

A large, colorful grid of numbers and chess pieces, overlaid with a large green 'X' and the text 'MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA'.



W następnym numerze:
jak z podkładów i sztachet
zrobić liczby rzeczywiste?



SPIS TREŚCI NUMERU 10 (629) 2026

Czy AI myśli?

Jakub Szymanik

str. 1

Kształt i opór, część 3/4

Ruch bez oporu?

Jarosław Górnicki

str. 4



Zadania

str. 6

Turniej Młodych Fizyków

Łukasz Gładczuk

str. 7

Inwazja barbarzyńców

Marta Fikus-Kryńska

str. 8



Zbieżny czy rozbieżny?

Bartłomiej Pawlik

str. 9

Jak pozyton, cząstka antymaterii,
zrobił zawrotną karierę

Jerzy Dryzek

str. 10

Zagrajmy w Sopera

Tomasz Cieśla

str. 12

Wektory zamiast tortu – sprawiedliwy
podział w wielu wymiarach

Igor Jankowski

str. 16

Informatyczny kącik olimpijski (140)

IKO na start – Budujemy piaskownicę

Bartosz Kostka

str. 19

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: Kosmiczne owoce
morza

str. 22

Niebo w październiku

str. 23



Kółko i krzyżyk, i jeszcze więcej

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Małgorzata Fiejdasz – sekr. red., Jan Horubała,
Tomasz Kazana, Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Silverprint

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Człowiek o AI (10)

* Center for Mind/Brain Sciences,
Department of Information Engineering
and Computer Science, University of
Trento

Autor artykułu, profesor Jakub Szymanik to kognitywista, czyli naukowiec badający działanie ludzkiego umysłu, procesy myślenia oraz sposób, w jaki przetwarzamy język i informacje. Sama kognitywistyka jest interdyscyplinarną dziedziną łączącą m.in. psychologię, językoznawstwo, informatykę i neuronaukę. Badania Jakuba Szymanika koncentrują się szczególnie na relacji między językiem naturalnym, logiką i mechanizmami poznawczymi człowieka.

Rozumowanie sylogistyczne to wnioskowanie oparte na zdaniach łączących dwa pojęcia za pomocą jednego z czterech kwantyfikatorów:

„wszystkie A są B”,
„żaden A nie jest B”,
„niektórzy A są B”,
„niektórzy A nie są B”.

Mając do dyspozycji całą bazę takich zdań, wyprowadzamy nowe wnioski, łącząc je ze sobą zgodnie z regułami logiki. W efekcie rozumowanie polega na systematycznym odkrywaniu, jakie dodatkowe zależności między pojęciami muszą być prawdziwe, skoro prawdziwe są zdania wyjściowe.

Przykład: Załóżmy, że w naszej bazie wiedzy znajdują się zdania:

„wszystkie ssaki są zwierzętami”,
„żaden gad nie jest ssakiem”,
„niektóre zające są ssakami”.

Z tych informacji możemy wywnioskować m.in., że: „niektóre zające są zwierzętami” (bo jeśli coś jest ssakiem, to jest też zwierzęciem).

Czy AI myśli?

Jakub SZYMANIK*

Trudno dziś mówić o sztucznej inteligencji bez napotkania fali entuzjazmu. W mediach, wystąpieniach publicznych i raportach inwestorskich regularnie pojawia się wizja bliskiej przyszłości, w której AI osiąga poziom ogólnej inteligencji (ang. *Artificial General Intelligence*, AGI) i zaczyna zastępować ludzi nie tylko w pracy fizycznej czy rutynowej, ale również w myśleniu, rozumowaniu, a nawet w prowadzeniu badań naukowych.

Tego rodzaju prognozy nie są marginalne. Przeciwnie, jak zauważa Tomasz Kazana we wstępie do tej serii artykułów (patrz Δ_{26}^3), formułują je osoby o ogromnym wpływie. Elon Musk twierdzi, że AI już wkrótce „przewyższy człowieka praktycznie we wszystkim”, a Ray Kurzweil od lat zapowiada nadejście osobliwości technologicznej. Z drugiej strony istnieje równie silny nurt sceptycyzmu, reprezentowany przez naukowców i filozofów, którzy podkreślają ograniczenia obecnych modeli i sugerują, że ich sukcesy mają charakter wyłącznie powierzchowny.

Jak w takim razie odnaleźć się w tej debacie? Jednym ze sposobów jest próba odpowiedzi na bardziej konkretne pytania, na przykład: czy współczesne systemy AI rzeczywiście *rozumują*?

Logika jako test

Jeśli chcemy ocenić zdolność do myślenia, warto sięgnąć po narzędzia, które od wieków służą do jej badania. Jednym z nich jest logika. To właśnie ona stanowi podstawę matematyki i nauki ogólnie, bo pozwala przechodzić od przesłanek do wniosków w sposób uporządkowany i uzasadniony.

Czy modele AI potrafią nauczyć się logiki?

To pytanie stało się przedmiotem naszych badań prowadzonych na Uniwersytecie Warszawskim. Wspólnie z Manuelem Vargasem Guzmánem i Maciejem Malickim analizowaliśmy, czy współczesne modele neuronowe – w tym duże modele językowe – są w stanie opanować systematyczne rozumowanie logiczne. Jako pole testowe wybraliśmy logikę sylogistyczną, sięgającą jeszcze czasów Arystotelesa. Jest ona stosunkowo prosta, a zarazem wystarczająco bogata, by ujawniać subtelne różnice między prawdziwym rozumieniem a powierzchownym dopasowaniem do wzorców.

Dwa oblicza dedukcji

Jak rozpoznać, czy model AI nauczył się logiki, czy tylko udaje? Kluczowe wydają się dwa pojęcia: kompozycyjność i rekurencyjność.

Kompozycyjność oznacza zdolność do rozumienia struktury argumentu – do rozpoznania, że złożone wnioskowania składają się z prostszych kroków, które można analizować niezależnie. Jeśli ktoś pojmuję, że z „wszystkie A są B” i „wszystkie B są C” oraz „wszystkie C są D” wynika, że „wszystkie A są D”, to powinien umieć również rozpoznać, że z „wszystkie A są B” i „wszystkie B są C” wynika, że „wszystkie A są C”.

Rekurencyjność natomiast to zdolność do budowania coraz dłuższych wniosków poprzez powtarzanie tych samych reguł. System rekurencyjny może więc przejść od prostego wnioskowania do bardziej złożonego, dodając kolejne ogniwa do łańcucha. Czyli, jeśli system rozumie, że z „wszystkie A są B” i „wszystkie B są C” wynika, że „wszystkie A są C” oraz jeśli wyabstrahował znaczenie kwantyfikatora „wszystkie”, to powinien też wiedzieć, że z „wszystkie A są B” i „wszystkie B są C” oraz „wszystkie C są D” wynika, że „wszystkie A są D”.

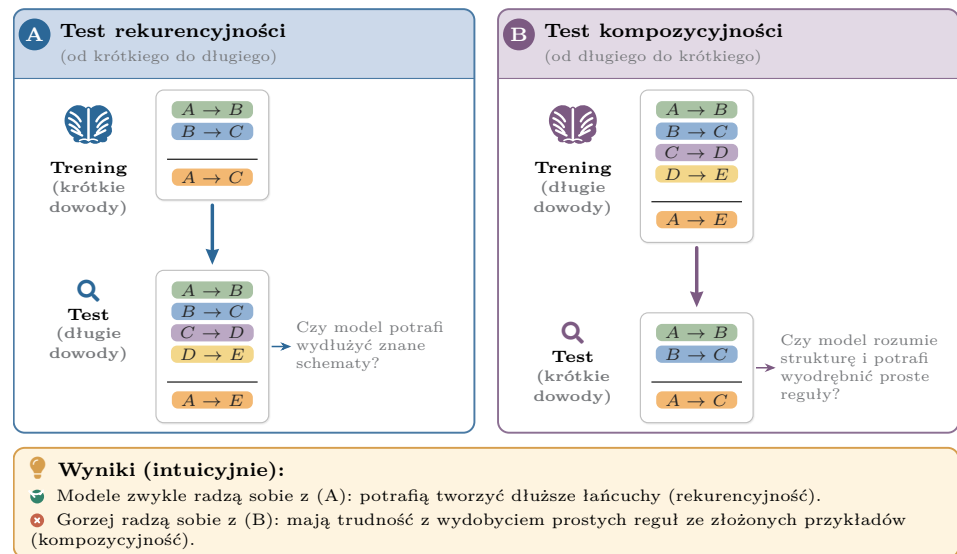
Na pierwszy rzut oka oba te aspekty wydają się niemal tożsame. W praktyce jednak można je rozdzielić. System może być rekurencyjny – generować długie łańcuchy wnioskowań – nie będąc jednocześnie kompozycyjnym, czyli nie rozumiejąc struktury tych wnioskowań.

W jednym z naszych eksperymentów badaliśmy, czy modele AI potrafią uogólniać reguły rozumowania sylogistycznego poza przykłady, na których były trenowane. W tym celu przygotowaliśmy sztuczne „bazy wiedzy” składające się ze zdań sylogistycznych oraz odpowiadających im poprawnych wnioskowań (czyli krótkich lub długich „dowodów”).

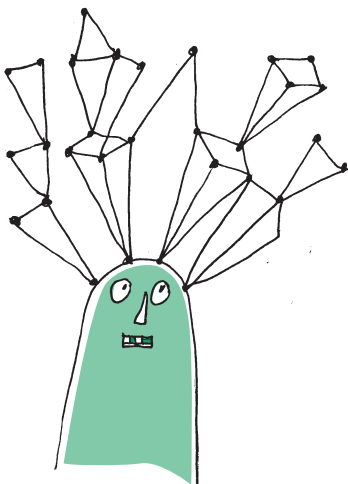
Następnie przeprowadziliśmy dwa kluczowe testy (zob. ilustrację):

- **Test rekurencyjności.** Model trenowaliśmy na krótkich łańcuchach wnioskowań (na przykład złożonych z dwóch–trzech kroków), a następnie sprawdzaliśmy, czy potrafi poprawnie wnioskować w znacznie dłuższych łańcuchach (na przykład pięć–sześć kroków). To pozwalało zbadać, czy umie „powtarzać” znane reguły w coraz dłuższych rozumowaniach.
- **Test kompozycyjności.** Tym razem robiliśmy odwrotnie: model trenowaliśmy na długich, złożonych dowodach, a następnie sprawdzaliśmy, czy potrafi poprawnie rozwiązywać prostsze przypadki. To z kolei testowało, czy model rzeczywiście rozumie strukturę rozumowania i potrafi „rozłożyć” złożony argument na prostsze części.

Eksperyment: rekurencyjność vs. kompozycyjność w rozumowaniu sylogistycznym



MYŚLE,
ALE CZY
JESTEM?



Wynik był asymetryczny: modele często radziły sobie całkiem dobrze z pierwszym zadaniem (rekurencyjnością), ale wyraźnie gorzej z drugim (kompozycyjnością). Sugeruje to, że potrafią one naśladować długie ciągi wnioskowań, ale mają trudność z uchwyceniem ogólnych reguł, które za nimi stoją. Co ważne, sprawdzaliśmy zarówno własne modele uczone od podstaw, jak i gotowe, duże modele językowe. Okazało się, że problemy z rozumowaniem występują w obu przypadkach.

Gdzie kończy się „zrozumienie”?

Nasze eksperymenty pokazały, że współczesne modele AI – nawet te najbardziej zaawansowane – mają szczególne trudności z kompozycyjnością. Wprawdzie często potrafią generować poprawnie wyglądające ciągi wnioskowań, ale okazuje się, że robią to raczej na zasadzie statystycznego dopasowania wzorców, a nie poprzez zastosowanie ogólnych reguł.

Innymi słowy: modele potrafią „udawać” rozumowanie, ale nie zawsze je realizują.

To spostrzeżenie wpisuje się w szerszą krytykę głębokich sieci neuronowych oraz dużych modeli językowych, zgodnie z którą działają one na poziomie tekstu, a nie rzeczywistego znaczenia. Jak zauważa Jerzy Marcinkowski w niniejszej serii (Δ_{26}^3), model „zna tylko zdania, nie zna świata”. Jeśli tak, to trudno mówić o klasycznym rozumieniu, które w nauce i filozofii zwykle wiąże się

z odniesieniem do rzeczywistości. W naszym kontekście powiedzielibyśmy, że model nie uczy się na przykład pełnego znaczenia wyrażenia „wszystkie” albo, innymi słowy, nie internalizuje całej „logiki tego wyrażenia”. Modele nie są w stanie wyabstrahować ogólnych reguł przekształcania zdań, w których kwestia odniesienia do świata nie gra roli. To tak, jakby potrafiły mnożyć wielocyfrowe liczby, ale jednocześnie miały problemy z tabliczką mnożenia.

A co z ludźmi?

Ktoś mógłby w tym miejscu zauważyć: przecież ludzie też nie są idealnymi logikami. Istnieje cała dziedzina – psychologia rozumowania – która bada, jak bardzo nasze faktyczne wnioskowania odbiegają od ideału logiki formalnej.

To prawda. Ludzie popełniają błędy, stosują heurystyki, ulegają złudzeniom poznawczym. A jednak mamy do czynienia z istotną różnicą. Nasze rozumowanie nie ogranicza się do operowania symbolami – jest zakorzenione w doświadczeniu świata, percepcji i działaniu. Tymczasem współczesna AI jest w ogromnej mierze „zamknięta” w języku.

Inteligencja fragmentaryczna

To prowadzi do kolejnego pytania: czy myślenie i język są ze sobą nierozzerwalnie związane?

Nie jest to oczywiste. W naukach o poznaniu od lat toczy się debata na ten temat. Tradycja zapoczątkowana przez Noama Chomsky’ego zakładała istnienie wrodzonej struktury językowej, ściśle

powiązanej z naszymi zdolnościami poznawczymi. Z drugiej strony rośnie liczba badań sugerujących, że myślenie może w dużej mierze zachodzić niezależnie od języka – na przykład w formie reprezentacji przestrzennych czy wizualnych, a obwody neuronowe w mózgu odpowiedzialne za język różnią się od tych odpowiedzialnych za różne aspekty myślenia, jak na przykład za logiczne rozumowanie czy teorię umysłu (czyli rozumowanie o przekonaniach, wiedzy lub intencjach innych ludzi).

Jeśli tak jest, to modele językowe – choć imponujące – mogą uchwycić tylko fragment tego, co nazywamy inteligencją.

Wystarczy pomyśleć o zadaniach polegających na manipulowaniu obiektami w przestrzeni, na przykład takich jak testy rotacji brył. Tego rodzaju zdolności trudno sprowadzić do operacji na tekście. A jednak stanowią istotny element ludzkiego poznania.

AI jako eksperyment myślowy

Jak zatem interpretować sukcesy sztucznej inteligencji?

Być może najrozsądniejsze podejście polega na traktowaniu jej jako swoistego eksperymentu. Modele AI nie są prostym odwzorowaniem ludzkiego umysłu, lecz jedną z wielu możliwych realizacji procesów poznawczych. Pokazują, że pewne funkcje – takie jak generowanie języka czy rozwiązywanie zadań – mogą być osiągnięte poprzez analizę statystycznych zależności w danych. To samo w sobie jest fascynujące, bo poszerza naszą wyobraźnię o tym, czym może być inteligencja.

Jednocześnie jednak nie oznacza to, że jesteśmy o krok od stworzenia systemów, które „myślą” w takim sensie jak ludzie. Jak zauważa w tej serii Piotr Sankowski (Δ_{26}^3), nawet najbardziej zaawansowane systemy wymagają ludzkiej interpretacji i współpracy, a ich rola polega raczej na wspieraniu procesu badawczego niż na jego zastępowaniu.

Między szumem medialnym a nauką

Debata o AI toczy się dziś na wielu poziomach – naukowym, filozoficznym, ekonomicznym, a nawet geopolitycznym. Nie można przy tym zapominać, że ogromna część rozwoju tej technologii odbywa się w sektorze prywatnym, gdzie naturalną rolę odgrywają marketing i budowanie narracji. Innymi słowy, istotna część szumu medialnego służy po prostu nakręcaniu zysków inwestorów i właścicieli firm.

To nie znaczy, że postęp jest iluzją. Przeciwnie – jest realny i imponujący. Warto jednak zachować ostrożność w interpretowaniu jego znaczenia. Zamiast pytać, czy AI „już myśli”, być może lepiej zapytać: *jakie aspekty myślenia udało się uchwycić, a jakie wciąż pozostają poza zasięgiem?*

Zamiast zakończenia

Sztuczna inteligencja nie jest ani magicznym bytem, który zaraz nas zastąpi, ani zwykłym narzędziem bez głębszego znaczenia. Jest raczej lustrem, w którym odbijają się nasze intuicje dotyczące inteligencji, języka i poznania.

Patrząc w to lustro, uczymy się nie tylko o maszynach, ale również o nas samych.

I być może najciekawsze nie jest dziś to, czy AI myśli, lecz to, co jej sukcesy mówią nam o naturze ludzkiego myślenia.

Więcej o badaniach prof. Jakuba Szymanika można przeczytać w jego pracach:

- Manuel Vargas Guzmán, Jakub Szymanik, Maciej Malicki. *Testing the limits of logical reasoning in neural and hybrid models*. Findings of the Association for Computational Linguistics: NAACL, str. 2267–2279. Association for Computational Linguistics, 2024.
- Leonardo Bertolazzi, Manuel Vargas Guzmán, Raffaella Bernardi, Maciej Malicki, Jakub Szymanik. *Teaching small language models to learn logic through meta-learning*. Proceedings of the 19th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers), pages 8049–8080. Association for Computational Linguistics, 2026.

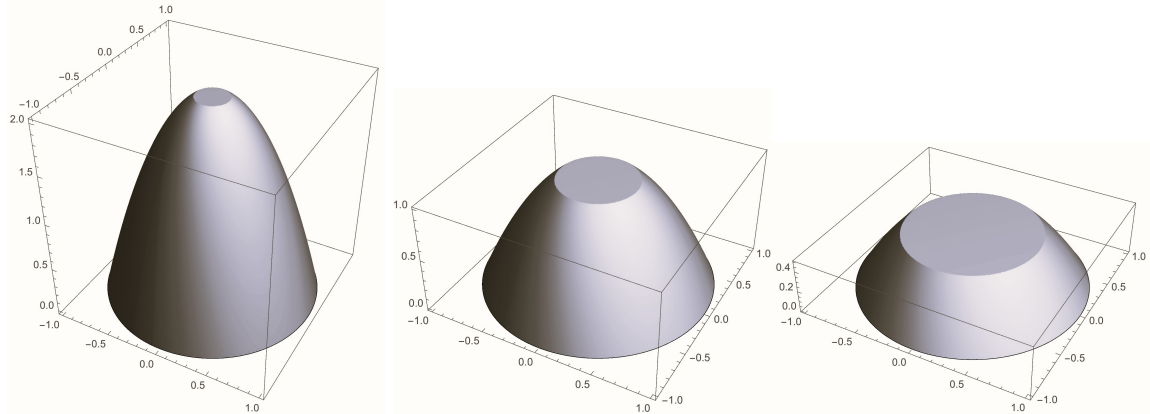
Kształt i opór, część 3/4

Ruch bez oporu?

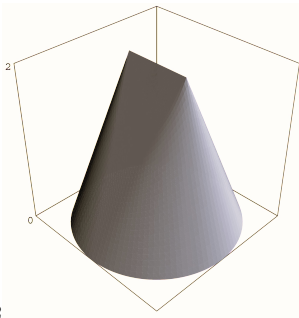
*Kontakt: gornicki59@gmail.com

Jarosław GÓRNICKI*

W części 2/4 rozwiązaliśmy następujący problem areodynamiczny: Wyznaczyć powierzchnię obrotową (o wysokości H oraz podstawie w kształcie okręgu o promieniu R), która ogranicza obszar wypukły i stawia najmniejszy opór podczas ruchu postępowego w rozrzedzonym ośrodku. Rozwiązaniem są powierzchnie Newtona z „płaskim czubkiem”, jak na rys. 1.



Rys. 1. Ruch odbywa się wzdłuż osi obrotu w kierunku dysku o mniejszej średnicy.

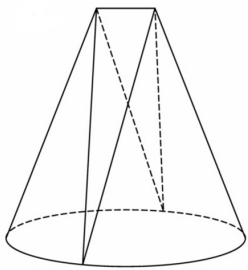


Rys. 2

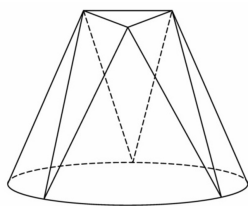
Idąc dalej, Giuseppe Buttazzo i Bernhard Kawohl (1993) postawili pytanie o istnienie *nieobrotowej* powierzchni (o wysokości H , z okręgiem o promieniu R w podstawie), która ogranicza obszar wypukły, ale w ruchu postępowym stawia mniejszy opór niż powierzchnia Newtona. Przykład takiej powierzchni znalazł Paolo Guasoni (Università di Pisa, 1996) – przypomina ona „końcówkę śrubokręta” i składa się z dwóch płaskich trójkątów oraz dwóch powierzchni stożkowych, zakończonych poziomym odcinkiem u góry (rys. 2, 3).



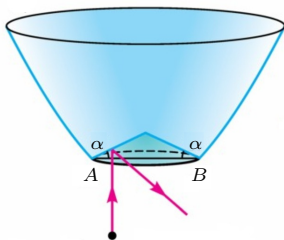
Zdjęcie współczesnego pocisku bojowego (USA, 2025)



Rys. 3



Rys. 4



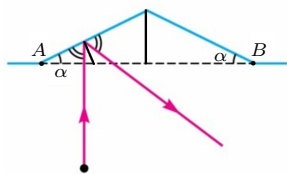
Rys. 5

Sprawdzenie tego wykracza poza zakres naszych rozważań, więc pozostaniemy w świecie informacji obrazkowej. Zauważono, że poniżej pewnej wysokości „śrubokręt” stawia większy opór niż odpowiadająca mu powierzchnia Newtona. Ratunkiem okazało się zastąpienie górnego odcinka powierzchnią utworzoną z trójkąta równobocznego oraz zestawem trzech trójkątów i trzech powierzchni stożkowych po bokach (rys. 4). Taka powierzchnia stawiała mniejszy opór niż odpowiadająca jej powierzchnia Newtona. Dalsze zmniejszanie wysokości prowadzi do nowej powierzchni, w której trójkąt równoboczny zastępujemy kwadratem, potem pięciokątem foremnym, sześciokątem, itd. Uzyskujemy rodzinę powierzchni z wielokątem foremnym na górze, przy czym im mniejsza wysokość, tym większa liczba boków. Obliczenia numeryczne pokazują, że wygładzenie krawędzi takich powierzchni może nieznacznie zmniejszyć ich opór...

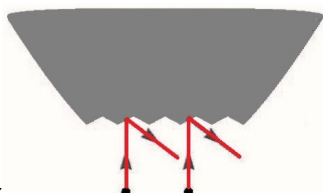
Czy istnieje inny sposób, aby zmniejszyć opór stawiany przez powierzchnię Newtona? Tak!

Wiemy już, że porzucenie symetrii poprawiło własności areodynamiczne – nieobrotowa powierzchnia stawia mniejszy opór. Rezygnacja z wypukłości obszaru ograniczonego przez powierzchnię Newtona również zmniejsza jej opór w ruchu postępowym!

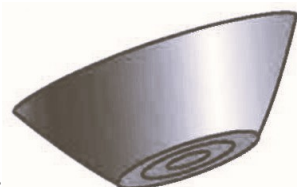
W płaskiej części powierzchni Newtona zrobimy zagłębienie w kształcie stożka (rys. 5). Kąt α między odcinkiem AB a tworzącą stożka należy dobrać możliwie



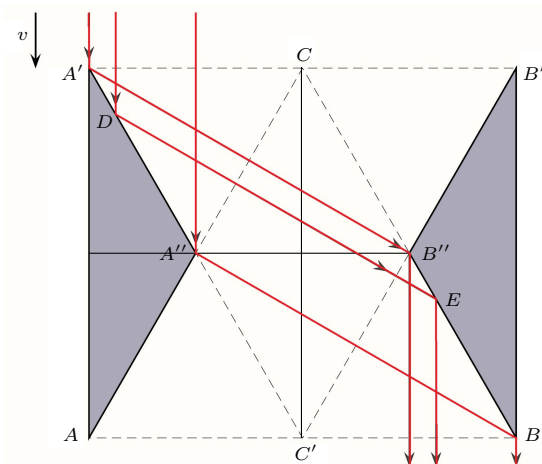
Rys. 6. Żadna odbita cząstka nie trafi w powierzchnię boczną stożka, gdy kąt α spełnia nierówność $90^\circ - \alpha \geq 2\alpha$, czyli $\alpha \leq 30^\circ$.



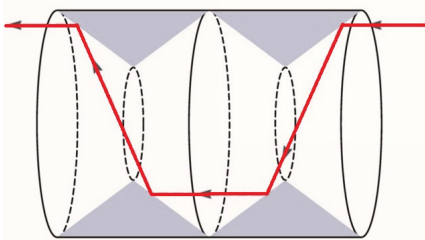
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9. Na tym schemacie można zmienić kąt $\angle AA'A'' = 30^\circ$ na dowolny kąt $\alpha < 45^\circ$. Wtedy wielkość zaznaczonych trójkątów i odległość między przeciwnymi wierzchołkami A'' , B'' ustalają zależności liczbowe $GA'' = GA \cdot \tan \alpha$, $GB'' = GA \cdot \tan 2\alpha$.



Rys. 10

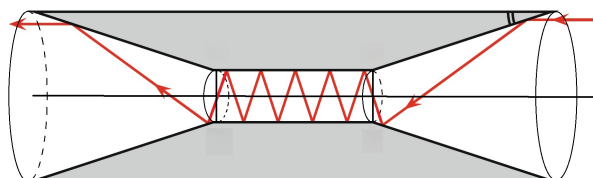
Parabola jest wykresem funkcji kwadratowej. Geometrycznie, to zbiór punktów płaszczyzny równo oddalonych od danego punktu (ogniska) i danej prostej (kierownicy).

duży, ale jednocześnie tak, aby cząstka uderzająca w powierzchnię boczną stożka po odbiciu nie uderzyła w nią po raz drugi. Optymalną sytuację zapewnia kąt $\alpha = 30^\circ$ (rys. 6). Wtedy pęd przekazany przez cząstkę ośrodka uderzającą w wewnętrzną powierzchnię stożka będzie równy $P \cdot \sin^2 60^\circ = P \cdot \frac{3}{4}$. Oznacza to, że opór stawiany przez powierzchnię o kształcie wydrążonego stożka jest o 25% mniejszy od oporu stawianego przez odpowiadający jej płaski fragment powierzchni Newtona. Jeśli istnieją powody, dla których wydrążenie takiego stożka jest niemożliwe (lub niepożądane), to równoważnym rozwiązaniem jest wydrążenie w płaskiej części powierzchni Newtona wielu niewielkich rowków w kształcie otaczających oś obrotu pierścieni, które w przekroju zawierającym oś obrotu mają kształt równoramiennych trójkątów o kącie 30° przy podstawie (rys. 7, 8). Oczywiście rowki (w układzie koncentrycznym) można zastosować do całej powierzchni, zmniejszając jej opór (jak się okazuje, nie więcej niż o 50%), ale to nie koniec naszych możliwości...

Czy istnieją bryły o dodatniej objętości, które w ruchu postępowym stawiają zerowy opór? Również tak!

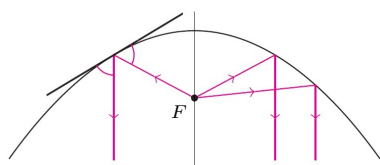
Porzucmy pomysł udoskonalania powierzchni Newtona i zastanówmy się nad zupełnie nową powierzchnią. Na płaszczyźnie rysujemy dwa trójkąty równoboczne $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 9) tak, by wierzchołek C był środkiem odcinka $A'B'$, a wierzchołek C' środkiem odcinka AB . Niech A'' będzie punktem przecięcia odcinków AC i $A'C'$, a B'' punktem przecięcia odcinków BC i $B'C'$. Rozważmy trójkąty równoramienne $\triangle AA'A''$ i $\triangle BB''B'$ o kątach $\angle A'' = \angle B'' = 120^\circ$. Odcinek $A'A''$ jest równoległy do odcinka $B''B$ (podobnie odcinek AA'' jest równoległy do odcinka $B''B'$). Cząstka wpadająca do tunelu równolegle do odcinka $A'A$ uderza w odcinek $A'A''$, powiedzmy, w punkcie D . Jej kąt natarcia jest równy 30° . Po odbiciu uderza w punkt E (taki, że $A'D = B''E$), po czym, poruszając się z tą samą prędkością, opuszcza tunel w kierunku równoległym do kierunku wlotu. Ponieważ zderzenia są idealnie sprężyste, w punktach D i E efektywne siły oporu (powstałe w wyniku tych zderzeń) uzyskują takie same wartości, ale będą przeciwnie skierowane. W konsekwencji opór wywołany przez uderzającą cząstkę jest zerowy. Jeżeli teraz obrócimy trójkąt $\triangle AA'A''$ (lub trójkąt $\triangle BB''B'$) wokół osi CC' , to otrzymamy wałek z wydrążoną klepsydrą (stożkami ściętymi), którego ruch postępowy w kierunku osi $A'A$ odbywa się z zerowym oporem. Ruch kilku sklejonych takich segmentów (rys. 10) wzdłuż osi obrotu klepsydr też odbywa się z zerowym oporem. Dodatkowo, gdy liczba segmentów jest parzysta, tor ruchu cząstki „na wejściu” i „na wyjściu” pokrywa się! Zjawisko to wykorzystamy w kolejnej części.

Inną bryłę, której ruch postępowy (w kierunku osi) odbywa się z zerowym oporem, przedstawia rysunek 11. Zaznaczony kąt ma miarę $\frac{\pi}{m}$, gdzie $m \geq 5$ jest liczbą naturalną. Precyzyjne ustalenie pozostałych parametrów (długości boków trapezu, odległości między trapezami) wymaga trochę matematycznej finezji.



Rys. 11

Aby zaprezentować kolejne bryły, które mogą poruszać się ruchem postępowym bez oporu w kierunku osi obrotu, przypomnimy niezwykłą własność optyczną paraboli. Promienie światła, wychodzące z ogniska paraboli i odbijające się od powierzchni paraboli (gdzie kąt padania jest równy kątowi odbicia), wędrują



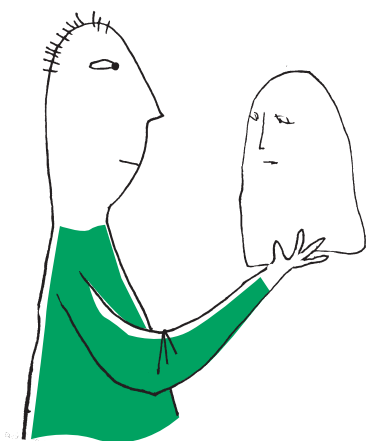
Rys. 12. Optyczne własności paraboli przedstawia artykuł Joanny Jaszuńskiej w Δ_{18}^6 .

Zaniedbaliśmy możliwość zmian kierunku ruchu, występowanie energii cieplnej, strukturę materiału, itp. Bądźmy jednak optymistami. Wiele istniejących dzisiaj rzeczy (rozwiązań) kiedyś uważano za abstrakcyjne.

O niewidzialnych bryłach opowiemy w następnej części.

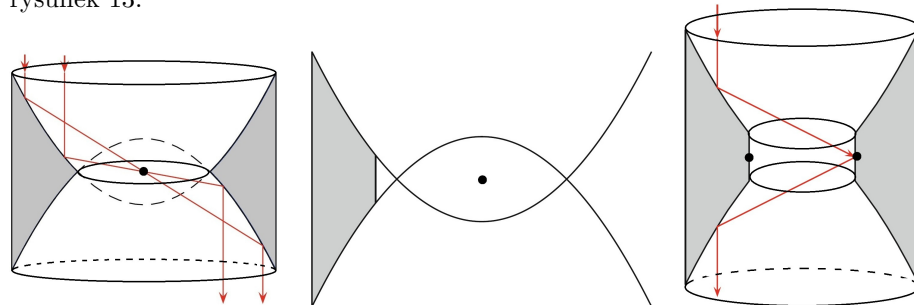


Zadania



Rozwiązania na str. 24

dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii paraboli (rys. 12). Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii paraboli – po odbiciu od „wewnętrznej strony” krzywej – skupia się w jej ognisku. Tak samo jest dla trójwymiarowej paraboloidy obrotowej otrzymanej przez obrót paraboli wokół jej osi symetrii. Ideę konstrukcji brył opartych na tym pomysle przedstawia rysunek 13.



Rys. 13. Zaznaczone punkty to wspólne ogniska „przeciwnie skierowanych” parabol o wspólnych osiach symetrii

Niestety, to tylko rozważania teoretyczne w rozrzedzonym ośrodku, które nie uwzględniają wielu aspektów (patrz margines), a ponadto prawdziwe są twierdzenia:

Twierdzenie (Alexander Plakhov, Vera Roshchina, 2011).

- Istnieje bryła, której powierzchnia stawia zerowy opór w przypadku ruchu w dwóch prostopadłych kierunkach.
- Nie istnieje bryła, której powierzchnia stawia zerowy opór we wszystkich kierunkach.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1153. Żaglowa łódź o masie $M = 1000$ kg jest unieruchomiona w obszarze równikowej ciszy. Kapitan próbuje ją „uruchomić”, wciągając na maszt skrzynię o masie $m = 200$ kg. Jaką maksymalną prędkość u może osiągnąć łódź, jeśli środek masy skrzyni został podniesiony na wysokość $h = 20$ m, a łódź znajduje się dokładnie na równiku? Równikowy promień Ziemi wynosi $R = 6378$ km, a doba trwa $T = 86\,400$ s.

F 1154. Wykonano pomiary zależności od temperatury, T , ciśnienia pary amoniaku nad jego fazą stałą, $p_s(T)$, oraz nad jego fazą ciekłą, $p_l(T)$. Wyniki z dobrym przybliżeniem opisują wzory ($p_0 = 1$ Pa, $T_0 = 1$ K):

$$\ln \frac{p_s}{p_0} = 27,92 - \frac{3754T_0}{T}, \quad \ln \frac{p_l}{p_0} = 24,38 - \frac{3063T_0}{T}.$$

Wyznacz współrzędne (p_t, T_t) punktu potrójnego amoniaku.

Przygotował Dominik BUREK

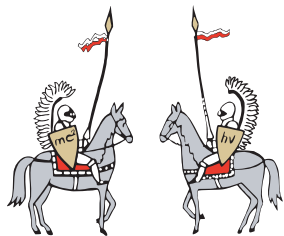
M 1867. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a i b takich, że

$$\frac{a}{p} + \frac{p}{b} = 2.$$

M 1868. Na tablicy wypisano 2026 parami różnych liczb naturalnych większych od 1. Okazało się, że dla każdej wypisanej liczby a istnieje co najmniej k par wypisanych liczb $b < c$, dla których liczba $bc - 1$ jest podzielna przez $a - 1$. Wyznaczyć największą możliwą wartość k .

M 1869. Dany jest czworokąt przestrzenny $ABCD$, którego boki AB , BC , CD , DA są styczne do pewnej sfery, odpowiednio, w punktach K , L , M i N . Udowodnić, że:

- punkty K , L , M i N leżą na jednej płaszczyźnie, a na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg;
- środek okręgu opisanego na czworokącie $KLMN$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez środki odcinków AC i BD oraz środek sfery.



Turniej Młodych Fizyków

Łukasz GŁADCZUK

W Turnieju Młodych Fizyków drużyny złożone z pięciu uczniów szkół ponadpodstawowych mają cały rok, aby przygotować opracowania otwartych zadań z fizyki. Przeprowadzają doświadczenia, tworzą modele teoretyczne i analizują wyniki. Podczas zawodów prezentują i bronią swoich rozwiązań oraz oceniają wystąpienia innych drużyn, przyjmując rolę oponenta i recenzenta. W ten sposób uczą się prowadzenia samodzielnych badań, uzasadniania pomysłów i pracy w zespole.

Krajowe eliminacje rozpoczynają się w styczniu etapem korespondencyjnym, w którym drużyny przesyłają pisemne opracowania dziesięciu wybranych zagadnień. Najlepsze zespoły spotykają się następnie w półfinałach i finale krajowym, rozgrywanych w formie potyczek fizycznych. Zwycięska drużyna reprezentuje Polskę w Międzynarodowym Turnieju Młodych Fizyków, który w 2027 roku odbędzie się w Auckland w Nowej Zelandii. Więcej informacji oraz terminarz etapów można znaleźć na stronie tmf.org.pl.

Problemy Turnieju Młodych Fizyków 2027

1. Wymyśl sam: okulary przeciwsłoneczne z otworkami.

Zbadaj, jak optymalnie rozmieścić otworki w nieprzezroczystej folii, aby wykonane z niej okulary przeciwsłoneczne zmniejszały natężenie światła i pomagały korygować krótkowzroczność.

2. Spektrometr z płyty optycznej. Ścieżki danych na nośnikach optycznych, takich jak płyty CD i Blu-ray, działają jak wysokiej jakości odbiciowe siatki dyfrakcyjne. Po oświetleniu płyty te mogą rozszczepiać światło na składowe widmowe. Zbuduj spektrometr wykorzystujący taką płytę. Zoptymalizuj jego konstrukcję celem zmaksymalizowania zdolności rozdzielczej i zminimalizowania aberracji optycznych.

3. Ślimacza kula. Wewnątrz wydrążonej kuli znajdują się ciężka kulka i pewna ilość lepkiej cieczy. Taka kula stacza się po równi pochyłej ruchem niejednostajnym, w zaskakująco wolnym tempie. Wyjaśnij i zbadaj to zjawisko.

4. Śpiewający kondensator. Niektóre rodzaje kondensatorów ceramicznych emitują słyszalny dźwięk, gdy do ich zacisków zostanie przyłożone zmienne napięcie. Zbadaj charakterystykę wytwarzanego dźwięku i jego zależność od istotnych parametrów, takich jak wartość i częstotliwość przyłożonego napięcia oraz właściwości kondensatora.

5. Wahadło w kształcie litery „Y”. Zbuduj wahadło Bowditcha, którego nici układają się w kształt litery „Y”. Zbadaj, jak figury Lissajous, kreślone przez ciężarek, zależą od istotnych parametrów.

6. Zobaczyć dźwięk. Cienka gumowa membrana jest naciągnięta na obręcz i wprawiana w drgania za pomocą głośnika. Do membrany przymocowane jest małe lustro. Odbita od niego wiązka światła laserowego pada na odległy ekran. W pewnych warunkach plamka laserowa kreśli złożone wzory geometryczne, które mogą pozostawać niezmiennie lub zmieniać się w czasie. Zbadaj zależność powstających wzorów świetlnych od parametrów wymuszenia i właściwości membrany.

7. Tonący lejek. Gdy odpowiednio ciężki lejek z długą szyjką zostanie wpuszczony do wody w pozycji pionowej, z szyjką skierowaną w dół, wykonuje serię tłumionych drgań pionowych i stopniowo tonie. Zbadaj ruch i stabilność tonącego lejka oraz warunki, w których się przewraca.

8. Tarcza napędzana ku górze. Okrągła tarcza jest zawieszona w punkcie, w którym dociskają ją z obu stron dwa

koła, dzięki czemu może swobodnie oscylować jak wahadło. Jedno z kół jest napędzane silnikiem i działa na tarczę siłą skierowaną ku górze, wprawiając ją w ruch. Zbadaj ruch tarczy.

9. Fotograficzny efekt bokeh. Efekt bokeh obserwuje się na fotografiach, które przedstawiają obiekty znajdujące się w różnych odległościach od aparatu oraz zawierają zarówno obszary ostre, jak i nieostre. Jeśli przed obiektywem aparatu umieści się przesłonę szczelinową, w nieostrych obszarach obrazu mogą pojawić się nietypowe anizotropowe zniekształcenia, podczas gdy obszary ostre pozostają wyraźne i niezniekształcone. Zbadaj, jak właściwości i ostrość uzyskiwanych obrazów zależą od istotnych parametrów.

10. Wir powietrzny. Umieść niewielki magnes w kształcie pręta na dnie naczynia wypełnionego cieczą i wpraw go w ruch obrotowy za pomocą mieszałki magnetycznej. Po przekroczeniu pewnej prędkości kątowej powstaje cienki tunel powietrzny, sięgający od powierzchni cieczy aż do obracającego się magnesu. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

11. Izolacja akustyczna. Izolacja akustyczna pomieszczenia może zostać pogorszona, jeśli drzwi nie są prawidłowo domknięte, nawet gdy powstała szczelina jest bardzo mała. Zbadaj, jak kształt i rozmiar wąskiej szczeliny wpływają na transmisję dźwięku.

12. Sztuczka z kropkowaną linią. W pewnych warunkach kawałek kredy przeciągany po tablicy pozostawia ślad w postaci okresowego ciągu kropek zamiast ciągłej linii, mimo nieprzerwanego ruchu kredy. Może tak się wydarzyć również w przypadku innych materiałów do pisania i innych powierzchni. Zbadaj parametry fizyczne wpływające na przebieg tego zjawiska.

13. Wirowe wahadło. Wahadło z cylindrycznym ciężarkiem ustawionym pionowo jest zawieszone nad kanałem, w którym płynie woda. Gdy ciężarek jest częściowo zanurzony, przepływ cieczy może wprawić wahadło w drgania w kierunku prostopadłym do kierunku przepływu. Wyjaśnij to zjawisko i określ, jak zależy ono od istotnych parametrów.

14. Nienewtonowskie robaki. Gdy znajdująca się w zbiorniku nienewtonowska ciecz dylatacyjna (z ang. *dilatant*; ciecz, której lepkość rośnie odwracalnie wraz ze wzrostem szybkości ścinania), na przykład zawieszona skrobi kukurydziana w wodzie, jest wprawiana w pionowe drgania, w pewnych warunkach z jej powierzchni mogą wyrastać struktury przypominające robaki. Wyjaśnij i zbadaj to zjawisko.

15. Zimny napój. Puszkę lub butelkę napoju o temperaturze pokojowej można schłodzić w pojemniku zawierającym lód. Dodanie do lodu soli i alkoholu może zwiększyć szybkość chłodzenia oraz wpłynąć na końcową temperaturę napoju. Zbadaj, jak istotne parametry wpływają na najniższą osiągalną temperaturę i maksymalną szybkość chłodzenia.

16. Karuzela magnetyczna. Do poziomej tarczy przymocowano kilka magnesów neodymowych, przy czym sąsiednie magnesy zorientowano w przeciwnych kierunkach. Nad tarczą umieszczono nieruchomą, ustawioną poziomo płytę wykonaną z materiału niemagnetycznego. Gdy tarcza obraca się wokół osi pionowej, a na płycie umieści się stalową kulkę, kulka ta może poruszać się w kierunku zgodnym z obrotem tarczy albo przeciwnym do niego. Zbadaj zjawisko i określ, jak ruch kulki zależy od istotnych parametrów.

17. Opadająca okładka książki. Połóż książkę poziomo i pozwól, by jej częściowo otwarta okładka opadła. Zbadaj ruch opadającej okładki.



Inwazja barbarzyńców

Na mój plecak, oparty w metrze na kolanach, wpelza biedronka. Musiała jakoś na mnie wylądować w drodze do podziemi. Strącam ją z niechęcią pomieszaną ze złością. Zabrano mi radość z widoku czerwonego chrząszcza w czarne kropki, od kiedy w Polsce rozpanoszyła się inwazyjna *Harmonia* z Azji.

Wielbiciele przyrody wystawieni są teraz na ciężkie próby. Nie da się już tak po prostu kochać wszystkiego, co żywe. Jedne się wielbi, z innymi zaciekle walczy najbardziej nieprzyjemnymi metodami. Wchodząc do wody w Zatoce Puckiej, czuję lekkie obrzydzenie na widok setek maleńkich rybek – przedstawicieli inwazyjnej babki byczej – gromadzących się wokół moich stóp. Krzywię się, widząc pod koniec lata piękne słonecznożółte łąny nawłoci na łąkach. Ostatnio do listy dopisuję kolejną roślinę, która wyrasta w wielu miejscach miasta: wyniosłe i smukłe drzewo o równie górnolotnej nazwie: bożodrzew gruczołowaty (*Ailanthus altissima*).

A wszystko za sprawą francuskiego jezuitę i przyrodnika Pierre'a d'Incarville'a, który w połowie XVIII wieku przesłał z Chin do Francji nasiona, myśląc je z nasionami cennego drzewa lakowego. Przypadkowy przybysz szybko jednak trafił do ogrodów i parków w całej Europie, gdzie przez wiele lat był uznawany za egzotyczne drzewo ozdobne. W Anglii bożodrzew nazwano drzewem niebiańskim (*Tree of Heaven*) – zapewne z powodu nieprawdopodobnych możliwości tempa wzrostu. Początkowo pnie się do nieba z prędkością nawet dwóch metrów rocznie, dochodząc w ciągu 25 lat aż do 15 metrów. Do końca swojego stosunkowo krótkiego (jak na drzewo) życia – rzadko przekraczającego 50 lat – osiąga imponującą, dwukrotnie większą wysokość. Liście złożone bożodrzewu mogą dorastać do około 90 centymetrów.

Pnie dwóch takich drzew widzę z okien mieszkania na trzecim piętrze starej kamienicy, korona jest jeszcze wyżej. Skaczą po niej ptaki, w zagłębieniu między rozgałęzieniami ucina drzemkę wiewiórka. Gałęzie oceniają rozpalony letnim słońcem asfalt na podwórku. Skoro niebiańska roślina jest taka piękna i wyniosła – w czym problem?

Boskie drzewo od 2019 roku znajduje się na liście inwazyjnych gatunków obcych (IGO) w Europie. Jego głęboko sięgające korzenie rozsadzają podziemne struktury, w tym mury, rury, otuliny, instalacje, fundamenty i utwardzane powierzchnie. Bożodrzew znakomicie rośnie w środowisku przekształconym przez człowieka – na nieużytkach, gruzowiskach, ruinach, na dachach, w rynnach, terenach zdegradowanych przez przemysł. Lubi słońce i ciepło, jest odporny na zanieczyszczenie powietrza, zasolenie, niskie pH, wysokie stężenie metali ciężkich w glebie, a także okresy suszy. Cięcie, wycinanie całych osobników, usuwanie korzeni u roślin starszych niż pięć lat pobudza roślinę do gwałtowniejszego wzrostu. Zraniony korzeń produkuje masowo odrosty, czyli nowe pędy wyrastające nad ziemię. Do tego dochodzi działanie bożodrzewu na inne rośliny. W swoich tkankach wytwarza substancje hamujące kiełkowanie i wzrost innych roślin. Najsilniej działającym związkiem jest ailanton, należący do tak zwanych kwasinoidów – związków, które jako pierwsze wyizolowano z rośliny o wiele mówiącej nazwie gorzka właściwa (*Quassia amara*, stąd nazwa grupy związków).

Bożodrzew gromadzi ailanton w korze, liściach oraz aktywnie wydziela go korzeniami. Zrzucając jesienią liście,

zapewnia obecność trucizny w glebie także w okresie zimowego spoczynku i wybudzania się z niego na wiosnę. Niestety bezpośredni kontakt człowieka z rośliną może działać na skórę drażniaco i uczulająco, powodując m.in. zaczerwienienie, pieczenie, swędzenie lub stan zapalny, szczególnie po kontakcie z uszkodzonymi częściami rośliny. W połączeniu z niezwykle ekspansywnością bożodrzewu te niezbyt sympatyczne właściwości sprawiły, że angielskie *Tree of Heaven* bywa złośliwie przerabiane na *Tree of Hell*.

Nie wiemy jeszcze dokładnie, jaki jest molekularny mechanizm hamowania wzrostu i kiełkowania przez ailanton. Badania laboratoryjne wykazują w komórkach gwałtowny wzrost tzw. reaktywnych form tlenu (ang. ROS), wolnych rodników, a zatem stres oksydacyjny. To sytuacja alarmowa dla komórki – ROS uszkadzają wszystkie cząsteczki kluczowe dla życia, począwszy od DNA, RNA, poprzez lipidy budujące błony komórkowe oraz te tworzące mitochondria i chloroplasty, na białkach skończywszy. Dlatego działanie ailantonu w konsekwencji powoduje aktywację wielkiej liczby genów, które kodują białka służące naprawie i „czyszczeniu” komórki z cząsteczek uszkodzonych. Niejednokrotnie kończy się to jednak śmiercią komórki, kiedy poziom zniszczeń przekracza możliwości naprawy.

Sam bożodrzew unika tego niebezpieczeństwa na kilka sposobów. Po pierwsze, produkuje truciznę z dezaktywującym łańcuchem reszty cukrowej. Jest on odcinany w momencie wydzielania substancji na zewnątrz komórek korzeni. Po drugie, ailanton jest gromadzony w wydzielonych częściach komórki, przez co nie ma dostępu do tych procesów, które zaburza u innych roślin. Po trzecie, białka, z którymi ailanton wchodzi w interakcję w procesie ewolucji, przeszły mutacje, które zmieniły ich strukturę. To sprawia, że jego wpływ na fizjologię bożodrzewu jest znacznie słabszy. W Polsce zmiany środowiska sprzyjają ekspansji bożodrzewu. Susze, pożary i inne zaburzenia tworzą w lasach otwarte miejsca, w których światłoludne drzewo może szybko się zadomowić. Odporność na suszę i zanieczyszczenia daje mu przewagę tam, gdzie jest dużo słońca. Mimo że gatunek występuje przede wszystkim w siedliskach przekształconych przez człowieka, odnotowano też jego obecność poza nimi. Szczególnie podatne na jego ekspansję są lasy łęgowe, ciągnące się wzdłuż dolin rzecznych.

Skuteczny podbój nowych terenów jest związany z tzw. „ucieczką przed wrogiem”. W swojej ojczyźnie – Azji

Wschodniej – bożodrzew gruczołowaty nie zachowuje się jak niekontrolowany „najeźdźca”, ponieważ przez tysiące pokoleń współistniał z miejscową przyrodą. Jego populację ograniczają tam roślinożercy i patogeny, które przystosowały się do wykorzystywania tego gatunku, a część rodzimych roślin nie jest wrażliwa na wydzielane przez drzewo związki. W Europie bożodrzew uciekł spod tej naturalnej kontroli i znalazł się w środowisku, w którym jego szybki wzrost, skuteczne rozmnażanie i tolerancja trudnych warunków dają mu dużą przewagę.

W Azji bożodrzew wykorzystuje się jako surowiec dla przemysłu drzewnego, hoduje się na nim także jedwabnika. Wreszcie, od wieków kora z korzeni stosowana była przeciw bieguncce, krwawieniu, infekcjom i niektórym chorobom skóry.

Dlatego od wielu lat bada się, jak wykorzystać ailanton we współczesnej medycynie. Najwięcej nadziei budzi jego potencjalne działanie przeciwnowotworowe. W doświadczeniach na zwierzętach hamuje namnażanie komórek wielu rodzajów nowotworów i może uruchamiać tzw. apoptozę, zaprogramowaną śmierć komórki. Wygląda na to, że ailanton może działać na komórki nowotworowe, które stały się odporne na leczenie – badano jego działanie m.in. wobec komórek opornych na cisplatynę. Wciąż

jednak sporo wyzwań przed badaczami. Najnowsze prace wskazują możliwe kierunki, które pozwolą ominąć istotny problem – toksyczność związku dla zdrowych komórek. Poszukuje się takich metod, aby ailanton zabijał nowotwór, zarazem nie szkodząc tym zdrowym komórkom.

To my sami sobie ściągamy nieszczęścia na głowę. Inwazyjne gatunki nawłoci pochodzą z Ameryki Północnej; do Europy sprowadzone zostały jako rośliny ozdobne i miododajne. Z czasem wymknęły się z upraw i zaczęły szybko kolonizować siedliska poza nimi. Babka bycza do Bałtyku przedostała się wraz z wodami balastowymi statków, a biedronkę *Harmonię* sprowadzono do Niemiec jako biologiczną broń przeciwko mszycom. Lista gatunków inwazyjnych jest bardzo długa. Z pewnością w dalszej perspektywie przyroda dzięki ewolucji poradzi sobie z kolonizatorami. Zapewne kosztem obecnie różnorodnych (wciąż) ekosystemów. Z drugiej strony, kiedy myślę o degradacji środowiska spowodowanej przez najbardziej inwazyjny gatunek na świecie, nas samych, może to takie właśnie organizmy są naszą nadzieją. Te, które przeżyją w skrajnie niekorzystnych dla większości warunkach, gdy reszta nie da rady?

Marta FIKUS-KRYŃSKA



Łat otwarty 20°: Zbieżny czy rozbieżny?

Bartłomiej PAWLIK*

*Politechnika Śląska

Istnieją szeregi, które wyglądają jak ćwiczenie z pierwszego kursu analizy, a w rzeczywistości dotyczą jednego z trudnych pytań o liczbę π . Ale zacznijmy delikatnie, od najistotniejszych definicji i faktów. Jeżeli a_n jest nieskończonym ciągiem liczbowym, to wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

nazywamy szeregiem o wyrazie ogólnym a_n . Jeżeli istnieje skończona granica ciągu sum częściowych

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i,$$

to mówimy, że dany szereg jest zbieżny do g . Szeregi, które nie są zbieżne, nazywamy rozbieżnymi. Sztandarowym przykładem szeregu zbieżnego jest suma odwrotności potęg liczby 2, natomiast przykładem rozbieżnego – suma odwrotności liczb naturalnych (tzw. szereg harmoniczny)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Podstawowe metody określania zbieżności szeregów są jednymi z pierwszych zagadnień, z którymi studenci się zapoznają na podstawowym kursie analizy matematycznej – należą do nich kryteria: porównawcze, Cauchy’ego oraz d’Alemberta. Czasami zdarza mi się prowadzić ćwiczenia z analizy dla studentów informatyki na Politechnice Śląskiej – zawsze pod koniec zajęć na temat szeregów proponuję im zbadanie zbieżności jednego z nich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}.$$

Próby rozwiązania tego zadania często okazują się dla studentów pouczające, lecz jeszcze nikomu nie udało się tej zbieżności rozstrzygnąć. Zawsze po kilku nieudanych (i nierzadko pomysłowych!) podejściach na pocieszenie oznajmiam, że ja również nie potrafię tego rozwiązać i, z tego co mi wiadomo, w zasadzie nikt nie potrafi.

Rzeczona suma znana jest jako szereg Flint Hills i została przedstawiona w 2002 roku przez Clifforda A. Pickovera w książce *The Mathematics of Oz. Mental Gymnastics from Beyond the Edge*. Dziewięć lat później okazało się, że określenie zbieżności tego szeregu pozwoliłoby nam trochę lepiej zrozumieć naturę liczby π . Max Alekseyev wykazał, że gdyby szereg Flint Hills był zbieżny, to liczby wymierne nie mogłyby przybliżać π „zbyt dobrze”: wyjątkowo dokładne przybliżenia musiałyby pojawiać się dostatecznie rzadko. Poglądowo można to uzasadnić następująco:

Zauważmy, że wartości ułamka $1/(n^3 \sin^2 n)$ są „duże” tylko wtedy, gdy mianownik jest bliski 0 – zdarza się to, gdy n znajduje się blisko miejsc zerowych funkcji sinus, którymi są (jak wiemy ze szkoły średniej) wielokrotności liczby π . Zatem elementy szeregu przyjmują duże wartości dla takich par liczb naturalnych n i k , dla których $n \approx k\pi$, co jest równoważne z $n/k \approx \pi$. Zbieżność szeregu zależy więc od tego, czy takie wyjątkowo dobre przybliżenia liczby π pojawiają się dostatecznie rzadko.

Określenie zbieżności szeregu Flint Hills zostawiam moim studentom – oraz Czytelnikom – jako zadanie domowe. Wszak Paul R. Halmos w przedmowie do podręcznika *A Hilbert Space Problem Book* sformułował bardzo przydatną zasadę dydaktyczną: *The only way to learn mathematics is to do mathematics.*

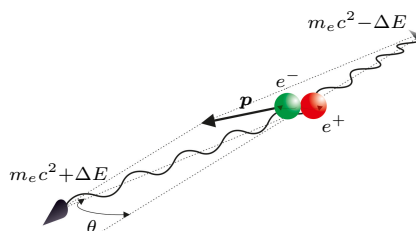
Jak pozyton, cząstka antymaterii, zrobił zawrotną karierę

*Instytut Fizyki Jądrowej PAN

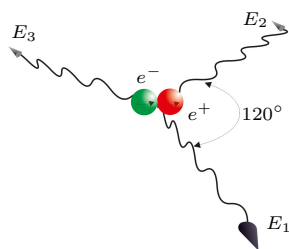
Jerzy DRYZEK*

Jednym z niezwykłych odkryć ubiegłego stulecia było to, że w naszym świecie mogą istnieć zarówno cząstki, jak i ich antycząstki, czyli materia i antymateria. W zasadzie Wszechświat mógłby być zbudowany z antymaterii i nikt by się nie zorientował, ale z jakiegoś powodu tuż po Wielkim Wybuchu coś zaburzyło tę symetrię. Większość pierwotnej materii i antymaterii uległa anihilacji, jednak niewielka część materii, która nie miała z czym anihilować, posłużyła do zbudowania obecnego świata.

Pierwszą odkrytą antycząstką, ku zaskoczeniu jej odkrywcy Carla Davida Andersona (1932 r.), był pozyton, czyli antyelektron lub inaczej dodatnio naładowany elektron. Istnienie pozytonu, które przewidział wcześniej Paul Adrien Maurice Dirac (1928 r.), jest efektem relatywistycznym. Pozyton szybko zrobił oszałamiającą karierę. Przede wszystkim dlatego, że ulega on anihilacji z napotkanym przypadkowo elektronem, produkując dwa wysokoenergetyczne tzw. fotony anihilacyjne, o energii $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ każdy, gdzie m_e to masa spoczynkowa elektronu, a c to prędkość światła. To stosunkowo twarde promieniowanie, ale jego obecność jednoznacznie świadczy o obecności pozytonu. W istocie proces anihilacji nie jest taki niezwykły. Masa spoczynkowa anihilujących cząstek zamienia się w energię, a dokładnie w bozony oddziaływania między nimi. W przypadku pozytonu i elektronu są to fotony, nośniki oddziaływania elektromagnetycznego, ale już w przypadku protonu i antyprotonu pojawiają się też i mezony. Wszystkie prawa zachowania są tu spełnione. Jeśli para w momencie anihilacji ma spiny ustawione w przeciwnych kierunkach, i cząstki są w spoczynku, to fotony anihilacyjne rozbiegają się dokładnie w przeciwnych kierunkach. Są też spolaryzowane liniowo, ale płaszczyzny ich polaryzacji są prostopadłe (rys. 1). Dodatkowo fotony te są splątane kwantowo. Suma spinów początkowo była równa zero, więc i suma spinów cząstek po anihilacji też jest zero. To kwantowe splątanie zaobserwowano także w urządzeniu o nazwie J-PET na Uniwersytecie Jagiellońskim. Kanał anihilacji na dwa kwanty, choć najbardziej prawdopodobny, nie jest jednak jedynym. Równoległe ustawienie spinów daje w wyniku anihilacji trzy kwanty, rozbiegające się pod kątem 120° , ale ich energia ma ciągle widmo energetyczne, ucinające się na energii 511 keV (rys. 2). Tu również występuje polaryzacja fotonów, dwa są spolaryzowane w płaszczyźnie wyznaczonej przez trajektorie fotonów z wektorem elektrycznym prostopadłym do niej, a jeden z równoległym. Suma spinów takich fotonów jest równa 1 (w jednostkach stałej Plancka $\hbar$).



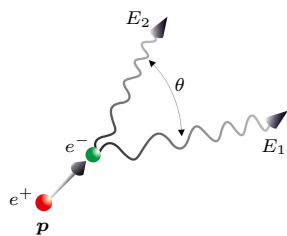
Rys. 1. Anihilacja pozytonu i elektronu „w spoczynku”. W tym przypadku elektron posiada pęd p , który sprawia, że kwanty anihilacyjne odchylają swój lot od kolinearności o niewielki kąt: $\theta = p_T/m_e c$, a ich energia, w wyniku efektu Dopplera, nieznacznie zmienia wartość o $\Delta E = p_L c/2$, gdzie p_T i p_L to rzut pędu elektronu na kierunek równoległy i kierunek prostopadły do kierunku ruchu kwantu.



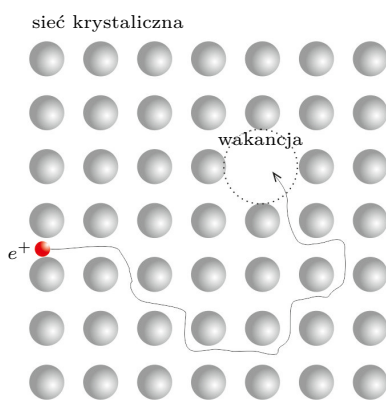
Rys. 2. Gdy spiny anihilujących cząstek są ustawione równoległe, następuje anihilacja trójkwantowa, stąd kierunki emisji fotonów ustawione są pod kątem 120° , a każdy foton ma ciągle widmo energii.

Możliwa jest też anihilacja na więcej kwantów zgodnie ze wzorem: $(-1)^n = (-1)^{L+S}$, gdzie n to liczba kwantów anihilacyjnych, a L i S to kręt orbitalny i całkowity spin anihilujących cząstek.

Przełomowym momentem w karierze pozytonu było odkrycie Sergia DeBenedettiego i współpracowników w 1949 roku. Obserwowali oni następujące zjawisko. Emitowany ze źródeł radioaktywnych podlegających rozpadowi β^+ pozyton ma bardzo wysoką energię kinetyczną, na przykład dla izotopu ^{22}Na ich maksymalna wartość to około 0,545 MeV. Taka cząstka implantowana (wprowadzona) do materii podlega zderzeniom elastycznym i nieelastycznym z jądrami atomowymi i elektronami, stopniowo wytracając swoją energię, aż w końcowej fazie lotu rozprasza się tylko na fononach (czyli kwantach drgań sieci krystalicznej) i osiąga energię drgań termicznych, tj. około 25 meV. Zjawisko to nazywamy termalizacją. Mówi się więc, że implantowany do metalu pozyton ulega termalizacji, a rozkład kątowy fotonów anihilacyjnych jest określony tylko przez rozkład pędów elektronów. Jak pokazał Paul Dirac, prawdopodobieństwo zajścia anihilacji jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne do względnej prędkości pozytonu i elektronu, stąd tzw. anihilacja „w locie”, tj. podczas utraty kinetycznej energii, zdarza się bardzo rzadko (rys. 3). Ponad 98% pozytonów anihiluje po stermalizowaniu, gdy prędkość wynosi około $5 \times 10^4 \text{ m/s}$, ale jest ona i tak mniejsza od prędkości elektronów i nazywamy to anihilacją „w spoczynku” (jak na rysunku 1). To właśnie otworzyło drogę do detekcji struktury pasmowej elektronów, a w szczególności badań nad tzw. powierzchnią Fermiego.



Rys. 3. Anihilacja „w locie”, pęd pozytonu jest znacznie większy w stosunku do pędu elektronu. Emitowane anihilacyjne fotony mają ciągle widmo energii – od pewnej minimalnej do maksymalnej wartości zależnej od energii pozytonu. Kąt θ między kierunkami emisji tych fotonów zależy od ich energii.



Rys. 4. Trajektoria ruchu pozytonu w sieci krystalicznej i jego lokalizacja w wakancji, pustym miejscu po atomie.

Już w 1934 roku Stjepan Mohorovičić przewidywał istnienie stanu związanego pozytonu i elektronu (podobnego do atomu wodoru złożonego z protonu i elektronu). Stan taki nazywamy pozytem (ang. *positronium*). Układ ten w stanie podstawowym może mieć spin o wartości 0 (tzw. stan singletowy) lub 1 (tzw. stan tripletowy). Może występować również w stanach wzbudzonych. Pozyt został zaobserwowany w roku 1951 przez Martina Deutscha w pomiarach czasu życia pozytonów implantowanych do gazów. Pomiar taki wykorzystuje fakt, że jądro ^{22}Na , po emisji pozytonu, przekształca się w jądro wzbudzone ^{22}Ne , które po czasie około $2 \times 10^{-12} \text{ s} = 2 \text{ ps}$ emituje kwant gamma o energii 1,27 MeV. Jest on znacznikiem narodzin pozytonu. Wystarczy wtedy uruchomić zegar i poczekać, aż pojawi się foton anihilacyjny o energii 511 keV. Otrzymujemy zbiór wartości odstępów czasów, które tworzą tzw. widmo czasów życia, charakteryzujące się wykładniczym zanikiem, z którego można wyznaczyć średni czas istnienia pozytonu. Wielkość ta charakteryzuje materię, w której anihiluje pozyton. Zanim jednak dojdzie do anihilacji, pozyton może z napotkanym elektronem utworzyć stan związany, czyli pozyt. Obliczenia teoretyczne pokazały, że stan singletowy pozytu w próżni anihiluje po około 125 ps, natomiast tripletowy po czasie znacznie dłuższym, bo około 145 ns. Obecność właśnie tej długiej składowej czasu życia, stwierdzona przez Martina Deutscha była dowodem na istnienie pozytu. O ile pomiary widm czasów, z uwagi na ich bardzo małe wartości, były wówczas dla eksperymentatorów wyzwaniem, o tyle dziś, choć wymaga to i tak specjalistycznej aparatury, są powszechnie stosowane. Stwierdzono, że pozyt tworzy się w cieczach, ale i ośrodkach molekularnych, np. polimerach. I tu miłe zaskoczenie. Pozyt w stanie tripletowym w tych ośrodkach ma znacznie krótszy czas życia niż ten w próżni, a to z uwagi na dużą liczbę elektronów wokół. Pozyton, zamiast czekać aż zanihiluje z własnym elektronem, anihiluje z elektronem otoczenia. Redukcja czasu życia jest znaczna, bo do wartości kilku nanosekund, i – jak stwierdzono – zależy ściśle od rozmiaru pustki, w której tworzy się ten stan. W splecionych molekułach powstają naturalne obszary wolne od atomów i elektronów o promieniu od 0,1 do 0,3 nm. Właśnie w takich obszarach lokuje się pozyton. Wychwytyując elektron i korzystając z dostępnego miejsca, tworzy z nim stan związany. Zależność między tak stwierdzonym czasem a promieniem tej pustki służy dziś do charakteryzowania polimerów na poziomie molekularnym. Jeśli w materiale są większe pory o rozmiarach rzędu 10 nm, to pozyt dożywa w nich nawet 100 ns. Dziś jest to uznana metoda wyznaczania rozmiarów porów, tzw. porozymetria pozytonowa.

Charakterystyczny jest fakt, że pozyton w materii nie jest próbnikiem lokalnym. Stermalizowany, w idealnej sieci krystalicznej pokonuje duże dystanse, głównie w obszarach międzywęzłowych na drodze około $0,5 \mu\text{m}$. Jego czas życia jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalny do panującej tam gęstości elektronowej. Może również wnikać w obszar rdzenia atomowego, ale z uwagi na dodatnio naładowane jądro atomowe, które go odpycha, zdarza się to rzadko. Anihilacja zachodzi najczęściej z elektronami walencyjnymi (rys. 4).

Gęstość elektronowa jest różna w różnych metalach, stąd i czas życia implantowanego do nich pozytonu zmienia się, np. w żelazie to 106 ps, podczas gdy już w magnezie 225 ps. Tak jest w idealnej sieci krystalicznej. Najczęściej jednak sieci zawierają różne defekty, np. pustkę po atomie, czyli tzw. wakancję (rys. 4). Dodatni pozyton, skanując duży obszar, może zostać w takim miejscu złapany jak w studni potencjału. Ponieważ jest tam mniejsza gęstość elektronowa, czas życia tak zlokalizowanego pozytonu wyraźnie się zwiększa, np. w wakancji w żelazie to już 170 ps,

a w magnezie 250 ps. Defekty, takie jak wakancje, ich skupiska, dyslokacje czy granice ziaren są powszechne w materiałach, a dokładne kwantowe obliczenia czasu życia pozytonów w nich zlokalizowanych pozwalają w oparciu o pomiary widm czasowych na identyfikację defektów. To dziś ogromny obszar badań rozwijany od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku, znany pod nazwą spektroskopii anihilacji pozytonów.

Prace Allena P. Millsa juniora i Kelvina G. Lynna w latach 1978–1979 przyniosły kolejne zaskakujące odkrycie. Stermalizowany pozyton, błędząc przypadkowo tuż przy powierzchni próbki, może zostać z niej wyrzucony z energią około 2 eV. Jest za to odpowiedzialna ujemna praca wyjścia pozytonów (stwierdzona w niektórych metalach, np. w wolframie). Takim wyrzuconym powolnym pozytonem łatwo już manipulować. Za pomocą pola elektrycznego i magnetycznego formuje się skupioną wiązkę pozytonów, które można w polu elektrycznym przyspieszyć do zadanej energii. Prawie monoenergetyczne pozytony implantowane są do

materii, ale już blisko powierzchni, bo na głębokościach poniżej 1 μm . Wydajność takiego moderatora (czyli spowalniacza) jak wolfram jest niewielka, bo na 10^4 pozytonów implantowanych ze źródła ^{22}Na tylko jeden jest wyrzucany z równie niską energią. Pomimo tego jest to wystarczające, aby uzyskać strumień – jak je nazywamy – powolnych pozytonów. Powstał tu ogromny obszar badań dotyczący defektów zlokalizowanych przy powierzchni, np. w półprzewodnikach istotnych z punktu widzenia współczesnej elektroniki. Można już dziś mówić o tzw. profilometrii pozytonowej.

O ile źródła pozytonów emitowane w rozpadach β^+ nie są zbyt wydajne, o tyle zastosowanie liniowych akceleratorów elektronowych pozwala uzyskać naprawdę wysokie wydajności. Przyspieszony we wspomnianych akceleratorach do energii około 30 MeV elektron uderza w tarczę, np. wolframową, produkując podczas hamowania ogromny strumień fotonów. Jeśli taki foton znajdzie się w pobliżu jądra atomowego, to w procesie reakcji może zamienić się w parę pozyton–elektron. Tarcza wolframowa wypełnia się pozytonami, z których część jest wyrzucana na powierzchnię, a dalej procedura przebiega jak wyżej. Uzyskane w ten sposób strumienie powolnych pozytonów są o trzy, cztery rzędy wielkości większe niż w przypadku użycia emiterów β^+ . Pozwala to przymierzyć się do naprawdę marzycielskich pomysłów, takich jak na przykład laser z użyciem pozytu, czy kondensat Bosego–Einsteina pozytonów. W takiej instalacji, jaka znajduje się w Instytucie Fizyki Promieniowania w Dreźnie-Rossendorfie, wiązkę dodatkowo szatkuje się na paczki, które w równych odstępach czasu uderzają w próbkę, ale na głębokości już poniżej 0,2 μm . Dalej za pomocą specjalnej aparatury mierzy się w tym obszarze widma czasów życia. Widmo takie już po czasie kilku minut zawiera około 10^7 zliczeń anihilacyjnych zdarzeń. W japońskim Instytucie Nauki o Strukturze Materiałów w Tsukubie używa się tak uzyskanej wiązki do dyfrakcji pozytonów na powierzchni kryształów. Dodatkowo naładowany pozyton,

poruszając się pod niewielkim kątem do badanej powierzchni, skanuje tylko pierwszą warstwę atomową, nie wnikając do wnętrza struktury. Dyfrakcyjny obraz rozproszonych pozytonów powstaje na luminescencyjnej tarczy ustawionej prostopadłe do tej powierzchni.

Na końcu należy wspomnieć o diagnostycznej technice medycznej nazwanej PET, czyli tomografii pozytonowej. Komórki guzów nowotworowych rozwijające się u chorych osób, charakteryzują się wysokim zapotrzebowaniem na glukozę, znacznie wyższym niż zdrowe komórki. Wystarczy do glukozy przytwierdzić β^+ izotop, na przykład ^{18}F , i wstrzyknąć tak przygotowany preparat do ciała pacjenta. Izotop ten, z czasem połowicznego zaniku około 110 min., emituje pozyton – który przecież musi anihilować, bo elektrony są wszędzie – produkując dwa kolinearne kwanty. Wystarczy teraz otoczyć pacjenta detektorami i zrekonstruować mapę miejsc anihilacyjnych zdarzeń. Tam, gdzie izotopu będzie najwięcej, a więc w samym guzie nowotworowym, detektor ujawni większą liczbę anihilacji niż w otoczeniu. Pozwala to zlokalizować samego guza, jeśli się rozwija, i określić jego rozmiar. Istnieją już w naszym kraju ośrodki prowadzące taką diagnostykę, która staje się standardową metodą w diagnostyce i terapii nowotworowej.

Jeśli Czytelnik chciałby zapoznać się bliżej z anihilacją pozytonów, autor zachęca do odwiedzenia strony: ifj.edu.pl/private/jdryzek/.

Jako autor zajmujący się od wielu, wielu lat techniką anihilacji pozytonów, jestem pewien, że jeszcze nieraz nas zaskoczą. Pozyton to lekka cząstka, o stosunkowo małej masie spoczynkowej, łatwa do wyprodukowania w energetycznych procesach. Może być ona pomocna w poszukiwaniu rozpadu protonu czy rozpadu cząstek ciemnej materii. Jakież anomalne zachowania w strumieniu pozytonów, docierających z kosmosu, mogą być sygnałem takich procesów. Fakt, że pozytony są obecne w centrum naszej galaktyki jako wynik rozpadów izotopów promieniotwórczych został stwierdzony już dawno, ale czy tylko tam?

Zagrajmy w Sopera

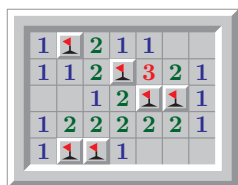
Tomasz CIEŚLA*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czytelnicy, którzy mieli styczność ze starszymi wersjami systemu operacyjnego Windows, z pewnością korzystali z dostępnych tam pasjansów Solitaire i FreeCell oraz gier: zręcznościowej Pinball, karcianej Kierki czy logicznej Saper. W artykule przyjrzymy się bliżej ostatniej z nich.

Zasady

Gra w Sopera polega na odkrywaniu pól prostokątnej planszy $m \times n$, na której ukryto k min (liczba ta jest znana uczestnikowi przed rozpoczęciem rozgrywki). Miny rozmieszczone są losowo – każdy układ pojawia się w grze z takim samym prawdopodobieństwem. Gdy pole z miną zostanie odkryte, dochodzi do wybuchu, a gracz przegrywa. W przeciwnym razie na odkrytym polu pojawia się liczba sąsiednich pól, na których są ukryte miny (pola sąsiadują, jeśli stykają się bokiem lub wierzchołkiem). Celem gry jest zlokalizowanie wszystkich min. Dla przejrzystości, pola z zerem wyświetlane są jako puste, a żeby przyspieszyć rozgrywkę, odkrycie takiego pola automatycznie odsłania również wszystkie pola sąsiednie. Gracz ma możliwość stawiania flag na polach – oznacza w ten sposób miejsca, w których znajduje się mina.

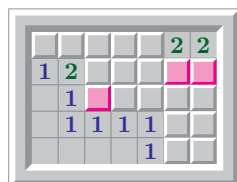


Przykładowa pozycja końcowa na planszy 7×5 , na której ukryto 6 min.

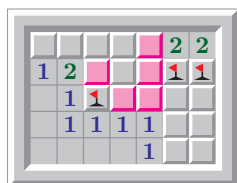
Podstawowe techniki

Liczby na odsłanianych polach dają graczowi informacje, które można wykorzystać do lokalizacji min. Często ze stuprocentową pewnością uda nam się odkryć pole lub oznaczyć je flagą. Przydatne są następujące dwie proste obserwacje.

- Jeśli na polu jest liczba j i pole to sąsiaduje z dokładnie j nieodkrytymi polami, to na każdym z nich jest mina.
- Jeśli na polu jest liczba j oraz postawiliśmy już j flag na polach sąsiednich, to można odkryć pozostałe sąsiednie pola.



Na zaznaczonych polach znajdują się miny.



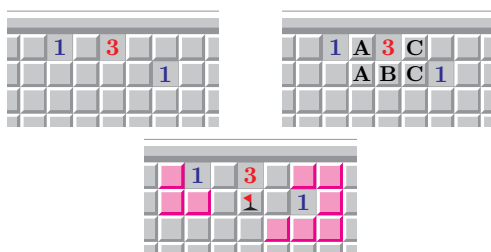
Zaznaczone pola można odsłonić.

Na prawym diagramie można odsłonić jeszcze dwa pola, ale wymaga to innych obserwacji niż powyższe. Które to pola?

Co najmniej, co najwyżej, dokładnie...

Następujący łatwy do uzasadnienia fakt daje przydatną regułę wnioskowania.

Fakt. Załóżmy, że $a_i \leq b_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, j$ oraz $\sum_{i=1}^j a_i = \sum_{i=1}^j b_i$. Wówczas $a_i = b_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, j$.



Zobaczmy, jak zastosować ten fakt na powyższym przykładzie. Oznaczmy niektóre pola literami **A**, **B** i **C**, tak jak przedstawiono to na diagramie. Wówczas pola **A** łącznie skrywają co najwyżej jedną minę (gdyż sąsiadują z polem z jedynką), pole **B** skrywa co najwyżej jedną minę (jest to oczywiste – mina albo jest, albo jej nie ma), a pola **C** – łącznie co najwyżej jedną minę (analogicznie jak dla pól **A**). Ale łączna liczba min w polach **A**, **B** i **C** to trzy. Z faktu wynika więc, że we wszystkich powyższych szacowaniach zachodzą równości. Stąd mina jest na jednym z pól **A**, na polu **B** oraz na jednym z pól **C**. Co za tym idzie, można postawić flagę na polu **B**, a pokolorowane pola – odsłonić.

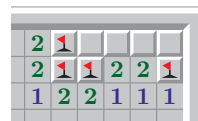
Jak tu grać?

Często nie da się bezpiecznie odkryć żadnego pola ze stuprocentową pewnością. W takiej sytuacji pozostaje tylko strzał w niepewne pole. Przy odrobinie szczęścia nie trafimy w minę i gra toczy się dalej. Jak pomóc szczęściu? To jasne – należy odkrywać pola o niskim prawdopodobieństwie posiadania miny.

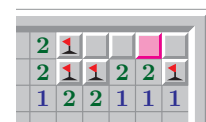
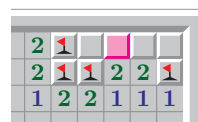
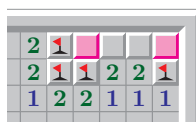
Weźmy pod uwagę następujący przykład. Gramy na poziomie początkującym (10 min na planszy 9×9). W pierwszym ruchu odsłaniliśmy lewe górne pole

Końcówka gry

Rozważmy sytuację przedstawioną na poniższym diagramie.



Wygląda na to, że jesteśmy skazani na ślepy strzał, gdyż miny można umieścić na trzy różne sposoby: w dwóch skrajnych polach lub w jednym ze środkowych pól.

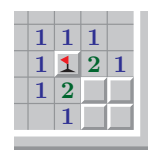


Jeżeli jednak jest to końcówka gry i są to jedyne nieodkryte pola na planszy, to gra jest wygrana.

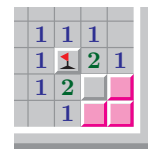
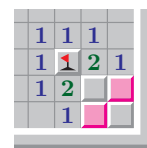
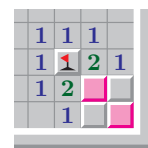
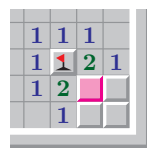
W trakcie rozgrywki nad planszą wyświetlana jest liczba min pomniejszona o liczbę postawionych flag.

Wiemy bowiem, ile min zostało do znalezienia. Jeśli do zlokalizowania zostały dwie miny, to znajdują się one w skrajnych polach – odkrywamy dwa środkowe pola i wygrywamy. Jeśli do znalezienia została jedna mina, to znajduje się ona w jednym ze środkowych pól. Odkrywamy skrajne pola i na podstawie ujawnionych liczb lokalizujemy minę.

Rzućmy okiem na inny przykład.

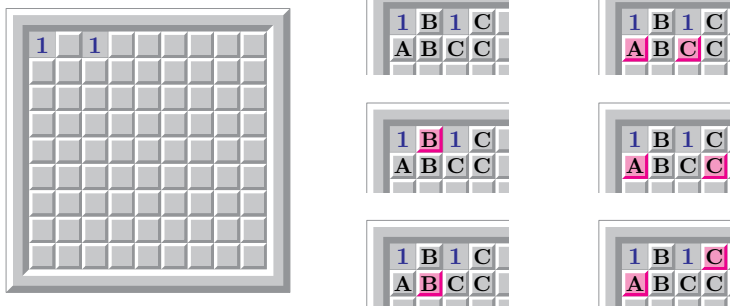


Miny można umieścić na cztery różne sposoby. Jeśli do zlokalizowania została jedna lub trzy miny, to gra kończy się zwycięstwem. Jeśli zaś zostały dwie miny, jesteśmy zmuszeni do odkrycia losowego pola i wygrywamy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.



W grze dostępne są też: poziom średniozaawansowany (16×16 , 40 min), poziom ekspert (30×16 , 99 min) oraz gra na planszy o wymiarach i liczbie min wybranych dowolnie przez gracza.

i ujrzelismy jedynkę. W tym momencie prawdopodobieństwo, że na sąsiednim polu jest mina, wynosi $\frac{1}{3}$, a na polu niesąsiadującym – $\frac{9}{77} \approx 11,69\%$. Aby zminimalizować ryzyko przegranej, odsłoniłismy pole niesąsiadujące z narożnym polem, a konkretnie w pierwszym wierszu i trzeciej kolumnie. Znowu odkryta została jedynka. Które pole teraz najlepiej odsłonić? Przed przeczytaniem dalszej części tekstu proponujemy Czytelnikowi zastanowić się nad tym samodzielnie.



Obliczmy. Oznaczmy pola literami **A**, **B**, **C** tak jak na diagramie. Jeśli pole **A** nie zawiera miny, to jedno z pól **B** zawiera minę i wtedy pola **C** są puste – dwie możliwe opcje. Jeśli zaś pole **A** zawiera minę, to pola **B** są puste i jedno z pól **C** zawiera minę – trzy możliwości w tym przypadku. Łącznie mamy pięć scenariuszy, z których wynika, że pole **A** zawiera minę z prawdopodobieństwem $p_A = \frac{3}{5} = 60\%$, a pola **B** i **C** z prawdopodobieństwem $p_B = p_C = \frac{1}{5} = 20\%$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pole nieoznaczone literą ma minę? W dwóch z pięciu opisanych scenariuszy prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{9}{73}$, a w trzech pozostałych $\frac{8}{73}$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{73} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{73} = \frac{42}{365} \approx 11,51\%$. Najlepiej więc odsłonić pole niesąsiadujące z odkrytymi dotąd polami.



Czy doszedłeś, Drogi Czytelniku, do takich samych wniosków? Jeżeli tak, to... pomyliłeś się! Okazuje się, że powyższe wyliczenia są niepoprawne i prowadzą do błędnej odpowiedzi. Co poszło nie tak?

Układy, w których mina znajduje się na jednym z pól **B**, występują znacznie częściej niż pozostałe układy. Dlaczego? Po umieszczeniu miny na jednym z dwóch pól **B** pozostaje 9 min do ustawienia na 73 polach. Liczba takich układów to $2 \cdot \binom{73}{9}$. Jeśli zaś pozostawimy oba pola **B** bez min, to musimy postawić minę na polu **A** oraz drugą minę na jednym z trzech pól **C**. Pozostało 8 min do umieszczenia na 73 polach – takich układów jest $3 \cdot \binom{73}{8}$.

Poprawnie obliczone prawdopodobieństwa to:

$$p_A = \frac{3 \cdot \binom{73}{8}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{27}{157} \approx 17,20\%,$$

$$p_B = \frac{\binom{73}{9}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{65}{157} \approx 41,40\%,$$

$$p_C = \frac{\binom{73}{8}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{9}{157} \approx 5,73\%.$$

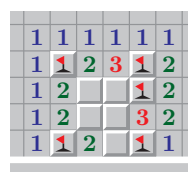
Można obliczyć, że wynosi dokładnie $\frac{1386}{11461} \approx 12,09\%$ – przeprowadzenie stosownego rachunku pozostawiamy Czytelnikowi Pracowitemu.

Przy tym prawdopodobieństwo, że pole nieoznaczone żadną literą zawiera minę, jest zbliżone do zagęszczenia min na planszy, czyli równe około $\frac{10}{81} \approx 12,35\%$.

Mamy werdykt: najbezpieczniej jest odkryć jedno z pól **C**.

Wybierz mądrze

Rozważmy poniższą sytuację.



Szybka analiza pokazuje, że brakuje dwóch min i mogą być one rozmieszczone na trzy sposoby.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

Wynikają stąd takie oto prawdopodobieństwa trafienia na minę.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2	A	B	1	2
1	2	C	D	3	2
1	1	2	E	1	1

$$p_A = \frac{2}{3}$$

$$p_B = p_C = p_D = p_E = \frac{1}{3}$$

Wygląda na to, że najbardziej opłaca się strzelić w jedno z pól **B**, **C**, **D**, **E** i nie ma znaczenia, które z nich wybierzemy.

Czy aby na pewno? Okazuje się, że odsłonięcie pola **D** lub pola **E** jest tak samo nierozsądne, jak odsłonięcie pola **A**! Najlepszy ruch to odkrycie pól **B** i **C**.

Przyczyna jest następująca: po strzale w pole **D** bądź **E**, jeśli nie trafimy w minę, znowu trzeba strzelać! Prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2		4	3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2		4	3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2	2	1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2	2	1	1

Jeśli pole **D** nie ma miny, to ma czwórkę.

Jeśli pole **E** nie ma miny, to ma dwójkę.

Z kolei przy strzałach w pola **B** i **C**, jeśli nie trafimy w minę, to jedna mina jest na polu **A**, a druga na jednym z pól **D**, **E**. Na którym? O tym dowiadujemy się na podstawie liczby odsłoniętej na polu **B**. Nie ma potrzeby strzelania, a szansa na sukces wynosi $\frac{2}{3}$ – jest dwa razy większa niż dla pozostałych pól.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2		4	1	2
1	2	3		3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2		3	1	2
1	2	3		3	2
1	1	2		1	1

Jeśli pola **B** i **C** nie mają miny, to w **C** jest trójka, a w **B** czwórka lub trójka.

Na deser

Ten przydługi tekst zakończmy zadaniem do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie. Znajdź wszystkie pola, które można bezpiecznie odkryć, oraz wszystkie pola, które na pewno zawierają minę:

2	1	2	1	1	
2	1	3	1	2	2
2	3			1	
				1	2

	2	1	3		
	1		1		
	1	2	2		

1		1			
		1			
	1	2	3		

Odpowiedzi znajdują się na stronie 16.

Gdzie pograć w Sapera? W sieci dostępnych jest wiele implementacji gry. Autor artykułu gorąco poleca stronę minesweeper.online.

Wektory zamiast tortu – sprawiedliwy podział w wielu wymiarach

Igor JANKOWSKI*

* Politechnika Gdańska
Kontakt: igorjankowski@gmail.com

O problemie krojenia tortu i jego rozwiązaniu za pomocą lematu Spernera można przeczytać w Δ_3 .

CPU to procesor, GPU to karta graficzna, nazywana też dawniej akcelerorem graficznym.

Można podzielić coś idealnie po równo i zmarnować przy tym jedną trzecią. Ten pozorny paradoks zna każdy administrator klastra obliczeniowego: użytkownicy dostają identyczne przydziały procesorów i kart graficznych, a mimo to część maszyn stoi bezczynnie ze względu na zróżnicowane zapotrzebowanie na te zasoby. Jest w tym dużo podobieństwa do tzw. *problemu krojenia tortu*, który Hugo Steinhaus postawił w latach czterdziestych XX wieku. Nasz tort jest jednak specyficzny, nie każdy kawałek da się z niego wykroić. Przyjrzyjmy się tej trudności na konkretnym przykładzie.

Rozważmy klastę obliczeniową o pojemności $C = (180 \text{ CPU}, 180 \text{ GPU})$. Użytkownik A zajmuje się analityką danych i potrzebuje do każdego zadania wektora $D_A = (2 \text{ CPU}, 1 \text{ GPU})$. Użytkownik B trenuje sieci neuronowe, wymagając $D_B = (1 \text{ CPU}, 3 \text{ GPU})$. Zakładamy przy tym, że ich popyt jest nienasycony – obaj mają w kolejce setki procesów i chcą zrównoleglić obliczenia na tyle, na ile pozwoli im sprzęt.

Naturalnym podejściem wydaje się podział każdego z zasobów po równo (*Max-Min Fairness*). Limitujemy użytkowników do 50% serwerowni, udostępniając im maksymalnie 90 CPU oraz 90 GPU. Przy naiwnym podziale „po równo” każdy otrzymuje przydział ograniczony przez ten wymiar, który wyczerpie się u niego jako pierwszy. Biorąc pod uwagę takie obostrzenia, użytkownik A zdoła uruchomić jedynie 45 zadań, ponieważ wyczerpie przydzieloną pulę procesorów ($45 \times 2 = 90 \text{ CPU}$) – mimo ogromnego zapasu przyznanych mu kart graficznych. Z kolei użytkownik B zostanie zablokowany przez limit akceleratorów, uruchamiając zaledwie 30 zadań ($30 \times 3 = 90 \text{ GPU}$). Łącznie zużyją 120 CPU i 135 GPU. Reszta cennych zasobów – 60 CPU i 45 GPU – będzie leżała odłogiem.

Kolejnym rozważanym podejściem jest naiwny mechanizm rynkowy ze stałymi cenami. Nadajemy zasobom równe wartości. Ponieważ serwerownia składa się z 360 jednostek, przy cenie 10 kredytów za sztukę jej wartość wynosi 3600 kredytów. Dajemy każdemu z użytkowników budżet w wysokości 1800 kredytów. Użytkownik A sfinansowałby z tego 60 swoich zadań, a użytkownik B kupiłby ich 45. Łącznie generuje to zapotrzebowanie na 165 CPU oraz aż 195 GPU. Drugi zasób przekracza fizyczne możliwości klastra. Gdybyśmy chcieli rozwiązać ten problem poprawnie i wprowadzili dynamiczny mechanizm rynkowy (np. równowagę Walrasa), w którym ceny rosną wraz z popytem, zbalansowalibyśmy system. Taki rynek staje się jednak natychmiast podatny na spekulacje – uczestnikom opłaca się fałszować swoje zgłoszenia: zawyżać popyt na pożądany zasób, by wyczerpać budżety rywali, lub ukrywać preferencje, by uniknąć wzrostu ceny.

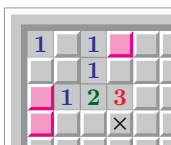
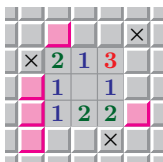
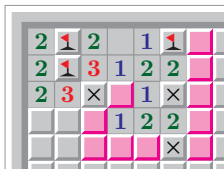
W poszukiwaniu sprawiedliwości: algorytm DRF

Rozwiązania tego problemu dostarcza algorytm *Dominant Resource Fairness* (DRF). Porzuca on koncepcję „wspólnej waluty” na rzecz patrzenia przez pryzmat fizycznych ograniczeń maszyny. Załóżmy, że oferuje ona m zasobów, o które konkuruje N użytkowników (w przykładzie wyżej $N = m = 2$). Sprowadzamy żądania do abstrakcyjnej przestrzeni ułamków pojemności całego klastra. Dla jednego zadania i -tego użytkownika ułamek zużycia j -tego zasobu wynosi d_{ij}/C_j . Największy z tych ułamków nazywamy potrzebą dominującą i -tego użytkownika:

$$\mu_i = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \left(\frac{d_{ij}}{C_j} \right).$$

W naszym wariancie ułamki dla użytkownika A wynoszą $2/180 = 1/90$ dla CPU oraz $1/180$ dla GPU. Zasobem dominującym są procesory, stąd $\mu_A = 1/90$. Dla użytkownika B ułamki to $1/180$ dla CPU oraz $3/180 = 1/60$ dla GPU. Dominującą kartę graficzną, więc $\mu_B = 1/60$.

Rozwiązania zadań ze strony 15. Zakolorowane pola można odsłonić. Krzyżyki wskazują miejsca, w których na pewno jest mina.



Zasada algorytmu DRF opiera się na tym, że wszyscy uczestnicy mają otrzymać taki przydział, w którym ich *udział dominujący* osiągnie identyczną, globalną wartość s . Jeżeli użytkownik uruchomi x_i zadań, jego całkowity udział dominujący wyniesie $s_i = x_i \mu_i$. Zrównanie ich ($s_1 = s_2 = \dots = s$) oznacza w ostatecznym rozrachunku, że każdy kontroluje dokładnie taki sam ułamek swojego zasobu dominującego. Liczba przydzielonych zadań x_i staje się więc funkcją pożądanego poziomu s , zgodnie ze wzorem $x_i = s/\mu_i$. Intuicyjnie rzecz ujmując, algorytm traktuje udziały dominujące jako miarę tego, jak duży kawałek serwerowni faktycznie zajmujemy. W idealnym scenariuszu miara ta powinna rosnąć dla każdego w identycznym tempie. Należy tu jednak wprost zaznaczyć istotne założenie: popyt użytkowników jest nieograniczony (w prawdziwych systemach produkcyjnych system po prostu odcina dalszy przydział w momencie nasycenia).

Skąd zatem wziąć ostateczną wartość s ? Wyobraźmy sobie, że powoli proporcjonalnie zwiększamy przydziały wszystkich uczestników. Robimy to tak długo, aż w klastrze fizycznie wyczerpie się któryś z zasobów. Skoro $x_i = s/\mu_i$, to całkowite zużycie konkretnego zasobu j w całym systemie wynosi $\sum_{i=1}^N (s/\mu_i) d_{ij}$. Ze względów fizycznych suma ta nie może przekroczyć pojemności klastra C_j . Nierówność $s \sum (d_{ij}/\mu_i) \leq C_j$ po odpowiednim przekształceniu dostarcza nam poszukiwany wzór na s . Ponieważ bariera musi być zachowana dla wszystkich wymiarów, wybieramy tę najbardziej wymagającą (najmniejszą dopuszczalną wartość):

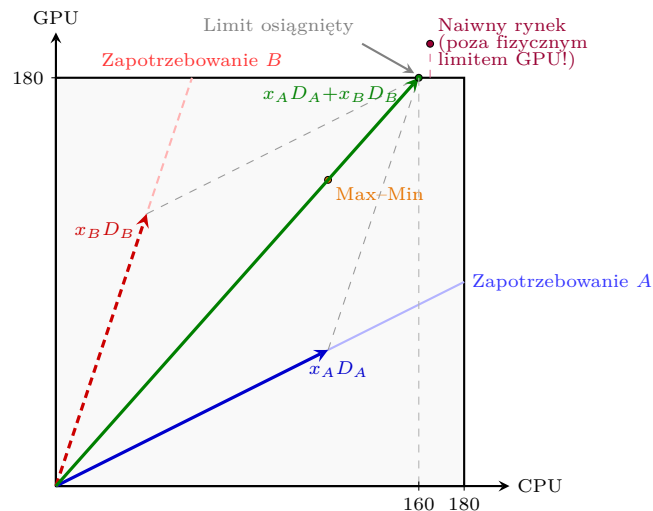
$$s = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \left(\frac{C_j}{\sum_{i=1}^N \frac{d_{ij}}{\mu_i}} \right).$$

To wyrażenie matematyczne to po prostu poszukiwanie tzw. wąskiego gardła – sprawdzamy, przy jakiej wartości s osiągniemy fizyczną granicę któregoś z zasobów. Prześledźmy obliczenia na przykładzie. Dla procesorów mianownik wynosi

$$\frac{d_{A,CPU}}{\mu_A} + \frac{d_{B,CPU}}{\mu_B} = \frac{2}{1/90} + \frac{1}{1/60} = 240.$$

Ograniczenie narzucone przez CPU to bariera $s \leq 180/240 = 0,75$. Mianownik dla układów GPU wynosi z kolei $1/(1/90) + 3/(1/60) = 270$. Ograniczenie dla kart graficznych okazuje się ciśniejsze: $s \leq 180/270 = 2/3 \approx 0,66$. Optymalizacja zatrzymuje się na limicie kart graficznych, więc $s = 2/3$. Użytkownik A może uruchomić $x_A = (2/3)/(1/90) = 60$ zadań (otrzymując przydział $x_A D_A = (120 \text{ CPU}, 60 \text{ GPU})$). Użytkownik B może uruchomić $x_B = (2/3)/(1/60) = 40$ zadań (jego przydział to $x_B D_B = (40 \text{ CPU}, 120 \text{ GPU})$). Łączne zużycie klastra wynosi (160 CPU, 180 GPU). Zasób limitujący został wykorzystany w 100%, a marnotrawstwo w wąskim gardle zniknęło.

Geometria tego problemu sprowadza się do znalezienia odpowiedniego punktu w przestrzeni zasobów wykres powyżej.



Geometria podziałów. Suma wektorów dla DRF opiera się o krawędź klastra, co oznacza 100% wykorzystania limitującego zasobu (GPU). Metoda Max-Min zostawia znaczny margines obu typów sprzętu, natomiast mechanizm stałych cen wychodzi poza prostokąt, wskazując wartości fizycznie niemożliwe do zrealizowania.

Wektory uzyskanych przydziałów ($x_A D_A$ oraz $x_B D_B$) sumują się zgodnie z regułą równoległoboku. Ich suma znajduje się na górnej krawędzi prostokąta, co obrazuje wyczerpanie GPU, pozostawiając margines bezpieczeństwa na osi procesorów.

Matematyka bez zawiści

Jedną z podstawowych cech, których wymaga się często od algorytmów podziału, jest *brak zawiści*. Oznacza to, że w wyniku zastosowania algorytmu żadnemu z uczestników nie opłacałoby się wymienić otrzymanym kawałkiem z kimś innym. W naszym przypadku opłacalność mierzona jest liczbą wykonanych zadań. Ponieważ zasoby przyznane k -temu użytkownikowi wynoszą $(x_k d_{k1}, \dots, x_k d_{km})$, to użyteczność dla i -tego użytkownika z tych zasobów jest równa:

$$U_i(k) = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \left(\frac{x_k d_{kj}}{d_{ij}} \right).$$

Twierdzenie. *Algorytm DRF realizuje podział bez zawiści (dla każdego użytkownika i oraz k zachodzi $U_i(i) \geq U_i(k)$).*

Dowód. Zastanówmy się najpierw nad wartością użyteczności z własnego przydziału. Ponieważ algorytm przyznał nam zasoby idealnie dopasowane do naszych potrzeb, możemy z nich uruchomić dokładnie x_i zadań. Formalnie $U_i(i) = x_i$, co zgodnie z wyliczonym wcześniej wzorem algorytmu wynosi s/μ_i .

Założmy teraz, że użytkownik i spogląda na cudzy przydział (zasoby sąsiada dla x_k zadań). Niech r_i oznacza zasób dominujący dla użytkownika i . Zapotrzebowanie naszego pojedynczego zadania na ten zasób wynosi $d_{i,r_i} = \mu_i C_{r_i}$.

Ile zasobu dominującego r_i posiada w swoim przydziale sąsiad k ? Zgromadził go w ilości $x_k d_{k,r_i}$. Ponieważ μ_k z definicji określa największe zapotrzebowanie ze wszystkich zasobów sąsiada, to dla interesującego nas zasobu r_i musi zachodzić nierówność $d_{k,r_i}/C_{r_i} \leq \mu_k$, czyli $d_{k,r_i} \leq \mu_k C_{r_i}$.

Nawet jeśli inne zasoby u sąsiada występują w obfitości, to ewentualne braki w naszym zasobie dominującym r_i będą stanowiły dla nas główną barierę, powyżej której nie uruchomimy więcej procesów. Ponieważ minimum po wszystkich zasobach nie przekracza wartości dla pojedynczego, konkretnego zasobu r_i , użyteczność całego cudzego przydziału jest ograniczona z góry:

$$U_i(k) \leq \frac{x_k d_{k,r_i}}{d_{i,r_i}} \leq \frac{x_k (\mu_k C_{r_i})}{\mu_i C_{r_i}} = \frac{x_k \mu_k}{\mu_i}.$$

Skoro wiemy dodatkowo, że DRF wszystkim zrównał udziały dominujące ($x_k \mu_k = s$), możemy podstawić ten fakt do licznika naszej nierówności:

$$U_i(k) \leq \frac{s}{\mu_i} = x_i = U_i(i).$$

Zatem mechanizm DRF sprawia, że nikomu nie opłaca się zazdrościć sąsiadowi jego przydziału. Mechanizm DRF zmniejsza też opłacalność oszustwa, bo sztuczne zawyżanie zapotrzebowania na zasób dominujący obróci się przeciwko użytkownikowi (powiększona wartość trafia do mianownika w naszym wzorze).

Cena kompromisu

Dlaczego więc algorytm pozwala, by w naszej symulacji pozostało niewykorzystane 20 CPU? Wyobraźmy sobie, że zabiegając o *silną* optymalność Pareto (wymóg bezwzględnego rozdysponowania całości sprzętu), postanawiamy oddać te wolne procesory komuś, kogo zadania nie wymagają użycia GPU. Kiedy to zrobimy, udział dominujący tej osoby wzrośnie, niszcząc fundament metody DRF: równe udziały dominujące. Uczestnicy systemu szybko zorientowaliby się, że opłaca się modyfikować zgłoszenia, by celowo przejmować wolne okrychy. Ratując pełne wykorzystanie maszyn, tracimy odporność na manipulacje. Ten konflikt to nie słabość konkretnej implementacji, lecz matematyczna właściwość problemu.

W pracy *Dominant Resource Fairness: Fair Allocation of Multiple Resource Types* autorzy algorytmu DRF argumentują, że w klasycznym modelu alokacji

(obejmującym podzielne zasoby i strategicznych graczy), żaden algorytm nie jest w stanie jednocześnie pogodzić ze sobą czterech własności:

- (i) braku zawiści;
- (ii) odporności na manipulacje (prawdomówność opłaca się w każdej sytuacji);
- (iii) gwarancji opłacalności (*sharing incentive*) – pewność, że nikt nie otrzyma mniej, niż gdyby samodzielnie kupił sprzęt wielkości $1/N$ klastra;
- (iv) silnej optymalności Pareto – bezwzględny wymóg niepozostawiania wolnych okrychów.

To napięcie wynika z prostego faktu: jeśli zmusimy system do rozdania wszystkich nieużywanych okrychów (własność (iv)) tym, którzy akurat ich potrzebują, zaburzamy proporcje, na których zbudowano sprawiedliwość (co łamie własność (i)) i tworzymy pole do strategicznych nadużyć (co całkowicie niweczy własność (ii)).

Oznacza to, że w tym klasycznym modelu idealny algorytm podziału wielowymiarowego tortu nie istnieje. Metoda DRF świadomie idzie na kompromis – doskonale spełnia pierwsze trzy aksjomaty, akceptując cenę w postaci niewykorzystanych okrychów. Współczesne badania sięgają jednak znacznie dalej. W prawdziwych systemach procesy dołączają do klastra i opuszczają go w ułamkach sekund. Jak zagwarantować sprawiedliwość w środowisku, gdzie algorytm – taki jak w systemie Apache Mesos, dla którego oryginalnie stworzono DRF – na bieżąco kontroluje przydział bez wiedzy o przyszłości? To wciąż otwarty problem – czy można pokroić tort sprawiedliwie, gdy nie wiemy, kto jeszcze zapuka do drzwi i z jak wielkim apetytem. Podział wielowymiarowego tortu okazuje się zatem zadaniem znacznie bardziej złożonym niż krojenie jego klasycznego, płaskiego odpowiednika Steinhausa. Choć idealna sprawiedliwość w chmurze pozostaje matematycznie niemożliwa, mądre kompromisy – takie jak DRF – pozwalają nam dzielić zasoby bez zawiści, nawet jeśli czasem na stole pozostaną wolne okrychy.

Studencka Konferencja Naukowa

organizowana w ramach obchodów dni prof. Antoniego Hoborskiego

elements X

23-25 października 2026

STATYSTYKA | RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA | MACHINE LEARNING
ANALIZA DANYCH

exploruj z nami świat data science!
www.elements.agh.edu.pl

IKO na start – Budujemy piaskownicę

Część artykułów reaktywowanego w zeszłym miesiącu Informatycznego Kącika Olimpijskiego kierowana będzie do początkujących olimpijczyków. Tytuły tych tekstów oznaczać będziemy „IKO na start”.

Pełną treść zadania z przykładami można znaleźć na stronie oij.edu.pl/oij14/etap1/zadania/des/deszad.pdf.

W tym odcinku omówimy zadania **Deski** oraz **Deski kontratakuja** z zawodów pierwszego stopnia XIV Olimpiady Informatycznej Juniorów.

Deski

W oryginalnej wersji zadania budujemy kwadratową piaskownicę. Potrzebujemy do tego czterech desek o równej długości. Mamy do dyspozycji N desek o długościach wyrażonych liczbami całkowitymi. Deski te nie muszą być równej długości, ale można je dowolnie skracać. Musimy wybrać cztery, skrócić je, a potem ułożyć z nich kwadratową piaskownicę. Należy wypisać pole największej możliwej piaskownicy lub 0, jeśli budowa nie jest możliwa.

Zauważmy, że jeśli wybieramy cztery konkretne deski, musimy skrócić każdą do rozmiaru najkrótszej pośród nich. Aby uzyskać największą możliwą piaskownicę, wybieramy po prostu cztery najdłuższe deski. Wystarczy zatem posortować długości wszystkich dostępnych desek, do czego najlepiej użyć wbudowanej funkcji bibliotecznej `sort`. Polem będzie kwadrat długości czwartej co do wielkości deski.

Kiedy budowa piaskownicy nie powiedzie się? Jedynie wtedy, gdy dysponujemy mniej niż czterema deskami. Ponieważ każdy bok musi powstać z osobnej deski, przy ich mniejszej liczbie nie uda nam się zamknąć kwadratu.

Deski kontratakuja

W trudniejszej wersji zadania możemy nie tylko skracać deski, ale również dzielić je na mniejsze kawałki. Nadal jednak chcemy uzyskać cztery równe fragmenty (o całkowitej długości). Na przykład, mając deski o długościach 7, 2, 2 oraz 1, możemy podzielić najdłuższą z nich na trzy części o wymiarach 2, 2 i 3, co pozwoli nam uzyskać cztery elementy o długości 2.

Pełną treść tego zadania z przykładami można znaleźć na stronie oij.edu.pl/oij14/etap1/zadania/dek/dekzad.pdf.

Każdy z czterech boków piaskownicy musi zostać wycięty z jednej deski. Oznacza to, że nigdy nie wykorzystamy fragmentów pochodzących z więcej niż czterech desek. Rozważymy zatem cztery scenariusze, w których piaskownica powstaje z dokładnie jednej, dwóch, trzech lub czterech desek. Dla każdej z tych opcji wyznaczymy maksymalny możliwy bok i wybierzemy najkorzystniejszą z nich.

Zauważmy także, że zawsze będziemy chcieli użyć najdłuższych desek. Dłuższa deska daje bowiem większe możliwości niż krótsza, a zatem sięganie po inne deski niż cztery najdłuższe nie ma sensu. Oznaczmy zatem długości czterech najdłuższych desek poprzez d_1, d_2, d_3 oraz d_4 , gdzie $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4$.

Zacznijmy od przypadku, w którym wykorzystujemy cztery deski. Odpowiada on prostszej wersji zadania, więc boki piaskownicy jest długość czwartej co do długości deski.

W wariacie z trzema deskami jedna z nich musi zostać podzielona na dwa równe fragmenty. Z pozostałych

dwóch desek wycinamy po jednym kawałku. Nie oplaca się dzielić na nierówne części, bo i tak jedną z nich musielibyśmy później skrócić. Wyjątek stanowi możliwość, kiedy długość deski jest nieparzysta. Nasza piaskownica musi mieć całkowite długości desek, zatem trzeba podzielić długość na dwa „bez reszty” (tj. pomijając część ułamkową). Z tego powodu w dalszej części wszystkie dzielenia będą „bez reszty”. Oplaca się dzielić na pół wyłącznie najdłuższą deskę, zatem bok naszej piaskownicy wyniesie $\min(\frac{d_1}{2}, d_3)$.

Przy wykorzystaniu dwóch desek mamy dwie możliwości. Możemy wyciąć trzy równe części z najdłuższej z nich i jedną z drugiej, co daje bok $\min(\frac{d_1}{3}, d_2)$. Inną możliwością jest wycięcie po dwa kawałki z każdej deski, co daje nam bok o długości $\min(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2})$.

Ostatnia opcja to użycie tylko jednej deski. Wtedy optymalnym rozwiązaniem jest podzielenie jej na cztery równe deski o długości $\frac{d_1}{4}$.

Kiedy w tej wersji zadania nie uda się zbudować piaskownicy? Stanie się tak, gdy nie będziemy w stanie uzyskać boku o długości przynajmniej 1. Wystarczy zatem sprawdzić, czy suma długości desek wynosi przynajmniej $4 \cdot 1 = 4$.

Co dalej, czyli kilka słów o Olimpiadzie Informatycznej Juniorów

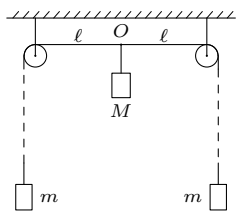
Powyższe omówienie zadania (wierzymy, że nie za trudnego na początek) ma charakter czysto teoretycznej analizy. Na prawdziwych zawodach, oprócz wymyślenia rozwiązania, trzeba je jeszcze zapisać w odpowiednim języku programowania. Jeśli więc Czytelnik już potrafi kodować w Pythonie lub C++, zachęcamy do sprawdzenia swoich umiejętności, próbując zrobić to zadanie na portalu szkopul.edu.pl, gdzie znajduje się archiwum oraz automatyczna „sprawdzaczka” do starych zadań olimpijskich. Olimpiada Informatyczna Juniorów gorąco zachęca właśnie do tego, żeby zacząć uczyć się programowania nawet „od zera” i spróbować sił z podobnymi zadaniami. Najbliższa edycja startuje 20 września 2026 roku. Informacje dla nowych zawodników znajdują się na stronie oij.edu.pl/start.

Bartosz KOSTKA

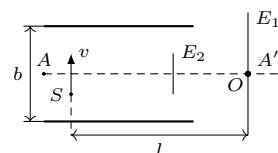
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2026



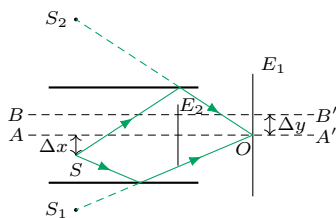
Rys. 1



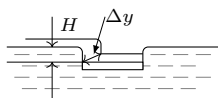
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 824, 825

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

824. Przez dwa nieruchome bloki, oddległe od siebie o $2l$, przerzucona została bardzo długa nieważka nić, na której końcach zawieszono jednakowe ciężarki o danych masach m (rys. 1). Rozmiary bloków są małe w porównaniu z odległością między nimi. W środku, między blokami, wisi na nici ciężarek o masie M , którego punkt zawieszenia O utrzymywany jest początkowo na wysokości bloków, a następnie zostaje oswobodzony.

- 1) Jaki warunek musi spełniać masa M , aby środkowy ciężarek ciągle się opuszczał? Jaką maksymalną prędkość może on wtedy osiągnąć?
- 2) Jeżeli pierwszy warunek nie jest spełniony, to przy jakiej wartości kąta α między nachylonymi odcinkami nici a pionem środkowy ciężarek zatrzyma się i zacznie się podnosić?

825. Rozważmy wiązkę jednakowych jąder, które lecą równolegle do siebie z prędkościami v_0 . Jądra rozpadają się samorzutnie na dwa identyczne fragmenty. Te fragmenty, które lecą w tym samym kierunku co jądra, mają wartość prędkości v_1 .

- 1) Znaleźć prędkość fragmentów, które poruszają się w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu jąder, gdy $v_1 > 2v_0$.
- 2) Znaleźć maksymalny możliwy kąt między wektorami prędkości jednego z fragmentów i kierunkiem ruchu jąder, gdy $v_1 < 2v_0$.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2026

Przypominamy treść zadań:

820. Punktowe źródło światła monochromatycznego, S , o długości fali $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ umieszczono między dwoma nieruchomymi równoległymi zwierciadłami płaskimi, oddległymi od siebie o $b = 3 \text{ cm}$ (rys. 2). W dużej odległości $l = 1 \text{ m}$ od źródła umieszczono ekran E_1 , na którym powstaje obraz interferencyjny, utworzony przez dwie wiązki światła odbite od zwierciadeł. Bezpośredni strumień światła od źródła zasłonięty jest ekranem E_2 . W płaszczyźnie ekranu E_1 na osi symetrii układu AA' umieszczony jest odbiornik O , który rejestruje sygnał proporcjonalny do natężenia padającego na niego światła. Rozmiar odbiornika jest mały w porównaniu z szerokością pasm interferencyjnych na ekranie E_1 . Uwzględniając tylko jednokrotne odbicia światła od zwierciadeł, znaleźć częstotliwość zmiennego sygnału rejestrowanego przez odbiornik podczas ruchu źródła w kierunku prostopadłym do zwierciadeł z prędkością $v = 0,1 \text{ mm/s}$.

821. Okrągłą płytkę o średnicy $d = 40 \text{ mm}$ i grubości $a = 0,5 \text{ mm}$ położono ostrożnie na powierzchni wody. Dzięki napięciu powierzchniowemu płytka nie utonęła, a w miejscu zetknięcia jej górnej powierzchni z powierzchnią wody kąt między nimi okazał się równy 90° (rys. 3). Wyznaczyć gęstość materiału płytki. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$.

820. Rozważmy sytuację, gdy źródło znajduje się na osi symetrii układu. Obserwujemy interferencję od dwóch źródeł pozornych S_1 i S_2 , będących obrazami źródła w zwierciadłach 1 i 2. Odległość między nimi wynosi $2b$ i jest dużo mniejsza od odległości między źródłem a ekranem E_1 . Możemy więc stosować przybliżenie małych kątów, a szerokość pasma interferencyjnego, czyli odległość między sąsiednimi maksimami, jest stała i wynosi

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k = l\lambda/(2b).$$

Gdy źródło znajduje się w odległości Δx od osi symetrii AA' (rys. 4), odległość między obrazami

$$|S_1 S_2| = 2(b/2 - \Delta x) + 2(b/2 + \Delta x) = 2b$$

pozostaje niezmienną. Oś symetrii tego układu jest przesunięta o Δx względem osi AA' . Gdy $\Delta x = \Delta y$, odbiornik w punkcie O rejestruje maksimum sygnału i w odstępach czasu $\Delta t = \Delta x/v$ następne ($v \ll c$). Szukana częstotliwość wynosi

$$\nu = v/(\Delta y) = 2bv/(\lambda l) = 10 \text{ Hz}.$$

821. Warunek równowagi sił działających na płytkę w kierunku pionowym ma postać:

$$(1) \quad mg - \Delta p S - F = 0,$$

gdzie mg jest siłą ciężkości, Δp różnicą ciśnień na płytkę z dołu i z góry, F siłą napięcia powierzchniowego.

Masa płytki wyraża się przez jej szukaną gęstość ρ wzorem

$$(2) \quad m = \rho g a \pi d^2 / 4.$$

Siła napięcia powierzchniowego działająca na płytkę ze strony wody wynosi

$$(3) \quad F = \sigma \pi d.$$

Siła związana z różnicą ciśnień wywołaną obniżeniem poziomu wody pod płytką ma postać

$$(4) \quad \Delta p S = \rho_w g (H + a) \pi d^2,$$

gdzie ρ_w jest gęstością wody, H głębokością zanurzenia górnej powierzchni płytki. Wielkość H wyznaczmy z warunku równowagi sił w kierunku poziomym na wydzielony na rysunku 5 element objętości wody o szerokości $\Delta y \ll d$ i wysokości H :

$$(5) \quad \sigma \Delta y = p_{\text{sr}} \Delta S = \rho_w g (H/2) H \Delta y,$$

$$\text{stad } H = \sqrt{2\sigma/(\rho_w g)}.$$

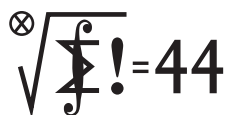
Po skorzystaniu z równań (2)–(5) równanie równowagi płytki (1) przybiera postać:

$$\frac{\rho g a \pi d^2}{4} - \rho_w g \left(\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_w g}} + a \right) \frac{\pi d^2}{4} - \sigma \pi d = 0,$$

a stad gęstość materiału płytki:

$$\rho = \rho_w + \frac{\sqrt{2\sigma\rho_w g}}{a} + \frac{4\sigma}{adg} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
917 ($WT = 1,48$) i 918 ($WT = 2,78$)
z numeru 3/2026

Janusz Olszewski	Warszawa	45,79
Krzysztof Kamiński	Pabianice	44,14
Jędrzej Biedrzycki	Wrocław	43,54
Roksana Słowik		43,23
Marian Łupieżowicz	Gliwice	40,52
Janusz Fiett	Warszawa	39,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,46
Paweł Najman	Kraków	34,11
Paweł Kubit	Kraków	34,03
Piotr Kumor	Olštyn	33,66
Marek Spychała	Warszawa	33,42
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,12
Łukasz Merta		33,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,65

Pan Janusz Olszewski niestrudzony
(i wciąż nieznudzony): 26 rund. Weteran
Krzysztof Kamiński też pięknie: czwarte
okrążenie to obiecujący zadatek na
kolejną normę weterańską!

923. Obliczając wartości lewej strony dla niewielkich k , znajdujemy dwie pary (k, m) o wymaganej własności: $(3, 4)$ oraz $(5, 7)$. Wykażemy, że innych nie ma. Przypuśćmy, że istnieje taka para, w której $k \geq 6$. Jasne, że $k < m$. Zadane równanie przepisujemy w postaci

$$k! + 6 = 3 \left(\prod_{j=k+1}^n j \right).$$

Jeśli $m \geq k + 3$, to iloczyn ujęty w nawias dzieli się przez 3, czyli prawa strona napisanej równości dzieli się przez 9, a lewa nie (bo gdy $k \geq 6$, to $k!$ dzieli się przez 9). Stąd wniosek, że $m = k + 1$ lub $m = k + 2$. Badane równanie sprowadza się do alternatywy

$$k! + 6 = 3(k + 1) \quad \text{lub} \quad k! + 6 = 3(k + 1)(k + 2);$$

po prostym przekształceniu:

$$k(k - 2)! = 3 \quad \text{lub} \quad (k - 1)! = 3(k + 3).$$

Pierwszy wariant daje sprzeczność natychmiast (rozważamy $k \geq 6$). Drugi – też, bo dla $k \geq 6$ zachodzi nie równość, lecz nierówność $(k - 1)! > 3(k + 3)$ (dla $k = 6$ prawda, a dalej banalna indukcja).

Stąd odpowiedź: istnieją dwie pary (k, m) , o jakie chodzi $(3, 4)$ i $(5, 7)$.

Zadania z matematyki nr 927, 928

Redaguje Marcin E. KUCZMA

927. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ niech M_n będzie zbiorem wszystkich par uporządkowanych (x, y) , których elementy są liczbami naturalnymi x, y względnie pierwszymi, spełniającymi warunki $0 < x < y \leq n$, $x + y > n$. Obliczyć (w zależności od n) sumę odwrotności iloczynów xy utworzonych z par $(x, y) \in M_n$.

928. Niech $j(k)$ oznacza liczbę jedynek w rozwinięciu dwójkowym liczby naturalnej k . Dla danych liczb naturalnych a, b rozważamy ciąg określony wzorem

$$j(na) - j(nb), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że ten ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz a/b jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym.

Zadanie 928 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2026

Przypominamy treść zadań:

923. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych k, m takie, że $k!(k! + 6) = 3m!$.

924. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną; $n \geq 2$. Funkcje f, g są określone wzorami: $f(x) = x^n - x$, $g(x) = x^{2n} - x$. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki: $f(a) = 1$, $g(b) = 3a$. Ustalić (w zależności od n), która z liczb a, b jest większa.

924. Zaczniemy od wykazania, że $a \geq 1$. Przydatne będą własności:

- $0 \geq f(x), g(x) > -1$ dla $x \in [0, 1]$;
- funkcje f, g są ściśle rosnące w przedziale $[1, \infty)$;
- $f(x), g(x) \geq 0$ dla $x \in [1, \infty)$;

własność (1) wynika z tego, że $0 \leq x^{2n} \leq x^n \leq x < 1$ dla $x \in [0, 1]$; własność (2) jest widoczna z przedstawień $f(x) = x(x^{n-1} - 1)$, $g(x) = x(x^{2n-1} - 1)$; zaś (3) to wniosek z (2). Liczba a , dla której $f(a) = 1$, nie leży więc w przedziale $[0, 1]$.

Przypuśćmy wobec tego, że $a < 0$. Wówczas $b = b^{2n} - g(b) = b^{2n} - 3a > 0$. Stąd (wobec (1) i (3)) $g(b) > -1$, czyli $a = \frac{1}{3}g(b) \in (-\frac{1}{3}, 0)$. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $a^n < \frac{1}{9}$, więc $f(a) = a^n - a < \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$, wbrew temu, że $f(a) = 1$. Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f jest nieparzysta, zatem $f(-a) = -f(a) = -1$; ale $-a \in (0, \frac{1}{3})$ i mamy sprzeczność z własnością (1).

Tak więc (niezależnie od n) $a \geq 1$; przy tym $a \neq 1$ (bo $f(1) \neq 1$). Rozważmy przypadek, gdy również $b \geq 1$. Skoro $f(a) = 1$, czyli $a^n = a + 1$, zatem

$$g(a) = a^{2n} - a = (a + 1)^2 - a = 3a + (a - 1)^2 > 3a = g(b).$$

Wobec własności (2), $a > b$. W pozostałym przypadku, czyli gdy $b < 1$, tym bardziej $a > b$. Stąd odpowiedź: niezależnie od n , liczba a jest większa od b .

Uwaga. Rozwiązanie zadania **921** (Δ_{26}^9) nie jest poprawne. Wariant poprawiony zostanie pokazany (z komentarzem) w następnym numerze. Za niedopatrzenie przepraszamy.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

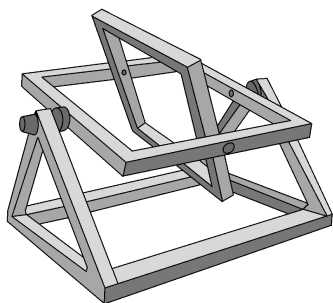
współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Prosto z nieba: Kosmiczne owoce morza

Co jeść w kosmosie? Problem nie jest błahy. Wyprodukowanie i utrzymanie odpowiedniej ilości jedzenia dla astronautów kolonizujących Marsa, a nawet Księżyc, spędza sen z powiek licznyemu poważnym naukowcom. Większość z Was pewnie sądzi, że najłatwiej zabrać jedzenie w proszku albo w jakiejś liofilizowanej formie. Byłoby to dobre rozwiązanie, gdyby nie to, że krótkoterminowe. Zapas takiego jedzenia siłą rzeczy musi być ograniczony, ponieważ w podróży kosmicznych każdy dodatkowy gram oznacza większą ilość paliwa potrzebną do wystrzelenia rakiety. Potrzebujemy więc czegoś w miarę lekkiego, co możemy w kosmosie łatwo hodować i dostarczyć nam więcej kalorii niż sałata. Japońscy naukowcy z Okayama University of Science – zapewne w czasie obiadu – wpadli na pomysł: „A co, gdyby zabrać ze sobą w podróż kosmiczną... żywe krewetki?”

Oczywiście naukowcy muszą najpierw rozwiązać kilka problemów. Po pierwsze sprawdzić, jak krewetki radzą sobie w sytuacji, gdy pozbawimy je na długi czas oddziaływania grawitacyjnego Ziemi. Taki długoterminowy stan mikrogravitacji można uzyskać na kilka sposobów. Najdroższy z nich to wysłanie krewetek na Międzynarodową Stację Kosmiczną.



Schemat klinostatu 3D, zwanego również urządzeniem losowego położenia (ang. *Random Positioning Machine*). Źródło: JoePhin, Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0)

Video z eksperymentu można zobaczyć na YouTube.



Artemia salina ma uroczą polską nazwę – słonaczek. Źródło: Wikipedia

Kolejna, zdecydowanie tańsza, metoda to wsadzenie krewetek do swego rodzaju wirówki. A ujmując rzecz bardziej naukowo, do klinostatu 3D.

Klinostat 3D to urządzenie laboratoryjne, które poprzez obracanie badanego obiektu wokół dwóch prostopadłych osi (rysunek) znosi wpływ grawitacji na obiekt znajdujący się wewnątrz. Jest ono z sukcesem stosowane w badaniu wpływu mikrogravitacji na rośliny i drobne mikroorganizmy. Typowe klinostaty obracają się stosunkowo wolno, bo z prędkością zaledwie 10–25 obrotów na minutę. Roślinom i mikroorganizmom nie robi to różnicy, bo nie są w stanie zbyt szybko się poruszać. Niestety zwinne zwierzątko, takie jak krewetka, umieszczone w obracającym się wolno klinostacie, może zmieniać swoje położenie na tyle szybko, że niwelowanie wpływu siły grawitacji przestaje działać. Dlatego dla krewetek trzeba było przyspieszyć obroty aż do 130 na minutę (czyli jakieś 2 obroty na sekundę). Spowodowało to kilka innych problemów. Biedna krewetka przy przyspieszaniu klinostatu do takiej prędkości obijała się o ściany. Ponadto woda w wirówce chlupotała. Krewetki przymocowano więc siatką, do klinostatu wsadzono kamerkę i uruchomiono eksperyment.

Na początek sprawdzono, czy krewetki w ogóle będą chciały jeść w takich warunkach. Młode krewetki wsadzono do klinostatu na 15 minut. W tym czasie wszystkie z testowanych skorupiaków zjadły, a przynajmniej próbowały jeść pokarm, który znajdował się bezpośrednio przed nimi (musimy pamiętać, że były one przymocowane siatką, więc nie mogły się poruszać). Pełen sukces.

Następnie naukowcy sprawdzili, czy mikrogravitacja powoduje zmiany genetyczne u krewetek. I tutaj niestety nie mamy dobrych wiadomości. Już po 24 godzinach spędzonych w mikrogravitacji zaobserwowano zmiany w porównaniu do krewetek z grupy kontrolnej, których nie poddano eksperymentowi. Różnice dotyczyły ekspresji genów związanych z metabolizmem chityny oraz genów odpowiedzialnych za rozwój oskórki zwierząt. Ponieważ oba te procesy są ściśle związane z lokomocją i budową egzoszkieletu krewetek, wyniki te sugerują, że symulowana mikrogravitacja wpływa na zdolność ich poruszania się nie tylko przez brak grawitacji, ale również na poziomie biologicznym.

Czy musimy więc pożegnać się z owocami morza w kosmosie? Niekoniecznie. Badania wykonane przez tę samą grupę badaczy na mniejszych skorupiakach z rodziny Artemia wykazały, że mogą one z powodzeniem funkcjonować w mikrogravitacji. Organizmy te poddano czterodniowej, nieprzerwanej symulacji mikrogravitacji. W tym czasie zaobserwowano, że skutecznie odżywiały się glonami, wydalały produkty przemiany materii oraz wyraźnie zwiększały swoje rozmiary. Innymi słowy, żyły pełnią życia skorupiaka.

Japońskie badania nie są jedynymi, które prowadzi się z myślą o dostarczeniu morskiego pokarmu astronautom. Kierowany przez francuskiego badacza dra Cyrilla Przybyla *Lunar Hatch Program* testuje, czy możemy przetransportować zapłodnione jaja ryb do zbiorników w bazie na Księżycu i w ten sposób rozpocząć ich hodowlę. Z kolei badacze z Institut de Ciències del Mar, w ramach projektu *SpaceGenFish*, rozwijają w pełni zautomatyzowane akwarium przeznaczone do badań nad wpływem mikrogravitacji na ryby na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej.

Pozostaje nam tylko czekać na wyniki tych eksperymentów.

Anna DURKALEC*

*Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Październik odznacza się szybko obniżającą się wysokością górowania Słońca, które zbliży się do widnokręgu o kolejne 11° i skróci czas przebywania nad nim o następne dwie godziny. Czas zimowy pojawi się w tym roku wyjątkowo wcześniej, już w nocy z 24. na 25. dzień miesiąca.

Ekliptyka tworzy bardzo duży kąt z horyzontem na niebie porannym, stąd ponownie Księżyc stanie się jego ozdobą w pierwszej dekadzie miesiąca, dążąc do nowiu 10 X po południu naszego czasu. 1 X rano można obserwować oddalanie się Srebrnego Globu od Plejad i Urana. Wszystkie wspomniane ciała niebieskie przetną południk lokalny około godziny 4, na wysokości ponad 60° . Sama planeta w listopadzie przejdzie przez opozycję i będzie poruszać się wstecz, zmniejszając dystans do gwiazdy 37 Tau do $100'$. Jej blask urośnie do $+5,6^m$. Kolejnej nocy Księżyc zmniejszy fazę do 66% i zbliży się na $2,5^\circ$ do El Nath, gwiazdy tworzącej północny róg Byka.

4 X naturalny satelita Ziemi pokaże się już po ostatniej kwadrze, w odległości 6° od Polluksa w Bliźniętach. Dobę później natomiast przejdzie on do sąsiedniego Raka, gdzie w fazie 32% zbliży się na niewiele ponad 1° do Marsa i jednocześnie na 5° do M44, jasnej gromady otwartej gwiazd. Czerwona Planeta w październiku pokona kolejne 16° wzdłuż ekliptyki, przechodząc pod koniec miesiąca do gwiazdozbioru Lwa, i zbliżając się przy tym na 6° do Jowisza. Wcześniej 8 X minie ona zakrywaną we wrześniu gwiazdę η Cnc w odległości $0,5^\circ$, trzy dni później zaś przejdzie przez sam środek gromady M44. Niestety u nas świt zastanie Marsa na jej zachodnim skraju. Kolejnego poranka natomiast planeta wejdzie już na południowy wschód od niej. Do końca miesiąca Mars pojaśnieje do $+0,9^m$, zwiększając średnicę kątową swojej tarczy do ponad $6''$.

6 X sierp Księżyca zwęzi się do 22% , wschodząc po godzinie pierwszej 5° od Jowisza. Największa planeta Układu Słonecznego również poprawia swoją widoczność, zmniejszając do końca miesiąca dystans do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa do 6° oraz mijając jasną w październiku mirydę R Leo w odległości 3° , czym ułatwi jej odnalezienie. W październiku Jowisz zwiększy blask do -2^m i średnicę tarczy do $36''$. R Leo zaś 21 X osiągnie maksimum swojej jasności i może pojaśnić nawet do $+4,4^m$. W lornetkach i teleskopach wyróżnia się ona wyraźną ciemnowisniową barwą. W dniu maksymalnej jasności pod koniec nocy astronomicznej wzniesie się ona na prawie 35° ponad widnokrąg, zajmując pozycję nieco ponad 4° pod Jowiszem.

Następnego ranka Srebrny Glob w fazie 13% odwiedzi wspomnianego już Regulusa, zbliżając się doń na $100'$. Księżyc pozostanie widoczny jeszcze przed kolejnymi dwoma wschodami Słońca. 8 X około godziny szóstej jego tarcza w fazie 7% wzniesie się na wysokość 15° na przedłużeniu linii łączącej Jowisza z Regulusem. Dobę później zaś sierp Księżyca w fazie 2% pokaże się na wysokości 4° . Bardzo ładnie w tych dniach zaprezentuje się światło popielate księżycowej tarczy.

W drugiej połowie miesiąca Księżyc 18 X przejdzie przez I kwadrę, a dobę wcześniej zbliży się na 1° do Nunki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca. 24 X jego prawie pełna tarcza przejdzie 6° na północ od Saturna,

który świeci z jasnością $+0,4^m$, prezentując tarczę o średnicy $20''$. Faktyczna pełnia Srebrnego Globu nastąpi dwa dni później.

28 X po godzinie drugiej naszego czasu naturalny satelita Ziemi zakryje północno-zachodnią część Plejad i stanie się to wysoko na naszym niebie, jakąś godzinę po górowaniu obu ciał niebieskich. W obserwacji zjawiska przeszkodzi jednak wysoka faza księżycowej tarczy, przekraczająca 95% .

Warto pamiętać o drugiej mirydzie χ Cyg, która maksimum swojej jasności osiągnie na początku miesiąca i może pojaśnić do $+3,3^m$. χ Cyg znajduje się w szyi Łabędzia, na linii łączącej gwiazdy η i β Cyg, $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd. W październiku na początku nocy astronomicznej ów obszar nieba jest już po górowaniu, ale przez kilka początkowych godzin wciąż wznosi się wysoko ponad widnokrąg.

13 X przez opozycję przejdzie planetoida (4) Westa, czyli najjaśniejsza planetoida na naszym niebie. Tegoroczna opozycja należy do małych i Westa nie przekroczy jasności $+6,5^m$. W październiku zakreśli ona łuk o długości 7° jakieś 12° na południowy wschód od Saturna, przechodząc 20 X 4° na północ od świecącej z jasnością $+3,6^m$ gwiazdy θ Cet.

9 X maksimum aktywności osiągną meteory z roju Drakonidów. Są to wolne meteory, które zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 20 km/s, a ich radiant znajduje się w głowie Smoka. Na początku nocy astronomicznej wznosi się on 60° nad zachodnią częścią niebosłonu. Można spodziewać się kilku zjawisk na godzinę.

Drugi z październikowych rojów, Orionidy, promieniuje do pierwszej dekady listopada, z maksimum 21 X. Ich radiant znajduje się kilka stopni na zachód od Alheny, trzeciej co do jasności gwiazdy Bliźniąt. W nocy maksimum Księżyc zajdzie około drugiej trzydzieści, pozostawiając jakieś trzy godziny na ich obserwacje. Są to szybkie meteory, a ich prędkość zderzenia z atmosferą Ziemi wynosi 66 km/s. Tym razem prognozuje się około 30 zjawisk na godzinę.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 6



Rozwiązanie zadania M 1867.

Odpowiedź: Szukane pary (a, b) to (p, p) oraz $(2p - 1, p^2)$.

Mnożąc równość przez pb , otrzymujemy

$$ab + p^2 = 2pb,$$

skąd $p^2 = (2p - a)b$.

Zatem b jest dzielnikiem liczby p^2 , skąd b jest równe 1, p lub p^2 .

Jeśli $b = 1$, to $2p - a = p^2$, zatem $a = 2p - p^2 = p(2 - p) < 0$, więc ten przypadek jest niemożliwy.

Jeśli $b = p$, to $2p - a = p$, skąd $a = p$ i dostajemy parę $(a, b) = (p, p)$.

Jeśli $b = p^2$, to $2p - a = 1$, skąd $a = 2p - 1$ i dostajemy parę $(a, b) = (2p - 1, p^2)$. Łatwo sprawdzamy, że znalezione pary spełniają warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1868.

Odpowiedź: $k = 1012$.

Najpierw pokażemy, że taka wartość jest możliwa. Wypiszmy na tablicy liczby

$$2^1, 2^2, \dots, 2^{2026}.$$

Weźmy dowolną z nich, powiedzmy $a = 2^n$. Dla każdego $m \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ wybierzmy liczbę $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ taką, że $m + r$ jest podzielne przez n .

Przyjrzyjmy się, kiedy $r = m$. Wtedy $m \leq n$ (bo $r \leq n$) oraz $2m$ jest podzielne przez n , więc możliwe są co najwyżej dwa takie wykładniki: $m = n$ oraz, gdy n jest parzyste, $m = n/2$. Zatem co najmniej 2024 wykładniki m można połączyć z innym wykładnikiem r tak, że $m + r$ jest podzielne przez n . Wtedy

$$2^m \cdot 2^r = 1 = 2^{m+r} - 1$$

jest podzielne przez $2^n - 1 = a - 1$. Każda para została policzona co najwyżej dwa razy, więc dla danego a mamy co najmniej 1012 par.

Pozostaje udowodnić, że więcej być nie może. Niech a będzie największą spośród liczb wypisanych na tablicy. Liczba a nie może występować w żadnej z rozważanych par dla tej właśnie wartości a , bo gdyby $ax - 1$ było podzielne przez $a - 1$ dla pewnej wypisanej liczby $1 < x < a$, to $z \equiv 1 \pmod{a - 1}$ wynikałoby

$$x - 1 \equiv 0 \pmod{a - 1},$$

co jest niemożliwe, gdyż $0 < x - 1 < a - 1$.

Pokażemy teraz, że każda z pozostałych 2025 liczb może należeć do co najwyżej jednej rozważanej pary. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna wypisana liczba m tworzy dwie pary z różnymi liczbami k i n . Wtedy

$$mk - 1 \equiv mn - 1 \equiv 0 \pmod{a - 1}.$$

W szczególności m jest względnie pierwsze z $a - 1$, a po odjęciu dostajemy

$$m(k - n) \equiv 0 \pmod{a - 1},$$

czyli $k - n$ jest podzielne przez $a - 1$. Jednak liczby k i n są mniejsze od a , więc

$$|k - n| < a - 1,$$

sprzeczność. Zatem rozważane pary tworzą rozłączne pary wśród najwyżej 2025 liczb, więc jest ich co najwyżej

$$\left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor = 1012.$$



Rozwiązanie zadania M 1869.

(i) Niech X i Y będą punktami przecięcia prostej AC z prostymi KL i MN . Korzystając z twierdzenia Menelaosa (patrz np. Δ_{03}) oraz równości odcinków stycznych do sfery, poprowadzonych z tego samego punktu, dostajemy

$$\frac{AX}{XC} = \frac{AK}{LC} = \frac{AN}{MC} = \frac{AY}{YC}.$$

Oznacza to, że $X = Y$, a zatem punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Jej przecięcie ze sferą to okrąg opisany na czworokącie $KLMN$.

(ii) Niech π będzie płaszczyzną, na której leży czworokąt $KLMN$, a ω – okręgiem na nim opisanym. Niech A', B', C' i D' będą rzutami prostymi punktów A, B, C i D , odpowiednio, na płaszczyznę π . Skoro $AK = AN$, to $A'K = A'N$, analogicznie uzasadniamy $B'K = B'L$, $C'L = C'M$ oraz $D'M = D'N$ i dlatego ω jest okręgiem wpisanym w czworokąt $A'B'C'D'$. Obrazami środków odcinków AC i BD w tym rzucie są środki przekątnych czworokąta $A'B'C'D'$. Na mocy twierdzenia Newtona (patrz Δ_{07}) leżą one na jednej prostej k wraz ze środkiem I okręgu ω . Ponieważ odcinek OI jest prostym do π , płaszczyzna przechodząca przez k i O zawiera wszystkie punkty z tezy zadania.



Rozwiązanie zadania F 1153.

Poszukując maksymalnej prędkości, zaniedbamy opór powietrza i opór związany z ruchem po powierzchni wody. Siła podnosząca skrzynię działa wzdłuż promienia Ziemi, a więc moment pędu układu nie zmienia się. Przed wciągnięciem skrzyni na szczyt masztu łódź i skrzynia spoczywały względem powierzchni Ziemi obracającej się z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T$. Po podniesieniu skrzyni łódź zaczyna poruszać się względem wody, to znaczy jej prędkość kątowa wynosi teraz ω' . Ułożymy bilans momentu pędu:

$$MR^2\omega = (M - m)R^2\omega' + m(R + h)^2\omega'.$$

Otrzymujemy

$$\omega' = \frac{MR^2\omega}{MR^2 + 2hRm + mh^2} \approx \frac{\omega}{1 + \frac{2mh}{MR}} \approx \omega \left(1 - \frac{2mh}{MR}\right).$$

W pierwszym przybliżeniu pominęliśmy wyraz rzędu h^2/R^2 , a w drugim rozwinęliśmy ułamek do wyrazów liniowych w h/R . Prędkość łodzi wynosi więc

$$u = \omega'R - \omega R \approx -2mh\omega/M = -4\pi mh/(MT).$$

Minus oznacza ruch wzdłuż równika na zachód. Liczbowo $u = 5,82 \cdot 10^{-4}$ m/s, czyli tylko nieco ponad pół milimetra na sekundę.

Uwaga: Czytelnik Dociekliwy zapyta zapewne o równanie ruchu łodzi. Rozpatrzmy ten ruch w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią. W układzie nieinercyjnym należy uwzględnić siły bezwładności. Na skrzynię poruszającą się w górę (kierunek osi z) z prędkością $\vec{v} = (0, 0, v)$, poza siłą odśrodkową, która ułatwia podnoszenie skrzyni, działa też siła Coriolisa $\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$. Skrzynia jest sztywno związana z masztem, a wraz z nim także z resztą łodzi, więc siła $\vec{F}_C$ działa na całą łódź. Równanie ruchu łodzi ma zatem postać

$$M \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \left(0, 0, \frac{dz}{dt}\right).$$

Po scałkowaniu obu stron względem czasu od 0 do τ oznaczającego czas wciągania skrzyni na maszt, otrzymujemy ($u = u_z(\tau)$, $z(\tau) = h$): $u = -2mh\omega/M$, czyli nasz poprzedni wynik.



Rozwiązanie zadania F 1154.

Dla układu jednoskładnikowego istnieje tylko jeden punkt, w którym mogą jednocześnie współistnieć fazy: stała, ciekła i gazowa (para). Taki punkt nazywany jest punktem potrójnym badanego składnika. W tym punkcie, w przestrzeni zmiennych (p, T) , zbiegają się krzywe $p_s(T)$ i $p_l(T)$. Punkt ten wyznaczony jest więc równaniem

$$p_s(T_t) = p_l(T_t).$$

Podstawiając podane w treści zadania wzory przybliżone otrzymujemy

$$T_t = \frac{3754 - 3063}{27,92 - 24,38} T_0 \approx 195,2 T_0.$$

Podstawienie wartości T_t do wzoru opisującego $p_s(T)$ lub $p_l(T)$ pozwala wyznaczyć $p_t \approx 5933 p_0$. Po podstawieniu wartości p_0 i T_0 otrzymujemy $p_t = 5933$ Pa i $T_t = 195,2$ K.



Kółko i krzyżyk, i jeszcze więcej

Bartłomiej BZDEGA*

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Gra kółko i krzyżyk jest szczególnym przypadkiem gier MM (ang. *maker-maker*), które określamy następująco. Skończony zbiór Ω jest planszą, niektóre jego podzbiory nazywamy *wygrываяjącymi*; przez $\mathcal{W}$ będziemy oznaczać ich rodzinę. Gracz I (czerwony) koloruje elementy zbioru Ω na czerwono, a gracz II (niebieski) – na niebiesko. Celem każdego gracza jest pokolorowanie w całości jednego ze zbiorów *wygrываяjących* (używa się również określenia *zajęcie* lub *zbudowanie*).

Argument kradzieży strategii (zob. poprzedni kącik) pozwala wykazać, że gra MM jest wygrana dla gracza I lub remisowa. Tutaj podamy naturalną strategię gracza II, która niekiedy gwarantuje mu remis. Idea jest następująca – gracz niebieski zapomina o tym, że ma zajmować zbiory *wygrываяjące* i skupi się jedynie na przeszkadzaniu w tym czerwonemu.

W ustalonej pozycji T , dla każdego zbioru $W \in \mathcal{W}$, zdefiniujemy jego *potencjał* $\rho_T(W)$, który jest tym większy, im łatwiej gracz I może ten zbiór w całości zająć. Kluczowe będą następujące warunki:

- (1) $0 \leq \rho_T(W) \leq 1$, a potencjał równy 1 mają wyłącznie całe czerwone zbiory;

- (2) po pokolorowaniu jednego z elementów na niebiesko potencjał danego zbioru zeruje się;
- (3) po pokolorowaniu jednego z elementów na czerwono potencjał danego zbioru wzrasta dwukrotnie.

Tylko jedna funkcja je spełnia:

$$\rho_T(W) = \begin{cases} 1/2^b & \text{jeśli czerwonemu brakuje } b \text{ elementów} \\ & \text{do zajęcia zbioru } W, \\ 0 & \text{jeśli zbiór } W \text{ ma co najmniej} \\ & \text{jeden element niebieski.} \end{cases}$$

Potencjałem pozycji T nazwiemy sumę potencjałów wszystkich zbiorów *wygrываяjących* i oznaczmy go przez $\sigma(T)$. Odnotujmy, że jeśli $\sigma(T) < 1$, to na mocy (1) gracz czerwony nie ma jeszcze żadnego zbioru *wygrываяjącego*.

Dla niepokolorowanego $x \in \Omega$ w pozycji T niech $g_T(x)$ oznacza sumę potencjałów wszystkich zbiorów *wygrываяjących*, zawierających x . Pokolorowanie elementu x na niebiesko skutkuje zmniejszeniem $\sigma(T)$ o $g_T(x)$ (warunek (2)), a na czerwono – zwiększeniem o $g_T(x)$ (warunek (3)).

Najbardziej naturalna strategia gracza II to minimalizacja sumy wszystkich potencjałów lub równoważnie – kolorowanie takiego x , dla którego wartość $g_T(x)$ jest najwyższa.

Przypuścimy, że T_0 jest pozycją z ruchem niebieskiego gracza, który koloruje optymalny element x , przechodząc do pozycji T_1 . Następnie gracz czerwony koloruje element y , przechodząc do pozycji T_2 . Mamy $\sigma(T_2) = \sigma(T_0) - g_{T_0}(x) + g_{T_1}(y)$, a ponadto $g_{T_1}(y) \leq g_{T_0}(y) \leq g_{T_0}(x)$, więc $\sigma(T_1) \leq \sigma(T_2) \leq \sigma(T_0)$. Strategia gracza II gwarantuje zatem, że do samego końca rozgrywki potencjał pozycji nigdy nie przekroczy $\sigma(T_0)$. W takim razie wykazaliśmy:

Twierdzenie Erdősa–Selfridge’a. Jeśli w grze MM gracz I nie może w pierwszym ruchu otrzymać pozycji z potencjałem co najmniej 1, to gra jest remisowa.*

W praktyce sprawdza się, czy potencjał pozycji początkowej jest mniejszy niż $\frac{1}{2}$, gdyż gracz I w swoim ruchu może co najwyżej podwoić potencjał pozycji.

Zadania

1. Oznaczmy przez $KK(n, k)$ uogólnioną grę *kółko i krzyżyk* – na planszy $n \times n$ wygraną daje k znaczków pod rząd (pionowo, poziomo lub skośnie). Wykazać, że jeśli $k \geq 2 \log_2 n + 3$, to gra $KK(n, k)$ jest remisowa.
2. Gracze na zmianę kolorują, każdy swoim kolorem, krawędzie dwudziestościanu ściętego („piłki nożnej”), a zwycięstwo daje pokolorowanie wszystkich krawędzi należących do jednej ze ścian. Rozstrzygnąć tę grę.
3. Dane są liczby naturalne $k \geq 3$ oraz $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby $1, 2, \dots, n$ można pokolorować dwoma kolorami w taki sposób, żeby żadne k liczb tego samego koloru nie tworzyło ciągu arytmetycznego.
4. Ustalmy stałą $c \in [0, 1]$. Rozważmy grę na planszy $n \times n$ podobną do uogólnionego *kółka i krzyżyka*. Celem jest uzyskanie co najmniej cn znaczków w jednej linii poziomej lub pionowej, ale niekoniecznie pod rząd. Wykazać, że istnieją stałe $c_0, c_1 \in (0, 1)$ o następującej własności:
 - (a) jeśli $c > c_0$, to gra jest remisowa dla dostatecznie dużych n ;
 - (b) jeśli $c < c_1$, to gra jest wygrana dla dostatecznie dużych n .

*Sformułowanie, na potrzeby kącika, jest nieco inne niż oryginalne.

AlphaGo

TEORIA POŚWIĘCENIA

REŻYSERIA I TEKST
NATALIA
KORCZAKOWSKA

22, 23, 24 PAŹDZIERNIKA 2026
STUDIO TEATR GALERIA
PLAC DEFILAD 1, WARSZAWA

STUDIO
teatr galeria



Ministerstwo Kultury
i Dziedzictwa Narodowego

KRAJOWY
PLAN
ODBUDOWY

PARTNER



WWW.
TEATRSTUDIO.PL