

O trójkątach kappa i ich własnościach

Filip Rękawek

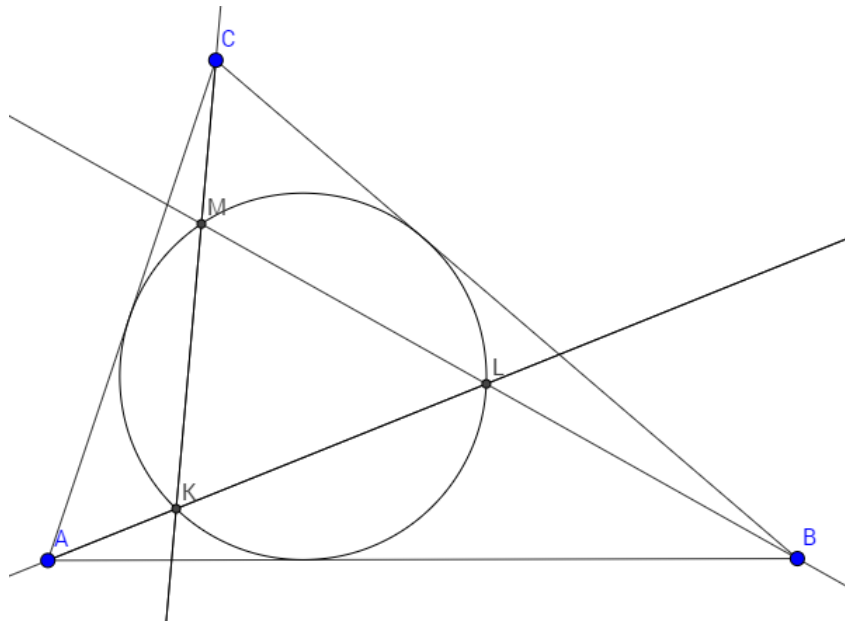
Garwolin 2017

Abstract

Tematem mojej pracy są trójkąty utworzone przez czewiany dowolnego trójkąta przecinające się na okręgu wpisanym w ten trójkąt. Wyznaczam wzór na miarę kąta pomiędzy bokami a czewianami, prezentuję własności takich trójkątów i pokazuję związek niektórych z nich ze złotym podziałem. Przedostatni rozdział przedstawia pewne uogólnienie tego zagadnienia.

1 Definicja i podstawowe własności trójkątów *kappa*

Definicja. Na płaszczyźnie dane są trzy różne, niewspółliniowe punkty: A, B, C . Tworzą one trójkąt $\triangle ABC$. Przez każdy z nich poprowadzono prostą, tak aby przecinała przeciwległy bok. Nazwijmy przecięcia prostych przechodzących przez A i B , B i C , C i A , odpowiednio: K, L, M . Jeżeli trójkąt $\triangle KLM$ jest niezdegenerowany i wpisany w okrąg wpisany w trójkąt $\triangle ABC$, to jest on trójkątem *kappa* dla trójkąta $\triangle ABC$.



Rys.1. Trójkąt *kappa* $\triangle KLM$.

Z definicji wynikają następujące wnioski:

Twierdzenie 1.1 Dla każdego trójkąta istnieje trójkąt *kappa*.

Dowód. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ i wpisany w niego okrąg. Punkt D jest punktem styczności okręgu do boku AC . Z wierzchołków A i B poprowadzono proste, które przecięły się w punkcie L leżącym na okręgu, punkt K to część wspólna okręgu i prostej AL , $K \neq L$. Zachodzi $D \in BL$. Żeby został utworzony trójkąt *kappa* punkt C musi być współliniowy z punktami K i D . Jednakże w tym przypadku prosta zawierająca te punkty przecina bok AC w punkcie D . Niech punkt D' będzie punktem styczności okręgu do boku BC . W tym samym trójkącie poprowadzono z wierzchołków A i B półproste, przecinające się w punkcie L' należącym do łuku $D'L$ okręgu wpisanego niezawierającego punktu K , K' to część wspólna okręgu i AL' , $K' \neq L'$, a M to część wspólna okręgu i BL' , $M \neq L$. Niech M' będzie rzutem prostokątnym M na bok BC . Półproste te poprowadzono w taki sposób, żeby długość odcinka $D'M'$ była jak najmniejsza. Wówczas $|D'M'| \leq |CD'|$, ponieważ $|D'M'|$ może przybrać dowolnie małą wartość, a $|CD'|$ musi mieć niezerową wartość, gdyż w innym przypadku trójkąt ABC zdegeneruje się do odcinka. By przejść od sytuacji pierwszej do drugiej, należy obrócić prostą AK względem punktu A , tak by przeszła na prostą AK' . Skoro więc punkt C leży pomiędzy prostymi KD i $K'M$ i obrót ten jest operacją ciągłą, to z twierdzenia Darboux zawsze da się wskazać taki punkt K'' leżący na łuku KK' niezawierającym D' , że półprosta AK'' wyznaczy taki punkt L'' na okręgu taki, że wyznaczony na

okręgu przez półprostą BL'' punkt M'' będzie współliniowy z punktami K'' i C . \square

Twierdzenie 1.2 Każdy trójkąt jest trójkątem *kappa* dla jakiegoś trójkąta.

Dowód. Dany jest trójkąt $\triangle KLM$ i opisany na nim okrąg. Niech A będzie punktem należącym do dopełnienia półprostej \overrightarrow{KL} do prostej KL . Poprowadźmy styczną do okręgu przechodzącą przez punkt A , tak by wyznaczyła ona punkt B należący do dopełnienia półprostej \overrightarrow{LM} do prostej LM . Poprowadźmy styczną do okręgu przechodzącą przez punkt B , tak by wyznaczyła ona punkt C należący do dopełnienia półprostej \overrightarrow{MK} do prostej MK . Poprowadźmy inną styczną do okręgu przechodzącą przez punkt C . Wyznaczy ona punkt D należący do dopełnienia półprostej \overrightarrow{KL} do prostej KL . Możemy teraz oddalać punkt A od punktu K . Wówczas punkt B będzie zbliżał się do punktu, który zostałby wyznaczony przez styczną do okręgu równoległą do prostej KL , ale nigdy go nie osiągnie. Styczna do okręgu przez ten punkt wyznaczy na prostej KM punkt, do którego zbliżać się będzie punkt C . Natomiast styczna do okręgu przez ten punkt wyznaczy na prostej AK punkt, do którego zbliżać się będzie punkt D , nazwijmy go E . Dlatego w tym przypadku $|DK| < |AK|$. Teraz przesunijmy punkt A tak, aby należał do odcinka EK . Wtedy $|DK| > |AK|$. Skoro w dowolnym trójkącie te dwie sytuacje są możliwe, to z racji ciągłości wykonywanych przez nas translacji i twierdzenia Darboux, istnieje pośrednie położenie punktu A , w którym $A = D$. \square

Twierdzenie 1.3 W trójkątach podobnych półproste tworzące trójkąt *kappa* są wyprowadzone z wierzchołków pod tymi samymi kątami do ich boków.

Dowód. Każdy trójkąt $\triangle A'B'C'$ podobny do trójkąta $\triangle ABC$ można otrzymać stosując jednokładność $J_A^k(\triangle ABC)$ dla pewnej skali k . Jako że jednokładność zachowuje miary kątów, to teza jest prawdziwa. \square

2 Twierdzenie o trójkątach *kappa*

Można postawić problem o następującej treści:

*Pod jakim kątem do podstawy trójkąta $\triangle ABC$ należy poprowadzić prostą z wierzchołka A , żeby zawierała bok trójkąta *kappa* dla trójkąta $\triangle ABC$?*

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza poniższe twierdzenie.

Lemat 2.1 Dowolny trójkąt $\triangle ABC$ można umieścić w kartezjańskim układzie współrzędnych, a następnie za pomocą translacji, jednokładności i obrotów przekształcić płaszczyznę tak, aby bok AB leżał na prostej $y = -1$, a środek okręgu wpisanego był początkiem układu współrzędnych. Wówczas okrąg ten będzie okręgiem jednostkowym, a miary kątów zostaną zachowane.

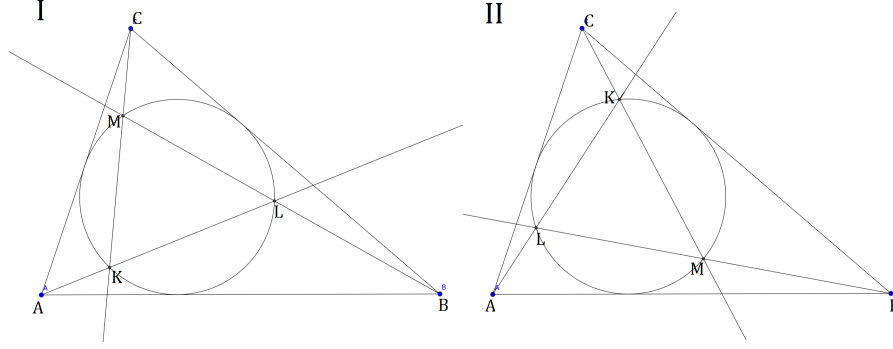
Dowód. Każdy trójkąt możemy przekształcić za pomocą jednokładności o skali $\frac{1}{r}$, gdzie r to promień jego okręgu wpisanego, tak by otrzymać trójkąt, którego okrąg wpisany ma promień 1. Następnie, jeśli współrzędne obrazu środka okręgu wpisanego to (p, q) , możemy użyć translacji o wektor $[-p, -q]$, który przeprowadzi go na początek układu współrzędnych. Wystarczy już jedynie dokonać obrotu względem początku układu współrzędnych o odpowiedni kąt, aby odcinek AB był równoległy z osią odciętych. Jednokładności, translacje oraz obroty nie zmieniają miar kątów. \square

Twierdzenie 2.1 (o trójkątach *kappa*)

Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz jego trójkąt *kappa* $\triangle KLM$, przy czym współliniowe są następujące trójki punktów: (A, K, L) , (B, L, M) , (C, M, K) . Przyjmijmy ponadto $\alpha = |\angle BAC|$ oraz $\beta = |\angle CBA|$. Wówczas zachodzi:

$$\operatorname{tg}|\angle BAK| = \frac{(k+1)^2}{(k^2+1)(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1)+2}$$

gdzie $k = \frac{3\cos\alpha - \cos\beta + \cos(\alpha-\beta) + 1 \pm (\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta))\sqrt{5}}{(1+\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\beta - (3+\cos\alpha - 3\sin\alpha)\cos\beta + 3\sin\alpha + \cos\alpha - 1}$



Dowód.

Korzystając z Twierdzenia 1.3 i Lematu 2.1, możemy bez straty ogólności rozpatrywać trójkąt $\triangle ABC$ o podstawie AB zawartej w prostej o równaniu $y = -1$, opisaną na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$.

Położenie każdego punktu okręgu jednostkowego o środku w początku układu współrzędnych może być wyrażone współrzędnymi $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, gdzie t to pewien parametr rzeczywisty.

Przyjmijmy zatem następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} A &= (a, -1) & P &= \left(\frac{1-p^2}{1+p^2}, \frac{2p}{1+p^2}\right) \wedge p \in \mathbb{R} \\ B &= (b, -1) & L &= \left(\frac{1-l^2}{1+l^2}, \frac{2l}{1+l^2}\right) \\ & & M &= \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right) \end{aligned}$$

Wówczas, wykorzystując fakt, iż C jest punktem przecięcia stycznych do okręgu jednostkowego o środku w początku układu współrzędnych, zawierających odpowiednio A i B , możliwe jest wyznaczenie jego współrzędnych w zależności od a i b :

$$C = \left(\frac{a+b}{ab+1}, \frac{ab-1}{ab+1}\right)$$

Trzy punkty o współrzędnych odpowiednio $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Używając tej równoważności dla trójek punktów $(A, K, L), (B, L, M), (C, M, K)$, otrzymujemy następujące trzy równania:

$$\begin{cases} \frac{2(k-l)(k+l+kl+akl+1-a)}{(k^2+1)(l^2+1)} = 0 \\ \frac{2(l-m)(l+m+lm+blm+1-b)}{(l^2+1)(m^2+1)} = 0 \\ \frac{2(m-k)(m+k+km+km(a+b)+ab(m-1)(k-1)+1-a-b)}{(m^2+1)(k^2+1)(ab+1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + l + kl + ak + 1 - a = 0 \\ l + m + lm + bl + 1 - b = 0 \\ m + k + km(a + b + 1) + ab(m - 1)(k - 1) + 1 - a - b = 0 \end{cases}$$

Ponieważ $k = l \vee l = m \vee m = k \iff K = L \vee L = M \vee M = K$, możemy ten przypadek odrzucić, gdyż wtedy trójkąt $\triangle KLM$ zdegenerowałby się do prostej lub punktu.

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$k = -\frac{ab(1-ab)+b^2-a^2 \pm \sqrt{5a^2b^2(a-b)^2}}{ab(1+ab-a+3b)+b^2-a^2}$$

Niech $D = (0, -1)$, wówczas $|AD| = -a, |DB| = b, |OD| = 1$. Jako że AO leży na dwusiecznej kąta $\angle BAC$, a OB na dwusiecznej kąta $\angle CBA$,

to $ctg \frac{\alpha}{2} = \frac{|AD|}{|OD|} = \frac{-a}{1} \implies a = -ctg \frac{\alpha}{2}$

oraz $ctg \frac{\beta}{2} = \frac{|DB|}{|OD|} = \frac{b}{1} = b \implies b = ctg \frac{\beta}{2}$

Podstawiając powyższe tożsamości do wzoru na parametr k oraz upraszczając otrzymujemy:

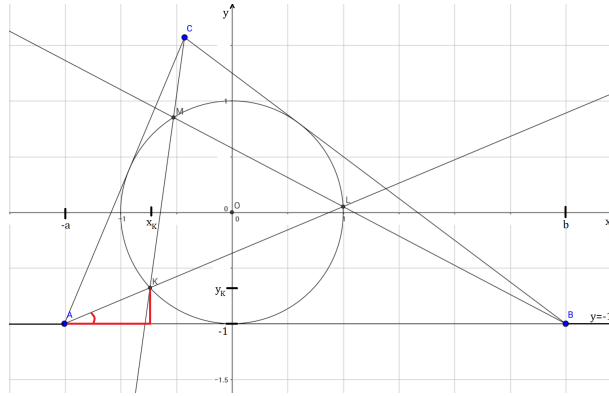
$$k = \frac{\cos(\beta) - 3\cos(\alpha) - \cos(\alpha - \beta) - 1 \pm 4\sin^2(\frac{\alpha}{2})\sin^2(\frac{\beta}{2})\sqrt{5\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})^2}}{\cos(\alpha) - (\cos(\alpha) - 3\sin(\alpha) + 3)\cos(\beta) + 3\sin(\alpha) + (\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)\sin(\beta) - 1}$$

Jako że $\alpha, \beta \in (0, \pi) \implies \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 0 \wedge \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} > 0$, to możemy dokonać pierwiastkowania pewnych czynników i uprościć otrzymany wzór:

$$k = \frac{3\cos\alpha - \cos\beta + \cos(\alpha - \beta) + 1 \pm (\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta))\sqrt{5}}{(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)\sin\beta - (3 + \cos\alpha - 3\sin\alpha)\cos\beta + 3\sin\alpha + \cos\alpha - 1}$$

Wraz ze zwiększaniem parametru t , punkt $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ przemieszcza się po okręgu jednostkowym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Punkt, którego nie da się wyrazić w ten sposób, to $(-1, 0)$, gdyż $2t = 0 \implies \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$. Obracając ten punkt wokół początku układu współrzędnych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przechodzimy od punktów o parametrze ujemnym, przez punkt $(1, 0)$, dla którego $t = 0$, do punktów o parametrze dodatnim. Punkt K z przypadku pierwszego należy do krótszego łuku pomiędzy punktami $(-1, 0)$ i $(0, -1)$, gdyż $|\angle BAK| < \frac{\alpha}{2}$ i jest on zawsze bliższym punktem wspólnym okręgu i prostej przechodzącej przez A . Punkt K z przypadku drugiego należy do dłuższego łuku pomiędzy punktami $(-1, 0)$ i $(0, -1)$, gdyż $|\angle BAK| > \frac{\alpha}{2}$ i jest on zawsze dalszym punktem wspólnym okręgu i prostej przechodzącej przez A . Dlatego wybierając w powyższym wzorze znak minus, otrzymujemy parametr k dla przypadku pierwszego, a gdy znak plus, otrzymujemy parametr k dla przypadku drugiego.

Rozpatrzmy przypadek pierwszy:



$\operatorname{tg}|\angle BAK| = \frac{|y_K + 1|}{|x_K - a|} = \frac{y_K + 1}{x_K - a}$, gdzie (x_K, y_K) to współrzędne punktu K , ponieważ:

$$y_K \in (-1, 1) \implies y_K + 1 \in (0, 2)$$

$$|\angle BAK| < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \implies x_K > a \implies x_K - a > 0$$

$$\text{Zatem } \operatorname{tg}|\angle BAK| = \frac{y_K + 1}{x_K + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2k}{1+k^2} + 1}{\frac{1-k^2}{1+k^2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{k^2 + 2k + 1}{1 - k^2 + (1+k^2)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{(k+1)^2}{(k^2+1)(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1)+2}$$

□

Wniosek 2.1

Dla każdego trójkąta istnieją dokładnie dwa trójkąty *kappa*.

Dowód. Z Twierdzenia 2.1 wiemy już, że istnieją co najwyżej dwa trójkąty *kappa* dla danego trójkąta.

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy parametr $k = \frac{3\cos x - \cos y + \cos(x-y) + 1 \pm (\sin x + \sin y + \sin(x+y))\sqrt{5}}{(1 + \sin x + \cos x)\sin y - (3 + \cos x - 3\sin x)\cos y + 3\sin x + \cos x - 1}$ rozważany w dowodzie tego twierdzenia, ma tę samą wartość, niezależnie od znaku przed ostatnim wyrazem w liczniku. Oznaczało by to jednak, że $\sqrt{5} = -\sqrt{5}$, co daje sprzeczność, tym samym dowodząc tezy. □

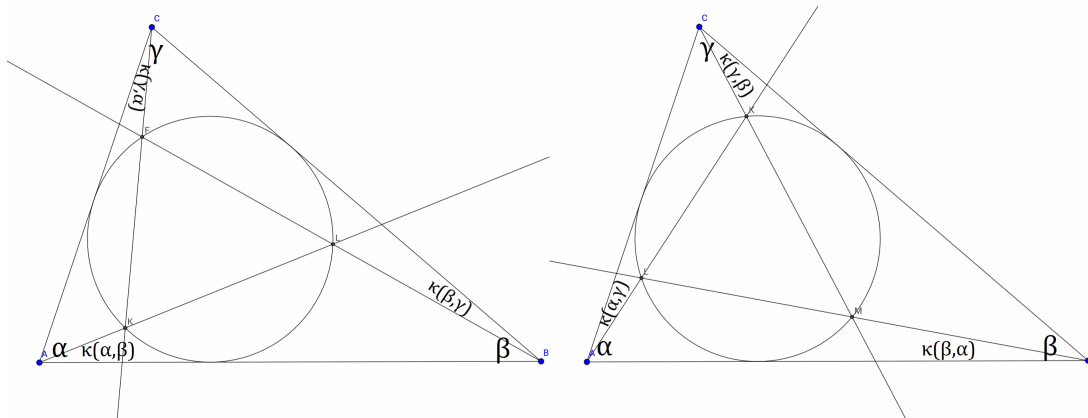
Funkcja *kappa*

Rozważmy teraz funkcję $k(x, y) = \frac{3\cos x - \cos y + \cos(x-y) + 1 - (\sin x + \sin y + \sin(x+y))\sqrt{5}}{(1 + \sin x + \cos x)\sin y - (3 + \cos x - 3\sin x)\cos y + 3\sin x + \cos x - 1}$.

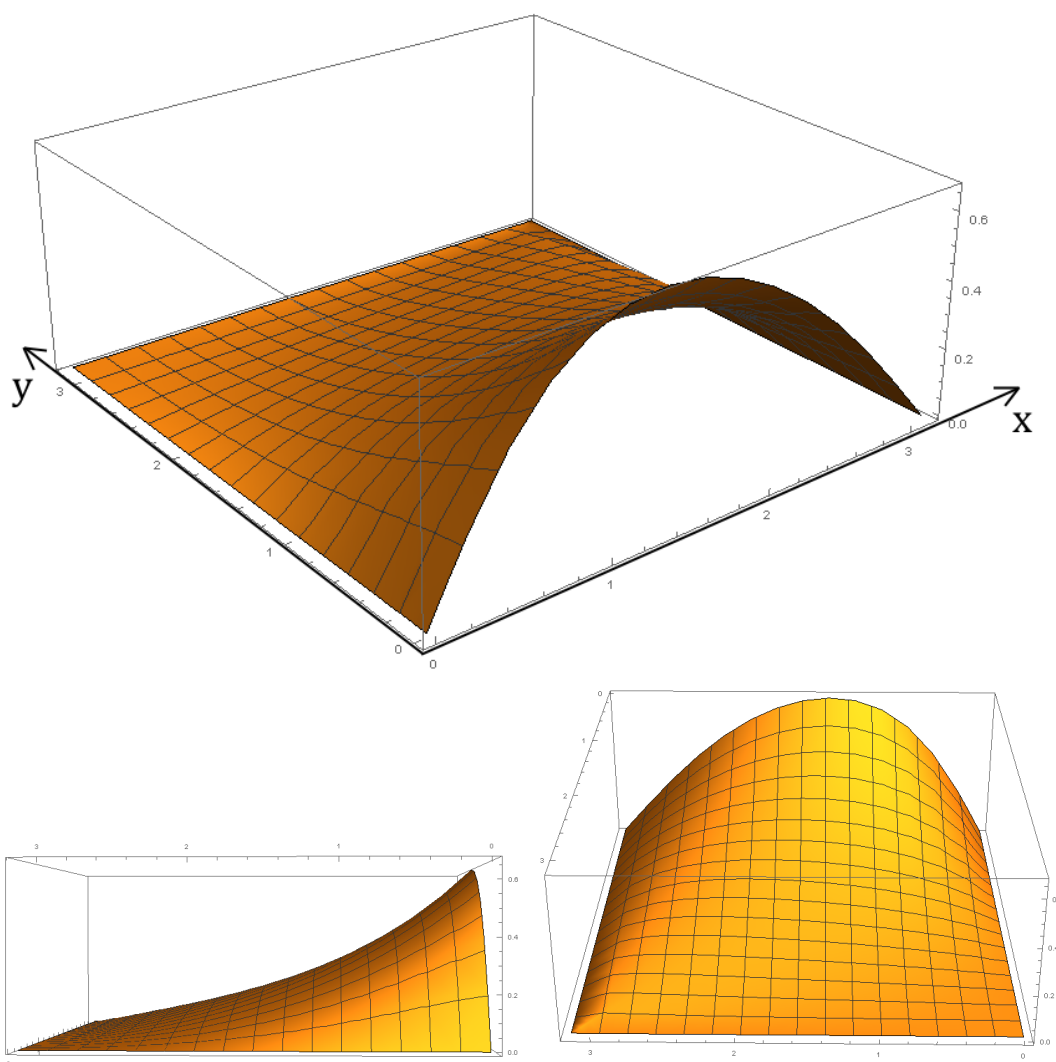
Definicja Funkcją *kappa* nazwijmy funkcję dwuargumentową wyrażoną następującym wzorem:

$$\kappa(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{(k(x, y) + 1)^2}{(k(x, y)^2 + 1)(\cot\frac{\alpha}{2} - 1) + 2}\right).$$

Jest ona funkcją miary kąta pomiędzy bokiem AB i prostą tworzącą trójkąt *kappa* przechodzącą przez punkt A od miar kątów przy wierzchołkach A i B (odpowiednio x i y) dla dowolnego trójkąta $\triangle ABC$. Zatem $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$.



Rys.2. Miary kątów między prostymi tworzącymi trójkąt kappa a bokami



Rys.3. Wykres funkcji $\kappa(x, y)$

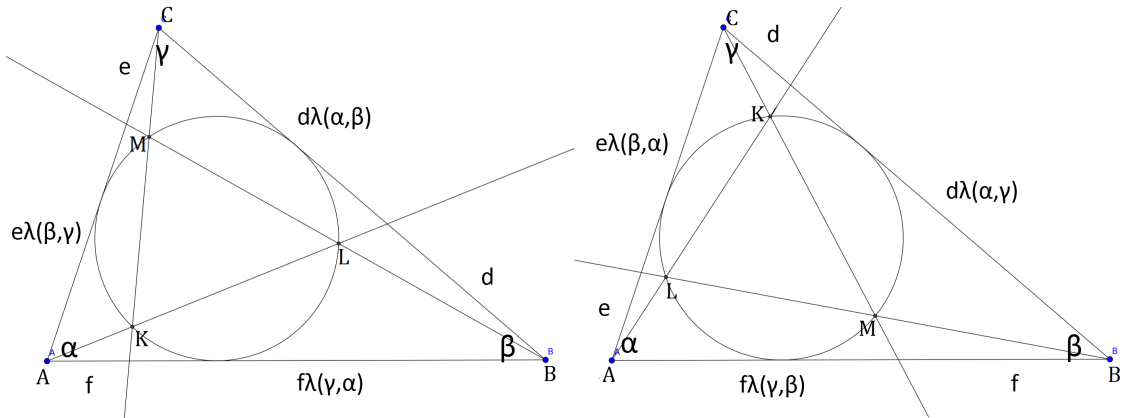
Twierdzenie 2.2 Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz jego trójkąt kappa $\triangle KLM$, przy czym współliniowe są następujące trójki punktów: (A, K, L) , (B, L, M) , (C, M, K) . Przyjmijmy ponadto $\alpha = |\angle BAC|$ oraz $\beta = |\angle CBA|$. Dla sytuacji pierwszej z Twierdzenia 2.1 prosta KL dzieli bok BC w stosunku $1 : \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\kappa(\alpha, \beta))}{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\kappa(\alpha, \beta) \sin(\alpha + \beta)} - 1 \right)$.

Dowód. Niech punkt S będzie punktem przecięcia boku BC i prostej KL . Niech S' będzie rzutem prostokątnym punktu S na prostą AB . Przyjmijmy następujące oznaczenia: $a = |AB|$, $x = |AS'|$, $h = |SS'|$, $y = |SB|$. Wówczas $|BS'| = a - x$ oraz $|CS| = b - y$. Z zależności trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}
tg\kappa(\alpha, \beta) &= \frac{h}{x} \implies h = xtg\kappa(\alpha, \beta) \\
tg\beta &= \frac{h}{a-x} \implies h = (a-x)tg\beta \\
xtg\kappa(\alpha, \beta) &= (a-x)tg\beta \implies x = \frac{atg\beta}{tg\kappa(\alpha, \beta) + tg\beta} \\
sin\beta &= \frac{h}{y} \implies y = \frac{h}{sin\beta} \text{ Ponadto z twierdzenia sinusów } b = \frac{asin\alpha}{sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{b-y}{y} = \frac{b}{y} - 1 = \frac{asin\alpha sin\beta}{xtg\kappa(\alpha, \beta) sin(\alpha+\beta)} - 1 \\
1 &= \frac{sin\alpha sin\beta (tg\beta + tg\kappa(\alpha, \beta))}{tg\beta tg\kappa(\alpha, \beta) sin(\alpha+\beta)} - 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Funkcja *lambda*

Definicja. Zdefiniujemy funkcję *lambda* jako dwuargumentową funkcję wyrażoną następującym wzorem: $\lambda(x, y) = \frac{sinx sin y (tgy + tg\kappa(x, y))}{tgy tg\kappa(x, y) sin(x+y)} - 1$. Jest ona funkcją stosunku w jakim prosta tworząca trójkąt *kappa* zawierająca wierzchołek *A*, dzieli przeciwległy bok *BC*, od miar kątów przy wierzchołkach *A* i *B* (odpowiednio *x* i *y*) dla dowolnego trójkąta $\triangle ABC$. Zatem $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$.



Rys.4. Stosunki długości odcinków na jakie proste tworzące trójkąt *kappa* dzielą boki

3 Własności trójkątów *kappa*

W dalszej części niniejszej pracy przez sformułowanie "trójkąt *kappa* dla danego trójkąta" będzie rozumiany trójkąt *kappa* z przypadku pierwszego z Twierdzenia 2.1. Nie prowadzi to do straty ogólności, gdyż aby otrzymać własności trójkąta z przypadku drugiego, wystarczy zamienić miejscami α i β .

Fakt 3.1

Kąty wewnętrzne trójkąta *kappa* dla trójkąta o kątach wewnętrznych o mierze α, β, γ , mają miarę: $\Delta = \alpha + \kappa(\gamma, \alpha) - \kappa(\alpha, \beta)$, $\epsilon = \beta + \kappa(\alpha, \beta) - \kappa(\beta, \gamma)$, $\zeta = \gamma + \kappa(\beta, \gamma) - \kappa(\gamma, \alpha)$.

Dowód. Jeśli *A* jest wierzchołkiem, przy którym znajduje się kąt o mierze α oraz *C* tym, przy którym znajduje się kąt o mierze γ oraz punkt *K* jest przecięciem prostych tworzących trójkąt *ABC* zawierających te punkty, to: $|\angle KAC| = \alpha - \kappa(\alpha, \beta)$, $|\angle CK A| = \pi - \alpha + \kappa(\alpha, \beta) - \kappa(\gamma, \alpha)$ i ostatecznie miara kąta w trójkącie *kappa* przy wierzchołku *K*, to: $\pi - |\angle CK A| = \alpha + \kappa(\gamma, \alpha) - \kappa(\alpha, \beta)$. Analogicznie należy postąpić dla pozostałych kątów. \square

Fakt 3.2

Długości boków trójkąta *kappa* dla trójkąta o bokach długości a, b, c i polu powierzchni Δ , to: $k = \frac{4\Delta sin\Delta}{a+b+c}$, $l = \frac{4\Delta sin\epsilon}{a+b+c}$, $m = \frac{4\Delta sin\zeta}{a+b+c}$. Gdzie Δ, ϵ, ζ to miary kątów wewnętrznych trójkąta *kappa* leżących naprzeciw odpowiadających im boków.

Dowód. Dla dowolnego trójkąta zachodzi $\Delta = r(a+b+c) \implies r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, gdzie r to promień okręgu weń wpisanego. r jest również promieniem okręgu opisanego na trójkącie *kappa* dla tego trójkąta, wprost z definicji. To pozwala nam zastosować twierdzenie sinusów: $\frac{k}{sin\Delta} = 2r \implies k = \frac{4\Delta sin\Delta}{a+b+c}$. Analogicznie należy postąpić dla pozostałych boków. \square

Fakt 3.3

Pole trójkąta *kappa* dla trójkąta o bokach a, b, c wynosi $P_{\Delta\kappa} = \frac{8\Delta^2 sin\Delta sin\epsilon sin\zeta}{(a+b+c)^2}$.

Dowód. Ze wzoru na pole trójkąta przy uzyciu promienia okręgu opisanego

$$P_{\Delta\kappa} = \frac{klm}{4r} = \frac{8r^3 \sin\Delta \sin\epsilon \sin\zeta}{4r} = \frac{8\Delta^2 \sin\Delta \sin\epsilon \sin\zeta}{(a+b+c)^2} \quad \square$$

Fakt 3.4

Ciąg rekurencyjny trójkątów $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ trójkąt Δ_{n+1} jest trójkątem *kappa* dla trójkąta Δ_n , ma granicę w postaci jednoznacznie wyznaczonego punktu.

Dowód. Dla każdego trójkąta promień okręgu wpisanego jest mniejszy od promienia okręgu opisanego. Ciąg promieni okręgów wpisanych w te trójkąty r_1, r_2, \dots jest więc ściśle malejący, jednocześnie mając ograniczenie z dołu: 0. Z twierdzenia Eulera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 - r_{n-1}(r_{n-1} - 2r_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 + r_n^2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

gdzie d_n to odległość pomiędzy środkiem okręgu wpisanego i środkiem okręgu opisanego w trójkącie Δ_n . Zatem ciąg promieni okręgów wpisanych w te trójkąty jest zbieżny do zera. \square

4 Przypadki szczególne trójkątów *kappa*

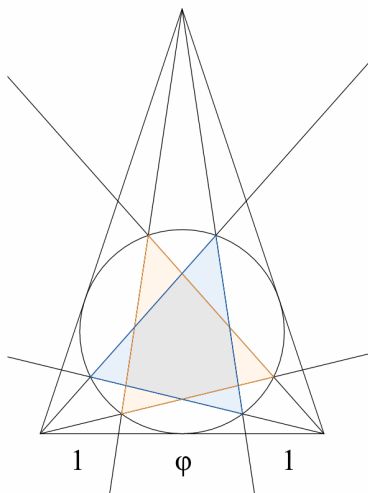
4.1 Trójkąt równoramienny

Rozpatrywać będziemy trójkąty, których kąty wewnętrzne mają miarę: $\alpha, \alpha, \pi - 2\alpha \wedge \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Twierdzenie 4.1

Trójkąty *kappa* dla danego trójkąta równoramiennego są przystające.

Dowód. Wystarczy użyć Faktu 3.1, by przekonać się, że odpowiednie kąty w obydwu trójkątach *kappa* mają taką samą miarę. Lub, możemy odbić symetrycznie trójkąt względem symetralnej jego podstawy. Wówczas przejdzie on sam na siebie, obraz trójkąta *kappa* nadal będzie wpisany w okrąg, a jego wierzchołki współliniowe z wierzchołkami, lecz będzie innym trójkątem - zatem drugim trójkątem *kappa*. Jako że symetria nie zmienia kątów ani długości boków, są one przystające. \square



Rys.5. Trójkąty *kappa* dla trójkąta równoramiennego.

Twierdzenie 4.2

Prosta zawierająca bok trójkąta *kappa*, która przecina podstawę trójkąta równoramiennego, dzieli ją w stosunku $1 : \varphi^2$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dowód. Dla $x = \pi - 2\alpha$ i $y = \alpha$ zachodzi $k(x, y) = -\frac{1+\sqrt{5}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \cos x}{\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \sin x}$. Możemy teraz policzyć $\kappa(x, y)$ oraz ostatecznie $\lambda(x, y)$, które wynosi:

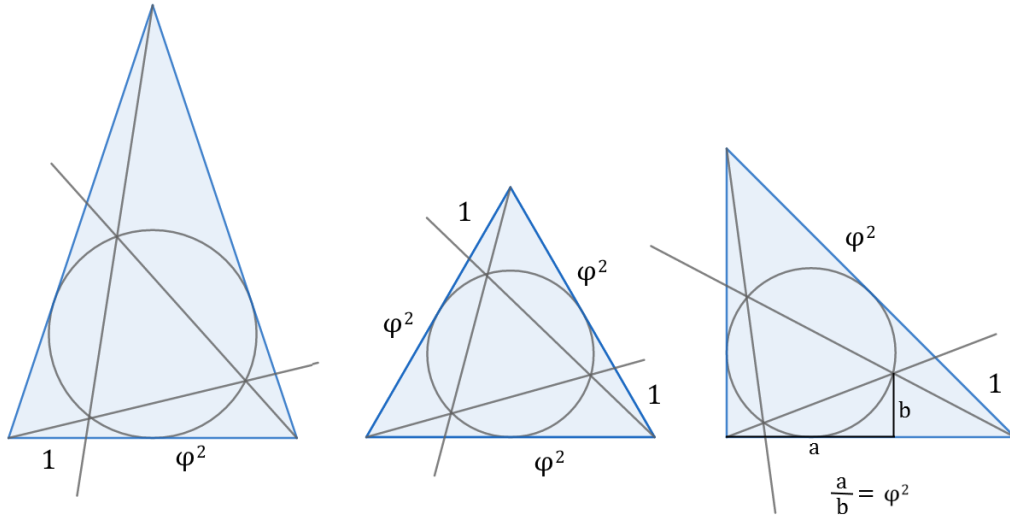
$$\lambda(x, y) = \left(\frac{2+(1+\sqrt{5})(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})}{-1+\sqrt{5}+2(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})} \right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \varphi^2,$$

ponieważ dla każdego rzeczywistego q zachodzi

$$4 + 2(1 + \sqrt{5})q = -1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 + 2q(1 + \sqrt{5}) \implies 2(2 + (1 + \sqrt{5})q) = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5} + 2q) \implies$$

$$\frac{2+(1+\sqrt{5})q}{-1+\sqrt{5}+2q} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies \left(\frac{2+(1+\sqrt{5})(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})}{-1+\sqrt{5}+2(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})} \right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2, \text{ gdy } q = (\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})$$

□



Rys.5. Związek trójkątów *kappa* dla trójkątów: równoramiennego, równobocznego, prostokątnego równoramiennego ze złotym podziałem.

4.2 Trójkąt równoboczny

Korzystając z Twierdzenia 2.1:

Fakt 4.1

$$\kappa\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \arccos\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right) = \arccos\left(\frac{3\varphi-1}{4}\right) \approx 15,52249^\circ$$

Korzystając z Faktu 3.1:

Fakt 4.2

Trójkąt *kappa* dla trójkąta równobocznego jest trójkątem równobocznym.

Fakt 4.3

Trójkąt *kappa* dla trójkąta równobocznego jest do niego podobny w skali $\frac{1}{2}$.

Dowód. Jeżeli trójkąt równoboczny ma bok długości a , to promień okręgu weń wpisanego wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy długość boku trójkąta *kappa*:

$$\sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{36}} = \frac{a}{2}$$

Korzystając z Twierdzenia 4.2:

Fakt 4.4

Każda prosta zawierająca bok trójkąta *kappa* dla trójkąta równobocznego dzieli bok na przeciw wierzchołka, który zawiera, w stosunku $1 : \varphi^2$.

Fakt 4.5

Punkty A, B są punktami przecięć przekątnej pięciokąta foremnego z dwoma innymi przekątnymi. C jest takim wierzchołkiem tego pięciokąta, że leży w takiej samej odległości od A , co od B . E, F są końcami przekątnej, do której należą jednocześnie A i B . Punkt D i punkty E, F są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Wówczas $|\angle ADB| = \kappa\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

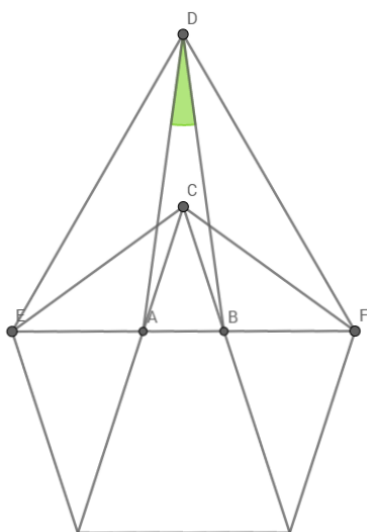
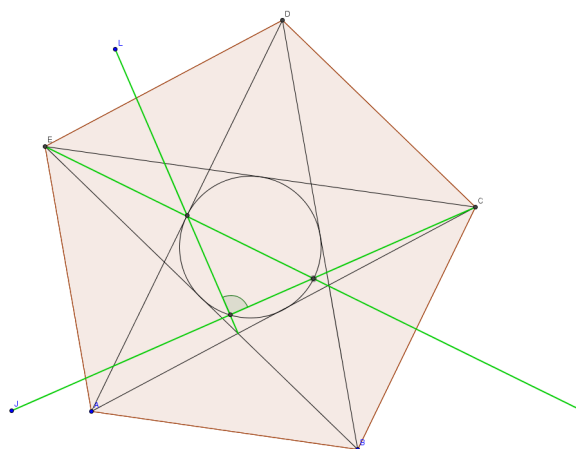
Dowód. Bez straty ogólności założmy, że punkt E leży bliżej punktu A niż B (patrz Rys.6.). Niech $a = |EC| = |CF|$ będzie długością boku tego pięciokąta. Wówczas, $|EF| = a\varphi$ oraz $|EA| = \frac{a}{2\cos 36^\circ} = \frac{a}{\varphi}$. Zatem $|AB| = |EF| - 2|EA| = \frac{a}{\varphi^2}$.

$$|AD| = \sqrt{\left(\frac{|EF|\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD :

$$\frac{a}{\varphi^4} = 4a^2(1 - \cos|\angle ADB|) \implies |\angle ADB| = \arccos\left(\frac{3\varphi-1}{4}\right) = \kappa\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

□

Rys.6. Kąt o mierze $\kappa(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.Rys.7. Trójkąt *kappa* dla złotego gnomona.

4.3 Trójkąt prostokątny równoramienny

Korzystając z Twierdzenia 2.1:

Fakt 4.6

$$\kappa(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \text{arctg}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = \text{arctg}(\varphi^2) \approx 20,90516^\circ$$

Korzystając z Twierdzenia 4.2:

Fakt 4.7

Prosta zawierająca bok trójkąta *kappa* dla trójkąta prostokątnego równoramiennego, która przecina przeciwprostokątną, dzieli ją w stosunku $1 : \varphi^2$.

4.4 Złoty gnomon

Złoty gnomon, czyli trójkąt, którego kąty wewnętrzne mają miarę $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$, jest częścią gwiazdy pitagorejskiej. Długość jego ramienia do długości podstawy ma się jak $1 : \varphi$.

Fakt 4.8

Półprosta zawierająca bok trójkąta *kappa* dla złotego gnomona i przecinająca jego ramię jest dwusieczną kąta przy jego podstawie.

Dowód. $\kappa(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{5}$ □

Fakt 4.9

Trójkąt *kappa* dla złotego gnomona jest trójkątem prostokątnym.

Dowód. Na podstawie Faktu 4.8 stwierdzamy, że jeden z boków trójkąta *kappa* jest średnicą okręgu opisanego na nim, gdyż zawiera się w dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta, dla którego okrąg ten jest okręgiem opisanym. Stąd, jeden z kątów wewnętrznych trójkąta *kappa* musi być prosty. □

Fakt 4.10

Półprosta zawierająca bok trójkąta *kappa* dla złotego gnomona i przecinająca jego ramię, tnie je w stosunku $1 : \frac{1}{\varphi}$.

Dowód. $\lambda(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}$

Korzystając z Twierdzenia 4.2:

Fakt 4.11

Prosta zawierająca bok trójkąta *kappa* dla złotego gnomona, która przecina podstawę, dzieli ją w stosunku $1 : \varphi^2$.

Fakt 4.12

Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Przecięcie przekątnych BE i AC oznaczono jako F , a przekątnych BD i AC jako G . Wówczas, w prostej EG zawiera się bok trójkąta $kappa$ dla trójkąta $\triangle CEF$ (patrz Rys.7.).

Dowód. Z zależności pomiędzy odcinkami w gwiazdzie pitagorejskiej oraz Faktu 4.10:

$$\frac{|FG|}{|CG|} = \frac{1}{\varphi} = \lambda\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$$

□

5 Uogólnienie zagadnienia na wielokąty foremne

Definicja. Jeżeli n prostych zawierających odpowiednio punkty: A_1, A_2, \dots, A_n przetnie się na okręgu wpisanym w wielokąt $A_1A_2\dots A_n$, to wielokąt $B_1B_2\dots B_n$ jest wielokątem $kappa$ dla wielokąta $A_1A_2\dots A_n$, gdzie B_1 to punkt przecięcia prostych zawierających punkty A_n, A_1 oraz B_i to punkt przecięcia prostych zawierających punkty B_{i-1}, B_i dla $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Można postawić problem analogiczny do tego z Rozdziału 2.:

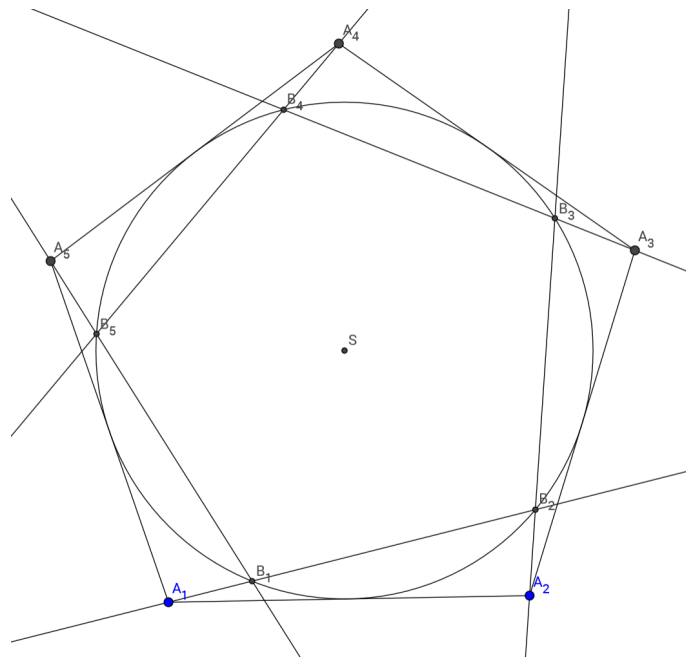
Pod jakim kątem do podstawy wielokąta foremnego $A_1A_2\dots A_n$ należy poprowadzić prostą z wierzchołka A , żeby zawierała bok wielokąta $kappa$ dla wielokąta $A_1A_2\dots A_n$?

Twierdzenie 5.1

Dany jest wielokąt foremny $A_1A_2\dots A_n$ oraz jego wielokąt $kappa$ $B_1B_2\dots B_n$, przy czym współliniowe są następujące trójki punktów: (A_1, B_1, B_2) , (A_2, B_2, B_3) , ..., (A_n, B_n, B_1) . Dla $n > 3$ zachodzi:

$$\operatorname{tg}|\angle A_2A_1B_1| = \frac{h}{\frac{1}{2} + \sqrt{h(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - h)}}$$

gdzie $h = \frac{1}{4}(2 - (1 - \cos\frac{2\pi}{n})\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n})\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$



Rys.8. Wielokąt $kappa$ dla pięciokąta foremnego.

Dowód.

Obrót dowolnego n -kąta foremnego o $\frac{k\pi}{n}$ względem środka jego okręgu wpisanego S , gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

jest tożsamością, zatem zachodzi $|\angle A_2 A_1 B_1| = |\angle A_3 A_2 B_2| = \dots = |\angle A_1 A_n B_n|$. Zatem trójkąty $A_1 A_2 B_2, A_2 A_3 B_3, \dots, A_n A_1 B_1$ są przystające, a ich suma jest różnicą wielokątów $A_1 A_2 \dots A_n$ oraz $B_1 B_2 \dots B_n$. Jako że trójkąty te są rozłączne, możemy zapisać: $n P_{A_1 A_2 \dots A_n} = P_{A_1 A_2 \dots A_n} - P_{B_1 B_2 \dots B_n}$. Z powyższej równości miar kątów wykazać można łatwo foremność wielokąta $B_1 B_2 \dots B_n$. Dla prostszych rachunków przyjmijmy $a = 1$. Zrzutujemy punkt B_2 na prostą $A_1 A_2$ otrzymując punkt B'_2 i oznaczmy $h = |B_2 B'_2|$. Zachodzi $h = 2 P_{A_1 A_2 B_2}$. Ponadto niech $b = |B_1 B_2|$, $|r = S B_1|$.

$$r = \frac{1}{2} ctg \frac{\pi}{n}$$

$$b = \sqrt{2r^2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})} = ctg(\frac{\pi}{n}) \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi}{n})}$$

$$P_{A_1 A_2 \dots A_n} = \frac{n}{4} ctg \frac{\pi}{n}$$

$$P_{B_1 B_2 \dots B_n} = \frac{n}{4} b^2 ctg \frac{\pi}{n} = \frac{n}{8} (1 - \cos \frac{2\pi}{n}) ctg^3 \frac{\pi}{n}$$

$$P_{A_1 A_2 B_2} = \frac{P_{A_1 A_2 \dots A_n} - P_{B_1 B_2 \dots B_n}}{n} = \frac{1}{8} (2 - (1 - \cos \frac{2\pi}{n}) ctg^2 \frac{\pi}{n}) ctg \frac{\pi}{n}$$

$$h = 2 P_{A_1 A_2 B_2} = \frac{1}{4} (2 - (1 - \cos \frac{2\pi}{n}) ctg^2 \frac{\pi}{n}) ctg \frac{\pi}{n}$$

Teraz znając długość odcinka BB' , możemy określić długość odcinka $A_1 B'_2$, a następnie obliczyć tangens kąta $\angle B_2 B'_2 A_1$. Oznaczmy $g = |A_1 B'_2|$. Umieścimy wielokąt $A_1 A_2 \dots A_n$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, tak aby środek jego okręgu wpisanego był początkiem układu, a oś odciętych symetralną boku $A_1 A_2$. Wówczas współrzędne punktu B_2 to $(g - \frac{1}{2}, h - r)$.

$$r^2 = (g - \frac{1}{2})^2 + (h - r)^2$$

$$g = \frac{1}{2} + \sqrt{h(2r - h)} = \frac{1}{2} + \sqrt{h(ctg \frac{\pi}{n} - h)}$$

$$tg |\angle A_2 A_1 B_1| = \frac{h}{g} = \frac{h}{\frac{1}{2} + \sqrt{h(ctg \frac{\pi}{n} - h)}} = \frac{h}{\frac{1}{2} + \sqrt{h(ctg \frac{\pi}{n} - h)}}$$

□

Wniosek 5.1

Interesującym wydaje się fakt, iż podstawiając $n = 4$, otrzymujemy

$$tg |\angle A_2 A_1 B_1| = \frac{1}{2} \implies |\angle A_2 A_1 B_1| = \frac{\pi}{12} = 15^\circ.$$

6 Perspektywy rozwoju

Poza udowodnieniem nowych własności trójkątów *kappa*, z pewnością da się uogólnić ten problem na wiele sposobów. Na przykład uwzględniając inne okręgi niż okrąg wpisany. Można też rozważać konstrukcje odwrotne - szukanie trójkątów, dla których dany trójkąt jest trójkątem *kappa*. Inną drogą byłoby badanie analogonów przestrzennych dla czworościanów.

Można pokusić się o wyznaczenie położenia punktu zbieżności kolejnych trójkątów *kappa* (patrz Fakt 3.4). i sprawdzenie czy jest powiązany z innymi zagadnieniami geometrii trójkąta. Możliwe, że istnieją, inne niż trójkąty równoboczne, klasy trójkątów, których pewna para kątów wewnętrznych daje tę samą wartość funkcji $\lambda(x, y)$. Pomocne w badaniach byłoby zapewne lepsze poznanie własności funkcji $\kappa(x, y)$. Jej wykres wykazuje pewną asymetrię, można pytać o argument x dla którego funkcja ta przyjmuje największą wartość dla danego y .

Ponadto, z moich obserwacji wynika, że odpowiednie punkty wspólne boków trójkątów *kappa* dla danego trójkąta są współliniowe z odpowiednimi parami wierzchołków tego trójkąta i punktów styczności okręgu wpisanego z przeciwległymi bokami. Wynika z tego, że proste te (w sumie trzy) są współpękowe - przecinają się w jednym punkcie, który nosi miano punktu Gergonne'a.

Kąt $\kappa(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ odgrywa znaczącą rolę w publikacji opatrzonej numerem 4. w rozdziale *Literatura*. Mając na przykład dwadzieścia czworościanów foremnych o wspólnym wierzchołku i obracając je wokół osi,

przechodzących przez ten wierzchołek i środki przeciwległych podstaw, tak by zetknęły się ścianami, otrzymamy czworościany foremne obrócone względem siebie o ten właśnie kąt. Być może zagadnienie to ma jakiś ściślejszy związek z trójkątami *kappa* niż tylko miara tych kątów.

7 Literatura

1. <http://mathworld.wolfram.com/Circle.html>
2. <http://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html>
3. F. Fang, K. Irwin, J. Kovacs, G. Sadler *Cabinet of Curiosities: The Interesting Geometry of the Angle $\beta = \arccos((3\varphi - 1)/4)$* , arxiv.org/abs/1304.1771