzenia par protonów lub par elektron-pozyton. Pierwsza metoda (używana obecnie

w LHC) pozwala osiągać większe energie, ale ma równocześnie istotne ograniczenia. Z jednej strony, przy zderzeniu protonów oddziałują ze sobą tak naprawdę gluony i kwarki budujące protony, co nie pozwala nam precyzyjnie kontrolować energii zderzenia. Z drugiej strony tło powstające w częstych oddziaływaniach silnych (gluonów i kwarków) znacznie utrudnia analizę danych.

Dlatego zderzacz e^+e^- wydaje się obecnie najlepszą opcją. Oddziaływania elektromagnetyczne są dużo czystsze niż oddziaływania silne, a kontrolując energię elektronu i pozytonu, możemy dobrać ją w taki sposób, aby zmaksymalizować liczbę produkowanych bozonów Higgsa.

Optymalna energia dla produkcji bozonów Higgsa w takim kolajderze wynosi z kolei około 240 GeV.

Przy tej energii otwiera się kanał produkcji $e^+e^- \rightarrow Z^0 H$ (rys. 1), który zapewnia największą liczbę wyprodukowanych bozonów Higgsa.



Rys. 1. Produkcja bozonu Higgsa w procesie Higgsstrahlung, zachodzącym przy energiach od około 240 GeV

Pozornie bardziej naturalny proces $e^+e^- \rightarrow H$, dostępny przy energii 125 GeV – odpowiadającej masie bozonu Higgsa – jest mało efektywny, ponieważ siła sprzężenia cząstek z bozonem Higgsa jest proporcjonalna do ich masy. Elektron, będąc około 300 tys. razy lżejszy od kwarka t , sam z siebie produkuje znikomą liczbę bozonów H . Dlatego optymalna metoda produkcji zakłada najpierw wytworzenie wirtualnego bozonu Z^0 , który następnie emituje bozon Higgsa (tzw. Higgsstrahlung, patrz rys. 1).

Produkcja bozonu Higgsa nie jest jednak jedynym punktem na „rozkładzie jazdy” planowanej maszyny e^+e^- . Wszak można przy okazji zbadać również inne procesy elektroslabe, nawet jeśli to bozon Higgsa wciąż pozostaje głównym celem polowania. I tak, poza progiem energii 240 GeV planowane są również inne: 91 GeV – do produkcji bozonów Z^0 ; 160 GeV – do produkcji par W^+W^- oraz 340 GeV – do produkcji par kwarków t^+t^- .

Tak skonstruowany harmonogram (91 GeV $\rightarrow$ 160 GeV $\rightarrow$ 240 GeV $\rightarrow$ 340 GeV) pozwoliłby precyzyjnie zbadać wszystkie najcięższe cząstki elementarne, o których wiemy obecnie zdecydowanie najmniej.

Propozycje na stole

W ten sposób dochodzimy do bohaterów niniejszego artykułu, czyli czterech najpoważniej rozważanych propozycji: ILC (International Linear Collider), CLIC (Compact Linear Collider), CEPC (Circular Electron Positron Collider) oraz FCC_{ee} (Future Circular Collider). Propozycji było oczywiście więcej, ale z racji ograniczonego miejsca artykuł ograniczy się do omówienia wspomnianej czwórki.

Warto wspomnieć jeszcze o zderzacz mionowym, który jest jednak raczej wykluczony jako projekt na lata 40. ze względu na wciąż niewystarczający rozwój technologii.

Pierwsze dwie propozycje – ILC i CLIC – to akceleratory liniowe, w których elektrony i pozytony są rozpędzane wzdłuż linii prostych, zanim zderzą się w centrum detektora.

Takie zderzacze oferują możliwość spolaryzowania wiązki, co pozwala na bardziej precyzyjne badania. Są również tańszą opcją, a jednocześnie pozostają łatwe w rozbudowie – wystarczy przedłużyć istniejący prosty odcinek (podczas gdy akceleratory kołowe wymagają zbudowania nowego pierścienia praktycznie od podstaw). Z drugiej strony są ograniczone tym, że mogą posiadać tylko jeden punkt zderzenia, podczas gdy np. na LHC znajdują się obecnie cztery takie punkty otoczone różnymi detektorami.

ILC wykorzystuje nadprzewodzące węgli radioczęstotliwościowe, natomiast CLIC bazuje na normalnie przewodzących strukturach przyspieszających o bardzo wysokim gradencie (100 MV/m), których zasilanie odbywa się za pomocą specjalnej wiązki napędowej (drive beam). Choć ta druga technologia pozwala osiągać większe energie (nawet rzędu kilku TeV!), to uznawana jest za mniej stabilną i dlatego to ILC jest rozpatrywany jako bardziej prawdopodobna opcja.

Jednak na ten moment bardziej prawdopodobne jest powstanie akceleratorów kołowych.

Chiny czy Europa?

Dwie pozostałe propozycje – europejski FCC i chiński CEPC – to synchrotrony, czyli zderzacze kołowe (tak jak obecne LHC). Ponieważ jednak elektrony trudniej rozpędzać niż protony, rozmiar potencjalnego kolajdera musiałby być znacznie większy, by osiągnąć zakładane energie. FCC planuje tunel o obwodzie 90 km, a CEPC – nieco większy, licząc 100 km.

Dlaczego zderzacze elektronowe muszą być tak duże? Przypomnijmy, że głównym ograniczeniem energii zderzaczy e^+e^- jest promieniowanie synchrotronowe. Każda naładowana cząstka poruszająca się po zakrzywionym torze emituje promieniowanie elektromagnetyczne, tracąc przy tym energię proporcjonalną do: $P \sim \frac{E^4}{m^4 R}$.

Oznacza to, że podwojenie energii zwiększa straty aż 16-krotnie, podczas gdy dwukrotne zwiększenie promienia zmniejsza je jedynie dwukrotnie.

Dla protonów w LHC efekt ten jest praktycznie pomijalny, ponieważ moc promieniowania jest odwrotnie proporcjonalna do czwartej potęgi masy cząstki, a proton jest około 1836 razy cięższy od elektronu. Głównym ograniczeniem LHC jest natomiast zdolność magnesów do zakrzywiania toru protonów.

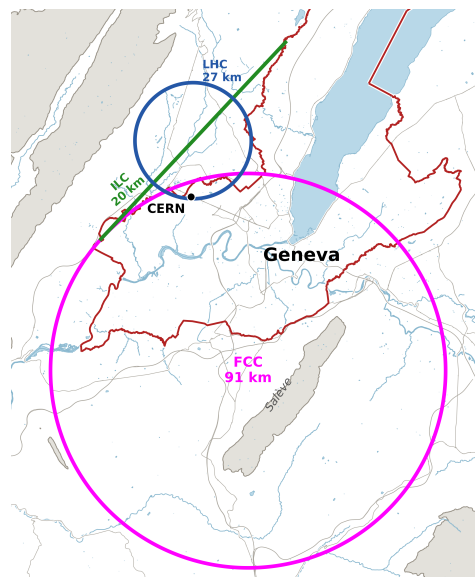
Pod względem planowanych badań obie maszyny nie różnią się od siebie zbyt wiele; różnią je natomiast aspekty praktyczne. Chińskie plany zakładały, że CEPC mógłby powstać za połowę kosztu FCC, a także 10 lat szybciej – w roku 2035, podczas gdy FCC mogłoby rozpocząć pracę najwcześniej w 2045 roku.

Nie da się ukryć, że taki scenariusz pogrzebałby szanse na budowę większego akceleratora w Genewie – zanim FCC by powstało, CEPC zdążyłby już zakończyć zbieranie danych. Przy takiej różnicy nie byłoby większego sensu budować praktycznie takiej samej maszyny.

FCC ma jednak za sobą bardzo korzystny rok. Z jednej strony CERN wybrał go jako swoją preferowaną opcję, a z drugiej CEPC wyraźnie stracił impet. Chiński

kolajder nie został wpisany do chińskiego planu pięcioletniego (2025–2030), co zasadniczo przekreśla optymistyczny scenariusz czasowy.

Na ten moment wydaje się więc, że to FCC jest nieco z przodu, choć wciąż pozostaje wiele niewiadomych – w tym znalezienie finansowania, na które środki z samego budżetu CERN-u nie wystarczą.



Rys. 2. Poglądowe porównanie rozmiarów LHC, FCC i ILC

Wielki, większy, największy...

Na koniec warto wspomnieć, że oba projekty nie ograniczają się do najbliższej przyszłości. Choć obie maszyny planowane są jako zderzacze e^+e^- , to nic nie stoi na przeszkodzie, aby w wybudowanym tunelu puścić inne wiązki – przede wszystkim protonów. Odpowiednie projekty noszą obecnie robocze nazwy FCC_{hh} oraz SPPC (czyli Super Proton-Proton Collider).

Historia zna już takie przypadki, a najbardziej znanym przykładem jest obecnie działający LHC. Jego 27-kilometrowy tunel był wcześniej wykorzystywany przez eksperyment LEP, w którym zderzano właśnie pary elektron-pozyton. Budowa nowego zderzacza kołowego – FCC lub CEPC – mogłaby więc przebiec podobnie: rozpocząć się od zderzania elektronów i pozytonów, a następnie przejść do zderzania protonów.

Oznaczałoby to oczywiście powrót do wysokich energii – jak już zostało wspomniane, zderzanie protonów, choć znacznie mniej precyzyjne, pozwala osiągać większe energie niż zderzanie par e^+e^- . W tym przypadku mowa byłaby o energiach rzędu 100 TeV, czyli około ośmiokrotnie większych od osiąganych obecnie w LHC.

Praca tych maszyn mogłaby rozpocząć się dopiero w latach 60. (SPPC) lub 70. (FCC_{hh}).

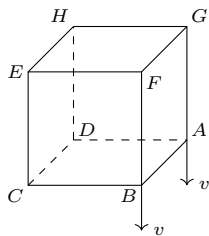
Póki co możemy być jednak pewni, że to nie koniec historii. Opcji na stole jest wiele i niezależnie od tego, który z wielkich projektów zostanie wybrany, będzie on dalej przesuwiał granice naszego zrozumienia fizyki cząstek. A wciąż pozostaje w niej wiele do zrozumienia...

Wiktor MATYSZKIEWICZ

Klub 44 F



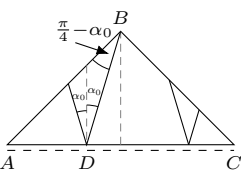
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2026



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
812 ($WT = 3,07$), 813 ($WT = 3,37$)
z numeru 2/2026

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-38,16
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-36,68
Krzysztof Zygan	Lubin	34,85
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3-23,88
Paweł Kubit	Kraków	23,36
Filip Wojaczek	Rybnik	17,03



Rys. 3

818. Promienie wychodzące z gazety pod szkłem biegną we wszystkich kierunkach i przecinając granicę powietrze-szkło, załamują się. Do szkła wchodzić tylko wewnątrz stożka o kącie rozwarcia $2\alpha_0$, gdzie α_0 jest kątem całkowitego wewnętrznego odbicia w szkłe (rys. 3):

$$\alpha_0 = \arcsin(1/n).$$

Musimy rozważyć dwa przypadki (pierwszy przedstawia rys. 3).

I. $\alpha_0 < \pi/4$, czyli $n > \sqrt{2}$

Wszystkie promienie z obszaru AD padają na matową krawędź i obszar ten jest niewidoczny.

Stosując do trójkąta ABD twierdzenie sinusów, mamy:

$$\frac{AD}{\sin(\pi/4 - \alpha_0)} = \frac{AB}{\sin(\pi/2 + \alpha_0)}.$$

Uwzględniając, że

$$AB = AC/\sqrt{2}, \quad AD = AC - DC,$$

otrzymujemy

$$k = \frac{DC}{AC} = \frac{1 + \tan \alpha_0}{2} = \frac{1 + 1/\sqrt{n^2 - 1}}{2}.$$

Aby jednak promienie padające z obszaru DC na krawędź BC przynajmniej częściowo wychodziły na zewnątrz, najmniejszy kąt padania na krawędź BC musi być mniejszy od kąta granicznego α_0 :

$$\pi/4 - \alpha_0 < \alpha_0,$$

czyli

$$\alpha_0 > \pi/8 \implies n < 1/\sin(\pi/8) = 2,61.$$

Stąd

$$k_{\min} = \frac{1 + \tan(\pi/8)}{2} \approx 0,7.$$

Zadania z fizyki nr 822, 823

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

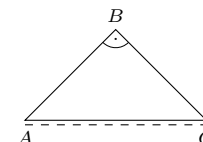
822. Sześcian porusza się w przestrzeni. W pewnej chwili jego ściana $ABCD$ (rys. 1) jest pozioma, a prędkości punktów A i B skierowane są pionowo w dół i mają wartości v . Prędkość punktu C w tej samej chwili ma wartość $2v$. Jaką maksymalną prędkość mogą mieć w tym samym momencie inne punkty sześcianu?

823. Do źródła o sile elektromotorycznej U dołączono szeregowo nienaładowany kondensator o pojemności C i cewkę o indukcyjności L . W chwili gdy napięcie na kondensatorze osiągnęło wartość U , do cewki dołączono równolegle jeszcze jeden kondensator o pojemności C . Znaleźć maksymalny ładunek na tym kondensatorze. Opór wewnętrzny źródła oraz opory przewodów łączących są pomijalnie małe.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2026

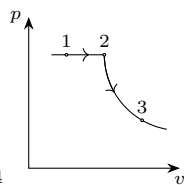
Przypominamy treść zadań:

818. Przekrój szklanego pryzmatu jest prostokątnym trójkątem równoramiennym (rys. 2). Podstawa AC i ścianka boczna BC są gładkie, ścianka boczna AB – matowa. Szkło, z którego wykonano pryzmat, ma współczynnik załamania n . Pryzmat stoi na gazecie. Jaką część powierzchni tekstu widzi obserwator, który patrzy przez gładką ściankę BC ?



Rys. 2

819. W naczyniu znajduje się ciecz i jej para nasycona. W wyniku procesu izotermicznego rozprężania objętość zajmowana przez parę wzrosła $\beta = 3$ razy, a ciśnienie pary zmalało $\alpha = 2$ razy. Znaleźć stosunek masy cieczy do masy pary znajdujących się w naczyniu w chwili początkowej. Objętość zajmowaną przez ciecz zaniedbać.



Rys. 4

II. $\alpha_0 > \pi/4$, czyli $n < \sqrt{2}$

Do krawędzi BC dotrą promienie ze wszystkich punktów podstawy AC , a ich kąty padania będą mniejsze niż $\pi/4$, czyli promienie wyjdą na zewnątrz pryzmatu.

Podsumowując:

dla $n < \sqrt{2}$ obserwator widzi cały tekst,

dla $\sqrt{2} \leq n \leq 1/\sin(\pi/8) = 2,61$ widoczna jest część tekstu

$$k = \frac{1 + 1/\sqrt{n^2 - 1}}{2},$$

dla $n > 2,61$ tekstu nie widać wcale.

819. W opisywanym procesie układ ciecz-para o masie $m_c + m_p$ przechodzi w stałej temperaturze T ze stanu początkowego 1 do stanu końcowego 3 (rys. 4).

Oznaczając ciśnienie pary nasyconej w tej temperaturze przez p_0 , a jej objętość przez V_1 , mamy:

$$(1) \quad p_0 V_1 = \frac{m_p R T}{\mu_p},$$

gdzie μ_p jest masą molową pary.

W stanie pośrednim 2 cała ciecz wyparowała i w naczyniu znajduje się tylko para nasycona o ciśnieniu p_0 i objętości V_2 :

$$(2) \quad p_0 V_2 = \frac{(m_c + m_p) R T}{\mu_p}.$$

W stanie końcowym ciśnienie tej samej masy pary nienasyconej wynosi p_3 , a objętość V_3 :

$$(3) \quad p_3 V_3 = \frac{(m_c + m_p) R T}{\mu_p}.$$

Z treści zadania:

$$p_3 = \frac{p_0}{\alpha}, \quad V_3 = \beta V_1.$$

Z równań (2) i (3):

$$V_2 = V_3 \frac{p_3}{p_0} = \frac{V_3}{\alpha}.$$

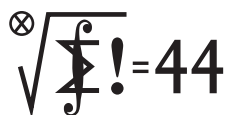
Dzieląc (3) przez (1), otrzymujemy

$$\frac{m_c + m_p}{m_p} = \frac{p_3 V_3}{p_0 V_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Szukany stosunek masy cieczy do masy pary w stanie początkowym wynosi

$$\frac{m_c}{m_p} = \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{1}{2}.$$

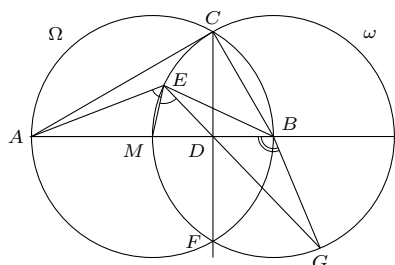
Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 915 ($WT = 2,46$) i 916 ($WT = 1,33$) z numeru 2/2026

Roksana Słowik	42,93
Krzysztof Kamiński	42,66
Jędrzej Biedrzycki	42,06
Janusz Olszewski	41,53
Marian Łupieżowicz	40,52
Janusz Fiett	38,51
Tomasz Wietecha	34,34
Paweł Kubit	32,69
Piotr Kumor	32,18
Łukasz Merta	31,54
Piotr Wiśniewski	30,84
Paweł Najman	30,41
Marek Spychała	29,44
Andrzej Kurach	29,17



922. Gdy zmienna d przebiega zbiór wszystkich (dodatnich) dzielników liczby k , iloraz k/d przebiega ten sam zbiór. Przyjmijmy oznaczenie:

$$h(d, k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k \text{ dzieli się przez } d, \\ 0 & \text{gdy } k \text{ nie dzieli się przez } d \end{cases}$$

(to funkcja charakterystyczna relacji $d|k$). Tak więc

$$\sigma(k) = \sum_{d=1}^n d \cdot h(d, k) = \sum_{d=1}^n \frac{k}{d} \cdot h(d, k).$$

Przekształcamy wyrażenie określające A_n , zmieniając porządek sumowania:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \cdot h(d, k) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \left(\frac{1}{d} \sum_{k=1}^n h(d, k) \right). \end{aligned}$$

Przy ustalonym d suma $\sum_{k=1}^n h(d, k)$ zlicza jedynki

Zadania z matematyki nr 925, 926

Redaguje Marcin E. KUCZMA

925. Wewnątrz ustalonego czworokąta wypukłego leży taki punkt, że odcinki łączące ów punkt z wierzchołkami dzielą czworokąt na cztery trójkąty o równych polach. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki równoodległe od punktu przecięcia przekątnych czworokąta.

926. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = 2x + 2y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 926 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2026

Przypominamy treść zadań:

921. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości CD . Punkt E leży wewnątrz tego trójkąta i zachodzą związki: $AC > BC = BE$, $CD^2 = AD \cdot BD$. Dwusieczna kąta AED połowi bok AB . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości miary kąta ABC .

922. Niech $\sigma(k)$ oznacza sumę wszystkich (dodatnich) dzielników liczby naturalnej k . Niech A_n będzie średnią arytmetyczną liczb $\sigma(k)/k$ po $k = 1, \dots, n$. Obliczyć granicę ciągu (A_n) , gdy $n \rightarrow \infty$, lub wykazać, że ten ciąg nie ma granicy.

921. Z założeń o długościach odcinków wynika, że $AD > BD$ oraz że kąt BCA jest prosty. Zatem AB jest średnicą okręgu Ω opisanego na trójkącie ABC . Przyjmijmy, że okrąg ω o środku B i promieniu $BC (= BE)$ przecina odcinek AD w punkcie M oraz przedłużenia odcinków CD i ED odpowiednio w punktach F i G . Patrząc na potęgi punktu D względem okręgów ω i Ω , dostajemy równości:

$$ED \cdot DG = CD \cdot DF = AD \cdot DB.$$

Równość skrajnych iloczynów oznacza, że czworokąt $AEBG$ ma okrąg opisany, wobec czego

$$\sphericalangle AEG = \sphericalangle ABG = \sphericalangle MBG = 2 \cdot \sphericalangle MEG$$

(ostatnia równość: kąt środkowy okręgu ω i kąt wpisany). Tak więc półprosta EM jest dwusieczną kąta AED , zatem (w myśl założenia) M jest środkiem boku AB trójkąta prostokątnego ABC . Stąd wniosek, że $AB = 2 \cdot BC$ i w konsekwencji $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Jest to jedyna możliwa miara kąta ABC . Łatwo sprawdzić, że wszystkie postawione warunki są wówczas spełnione przy każdym położeniu punktu E na łuku CM okręgu ω .

odpowiadające liczbom $k \in \{1, \dots, n\}$, podzielny przez d ; jest ich $\lfloor n/d \rfloor$, zatem

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

Ponieważ $\frac{n}{d} \geq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor > \frac{n-d}{d}$, dostajemy dwustronne oszacowanie:

$$\frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{n}{d^2} \geq A_n > \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{n-d}{d^2} = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \left(\frac{n}{d^2} - \frac{1}{d} \right),$$

czyli:

$$K_n \geq A_n > K_n - \frac{1}{n} H_n, \quad \text{gdzie } K_n = \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2}, \quad H_n = \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}.$$

Wiadomo ($\rightarrow$ komentarz redaktora Ligi w e-wydaniu), że $K_n \rightarrow \frac{1}{6}\pi^2$, $\frac{1}{n} H_n \rightarrow 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika odpowiedź: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{6}\pi^2$.

[Autor zadania, Witold Bednarek, opatrzył je uwagą, że pomysłodawcą rozwiązania jest (był) Andrzej Schinzel].

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

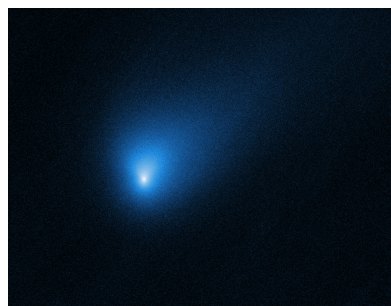
współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



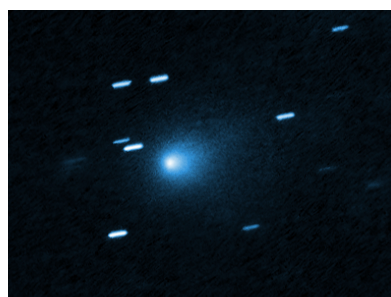
Oumuamua posiada bardzo trafną nazwę, która w tłumaczeniu z języka hawajskiego oznacza „posłanica z daleka przybywającego jako pierwszy”. Jeżeli, Drogi Czytelniku, jesteś zainteresowany aktualnym położeniem Oumuamua, to możesz ją śledzić na stronie theskylive.com/oumuamua-info.



Wizja artystyczna 'Oumuamua'.
Źródło: ESA/Hubble, NASA, ESO,
M. Kornmesser



Zdjęcie komety 2I/Borisov wykonane przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a.
Źródło: NASA, ESA, and D. Jewitt (UCLA)



Zdjęcie komety 3I/ATLAS wykonane przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a. Źródło: NASA, ESA, David Jewitt (UCLA)

Dlaczego to ważne? Komety są swego rodzaju „kapsułami czasu” zachowującymi informacje o składzie chemicznym materiału, z którego później uformowały się planety wokół gwiazdy. Ich skład pozostał niemal niezmienny od miliardów lat, dając naukowcom możliwość badania początków planet i warunków panujących we wczesnym Wszechświecie. Dotychczas takie badania dotyczyły głównie naszego własnego układu planetarnego, ale 3I/ATLAS i wszystkie następne międzygwiazdne komety rozciągną te badania na inne układy gwiazdowe Drogi Mlecznej, pozwalając nam określić jej skład nie tylko teraz, ale i w przeszłości. Co prawda nie wiemy dokładnie, jak długo trwała podróż 3I/ATLAS, aż ta znalazła się w pobliżu Ziemi, ale mogły to być nawet miliardy lat!

Od czasu do czasu do naszego Układu Słonecznego przybywają międzygwiazdne podróżnicy. Ich pojawienie się nie sposób przewidzieć, a gdy już odkryjemy ich obecność, mamy bardzo niewiele czasu na obserwację, ponieważ są u nas tylko przejazdem. Dotychczas zauważono tylko trzy takie przypadki. Pierwszym, i chyba najbardziej popularnym, była Oumuamua, odkryta w 2017 roku przy pomocy teleskopu Pan-STARRS na Hawajach. Dwa lata później odwiedził nas następny międzygwiazdny gość. Kometa 2I/Borisov, odkryta w 2019 roku przez astronoma amatora. Tutaj już nie było wątpliwości, 2I/Borisov to kometa, która powstała w innym układzie gwiazdowym niż Układ Słoneczny. Dzięki badaniom składu chemicznego komety ustalono, że pochodzi ona z bardzo zimnego miejsca i wysnuto hipotezę, że mogła powstać wokół gwiazdy typu czerwonego karła. Aktualnie kometa ta szybko oddala się od Słońca i ostatecznie ponownie wyruszy w przestrzeń międzygwiazdową, z której już nigdy do nas nie powróci.

Na kolejnego przybysza już byliśmy przygotowani. Trzeci gość, kometa 3I/ATLAS, zjawiał się w 2025 roku. Kometa okazała się wyjątkowa pod wieloma względami. Po pierwsze została odkryta stosunkowo wcześnie, gdy zbliżała się do Słońca. Astronomowie mieli więc wystarczająco dużo czasu, aby szczegółowo ją zbadać. Prawie natychmiast zaplanowano obserwacje najlepszymi teleskopami na Ziemi i w przestrzeni kosmicznej, wliczając w to Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba, spektrograf UVES zainstalowany na teleskopie VLT Europejskiego Obserwatorium Południowego oraz największy na świecie interferometr radiowy Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA). Stawka była duża, ponieważ w przypadku Oumuamua i 2I/Borisov określenie ich składu chemicznego było bardzo trudne. Wokół pierwszego z nich nie wykryto gazu, natomiast drugi świecił bardzo słabo. Dla 3I/ATLAS sytuacja wyglądała jednak inaczej. Dzięki wyjątkowej jasności komety dwa niezależne zespoły badawcze mogły zmierzyć względne ilości różnych izotopów tych samych pierwiastków w otoczce komety. W szczególności proporcje izotopów azotu $^{14}\text{N}/^{15}\text{N}$ i węgla $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$. Pierwiastki te są bardzo dokładnym wyznacznikiem warunków, jakie panowały w miejscu, w którym powstały, a jednocześnie są praktycznie niewrażliwe na podróż komety przez przestrzeń kosmiczną.

Co więc odkryto? Po pierwsze, potwierdzono, że 3I/ATLAS pochodzi z zupełnie innego układu gwiazdowego. Zmierzone proporcje izotopów węgla i azotu były prawie dwukrotnie większe, niż to, co obserwujemy dla naszych rodzimych komet. 3I/ATLAS prawdopodobnie powstał w zewnętrznych obszarach układu planetarnego wokół starej gwiazdy zbudowanej niemal wyłącznie z wodoru i helu oraz niewielkich ilości cięższych pierwiastków. Taki skład chemiczny oznacza, że gwiazda macierzysta komety 3I/ATLAS uformowała się na długo przed narodzinami Słońca, w czasie gdy Droga Mleczna była znacznie uboższa w ciężkie pierwiastki, ponieważ te nie zdążyły się jeszcze wytworzyć! Wyniki wielu niezależnych obserwacji, w tym obserwacji wykonanych przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba, sugerują, że 3I/ATLAS może być aż dwa razy starsza od naszego Słońca (czyli mieć nawet 9 miliardów lat).

Na koniec trochę Cię sfrustruję, Drogi Czytelniku. Mimo wszystkich tych badań nie jesteśmy w stanie określić, skąd dokładnie pochodzi 3I/ATLAS. Jak sami badacze przyznają, to przez brak pełnej wiedzy o składzie chemicznym 3I/ATLAS oraz przez duże niepewności w modelach opisujących chemiczną ewolucję Drogi Mlecznej. Pozostaje nam tylko czekać na następnych przybyszy. Możliwe, że oni będą bardziej skłonni do podzielenia się swoimi tajemnicami.

Napisane na podstawie: Opitom, C. i in., „High nitrogen and carbon isotopic ratios in the interstellar comet 3I/ATLAS”, *Nat Astron* (2026) oraz Cordiner, M. i in., „Isotopic evidence for a cold and distant origin of 3I/ATLAS”, *Nature* (2026)

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Słońce we wrześniu szybko wędruje na południe, obniżając w trakcie miesiąca wysokość górowania o 11° . Wskutek tego dzień skróci się o kolejne dwie godziny. 23 IX przetnie ono równik niebieski, zaczynając astronomiczną jesień.

W pierwszej dekadzie września Księżyc rozświetli niebo poranne, dążąc do nowiu 11 dnia miesiąca. W nocy z 2 na 3 IX wszędzie on, w fazie 66%, 9° na zachód od Plejad w Byku i do rana zmniejszy dystans do nich prawie o połowę, by kolejnej nocy pokazać się w ostatniej kwadrze również 5° , ale już na wschód od Plejad. Jednocześnie w podobnej odległości, lecz na południe od niego, znajdzie się planeta Uran, która 10 IX zmieni kierunek ruchu na wsteczny. Uran kreśli swoją pętlę na niebie w połowie odległości między Aldebaranem a Plejadami jakieś $2,5^\circ$ na południowy wschód od gwiazdy 4. wielkości 37 Tau, sama świecąc z jasnością $+5,7^m$. Księżyc pozostanie w Byku jeszcze następnej nocy, zbliżając się na niewiele ponad 1° do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji.

7 IX Srebrny Glob dotrze do wschodniej części Bliźniąt, tworząc trójkąt równoramienny z Polluksem, najjaśniejszą gwiazdą tej konstelacji, i Marsem, zajmując pozycję po $4,5^\circ$ od obu ciał niebieskich i zmniejszając przy tym fazę do 20%. Czerwona Planeta dąży do opozycji w lutym przyszłego roku. Na razie świeci z jasnością $+1,2^m$ przy tarczy o średnicy $5''$. We wrześniu Mars pokona 18° , zaczynając miesiąc niedaleko miejsca, gdzie na początku roku znajdował się Jowisz, by pod jego koniec wejść do gwiazdozbioru Raka. 10 IX planeta przejdzie mniej niż 1° od świecącej z jasnością $+3,5^m$ gwiazdy Wasat.

8 IX około godziny 2:49 Księżyc w fazie 12% zakryje gwiazdę 5. wielkości η Cnc, tworząc północno-zachodni róg trapezu gwiazd, otaczających gromadę otwartą M44 w Raku. η Cnc pojawi się przy ciemnej stronie księżycowej tarczy około godziny 3:40. Następnie Księżyc podaży ku samej gromadzie gwiazd, osiągając nad ranem odległość niewiele ponad 1° .

W odległości 9° wspomnianemu układowi towarzyszy planeta Jowisz, która zaczyna pojawiać się na niebie porannym. 9 IX Księżyc, przy fazie zmniejszonej już do 5%, wszędzie 5° na wschód od niej. Pod koniec miesiąca planeta przejdzie do gwiazdozbioru Lwa i około godziny 4:40 zdąży się wznieść na wysokość 20° . We wrześniu Jowisz zwiększy jasność do $-1,9^m$ i średnicę tarczy do $33''$.

Księżyc można próbować dostrzec jeszcze 10 IX. 30 minut przed wschodem Słońca Srebrny Glob zajmie pozycję na wysokości 5° , prezentując bardzo cienki sierp w fazie 1%. W jego odszukaniu pomoże planeta Jowisz i Regulus, najjaśniejsza gwiazda Lwa. Księżyc znajdzie się na linii łączącej oba ciała niebieskie, około 5° od drugiego z nich.

Po nowiu Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie jego widoczność zacznie się poprawiać dopiero po I kwadrze. W tym okresie warto zapamiętać datę 14 IX, kiedy to dojdzie do dziennego zakrycia Wenus przez Księżyc. Planeta zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 11:42 i wyłoni się po jej jasnej stronie godzinę później. Tego dnia tarcza Wenus pokaże średnicę $37''$ i fazę 29%. Faza

Księżyc urośnie zaś do 12%. Do zakrycia dojdzie na wysokości 8° nad punktem SE widnokregu. Odkrycie natomiast nastąpi 7° wyżej, nieco bliżej południka lokalnego. Wenus świeci z jasnością $-4,7^m$, dzięki czemu przed i po zakryciu powinno dać się ją dostrzec gołym okiem.

18 IX Księżyc przejdzie przez I kwadrę. Dobę wcześniej pokaże się on 3° od Antaresa w Skorpionie, dobę później zaś przetnie linię łączącą dwie jasne gwiazdy Strzelca Kaus Borealis i Kaus Meridionalis. 20 IX Księżyc przeniesie się na pozycję jakieś 5° od Nunki.

6 dni później Srebrny Glob przejdzie przez pełnię i jednocześnie 4° na północ od Neptuna oraz 9° na zachód od Saturna. Bliskość pełnego Księżyc i planet oznacza ich opozycję. Neptun znajdzie się po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce tego samego dnia, Saturn zaś – na początku października. Neptun świeci z jasnością $+7,8^m$ i kreśli swoją pętlę niecałe 4° na wschód od gwiazdy 29 Psc. Saturn natomiast ma jasność $+0,3^m$, przy średnicy tarczy $20''$, z ładnie już widocznymi pierścieniami.

Ostatniej nocy miesiąca Księżyc w fazie 80% wszędzie podczas odkrywania Plejad. Na Suwalszczyźnie Alcyone wyłoni się zza ciemnego brzegu księżycowej tarczy około 19:49, na wysokości zaledwie 4° nad widnokregiem. Drugi raz w tym miesiącu Księżyc utworzy trójkąt równoramienny z Plejadami i Uranem.

W październiku maksimum jasności osiągną dwie mirydy χ Cyg i R Leo. Według prognoz pierwsza z gwiazd pojaśnieje najbardziej około 4 X, druga natomiast 17 dni później. I mogą pojaśnić nawet do, odpowiednio, $+3,3$ i $+4,4^m$. χ Cyg znajduje się w szyi Łabędzia, na linii łączącej gwiazdy η i β Cyg, $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd i pod koniec miesiąca góruje po godzinie 20 na wysokości przekraczającej 70° . R Leo natomiast znajduje się jakieś 5° na zachód od wspomnianego już Regulusa i wschodzi około godziny 3, by do świtu wznieść się powyżej 15° nad wschodnim widnokregiem. Obie gwiazdy już we wrześniu są łatwym celem do oglądania przez lornetki i teleskopy.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 12



Rozwiązanie zadania M 1864.

Odpowiedź: dla wszystkich $n \geq 3$.

Zauważmy, że jeśli $n \geq 3$, to wśród liczb od n do n^2 znajdują się cztery różne liczby

$$n < n+1 < 2n < 2n+2,$$

dla których zachodzi równość

$$n(2n+2) = 2n(n+1).$$

(Uzasadnienie, że dla $n \geq 3$ mamy $2n+2 \leq n^2$, pozostawiamy Czytelnikom).

Jeśli zaś $n \leq 2$, to w zbiorze są mniej niż 4 liczby, więc nie da się wybrać czterech różnych liczb.



Rozwiązanie zadania M 1865.

Przypuśćmy przeciwnie, że wszystkie trzy liczby

$$ab+1, \quad bc+1, \quad ca+1$$

są kwadratami. Bez straty ogólności założmy, że $a < b < c$.

Z nierówności trójkąta mamy wtedy $a+b > c$.

Zauważmy, że liczby $(ca+1)(cb+1)$ oraz $c^2(ab+1)$ są kwadratami. Istnieją więc liczby całkowite x, y takie, że

$$(ca+1)(cb+1) = x^2 \quad \text{oraz} \quad c^2(ab+1) = y^2.$$

Wtedy liczba

$$d := x^2 - y^2 = (ca+1)(cb+1) - c^2(ab+1) = c(a+b-c) + 1$$

jest dodatnia, skąd $x > y$, a więc $x \geq y+1$. Zatem

$$d = x^2 - y^2 \geq (y+1)^2 - y^2 = 2y+1.$$

Ponieważ $y = c\sqrt{ab+1}$, to

$$d \geq 2c\sqrt{ab+1} + 1.$$

W szczególności $d > 2ac + 1$. Z kolei ponieważ $c > b$, to

$$ac+1 > c(a+b-c) + 1 = d.$$

Ostatecznie więc

$$d \geq 2c\sqrt{ab+1} + 1 > 2ac + 1 > ac + 1 > c(a+b-c) + 1 = d,$$

sprzeczność.



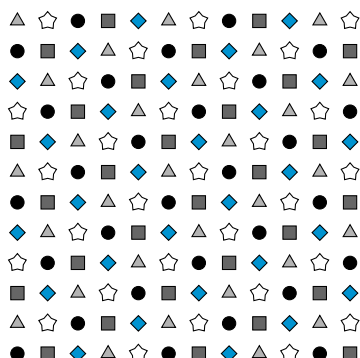
Rozwiązanie zadania M 1866.

Odpowiedź: $\sqrt{5}$.

Rozważmy w naszym kwadracie dowolne dwie kratki mające wspólny bok. Mają one łącznie 6 wierzchołków, a odległość między dowolnymi dwoma spośród nich nie przekracza $\sqrt{5}$.

Ponieważ punktów tych jest 6, a kolorów tylko 5, to z zasady szufladkowej Dirichleta dwa z tych punktów mają ten sam kolor. Zatem w każdym przypadku znajdują się dwa jednokolorowe punkty w odległości nie większej niż $\sqrt{5}$.

Następujący przykład dowodzi, że ograniczenie $\sqrt{5}$ jest optymalne.



Rozwiązanie zadania F 1151.

W polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ na protony o ładunku e (ładunek elementarny) poruszające się z prędkością $\vec{v}$ działa siła Lorentza $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$. Równanie ruchu (Newtona) wiąże szybkość zmiany pędu $\vec{p}$ z działającą siłą. Mamy:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Masa spoczynkowa protonu wynosi około

$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 10^{-3} \text{ TeV}$, a więc proton o energii 6,5 TeV porusza się z prędkością praktycznie równą prędkości światła c . Pęd cząstki poruszającej się z prędkością porównywalną z prędkością światła wynosi:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Przepiszmy równanie ruchu, wykorzystując relatywistyczny związek między $\vec{v}$ i $\vec{p}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{e}{\gamma m_0} \right) \vec{p} \times \vec{B}.$$

Iloczyn wektorowy po prawej stronie jest prostopadły do $\vec{B}$ i do $\vec{p}$, co oznacza, że zgodnie z tym równaniem (wektor $\vec{B}$ ma stałą wartość, kierunek i zwrot) zmienia się jedynie kierunek wektora $\vec{p}$, a jego długość pozostaje bez zmian – ruch odbywa się po okręgu o promieniu R , a szybkość, z jaką obraca się wektor prędkości $\vec{v}$ (prędkość kątową ruchu), wynosi:

$$\frac{v}{R} = \frac{eB}{\gamma m_0}.$$

Otrzymujemy:

$$R = \frac{\gamma m_0 v}{eB} \approx \frac{E}{eBc}.$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że $v \approx c$ oraz $E = \gamma m_0 c^2$. Liczbowo otrzymujemy $R \approx 2,8 \cdot 10^3 \text{ m}$ (dokładna wartość podawana w dokumentach technicznych LHC to $R = 2803 \text{ m}$). Długość LHC (26 659 m) jest większa niż 2π razy otrzymana tu wartość R , bo tunel, w którym biegnie wiązka, nie jest dokładnie okręgiem (są odcinki proste), a pole zakrzywiające wiązkę ma na niektórych odcinkach bardziej skomplikowaną formę niż przyjęte tu pole jednorodne.



Rozwiązanie zadania F 1152.

Prawa zachowania pędu i energii pozwolą nam znaleźć energię i pęd mezonu. Energia całkowita E mezonu była równa sumie energii fotonów: $E = E_1 + E_2 = 225 \text{ MeV}$. Pęd mezonu także był równy sumie pędów fotonów. Po rozpadzie fotony poruszały się wzdłuż tej samej prostej co mezon przed rozpadem. Przyjmijmy zwrot ruchu mezonu przed rozpadem za dodatni. Energia fotonu równa jest iloczynowi wartości jego pędu i prędkości światła c . Pęd p mezonu przed rozpadem wynosił więc:

$$p = E_1/c - E_2/c = 180 \text{ MeV}/c.$$

Dla obliczenia masy spoczynkowej m_0 mezonu skorzystamy z tożsamości:

$$m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - c^2 p^2}.$$

Liczbowo otrzymujemy $m_0 c^2 = 135 \text{ MeV}$, natomiast prędkość wyznaczmy ze związku:

$$\frac{v}{c} = \frac{cp}{E} = 180/225 = 0,8.$$

Otrzymujemy, że rozpadł się mezon o masie $m_0 = 135 \text{ MeV}/c^2$ (mezon π^0), o energii całkowitej $E = 225 \text{ MeV}$, poruszający się z prędkością $v = 0,8c \approx 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.



„Kradzież” strategii

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Oto trzecia część cyklu poświęconego grom kombinatorycznym – zakładam, że Czytelnik zapoznał się już z dwiema poprzednimi. Na rozgrzewkę weźmy

Przykład 1. W grze *chrup!* gracz I ma strategię wygrywającą.

Dowód. Przypuśćmy, że drugi gracz ma strategię wygrywającą W . Gracz I usuwa prawe-dolne pole, przechodząc ze stanu początkowego S do stanu S_1 . Gracz drugi, według strategii W , przechodzi z S_1 do pewnego stanu T . Plansza teraz wygląda tak, jakby gracz II przeszedł od razu ze stanu początkowego do stanu T . Ale przecież gracz I mógł to zrobić w pierwszym ruchu, a potem samemu stosować strategię W , która zapewniłaby mu zwycięstwo – i mamy sprzeczność. Fakt, że remis jest niemożliwy, kończy dowód. $\square$

To rozumowanie nazywane jest *kradzieżą strategii*, ale warto sobie uświadomić, że strategia W , którą chcielibyśmy ukraść... nie istnieje! Jest ona jedynie hipotetycznym wytworem rozumowania nie wprost, które można streścić tak: gdyby W istniała, toby nie istniała. W szczególności nie mamy tu żadnych wskazówek, jaka powinna być strategia wygrywająca gracza I, a usunięcie jednej kostki nie zawsze jest dobrym pierwszym ruchem (zob. zadanie 2 z poprzedniego kącika).

Ten sam dowód napisany zwięźlej. Przypuśćmy, że stan początkowy S jest P . Ponieważ $S \rightarrow S_1$, stan S_1 jest W . Wobec tego $S_1 \rightarrow T$ dla pewnego stanu T , który jest P . Ale przecież $S \rightarrow T$, więc T powinien być W – sprzeczność. $\square$

Przykład 2. W grze *hex* gracz I ma strategię nieprzegrywającą.

Dowód. Przypuśćmy, że gracz II ma strategię wygrywającą W . Gracz I zajmuje w pierwszym ruchu jakiekolwiek pole, a potem gra tak, jakby to pole – nazwijmy je polem nadmiarowym – było wolne. Wtedy jest w roli gracza II, więc może stosować strategię W w każdej sytuacji, w której nie wskazuje ona pola nadmiarowego. Jeśli strategia W nakazuje zajęcie nadmiarowego pola, to nic złego się nie dzieje, bo gracz I zajął je wcześniej, jest zatem tak, jakby ruch wskazany przez strategię został już wykonany. Trzeba jednak zająć jakieś pole – gracz I zajmuje pole dowolne i od teraz to ono jest nadmiarowe. W ten sposób gracz I, stosując zmodyfikowaną strategię wygrywającą gracza II, wygrywa (pole nadmiarowe może tylko mu pomóc) – sprzeczność. $\square$

Wygląda na to, że jeden z graczy jest w korzystniejszej sytuacji, więc powinien wygrywać. Należy tu jednak uważać, bo czasem to, co uznajemy za korzystne, wcale takie nie musi być (zob. zad. 4). Podobnie jak poprzednio, dowodzimy tu jedynie istnienia strategii wygrywającej dla gracza I, natomiast nie otrzymujemy żadnych informacji o tej strategii.

W rzeczywistości gracz I ma coś więcej – strategię wygrywającą, bo w grze *hex* remis jest niemożliwy. Dowód tego faktu można przeprowadzić na wiele sposobów, ale tutaj zmieści się tylko następująca intuicja. Patrzymy na obszar złożony z jednego z czerwonych brzegów oraz z czerwonych pól mających z nim połączenie. Jeśli C nie sięga drugiego czerwonego brzegu, to możemy przejść niebieskimi polami sąsiadującymi ze zbiorem C .

Zadania

1. Na tablicy napisano wszystkie dzielniki pewnej liczby naturalnej $n > 1$. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb, które w danym momencie są na tablicy, a następnie zmazaniu wszystkich jej dzielników wraz z tą liczbą. Przegrywa ten, kto zmaże liczbę n . Udowodnić, że gracz I ma strategię wygrywającą.
2. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu zapisuje liczbę 1, 2 lub 3. W każdym kolejnym ruchu gracz na zmianę zamieniają zapisaną liczbę – nazwijmy ją n – na jedną z liczb $n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 3n$. Wygrywa ten, po czym ruchu zapisana liczba przekroczy 1 googol. Kto ma strategię wygrywającą?
3. Gra *gomoku* jest wzorowana na grze *kółko i krzyżyk* – gramy na planszy 19×19 i wygrywa ten, kto pierwszy postawi pięć swoich znaczków pod rząd, w linii poziomej, pionowej lub skośnej. Udowodnić, że gracz I ma strategię, która zapewnia mu co najmniej remis.
4. Gra *rex* ma taki sam przebieg jak *hex*, z tą tylko różnicą, że przegrywa gracz, który jako pierwszy zbuduje połączenie. Ocenic poprawność następującego rozumowania:
Każde dodatkowe pole czerwone sprawia, że łatwiej zbudować czerwone połączenie, więc pierwszy ruch utrudnia grę graczowi I. Wobec tego, ponieważ remis nie jest możliwy, gracz II ma strategię wygrywającą.
5. Udowodnić, że w grze *hex* wybór pola w wąskim rogu w pierwszym ruchu jest błędem gracza I.

Wskazówki do zadań

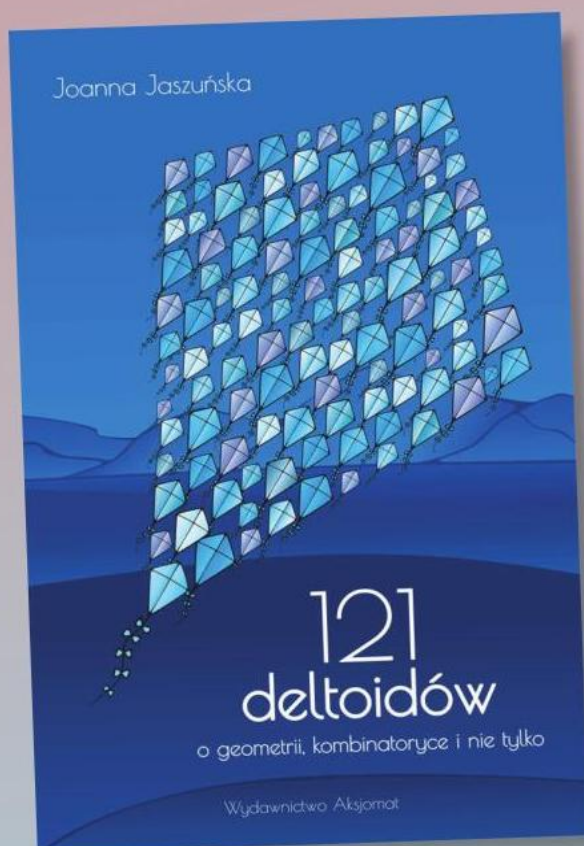
1. Przypuśćmy, że gracz II ma strategię wygrywającą d i dalej stosować hipotetyczną strategię gracza II.

2. Jeśli gracz I wybierze 1, to II może odpowiedzieć 2 lub 3. Gracz I może wybrać 2 lub 3 już w pierwszym ruchu.

3. Wystarczy zastosować argument z drugiego przykładu.

4. Nadmiarowe pole nie zawsze pomaga graczowi II – może mu zablokować możliwość uniknięcia zbudowania połączenia.

5. W odpowiedzi na zamałowanie na czerwono nadmiarowego pola P_1 , gracz II ma niebieskie pole P_2 , sąsiadujące z polem P_1 oraz z niebieskim brzegiem. Gracz II przez całą grę halucynuje, że pole P_1 jest niebieskie, a pole P_2 puste. W grze halucynowanej gracz II pełni honoru gracza I. Ponadto jeśli istnieje niebieskie połączenie w pozycji z halucynacją, to istnieje również na pozycji oryginalnej.



W zarządzaniu organizacjami mówi się o *efekcie synergii*, gdy korzyści ze wspólnego funkcjonowania wielu składowych są większe niż suma korzyści z każdej składowej z osobna (matematycy nazywają to zjawisko *superaddytywnością*). Termin ten dobrze stosuje się do wspaniałej książki „121 deltoidów – o geometrii, kombinatoryce i nie tylko” autorstwa Joanny Jaszuskiej. Każdy ze wspomnianych w tytule *Deltoidów* to prawdziwa popularyzatorska perełka – krótki, niezwykle zgrabnie i starannie napisany tekst na atrakcyjny, matematyczny temat. Wielu Czytelników Delty bardzo dobrze zna zdobiący je, charakterystyczny symbol latawca, gdyż przez 10 lat te znakomite artykuły ukazywały się na ostatniej (czyli honorowej!) stronie naszego miesięcznika. Publikacja, którą promujemy, to deltoidowa jakość podniesiona do kwadratu. Maestria zaczyna się już na etapie kompozycji: artykuły zostały podzielone na 11 tematycznych rozdziałów, każdy zawierający 11 pozycji, a wszystko wzbogacono 11 dodatkami. Z materiału źródłowego usunięto różne efekty działalności redakcyjnych chochlików, zweryfikowane zostały również niektóre informacje, jak np. to, czy dany problem jest wciąż otwarty. Naszym zdaniem jest to pozycja obowiązkowa w biblioteczkę każdego miłośnika matematyki, początkującego i dojrzałego. Jednemu i drugiemu dostarczy wiele radości i intelektualnej satysfakcji. Polecamy!

Geometria to jedna z najpiękniejszych matematycznych krain. Pełno w niej eleganckich, wizualnie efektownych twierdzeń oraz błyskotliwych dowodów. Wstęp do niej mają nawet najbardziej początkujący adepci królowej nauk, a wielu z nich powraca do niej przez całe życie. Choć możliwe jest jej samodzielne odkrywanie, to jednak każdy podróżnik zna wartość dobrego przewodnika, który stopniowo odsłania coraz to wspanialsze uroki danego miejsca, chroniąc wędrowca przed poczuciem zagubienia i przytłoczenia. Doskonałym przewodnikiem po krainie geometrii jest wydana właśnie książka Jerzego Bednarczuka „Niesłusznie zapomniana geometria”. Zawiera ona klarowne przedstawienie fundamentalnych twierdzeń płaskiej geometrii euklidesowej, jak również bogactwo niebanalnych zadań (ponad 700!), które pozwalają na samodzielne zdobywanie mniejszych i większych geometrycznych szczytów. Autor wydeptał w krainie geometrii niejedną ścieżkę i oprowadził po niej setki podopiecznych, z których wielu związało się na stałe z matematyką. Nie sposób mieć lepszych kwalifikacji do bycia twórcą takiego dzieła. Gorąco polecamy je tym, którzy dopiero wyruszają w podróż, tym którzy chcą sobie przypomnieć, a zwłaszcza tym, którzy sami są przewodnikami.

