Hexapawn wydłużony

Wstęp

Hexapawn to gra zastosowana przez Martina Gardnera, aby zilustrować zasady uczenia maszynowego. Jej reguły są bardzo proste. Rozgrywka toczy się na planszy o wymiarach 3x3. W pierwszym rzędzie znajdują się trzy białe piony, a w trzecim – trzy czarne piony. Piony poruszają się szachowo (białe wzwyż, czarne w dół, zwykły ruch na wprost, bicie po skosie; brak tylko możliwości podwójnego skoku w pierwszym ruchu). Gracze wykonują ruchy naprzemiennie, zaczyna właściciel pionów białych. Wygrywa ten, kto jako pierwszy doprowadzi piona do przemiany lub zapatuje przeciwnika (uniemożliwi mu ruch). W oryginalnym opisie Gardnera trzecim sposobem na zwycięstwo było zbicie wszystkich pionów przeciwnika, ale nie będziemy odtąd rozpatrywać tej reguły osobno, gdyż efektywnie jest ona pochodną zasady pata: nie mając pionów, nie można wykonać ruchu.

♟	♟	♟
♙	♙	♙

Badając poszczególne możliwości przebiegu rozgrywki, łatwo zauważyć, że przy najlepszej grze obu stron czarne muszą wygrać, co zresztą było dokładnie opisane w artykule Kamili Łyczek „Hexapawn, czyli czego można nauczyć pudełka” (Delta, lipiec 2016). To budzi naturalną ciekawość: co by było, gdyby wydłużyć planszę? Nie zmieniając pozostałych reguł, można dać każdemu graczowi po osiem pionów na planszy 8x3 albo po tysiąc pionów na planszy 1000x3.

Zdawałoby się, że odpowiedź na tak narzucające się pytanie już dawno powinna być znana. W Internecie brakuje jednak jakichkolwiek informacji na ten temat. Najwyraźniej dotychczas rozpatrywano tylko (pod nazwą „szachów Dawsona”) wariant, w którym istotnie każdy gracz ma n pionów na planszy nx3 – bicie jest jednak obowiązkowe, co bardzo spłyca istotę gry.

Po lekturze artykułu Marthy i Mateusza Łąckich „Gra Grim i twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego” (Delta, czerwiec 2014) łatwo domyślić się, że gra była rozpatrywana z obowiązkowym biciem dlatego, iż wówczas jest w oczywisty sposób bezstronna (ang. *impartial*) – daje się przekształcić równoważnie do postaci, w której zestaw dostępnych ruchów nie zależy od tego, który gracz ma je wykonać. Takie gry można analizować przy użyciu tytułowego twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego, które daje bardzo obszerne możliwości.

Z tego powodu rozważania w niniejszym artykule nad problemem hexapawna wydłużonego będą podzielone na pięć wątków. W pierwszym wątku zaprezentujemy przykładową rozgrywkę; w drugim wątku wykażemy, że hexapawn wydłużony jest grą skończoną, rozstrzygalną i – wbrew pozorom – bezstronną; w trzecim wątku wesprzemy się twierdzeniem Sprague'a-

Grundy'ego, aby udowodnić poprawność wzorów rekurencyjnych określających tak zwane *nimbery* dla kolejnych wartości n; w czwartym wątku pokażemy program komputerowy służący pomocą w tych obliczeniach i pozwalający odnaleźć wzorce okresowe; w piątym wątku wykażemy prawdziwość tych wzorców, co pozwoli nam rozstrzygnąć hexapawn wydłużony.

Wątek 1

♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟
♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙

Najdłuższa gra, jaką można rozegrać przy użyciu zwykłego zestawu szachowego. Pierwszy ruch należy do białych.

♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♙					
♙	♙		♙	♙	♙	♙	♙

Białe ruszyły pionem. Czarne muszą go pobić, w przeciwnym razie grozi promocja.

♟		♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♟					
♙	♙		♙	♙	♙	♙	♙

Teraz pion czarnych stanowi zagrożenie i białe muszą go pobić.

♟		♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♙					
♙			♙	♙	♙	♙	♙

Ruch czarnych. Pierwszy raz widać różnicę w stosunku do szachów Dawsona: czarne nie muszą bić piona, choć mają taką możliwość.

♟		♟		♟	♟	♟	♟
		♙	♟				
♙			♙	♙	♙	♙	♙

Białe także nie muszą bić piona, ale decydują się to zrobić.

♟		♟		♟	♟	♟	♟
		♙	♙				
♙			♙		♙	♙	♙

Pion grozi promocją na trzy sposoby i nie pozostawia czarnym wyboru: muszą go pobić.

♟		♟			♟	♟	♟
		♙	♟				
♙			♙		♙	♙	♙

Ruch białych. Jak widać, w tym momencie gra 8x3 podzieliła się na dwie osobne gry (3x3 oraz 1x3).

♟		♟			♟	♟	♟
♙		♙	♟				
			♙		♙	♙	♙

Po ruchu białych pozostała już tylko gra 3x3. Czarne zaczynają, a zatem muszą przegrać.

♟		♟			♟		♟
♙		♙	♟			♟	
			♙		♙	♙	♙

Ruch białych. Bicie jest konieczne.

♟		♟			♟		♟
♙		♙	♟			♙	
			♙		♙	♙	

Niezależnie od tego, którym pionem pobiją czarne, ich los jest przesądzony.

♟		♟					♟
♙		♙	♟			♟	
			♙		♙	♙	

Ruch białych. Bicie byłoby błędem.

♟		♟					♟
♙		♙	♟		♙	♟	
			♙			♙	

Czarne mają tylko jeden dostępny ruch.

♟		♟					
♙		♙	♟		♙	♟	♟
			♙			♙	

W szachach Dawsona pozycja białych byłaby przegrana, a w rozpatrywanym przez nas wariancie jest wygrana.

♟		♟			♕		
♙		♙	♟			♟	♟
			♙			♙	

Białe mianowały hetmana i tym samym rozstrzygnęły partię na swoją korzyść. Jak wkrótce pokażemy, przy optymalnej grze obu stron białe istotnie powinny wygrać rozgrywkę 8x3.

Wątek 2

Lemat 1: każda partia zostanie zakończona po skończonej liczbie posunięć. Istotnie, w każdym ruchu jeden pion przesuwa się o jeden rząd, a rzędy są tylko trzy, więc ograniczenie długości partii przez 4n posunięć jest oczywiste. De facto można wyprowadzić dużo mocniejsze ograniczenie, ale nie jest to do niczego potrzebne.

Lemat 2: partia nie może się zakończyć inaczej niż zwycięstwem jednej ze stron. Załóżmy, że – przeciwnie – istnieje pewna pozycja, w której partia jest zakończona, ale żadna ze stron nie wygrała. Wówczas (zgodnie z regułami określającymi zwycięstwo) żaden z pionów nie znajduje się w trzecim rzędzie ze swojej perspektywy (ponieważ wówczas dysponująca nim strona wygrałaby), a gracz mający wykonać ruch dysponuje pewnym poprawnym posunięciem (inaczej właśnie by przegrał, zgodnie z regułą pata). Wobec tego partia – sprzecznie z założeniem – nie jest zakończona, co poprzez *reductio ad absurdum* kończy dowód lematu drugiego.

Twierdzenie 1: w hexapawnie w każdej pozycji jeden z graczy dysponuje strategią wygrywającą. Załóżmy, że – przeciwnie – istnieje pewna pozycja P, w której żaden z graczy nie dysponuje strategią wygrywającą.

> Lemat 3: jeżeli istnieje taka pozycja P, można z niej dojść pojedynczym legalnym ruchem do przynajmniej jednej innej pozycji f(P) o takiej samej charakterystyce. Gdyby bowiem nie było to możliwe, we wszystkich pozycjach bezpośrednio wywodzących się z P (czyli takich, do których można dojść z P pojedynczym legalnym ruchem) jeden z graczy dysponowałby strategią wygrywającą. Wobec tego zachodziłaby jedna z dwóch ewentualności.
>
> Pierwsza ewentualność: we wszystkich pozycjach bezpośrednio wywodzących się z P gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą. W takim przypadku w P gracz drugi miałby strategię wygrywającą, co byłoby sprzeczne z założeniem.
>
> Druga ewentualność: istnieje pozycja g(P) bezpośrednio wywodząca się z P, w której gracz drugi ma strategię wygrywającą, czyli w P gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą (której pierwszy element polega na przejściu do g(P)). To także byłoby sprzeczne z założeniem, że w P żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej.
>
> W ten sposób dowiedliśmy przez *reductio ad absurdum,* że istnieje opisana przez nas pozycja f(P).

Nazwijmy nieistnienie strategii wygrywającej dla żadnego z graczy własnością S. W świetle lematu 3, z istnienia pozycji P o własności S wynika istnienie pozycji f(P) o własności S, pozycji f(f(P)) o własności S i ogółem istnienie pozycji $f^k(P)$ o własności S dla każdego naturalnego k. Z lematu 1 wynika jednak, że istnieje pewne naturalne m będące kresem górnym długości wszystkich możliwych partii zaczynających się z pozycji P. Stosując lemat 2, stwierdzamy teraz, że najdalej po m ruchach pojawia się pozycja, w której gracz drugi dysponuje strategią wygrywającą (a w szczególności: właśnie wygrał swoim ostatnim posunięciem poprzez promocję lub zapatowanie). Dlatego istnieje pewne l (l≤m), dla którego $f^l(P)$ nie dysponuje własnością S (partia właśnie się zakończyła, gracz drugi dysponuje strategią wygrywającą). Jak jednak pokazaliśmy, z istnienia pozycji P o własności S wynikałoby coś wprost przeciwnego (a z prawdy fałsz nie wynika). W ten sposób pokazaliśmy przez *reductio ad absurdum*, że pozycja P nie istnieje, co kończy dowód twierdzenia pierwszego.

Uwaga ogólna: twierdzenie 1 jest podprzypadkiem szerszego twierdzenia mówiącego, że w każdej skończonej, dwuosobowej, pozbawionej remisów grze o pełnej informacji istnieje strategia wygrywająca dla jednego z graczy. Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia: pozycję składającą się z dwóch rzędów pionów w miejscach początkowych o długości k będziemy nazywali P(k); pozycję o takiej samej charakterystyce, w której jednak jeden z pionów skrajnych gracza drugiego jest wysunięty do rzędu środkowego, będziemy nazywali P'(k); pozycję o takiej samej charakterystyce, w której jednak jeden z pionów nieskrajnych gracza drugiego jest wysunięty do rzędu środkowego, będziemy nazywali P'(x)·P'(y) (x, y>1), gdzie x to liczba kolumn od lewego krańca planszy do wysuniętego piona, a y to liczba kolumn od wysuniętego piona do prawego krańca planszy.

P(5)

♟	♟	♟	♟	♟
♙	♙	♙	♙	♙

P'(4) (przy ruchu czarnych)

♟	♟	♟	♟
♙			
	♙	♙	♙

P'(6) (przy ruchu białych)

♟	♟	♟	♟	♟	
					♟
♙	♙	♙	♙	♙	♙

P'(3)·P'(6) (przy ruchu czarnych)

♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♙					
♙	♙		♙	♙	♙	♙	♙

Zgodnie z tymi oznaczeniami, pozycję początkową w grze 3xn będziemy określać jako P(n). Ruch lub wymuszoną sekwencję ruchów, po której zmienia się gracz mający posunięcie, nazwiemy „przejściem”; wymuszoną sekwencję, po której gracz mający posunięcie nie zmienia się, nazwiemy „utożsamieniem” (przy czym w dalszym toku rozważań rozpoczęcie takiej sekwencji prowadzącej z pozycji a do pozycji b również określimy jako utożsamienie pozycji a i b, względnie powiemy o „utrzymaniu się przy pozycji b”).

Lemat 4: dysponując pozycją P'(k), aby uniknąć porażki, można jedynie przejść do P'(k-1) lub utożsamić ją z P(k-2). Rzeczywiście, w pozycji P'(k) wysunięty pion skrajny grozi promocją w następnym ruchu, a zapobiec temu można jedynie na dwa sposoby: bijąc go lub ruszając się pionem sąsiednim.
Pierwszy sposób: jeżeli się go pobije, gracz drugi będzie oczywiście zmuszony odbić, a zatem pozycja P'(k) zostanie wtedy utożsamiona z pozycją P(k-2): dwa piony wzajemnie zablokowane i pozbawione sąsiadów równie dobrze można by zdjąć z planszy.
Drugi sposób: jeżeli wybierze się ruch pionem sąsiednim, dwa piony skrajne ponownie okażą się wzajemnie zablokowane. Ponadto będą niezdolne do interakcji z sąsiadami: ten wysunięty nie otrzyma już nigdy możliwości bicia, ten cofnięty zaś wprawdzie może ją otrzymać, ale nie będzie wówczas mógł jej zrealizować, gdyż umożliwiłby temu wysuniętemu natychmiastową promocję. Piony te więc znów można by zdjąć z planszy, co oznacza przejście z P'(k) do P'(k-1).
Pozycja omawiana w sposobie drugim (ruch czarnych). Skrajny prawy pion czarny już nigdy nie będzie mógł wykonać ruchu.

♟	♟	♟	♟	♟	
				♙	♟
♙	♙	♙	♙		♙

Skrajny prawy pion biały może otrzymać szansę wykonania ruchu, ale zrobienie tego oznaczałoby natychmiastową porażkę.

♟	♟	♟		♟	
				♟	♟
♙	♙	♙	♙		♙

Jak widać, obydwa skrajne prawe piony równie dobrze można by zdjąć.

♟	♟	♟	♟	♟	
				♙	
♙	♙	♙	♙		

To kończy dowód lematu czwartego.

Lemat 5: dysponując pozycją P(k), można jedynie przejść do P'(k) lub do P'(x)·P'(y), gdzie x+y=k+1. Prawdziwość lematu wynika bezpośrednio z definicji wymienionych pozycji oraz z obserwacji, że jedyną możliwością w pozycji P(k) jest ruch do przodu dowolnie wybranym pionem.

Lemat 6: jeżeli kolumna K jest pusta, części rozgrywki po jej lewej i prawej stronie równie dobrze można traktować jako toczące się na niezależnych planszach. Wynika to wprost z opisanych wyżej zasad poruszania się pionów. Jak łatwo zauważyć, pozycja typu P' wymaga natychmiastowego przekształcenia dla uniknięcia porażki, a zatem żadna suma niezależnych pozycji uzyskana w wyniku optymalnej rozgrywki nie będzie zawierała więcej niż jednej pozycji typu P'.

Lemat 7: dysponując pozycją P'(x)·P'(y), można jedynie utożsamić ją z dwiema niezależnymi pozycjami P(x-2) i P'(y) lub z dwiema niezależnymi pozycjami P'(x) i P(y-2). Zauważmy przede wszystkim, że wysunięty pion zagraża promocją na dwa sposoby, zatem dla uniknięcia natychmiastowej porażki trzeba go pobić (co także można uczynić na dwa sposoby). Pion użyty do bicia zagraża następnie promocją aż na trzy sposoby, więc gracz odpowiadający także musi dokonać bicia. Chcemy udowodnić, że musi odpowiedzieć symetrycznie (na bicie z lewej odpowiedzieć biciem z lewej, a na bicie z prawej – biciem z prawej). W tym celu prześledźmy przebieg rozgrywki.
Analizowana pozycja.

♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♙					
♙	♙		♙	♙	♙	♙	♙

Czarne muszą bić. Biją – przykładowo – z lewej.

♟		♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♟					
♙	♙		♙	♙	♙	♙	♙

Białe muszą bić. Zobaczmy, co stałoby się, gdyby pobiły asymetrycznie.

♟		♟	♟	♟	♟	♟	♟
		♙					
♙	♙			♙	♙	♙	♙

Czarne dysponują teraz doskonałą odpowiedzią.

♟		♟		♟	♟	♟	♟
		♙	♟				
♙	♙			♙	♙	♙	♙

Białe mogą uniknąć natychmiastowej porażki tylko w jeden sposób.

♟		♟		♟	♟	♟	♟
		♙	♙				
♙	♙				♙	♙	♙

Nie wystarcza to jednak na długo.

♟		♟			♟	♟	♟
		♙	♟				
♙	♙				♙	♙	♙

Białe mają ruch, ale nie mogą uniknąć porażki w następnym posunięciu. Rozgrywka przebiegałaby tak samo niezależnie od liczby kolumn po lewej i po prawej stronie (ewentualnie mogłaby ulec skróceniu o dwa ruchy bez zmiany wyniku, gdyby kolumna pusta na ostatnim diagramie była pusta już od początku).
Wobec tego bicie asymetryczne zawsze przegrywa: na bicie z lewej trzeba odpowiedzieć biciem z lewej. Dowód faktu, że na bicie z prawej trzeba odpowiedzieć biciem z prawej – jest całkowicie analogiczny. Zgodnie z podanymi wyżej definicjami, ciąg dwóch bić z lewej oznacza utożsamienie pozycji $P'(x)\cdot P'(y)$ z sumą dwóch niezależnych pozycji $P(x-2)$ i $P'(y)$, zaś ciąg dwóch bić z prawej oznacza utożsamienie pozycji $P'(x)\cdot P'(y)$ z sumą dwóch niezależnych pozycji $P'(x)$ i $P(y-2)$, co kończy dowód lematu siódmego.

Twierdzenie 2: z lematów 4–7 wynika – wprost z definicji – bezstronność hexapawna. Jak pokazują te lematy, pozycja typu P przy poprawnej grze może wyewoluować tylko w pozycję typu P' lub w sumę niezależnych pozycji typu P i P', zaś pozycja typu P' może wyewoluować tylko w pozycję typu P lub P'. Lematy te opisują wszystkie możliwe i nieprowadzące do natychmiastowej porażki ruchy z tych pozycji, nigdzie nie czyniąc rozróżnienia pomiędzy ruchami możliwymi dla białych a ruchami możliwymi dla czarnych. Gra jest zatem bezstronna, a ściślej rzecz biorąc – jest bezstronna, gdy zaczyna się z pozycji typu P, przy czym obie strony grają optymalnie. Co więcej, lematy te pokazują, że każda optymalna rozgrywka musi być rozstrzygnięta poprzez regułę pata: dopuszczenie do promocji jest zawsze wynikiem popełnionego błędu.

Wątek 3

Na potrzeby dalszych rozważań przypomnijmy treść twierdzenia Sprague'a-Grundy'ego. Każdej możliwej pozycji w grze przydzielimy pewną wartość numeryczną zwaną nimberem. Nimber będzie zdefiniowany jako mex (czyli najmniejsza wartość nieobecna spośród liczb całkowitych nieujemnych) zbioru nimberów pozycji, do których można dojść z danej pozycji pojedynczym ruchem; w szczególności, nimberem pozycji patowej będzie 0. (Taka definicja ma sens tylko wtedy, gdy rozważana gra jest bezstronna.)

Lemat 8: gracz drugi ma strategię wygrywającą w danej pozycji wtedy i tylko wtedy, gdy jej nimber wynosi 0. Rzeczywiście: zgodnie z definicją, z każdej pozycji o nimberze dodatnim można przejść do pozycji o nimberze 0, lecz z żadnej pozycji o nimberze 0 nie można przejść do pozycji o nimberze 0. Strategia wygrywająca gracza drugiego polega na tym, aby przy każdym kolejnym ruchu przechodzić do pozycji o nimberze 0 (jak pokazaliśmy, zawsze będzie to możliwe). Ponieważ jedynym możliwym sposobem zakończenia gry jest pat, który może przydarzyć się jedynie w pozycji o nimberze 0, gracz drugi musi wygrać. Jeżeli nimber pozycji początkowej jest różny od 0, strategią wygrywającą dysponuje gracz pierwszy: musi w pierwszym ruchu przejść do pozycji o nimberze 0, a dalej – jak wyżej.

Twierdzenie 3 (Sprague, Grundy): jeżeli partnerzy rozgrywają pewną liczbę gier bezstronnych i rozstrzyganych przez regułę pata jednocześnie, przy czym każdy w swojej kolejce wykonuje ruch na dokładnie jednej planszy, gracz drugi dysponuje strategią wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy xor (alternatywa wykluczająca w zapisie bitowym) nimberów poszczególnych gier wynosi 0. Jak wiadomo, xor liczb całkowitych nieujemnych zawsze jest liczbą całkowitą nieujemną; co więcej, suma niezależnych pozycji patowych ma xor nimberów równy 0, gdyż xor pewnej liczby zer to zero. Dlatego – jeżeli uda nam się wykazać, że z każdej sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów większym od 0 można przejść do sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0, a z żadnej sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0 nie można przejść do sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0 – resztę dowodu można będzie przeprowadzić analogicznie do powyższego dowodu lematu ósmego.

> Lemat 9: z żadnej sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0 nie można przejść do sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0. Aby to udowodnić, oznaczmy przez P pozycję, w której chcielibyśmy wykonać ruch. Zwróćmy tutaj uwagę na trzy ważne własności xora: jest on działaniem łącznym i przemiennym, a jedyną wartością x spełniającą równanie x xor a=0 dla ustalonego a jest x=a. Jeżeli zatem rozważana suma niezależnych pozycji ma xor nimberów równy 0, oznacza to, że xor nimberów wszystkich tych pozycji z wyjątkiem P jest równy nimberowi P. Zgodnie z podanymi własnościami

xora, dla utrzymania po posunięciu xora nimberów wszystkich rozważanych pozycji równego 0 należałoby wykonać ruch, który nie zmieni nimberu P. Nie jest to jednak możliwe (zgodnie z definicją nimberu: mex zbioru nimberów pozycji bezpośrednio osiągalnych), co kończy dowód lematu dziewiątego.

Lemat 10: z każdej sumy niezależnych pozycji o dodatnim xorze nimberów można przejść do sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0. Aby to udowodnić, oznaczmy xor nimberów wszystkich rozważanych pozycji przez x. Jak założyliśmy, x jest niezerowe, a zatem w jego zapisie binarnym musi wystąpić przynajmniej jedna jedynka. Przypuśćmy, że najbardziej znacząca (położona najdalej na lewo) jedynka wystąpi przy współczynniku 2^y. Zgodnie z definicją xora jako sumy bitowej bez przenoszenia, musi istnieć przynajmniej jedna pozycja P, której nimber w zapisie binarnym ma również jedynkę przy współczynniku 2^y. Oznaczmy ten nimber przez p. Oznaczmy xor nimberów wszystkich pozostałych pozycji przez q. Zauważmy, że (wobec łączności xora) p xor q=x. Skoro najbardziej znacząca jedynka w zapisie binarnym x występuje przy współczynniku 2^y, dla każdego z>y – zgodnie z definicją xora – cyfry przy współczynniku 2^z muszą być takie same w p i w q. Jak powiedzieliśmy, p ma jedynkę przy współczynniku 2^y, więc q ma zero przy współczynniku 2^y. Dlatego p>q. Z tego wynika jednak (w świetle definicji nimberu), że istnieje pozycja o nimberze q bezpośrednio osiągalna z pozycji o nimberze p. Wobec tego wystarczy wybrać w celu wykonania posunięcia pozycję P i przejść z niej do pozycji o nimberze q, aby w rezultacie przejść do sumy niezależnych pozycji o xorze nimberów równym 0, co kończy dowód lematu dziesiątego.

Jak już uprzednio pokazaliśmy, z lematów 8–10 wprost wynika twierdzenie trzecie, które niezależnie wyprowadzili Ronald Sprague w 1935 roku i Patrick Grundy w roku 1939.

Dysponując tym narzędziem, możemy przystąpić do obliczania wartości nimberów w hexapawnie. W tym celu oznaczymy przez f(x) nimber pozycji P(x), zaś przez g(x) nimber pozycji P'(x).

Z oczywistych przyczyn f(0)=g(1)=0: obie te pozycje są patowe. Z P(1) można jedynie przejść do P'(1), więc f(1)=mex(0)=1.

Ciekawym przypadkiem jest g(2). Z P'(2) można przejść do P'(1), można też utożsamić P'(2) z P(0). Oznacza to, że każda suma niezależnych pozycji zawierająca P'(2) jest wygrana dla gracza rozpoczynającego, który może zlikwidować pozycję P'(2), decydując przy tym, czy w grze będącej sumą pozostałych pozycji chce być graczem rozpoczynającym, czy graczem drugim (jak wiadomo, któryś z nich musi dysponować strategią wygrywającą). Dlatego g(2) jest wartością nieoznaczoną. Można jednak zauważyć, że skoro przejście do pozycji P'(2) zawsze oznacza porażkę, pozycja ta równie dobrze mogłaby nie istnieć (brak możliwości ruchu nie jest pod żadnym względem gorszy od możliwości ruchu przegrywającego). To założenie pozwoli bez trudności kontynuować obliczenia. (Na marginesie warto dodać, że – jak się wkrótce przekonamy przy pomocy indukcji – $P'(2)$ jest jedyną pozycją o tej szczególnej własności.)

Zdelegalizowanie pozycji $P'(2)$ oznacza, że z pozycji $P(2)$ nie ma teraz żadnych legalnych ruchów, więc $f(2)=0$. Z kolei $P'(3)$ można jedynie utożsamić z $P(1)$, zatem $g(3)=f(1)=mex(0)=1$.

Skoro $P'(2)$ jest pozycją uniwersalnie wygrywającą, przy przechodzeniu do pozycji typu $P'(x)\cdot P'(y)$ należy zabronić wybierania pozycji z $x=2$ lub $y=2$ (to umożliwiłoby przeciwnikowi utożsamienie swojej pozycji z pozycją zawierającą jako jeden ze składników $P'(2)$). Dlatego z $P(3)$ można przejść wyłącznie do $P'(3)$, co oznacza, że $f(3)=mex(1)=0$.

Rozważmy z kolei $P'(4)$. Z $P'(4)$ można przejść do $P'(3)$, można też utożsamić $P'(4)$ z $P(2)$, pozbawiając się możliwości wykonywania dalszych ruchów. Dlatego jedyną wartością w zbiorze nimberów pozycji osiągalnych z $P'(4)$ jest 1, wobec czego $g(4)=mex(1)=0$.

Podobnie do przypadku $P(3)$, z $P(4)$ można przejść wyłącznie do $P'(4)$, zatem $f(4)=mex(0)=1$.

Rozpatrzmy $P'(5)$. Niewątpliwie można stąd przejść do $P'(4)$, co w zbiorze nimberów pozycji osiągalnych z $P'(5)$ umieszcza $g(4)=0$. Można także utożsamić $P'(5)$ z $P(3)$, co daje jedynie możliwość przejścia do $P'(3)$; skoro $g(3)=1$, ta metoda dodaje do zbioru nimberów pozycji osiągalnych z $P'(5)$ jedynkę. Dlatego $g(5)=mex(0, 1)=2$.

Przy $P(5)$ pierwszy raz pojawi się nierozpatrywany dotąd typ ruchu, gdyż z $P(5)$ można przejść do $P'(5)$ lub do $P'(3)\cdot P'(3)$. W tym drugim przypadku odpowiadający będzie mógł jedynie utożsamić tę pozycję z sumą niezależnych pozycji $P'(3)$ i $P(1)$. Nimber tej sumy to $g(3)$ xor $f(1)=1$ xor $1=0$, z kolei $g(5)=2$, więc $f(5)=mex(0, 2)=1$.

Rozważmy $P'(6)$. Jak wiemy, pozycja ta umożliwia jedynie utrzymanie się przy $P(4)$ lub przejście do $P'(5)$. Jak stwierdziliśmy powyżej, $g(5)=2$, zaś zbiór nimberów pozycji osiągalnych bezpośrednio z $P(4)$ składa się wyłącznie z 0. Z tego powodu $g(6)=mex(0, 2)=1$.

Ciekawszym przypadkiem jest $P(6)$. Z $P(6)$ można przejść do $P'(6)$ lub do $P'(3)\cdot P'(4)$ (oczywiście $P'(3)\cdot P'(4)$ niczym się nie różni od $P'(4)\cdot P'(3)$). W tym drugim przypadku przeciwnik może utożsamić tę pozycję z sumami niezależnych pozycji $P'(4)$ i $P(1)$ lub $P(2)$ i $P'(3)$. Okazuje się, że $g(4)$ xor $f(1)=0$ xor $1=1$, a także $f(2)$ xor $g(3)=0$ xor $1=1$. Wskutek tego przejście do $P'(3)\cdot P'(4)$ oznacza, niezależnie od wyboru gracza drugiego, przejście do pozycji o nimberze 1. Co więcej, zachodzi także $g(6)=1$, więc z $P(6)$ można przejść tylko do pozycji o nimberze 1: $f(6)=mex(1)=0$.

Weźmy pod uwagę $P'(7)$. Jak wiemy, pozycja ta umożliwia jedynie utrzymanie się przy $P(5)$ lub przejście do $P'(6)$. Jak stwierdziliśmy powyżej, $g(6)=1$, zaś zbiór nimberów pozycji osiągalnych bezpośrednio z $P(5)$ składa się z 0 i 2. Z tego powodu $g(7)=mex(0, 1, 2)=3$.

Lemat 11: jeżeli $f(x-2) \text{ xor } g(y) \neq g(x) \text{ xor } f(y-2)$, każda suma niezależnych pozycji zawierająca $P'(x) \cdot P'(y)$ jest wygrana dla gracza rozpoczynającego. Istotnie: przypuśćmy, że xor nimberów pozostałych pozycji z tej sumy wynosi a. Na mocy twierdzenia 3 cała suma pozycji byłaby przegrana dla gracza rozpoczynającego tylko w przypadku, gdyby xor nimberów wszystkich tych pozycji wynosił 0; jedyną liczbą całkowitą nieujemną x spełniającą równanie $x \text{ xor } a=0$ jest $x=a$. Skoro jednak $f(x-2) \text{ xor } g(y) \neq g(x) \text{ xor } f(y-2)$, zachodzi $f(x-2) \text{ xor } g(y) \neq a$ lub $a \neq g(x) \text{ xor } f(y-2)$. Gracz rozpoczynający może zatem utożsamić pozycję $P'(x) \cdot P'(y)$ z tą spośród sum niezależnych pozycji $P'(x)$ i $P(y-2)$, $P(x-2)$ i $P'(y)$, która będzie miała nimber różny od a. To zapewni mu posiadanie strategii wygrywającej, co kończy dowód lematu jedenastego.

Przeanalizujmy $P(7)$. Z $P(7)$ można przejść do $P'(7)$, $P'(4) \cdot P'(4)$ lub $P'(3) \cdot P'(5)$. Wiemy, że $g(7)=3$. Jak łatwo spostrzec, nimber $P'(4) \cdot P'(4)=g(4) \text{ xor } f(2)=0 \text{ xor } 0=0$. Pozycję $P'(3) \cdot P'(5)$ przeciwnik mógłby utożsamić z sumami niezależnych pozycji $P'(3)$ i $P(3)$ lub $P(1)$ i $P'(5)$. Okazuje się, że $g(3) \text{ xor } f(3)=1 \text{ xor } 0=1$, ale $f(1) \text{ xor } g(5)=1 \text{ xor } 2=3$. Dlatego – na mocy lematu jedenastego – przejście do pozycji $P'(3) \cdot P'(5)$ byłoby zawsze przegrywającym błędem i – podobnie jak w przypadku $P'(2)$ – możemy zignorować istnienie takiej pozycji, zatem $f(7)=\text{mex}(0, 3)=1$.
Rozważmy $P'(8)$. Jak wiemy, pozycja ta umożliwia jedynie utrzymanie się przy $P(6)$ lub przejście do $P'(7)$. Jak stwierdziliśmy powyżej, $g(7)=3$, zaś zbiór nimberów pozycji osiągalnych bezpośrednio z $f(6)$ składa się z 1. Z tego powodu $g(8)=\text{mex}(1, 3)=0$.
Rozpatrzmy $P(8)$. Z $P(8)$ można przejść do $P'(8)$, $P'(3) \cdot P'(6)$ lub $P'(4) \cdot P'(5)$. Wiemy, że $g(8)=0$. Jak łatwo spostrzec, nimber $P'(3) \cdot P'(6)=g(3) \text{ xor } f(4)=f(1) \text{ xor } g(6)=1 \text{ xor } 1=0$. Okazuje się, że $g(4) \text{ xor } f(3)=0 \text{ xor } 0=0$, ale $f(2) \text{ xor } g(5)=0 \text{ xor } 2=2$, wskutek czego przejście do pozycji $P'(4) \cdot P'(5)$ byłoby zawsze przegrywającym błędem. Stąd wynika, że $f(8)=\text{mex}(0)=1$.

W ten sposób pokazaliśmy ręcznie, że w rozgrywce na planszy o długości 8 (w szczególności na szachownicy) gracz rozpoczynający powinien wygrać, przy czym wygrywające są (według notacji szachowej) otwarcia pionami a, c, f, h. Co jednak istotniejsze, niejako przy okazji opracowaliśmy algorytm indukcyjny pozwalający ustalić wartości $f(x)$ oraz $g(x+2)$, jeżeli dysponujemy wartościami $f(a)$ dla każdego $1 \leq a < x$ oraz $g(b)$ dla każdego $1 \leq b < x+2$.
Wartości początkowe: $f(0)=0$; $g(1)=0$; $f(1)=1$; $g(2)$ jest niezdefiniowane; $f(2)=0$; $g(3)=1$; $g(4)=0$.
Krok indukcyjny: chcemy ustalić zbiór Z nimberów pozycji, do których można przejść bezpośrednio z pozycji $P(x)$; następnie będziemy wiedzieli, że $f(x)=\text{mex}(Z)$. Jak już stwierdziliśmy, w zbiorze Z znajdzie się $g(x)$. Znajdzie się w nim jeszcze $g(a) \text{ xor } f(x-1-a)$ dla $3 \leq a \leq (x+1)/2$, ale jedynie pod warunkiem, że $g(a) \text{ xor } f(x-1-a)=f(a-2) \text{ xor } g(x+1-a)$. Wiemy także, że $g(x+2)=\text{mex}(g(x+1), Z)$, co wystarcza do wykonania kroku indukcyjnego.
Dowód poprawności: wartości początkowe wynikają z podanych powyżej

rozważań, kompletność opisywanych możliwości ruchu (a zatem właściwe określenie zbioru Z) z lematów 4–7 oraz spostrzeżenia o wykluczeniu pozycji P'(2), równości f(x)=mex(Z) i g(x+2)=mex(g(x+1), Z) z twierdzenia 3, wreszcie wymóg g(a) xor f(x-1-a)=f(a-2) xor g(x+1-a) z lematu 11.

Wątek 4

Skoro dysponujemy teraz wzorem indukcyjnym określającym kolejne wartości funkcji f i g w czasie obliczeniowym około $O(n^2)$ (w n-tej iteracji trzeba wykonać około n operacji), naturalnym krokiem jest stworzenie programu komputerowego obliczającego te wartości, aby poszukać wzorców. Oto taki program, napisany w języku Free Pascal (z dodaną numeracją linii co pięć).

```
program hexapawn_3xn;
var
a, b, c, d, e, f, g, h: longint;
t, u, mex: array[0..10000003] of longint;
begin
writeln('Program oblicza nimbery w grze hexapawn 3xn. Wpisz, do kiedy.');
readln(a);
for b:=1 to a+2 do begin t[b]:=-1; u[b]:=-1 end;
u[1]:=0; t[1]:=1; u[3]:=1; t[2]:=0; u[4]:=0;
writeln('f(1)=1; g(3)=1;');
writeln('f(2)=0; g(4)=0;');
for b:=3 to a do
begin
mex[u[b]]:=1; d:=u[b];
for c:=3 to (b+1) div 2 do if u[c] xor t[b-1-c]=t[c-2] xor u[b+1-c] then
begin
mex[u[c] xor t[b-1-c]]:=1;
if u[c] xor t[b-1-c]>d then d:=u[c] xor t[b-1-c]
end;
e:=0; while u[b+2]=-1 do
begin
if (mex[e]=0) and (t[b]=-1) then t[b]:=e;
if (mex[e]=0) and (u[b+1]<>e) then u[b+2]:=e;
inc(e)
end;
for f:=0 to d do mex[f]:=0;
writeln('f(', b, ')=', t[b], '; g(', b+2, ')=', u[b+2], ';')
end;
writeln('obliczenia skończone.');
readln
end.
```

W linii 1 podana jest nazwa programu; linie 2–4 definiują zmienne; linia 5 rozpoczyna program; linia 6 wypisuje informację dla użytkownika. W linii 7 wczytywana jest zmienna a, która będzie opisywała długość działania programu (wartości f(n) zostaną wypisane do n=a, wartości g(n) do n=a+2). Linia 8 to przygotowanie do użytku tablic (tablica t będzie odpowiadała za wartości funkcji f, tablica u za wartości funkcji g). Linia 9 powiadamia program o kilku pierwszych wartościach tych funkcji (rozpoczęcie indukcji); linie 10–11 powiadamiają użytkownika o tych pierwszych wartościach – schemat wypisywania będzie wyglądał tak, że w jednej linii zostaną zawsze wypisane f(n) i g(n+2).
Linie 12–13 otwierają główną pętlę programu (zmienna tej pętli typu „for” to b). W linii 14 przydzielamy komórce tablicy mex o indeksie u[b] (czyli g(b)) wartość 1. Tablica mex będzie służyła do zapamiętywania zbioru Z, czyli nimberów, do których można dotrzeć bezpośrednio z pozycji P(b). Komórka tablicy mex o indeksie obecnym w zbiorze Z będzie miała wartość 1, komórka o indeksie nieobecnym w zbiorze Z – wartość 0. Ponieważ g(b) niewątpliwie należy do zbioru Z (zgodnie z opisem algorytmu indukcyjnego), wpisujemy tę wartość od razu. Dodatkowo nadajemy zmiennej d wartość g(b) – zmienna ta będzie służyła do zapamiętania aktualnej długości tablicy mex.
W liniach 15–16 otwiera się pętla działająca od 3 do (b+1)/2 (zmienna pętli nosi nazwę c) z warunkiem wykonania g(c) xor f(b-1-c)=f(c-2) xor g(b+1-c). W linii 17 – zgodnie z opisem algorytmu indukcyjnego – uzupełniamy tablicę mex, czyli zbiór Z. W linii 18 aktualizujemy zmienną d (długość niezerowego fragmentu tablicy mex), o ile jest to niezbędne. Linia 19 kończy wykonanie tej zagnieżdżonej pętli.
Linie 20–21 rozpoczyna następną podpętlę, tym razem typu „while”. Zmienną pętli będzie e, któremu na początku przydzielamy wartość 0 (dlatego, że 0 jest najmniejszą możliwą wartością funkcji mex). Pętla będzie działać dopóty, dopóki nie zostanie ustalona wartość g(b+2). W linii 22 sprawdzamy, czy zachodzą naraz dwa warunki: mex[e]=0 (czyli e nie należy do zbioru Z) oraz t[b]=-1 (czyli wartość f(b) nie jest jeszcze ustalona, a zatem e jest najmniejszym elementem nieobecnym w zbiorze Z). Jeżeli tak, przydzielamy f(b) wartość e. W linii 23 również sprawdzamy, czy zachodzą naraz dwa warunki: mex[e]=0 (czyli e nie należy do zbioru Z) oraz g(b+1)≠e (czyli e nie jest równe jedynej wartości nimberu spoza Z, do której można przejść bezpośrednio z pozycji P'(b+2)). Jeżeli tak, przydzielamy g(b+2) wartość e i będzie to ostatnia iteracja tej podpętli. Zauważmy, że – zgodnie z algorytmem – g(b+2) nigdy nie może zostać ustalone przed f(b). Linia 24 służy do zwiększenia wartości e o 1: sprawdzając kolejne liczby począwszy od 0, trzeba w końcu znaleźć wartość funkcji mex, gdyż liczba elementów zbioru Z jest skończona (a nawet, jak wynika z algorytmu, mniejsza od n – dlatego złożoność wynosi $O(n^2)$). Linia 25 kończy wykonanie tej zagnieżdżonej pętli.
W linii 26 tablica mex ulega wyczyszczeniu – do efektywnego wykonania tej operacji była potrzebna zmienna d. Samej zmiennej d nie trzeba zerować, gdyż jej wartość zostaje odnowiona na początku każdego kolejnego

wykonania głównej pętli (linia 14). Linia 27 powiadamia użytkownika programu o wartościach f(b) i g(b+2); linia 28 kończy wykonanie głównej pętli. a linia 29 informuje o zakończeniu („obliczenia” małą literą, ponieważ poprzednia linia wyjścia kończy się średnikiem, a nie kropką). Linia 30 dodana jest po to, aby program nie wyłączył się od razu i rezultaty obliczeń były możliwe do odczytania; po wciśnięciu przycisku „enter” program się kończy, co zapewnia linia 31.

Uruchomienie programu z wartością a=200 pozwala dojść do cennych wniosków. Okazuje się, że wartości obydwu funkcji (f i g) tworzą cykle o okresie 10. Cykle te można łatwo ująć w postaci tabeli.

n mod 10	f(n)	g(n)
0	0	4
1	1	0
2	0	2
3	0	1
4	1	0
5	1	4
6	0	1
7	1	2
8	1	0
9	0	1

Jak pokazuje program, od tego wzorca (przy a=200) dla funkcji f nie ma żadnych odstępstw, zaś ostatnim odstępstwem dla funkcji g jest g(65)=3.

Wątek 5

Twierdzenie 4: wziąwszy pod uwagę podany wyżej wzór indukcyjny, jeżeli cykliczność funkcji f i g utrzymuje się dostatecznie długo, będzie się utrzymywać zawsze. Aby to udowodnić, przypuśćmy, że istnieje pewna wartość a, dla której przy b>a+10 i b<3a zachodzi zawsze f(b)=f(b-10), g(b+2)=g(b-8). (Istotnie, opisany w wątku czwartym program pokazuje, że a=64 spełnia te warunki.) Teraz przypuśćmy, że istniałoby jednak takie najmniejsze x>a, iż zachodziłoby f(x)≠f(x-10) lub g(x+2)≠g(x-8). Jak pamiętamy, w końcowej części wątku 3 jest zdefiniowany taki zbiór Z, że f(x)=mex(Z), zaś g(x+2)=mex(g(x+1), Z). Zgodnie z założeniem, niewątpliwie g(x+1)=g(x-9), zatem nasze przypuszczenie mogłoby być prawdziwe jedynie wtedy, gdy wartości mex(Z) byłyby różne dla x i dla x-10. W zbiorze Z (dla x) znajduje się g(x), ale wiemy także, że g(x)=g(x-10). Pozostaje jeszcze fakt, iż zbiór Z jest tworzony przez wartości g(c) xor f(d), gdzie c+d=x-1. Gdyby zatem zbiór Z(x) miał zawierać liczbę nieobecną w zbiorze Z(x-10), musiałaby istnieć taka para c, d, że g(c) xor f(d)≠g(c) xor f(d-10) oraz g(c) xor f(d)≠g(c-10) xor f(d). To jednak jest niemożliwe, z założeń wynika bowiem, że jeżeli d≥c, f(d)=f(d-10); jeżeli zaś c≥d, g(c)=g(c-10). Stąd zbiór Z(x) nie zawiera żadnej liczby nieobecnej w zbiorze Z(x-10). Dowód, że zbiór Z(x-10) nie zawiera żadnej liczby nieobecnej w zbiorze Z(x) – jest zupełnie analogiczny. Poprzez sprowadzenie do sprzeczności kończy to dowód twierdzenia czwartego.

Znajomość wyników obliczeń wykonanych przez podany w wątku czwartym program komputerowy pozwala teraz stwierdzić, że w hexapawnie 3xn gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą dla n kończącego się (w zapisie dziesiętnym) cyframi 1, 4, 5, 7, 8; gracz drugi zaś – gdy n kończy się cyfrą 0, 2, 3, 6 lub 9.

Choć ten wniosek kończy rozważania będące podmiotem niniejszej pracy, bynajmniej nie jest to rozstrzygnięcie wszystkich dylematów związanych z hexapawnem. Oto pięć propozycji zagadnień otwierających dalsze pole do badań.

Jaki jest oczekiwany wynik w hexapawnie 3xn rozgrywanym tak, aby celem gry było zmuszenie przeciwnika do promocji lub zapatowania? (Anglicy taką grę na opak określają eleganckim sformułowaniem *to play under a misère condition*.)
Jaki jest oczekiwany wynik w hexapawnie mxn, rozgrywanym normalnie lub z użyciem warunku *misère*?
Jaki jest oczekiwany wynik przy dowolnym z powyższych założeń, ale przy użyciu pionów Beroliny (które poruszają się skosem, a biją na wprost)?
Czy hexapawn (w którymkolwiek z wymienionych wariantów) daje się przenieść na siatkę sześciokątną?
Czy istnieje sposób na takie przekształcenie tej gry, aby mogły w nią grać więcej niż dwie osoby jednocześnie?

Czytelnik może czuć się zachęcony do rozważania powyższych pytań lub do poszukiwania własnych wariantów gry.