Twierdzenie Sylvestera-Gallai dla okręgów

Radosław Peszkowski, Andrzej Szablewski, Tobiasz Szemberg

24 marca 2017

Streszczenie

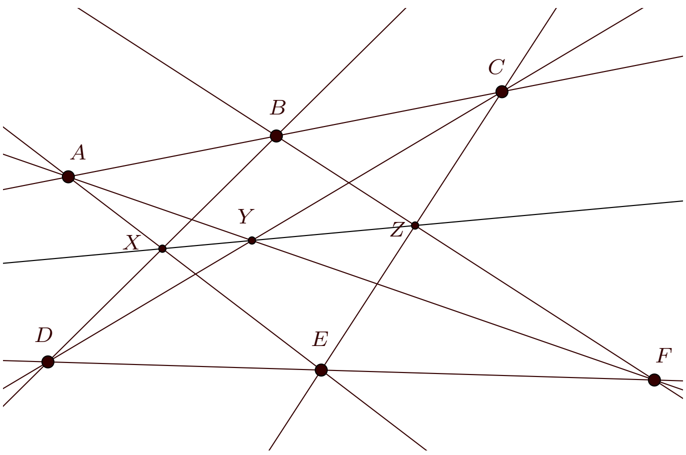
W tej pracy przedstawiamy dowód twierdzenia Sylvestera-Gallai dla okręgów na płaszczyźnie euklidesowej. Główna idea dowodu polega na użyciu inwersji i dobrze znanego twierdzenia Sylvestera-Gallai dla prostych. Nasza praca była motywowana dowodem przedstawionym przez Czaplińskiego i innych dla dowolnych stożkowych [5].

1 Wstęp

Konfiguracje prostych i punktów na płaszczyźnie są klasycznym przedmiotem badań w geometrii. My zetknęliśmy się z tym tematem podczas realizacji projektu „Konfiguracje prostych i stożkowych" finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach programu „Uniwersytet Młodych Wynalazców", którego byliśmy uczestnikami, patrz [12].

Być może najlepiej znanym i najstarszym wynikiem dotyczącym takich konfiguracji jest twierdzenie przypisywane Pappusowi z Alexandrii (III/IV w.n.e.).

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Pappusa)**.** *Niech dane będą współliniowe trójki punktów: A, B, C i D, E, F. Zakładamy, że każda z trójek wyznacza inną prostą i że punkt przecięcia tych prostych nie jest żadnym z wybranych punktów. Niech X, Y, Z będą punktami przecięcia par prostych AE z BD, AF z CD oraz BF z CE (dla uproszczenia zakładamy, że wszystkie te punkty przecięcia da się wyznaczyć, tzn. że proste w każdej z podanych par nie są równoległe). Wówczas punkty X, Y, Z są współliniowe. Jest to przedstawione na Rysunku 1.*



Rysunek 1: Konfiguracja Pappusa

W konfiguracji Pappusa jest 9 prostych i 9 punktów potrójnych, tzn. takich, przez które przechodzą 3 proste z konfiguracji. Są to punkty A, B, C, D, E, F oraz X, Y, Z. Około roku 1820 John Jackson [9] postawił problem, czy można tak ułożyć 9 punktów na płaszczyźnie, że każda prosta, która przechodzi przez dwa punkty z układu, zawiera też jeszcze trzeci punkt z układu. Na przykład, prosta wyznaczona przez punkty A i B na Rysunku 1 przechodzi też przez punkt C, ale na prostej wyznaczonej przez punkty A i D nie ma trzeciego punktu spośród dziewięciu zaznaczonych punktów. Zatem konfiguracja punktów $\{A, B, C, D, E, F, X, Y, Z\}$ na Rysunku 1 nie jest rozwiązaniem problemu Jacksona. Ten problem jest znany jako Problem Sadzenia Drzew w Sadzie (the Orchard Problem), gdyż Jackson sformułował go w poetycki sposób. Punkty zostały zastąpione przez drzewa. Poniżej przedstawiamy wiersz Jacksona w wersji oryginalnej oraz nasze tłumaczenie.

The Orchard Problem.

Your aid I want, nine trees to plant
In rows just half a score;
And let there be in each row three
Solve this: I ask no more.

Problem Sadzenia Drzew w Sadzie.

Zasadzić dziewięć drzew w sadzie
to już połowa zadania w zasadzie;
Po trzy w rzędach mają być sadzone
Gdy to się uda, zadanie skończone.

Do problemu Jacksona wrócił ponad pół wieku później, w 1893 roku James Sylvester (1814-1897) [11]. Wydaje się, że Sylvester oczekiwał, że problem Jacksona nie ma rozwiązania, tzn. nie istnieje konfiguracja 9 punktów na płaszczyźnie taka, że każda prosta przechodząca przez 2 punkty z konfiguracji, przechodzi też przez trzeci punkt. Sylvester sformułował swoje zadanie znacznie bardziej ogólnie.

Problem 1.2 (Sylvester)**.** Udowodnij, że dla dowolnego skończonego zbioru punktów Z na płaszczyźnie euklidesowej zachodzi jeden z następujących warunków:

a) albo wszystkie punkty w zbiorze Z są współliniowe;

b) albo istnieje prosta przechodząca przez dokładnie dwa punkty ze zbioru Z.

Prostą spełniającą warunek z punktu b) będziemy nazywać *prostą zwyczajną* dla zbioru Z. Minęło kolejne ponad pół wieku zanim problem Sylvestera został rozwiązany około roku 1944 przez węgierskiego matematyka Tibora Gallai (1912-1992).

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie Sylvestera-Gallai)**.** *Niech Z będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej, który nie jest zawarty w żadnej prostej. Wówczas istnieje prosta zwyczajna dla zbioru Z.*

Znanych jest wiele dowodów Twierdzenia Sylvestera-Gallai. Jeden z nich otwiera rozdział 8 w słynnej książce „Dowody z księgi” [1]. Co ciekawsze, w biegiem lat zauważono, że istnieje więcej prostych zwyczajnych oraz że ich liczba zależna jest od liczby punktów w zbiorze Z. Następujące twierdzenie zostało udowodnione przez Kelly'ego i Mosera [10] i lekko poprawione przez Csimę i Sawyera [4]. Będzie ono miało istotną rolę w naszym rozumowaniu, dlatego przytaczamy je tutaj.

Twierdzenie 1.4 (Kelly i Moser, Csima i Sawyer)**.** *Każdy zbiór Z składający się z s punktów, który nie jest w całości zawarty w jednej prostej, determinuje co najmniej*

$$\frac{3}{7}s \quad \textit{prostych zwyczajnych.}$$

Ponadto, jeśli liczba punktów s w zbiorze Z wynosi co najmniej 7, to liczba zwyczajnych prostych wynosi co najmniej $\frac{6}{13}s$.

Twierdzenie Sylvestera-Gallai wbudza duże zainteresowanie i doczekało się wielu uogólnień idących w różnych kierunkach. Twierdzenie to nie jest prawdziwe na płaszczyźnie, w której współrzędne punktów są liczbami zespolonymi, a nie rzeczywistymi. Najprostszym kontrprzykładem określonym nad $\mathbb{C}$ jest tzw. dualna konfiguracja Hessego. W pracy [6] zawarte są konkretne współrzędne 12 punktów i równania 9 prostych zespolonych, dla których twierdzenie Sylvestera-Gallai nie zachodzi. Mimo to, pewne uogólnienia dla liczb zespolonych, a nawet dla kwaternionów są możliwe. Zostały one przedstawione w pracy [7].

Innym ciekawym kierunkiem uogólnienia twierdzenia Sylvestera-Gallai, który stanowił inspirację dla naszej pracy, był wynik w pracy [5, Theorem 1.4], uzyskany ostatnio przez grupę matematyków z Krakowa. Zanim go przedstawimy, potrzebujemy jeszcze wprowadzić następującą terminologię. Mówimy, że krzywa drugiego stopnia (stożkowa) C jest *zdeterminowana* przez zbiór punktów W na płaszczyźnie euklidesowej, jeśli C jest jedyną krzywą drugiego stopnia zawierającą zbiór W.

Warto zauważyć, że o ile dwa punkty zawsze determinują przechodzącą przez nie prostą, to dla stożkowych najmniejszy zbiór, który determinuje takie krzywe musi zawierać co najmniej 5 punktów, ale nie każdy zbiór 5 punktów determinuje stożkową. Na przykład 4 punkty współliniowe i jeden dowolny, nie determinują stożkowej.

Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie Sylvestera-Gallai dla stożkowych)**.** *Niech Z będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej. Wtedy*

a) albo wszystkie punkty w zbiorze Z są zawarte w pewnej stożkowej (ten przypadek obejmuje możliwość, że wszystkie punkty w Z są współliniowe);

b) albo istnieje stożkowa przechodząca przez dokładnie 5 punktów ze zbioru Z, która jest zdeterminowana przez te 5 punktów.

Praca [5] jest bardzo zaawansowana. W naszej pracy ograniczamy się do stożkowych ustalonego kształtu, które od dawna znamy ze szkoły, czyli do okręgów. Istotna jest przy tym obserwacja, że okrąg jest determinowany przez 3 niewspółliniowe punkty. W pewnym sensie jest więc bliższy prostej niż dowolna krzywa drugiego stopnia. Naszym głównym wynikiem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie Sylvestera-Gallai dla okręgów)**.** *Niech Z będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej. Wtedy*

a) albo wszystkie punkty w zbiorze Z są współliniowe;

b) albo zbiór Z jest zawarty w jednym okręgu;

c) albo istnieje okrąg przechodzący przez dokładnie 3 punkty ze zboru Z.

Dowód tego twierdzenia przedstawimy w części 3. Zanim jednak przejdziemy do dowodu potrzebujemy pewnych przygotowań. W następnej części wprowadzamy przekształcenie inwersji, które stanowi swego rodzaju portal między światem prostych, a światem okręgów.

2 Inwersja na płaszczyźnie euklidesowej

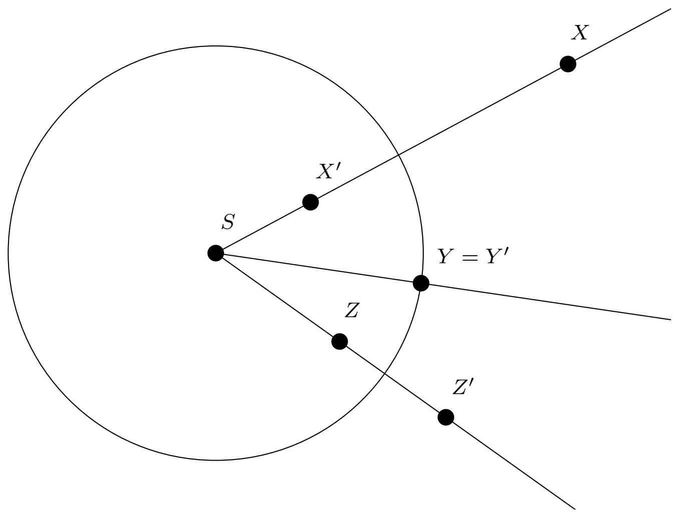
Nieco nieformalnie mówiąc *inwersja względem okręgu* jest takim przekształceniem płaszczyzny, które rozrzuca wnętrze ustalonego okręgu na jego zewnętrze, zaś zewnętrze ściska do wnętrza. W środku okręgu inwersyjnego przekształcenie nie jest zdefiniowane, bo nie wiadomo gdzie miałby ten punkt zostać odwzorowany. Na użytek tej pracy wygodnie jest przyjąć jednak, że środek okręgu inwersyjnego jest punktem stałym inwersji. O inwersji można myśleć jak o swego rodzaju analogii symetrii osiowej, z tym, że tym razem „osią" symetrii jest okrąg. Podobnie jak symetria osiowa, inwersja jest inwolucją, tzn. złożona sama ze sobą daje przekształcenie tożsamościowe całej płaszczyzny.

Inwersja została wprowadzona około roku 1831 przez niemieckiego matematyka Ludwiga Immanuela Magnusa (1790-1861). Swoje wiadomości na temat inwersji zaczerpnęliśmy z internetowej strony Michała Ślęzaka i Michała Tkacza [13] oraz pracy Harolda Coxetera [2].

Definicja 2.1 (Inwersja)**.** Niech dany będzie okrąg $O(S, r)$ o środku w punkcie S i promieniu r. Inwersją $I_{(S,r)}$ względem danego okręgu $O(S, r)$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi X na płaszczyźnie, różnemu od punktu S przyporządkowuje punkt $X' = I_{(S,r)}(X)$, który leży na półprostej o początku w punkcie S przechodzącej przez X i spełnia warunek

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2.$$

Rysunek 2 przedstawia obrazy kilku wybranych punktów w inwersji względem okręgu $O(S, r)$.



Rysunek 2: Punkty i ich obrazy w inwersji

Definicja 2.1 nie określa obrazu środka okręgu inwersyjnego S w inwersji. Jak już zaznaczyliśmy wyżej, wygodnie jest przyjąć, że

$$I_{(S,r)}(S) = S.$$

Przy tym dodatkowym (i niestandardowym) założeniu mamy własność odbicia dla inwersji.

Lemat 2.2 (Inwersja jako odbicie)**.** *Inwersja* $I_{(S,r)}$ *jest* inwolucją *płaszczyzny, tzn. dla dowolnego punktu* X *na płaszczyźnie mamy*

$$I_{(S,r)}\Big(I_{(S,r)}(X)\Big) \;=\; X. \tag{1}$$

Inaczej mówiąc, przekształceniem odwrotnym do inwersji jest inwersja względem tego samego okręgu. Jeszcze inaczej można ten warunek zapisać jako równoważność

$$Y = I_{(S,r)}(X) \;\Leftrightarrow\; X = I_{(S,r)}(Y).$$

Dla dalszych rozważań ważne będzie nie tyle jak inwersja jest określona na poszczególnych punktach, ale raczej na ich zbiorach. W szczególności, kluczowa jest obserwacja, że zbiór wszystkich prostych i okręgów na płaszczyźnie pozostaje (jako zbiór) niezmieniony po zastosowaniu inwersji. Poszczególne proste mogą jednak zostać odwzorowane na okręgi i odwrotnie, obrazami pewnych okręgów w inwersji są proste. Bardziej szczegółowo opisuje to następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3 (Obrazy prostych i okręgów w inwersji)**.** *Niech* $O(S,r)$ *będzie ustalonym okręgiem. Wtedy obraz*

a) prostej przechodzącej przez punkt S*;*

b) prostej nie przechodzącej przez punkt S*;*

c) okręgu przechodzącego przez punkt S*;*

d) okręgu nie przechodzącego przez punkt S

jest

a') ta sama prosta przez punkt S*;*

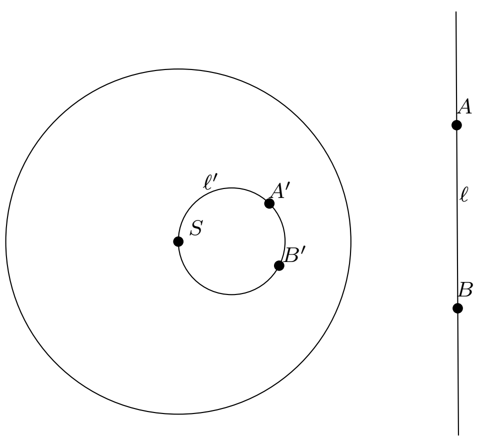
b') okrąg zawierający punkt S*;*

c') prosta nie zawierająca punktu S*;*

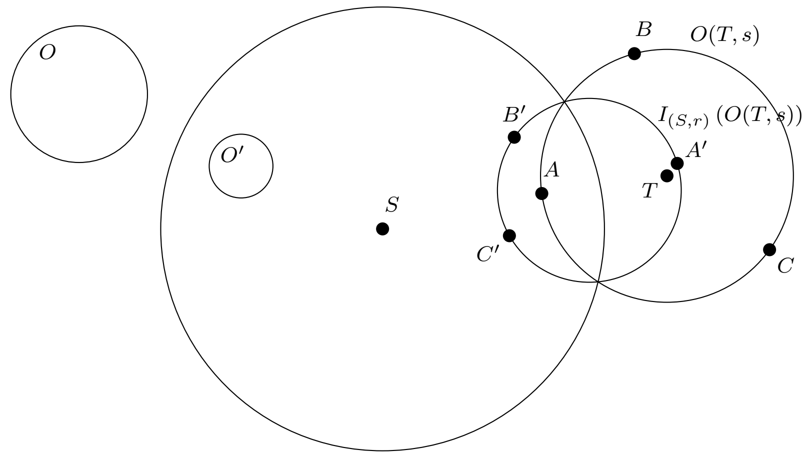
d') okrąg nie zawierający punktu S

odpowiednio. Jest to zobrazowane na Rysunkach 3 i 4.

Dowód. Standardowy dowód pomijamy, można znaleźć go np. w [3, Section 6.3]. □



Rysunek 3: przypadki b) oraz c) Twierdzenia 2.3



Rysunek 4: przypadek d) Twierdzenia 2.3

Teraz możemy już przejść do głównej części tego artukułu.

3 Dowód Twierdzenia Sylvestera-Gallai dla okręgów

W tej części przedstawiamy dowód głównego Twierdzenia 1.6.

Niech S będzie dowolnym punktem zbioru Z i niech promień r będzie wybrany w taki sposób, że żaden punkt ze zbioru Z nie leży na okręgu $O(S, r)$. Niech W będzie obrazem zbioru $Z \setminus \{S\}$ w inwersji $I_{(S,r)}$. Zachodzą dwa możliwe przypadki.

Przypadek 1. Zbiór W jest zawarty w pewnej prostej ℓ.

Podprzypadek 1.1. Prosta ℓ przechodzi przez punkt S. Wtedy, z Twierdzenia 2.3 a) wynika, że przeciwobrazem prostej ℓ w inwersji $I_{(S,r)}$ jest ta sama prosta ℓ. A zatem mamy do czynienia z przypadkiem a) Twierdzenia 1.6.

Podprzypadek 1.2. Prosta ℓ nie przechodzi przez punkt S. Wtedy przeciwobrazem prostej ℓ w inwersji $I_{(S,r)}$, jest, zgodnie z Twierdzeniem 2.3 b), okrąg przechodzący przez punkt S. Zatem wszystkie punkty ze zbioru Z są zawarte w tym okręgu i mamy do czynienia z przypadkiem b) Twierdzenia 1.6.

Przypadek 2. Nie wszystkie punkty w zbiorze W są współliniowe. Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 1.3, istnieje prosta zwyczajna dla zbioru W.

Podprzypadek 2.1. Jeśli istnieje prosta zwyczajna ℓ dla zbioru W, która nie przechodzi przez punkt S, to jej obrazem $\mathcal{C} = I_{(S,r)}(\ell)$ jest, zgodnie z Twierdzeniem 2.3 c), okrąg przechodzący przez punkt S. Wtedy dokładnie 3 punkty ze zbioru Z leżą na $\mathcal{C}$, zatem jesteśmy w przypadku c) Twierdzenia 1.6.

Podprzypadek 2.2. Pozostała do rozważenia sytuacja, w której *wszystkie* proste zwyczajne dla W przechodzą przez punkt S. W tej sytuacji wszystkie proste zwyczajne dla W przecinają się w punkcie S, który nie należy do zbioru W. Zatem, zgodnie z Twierdzeniem 1.4, co najmniej

$$a := 2 \cdot \frac{3}{7}(s - 1)$$

punktów ze zbioru W zawiera się w tych prostych.

Decydujący trik pozwalający zakończyć dowód naszego głównego rezultatu polega na rozszerzeniu zbioru W o punkt S. Rozważamy zatem zbiór $Y = W \cup \{S\}$, który, zgodnie z konwencją przyjętą w Definicji 2.1, jest obrazem zbioru Z w inwersji $I_{(S,r)}$. Założyliśmy, że zbiór W nie zawiera się w jednej prostej, więc tym bardziej jest to prawda dla większego zbioru Y. Zatem istnieje co najmniej $\frac{3}{7}s$ prostych zwyczajnych dla zbioru Y. **Wszystkie te proste zwyczajne muszą przechodzić przez punkt** S. W przeciwnym razie prosta zwyczajna dla Y byłaby też prostą zwyczajną dla W nie przechodzącą przez punkt S, co jest sprzeczne z założeniem tego podprzypadku.

Ponadto, żadna z prostych zwyczajnych dla Y nie jest prostą zwyczajną dla W. Rzeczywiście, wszystkie proste zwyczajne dla W przechodzą przez S, a więc z punktu widzenia zbioru Y nie są zwyczajne, gdyż zawierają 3 punkty z Y.

Reasumując, na podstawie Twierdzenia 1.4, co najmniej

$$b := \frac{3}{7}s + 1$$

punktów ze zbioru Y leży na prostych zwyczajnych dla Y i wszystkie te punkty (łącznie z S) nie były uwzględnione w liczbie a. Wobec tego liczba elementów s w zbiorze Y musi być równa co najmniej $a + b$. Ale nierówność

$$s \geqslant a + b = 2 \cdot \frac{3}{7}(s-1) + \frac{3}{7}s + 1 = \frac{9}{7}s + \frac{1}{7},$$

nie jest spełniona przez żadną liczbę naturalną s.

Uzyskana sprzeczność pokazuje, że Podprzypadek 2.2 nie jest w ogóle możliwy i tym samym dowód głównego twierdzenia został zakończony.

4 Uwagi końcowe

Twierdzenie Sylvestera-Gallai dla prostych czekało na dowód ponad 100 lat. Kiedy już został znaleziony, następne dekady poświęcono na szacowania dolne liczby prostych zwyczajnych. Takie szacowania zawiera Twierdzenie 1.4. Te wysiłki zostały niedawno ukoronowane dowodem hipotezy Diraca podanym przez Bena Greena (ur. 1977) i Terencego Tao (ur. 1975) w pracy [8]. Udowodnili oni, że jeśli liczba punktów w zbiorze Z jest wystarczająco duża, to jest co najmniej

$$\frac{1}{2}s$$

prostych zwyczajnych dla zbioru Z.

Naturalne jest pytanie o tego typu dolne szacowania dla liczby *zwyczajnych okręgów.*

Problem 4.1. Niech Z będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej, który nie jest zawarty w prostej, ani w okręgu. Podać dolne szacowanie na liczbę okręgów zwyczajnych dla Z (tzn. takich okręgów, które ze zbiorem Z mają dokładnie 3 punkty wspólne).

Twierdzenie 1.6 pokazuje, że liczba 1 jest takim szacowaniem. Przypuszczamy, że właściwe szacowanie zależy jednak od liczby punktów w zbiorze Z i że jest znacznie większe. Mamy nadzieję podać lepsze szacowanie w przyszłości.

Literatura

[1] Aigner, M., Ziegler, G.: Dowody z księgi. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004

[2] Coxeter, H. S. M.: Inversive Geometry, In: Educational Studies in Mathematics 3, Lectures of the Comprehensive School Mathematics Project (CSMP). Conference on the Teaching of Geometry, pp. 310–321.

[3] Coxeter, H. S. M.: Introduction to Geometry, 2nd Edition, Wiley 1989

[4] Csima, J., Sawyer, E. T.: There exist $6n/13$ ordinary points, Discrete Comput. Geom. 9 (1993), 187–202.

[5] Czapliński, A., Dumnicki, M., Farnik, Ł., Gwoździewicz, J., Lampa-Baczyńska, M., Malara, G., Szemberg, T., Szpond, J., Tutaj-Gasińska, H.: On the Sylvester–Gallai theorem for conics, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 136 (2016), 191–203

[6] Dumnicki, M., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Counterexamples to the $I^{(3)} \subset I^2$ containment, J. Algebra 393 (2013), 24–29

[7] Elkies, N., Pretorius, L. M., Swanepoel, K. J.: Sylvester-Gallai theorems for complex numbers and quaternions. Discrete Comput. Geom. 35 (2006), no. 3, 361–373

[8] Green, B., Tao, T.: On sets defining few ordinary lines, Discrete Comput. Geom. (2013) 50, 409–468.

[9] Jackson, J.: Rational Amusement for Winter Evenings. Longman, Hurst, Rees, Orme and Brown, London (1821)

[10] Kelly, L. M., Moser, W. O. J.: On the number of ordinary lines determined by n points, Canad. J. Math. 10 (1958), 210–219.

[11] Sylvester, J. J.: Problem 11851, Math. Questions from the Educational Times 59 (1893), 98–99.

[12] Szemberg, T. (red.): Konfiguracje prostych i stożkowych. Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2015

[13] Ślęzak, M., Tkacz, M.: http://mtkacz.republika.pl/inwersja.html

Radosław Peszkowski, Gimnazjum im. Jana Matejki, ul. Kolejowa 15, 32-080 Zabierzów
E-mail address: kpeszkowski@gmail.com

Andrzej Szablewski, Gimnazjum im. Jana Matejki, ul. Kolejowa 15, 32-080 Zabierzów
E-mail address: aszablewski@op.pl

Tobiasz Szemberg, VII Liceum Ogólnokształcące im. Zofii Nałkowskiej, ul. Skarbińskiego 5, 30-001 Kraków
E-mail address: tobiasz.szemberg@gmail.com