Czworokąty Bliźniacze

Stanisław Hauke

Wstęp

> W czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB, BC, CD, DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w obszar ten można wpisać okrąg.

Powyższe zadanie zostało przedstawione na stronie gogeometry.com jako problem 1351 bez znanego geometrycznego dowodu, skąd zostało zaczerpnięte do geometrycznej ligi zadaniowej Pana Profesora Waldemara Pompe, gdzie przez miesiąc nie zostało rozwiązane. Mój dowód tego zadania opierał się na pomyśle, by w pewien sposób przyporządkować każdemu czworokątowi wypukłemu jego brata bliźniaka. Przypuśćmy, że dane mamy dwa czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ takie, że ich odpowiednie boki i przekątne są do siebie równoległe. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że czworokąty te muszą być do siebie podobne, okazuje się, że jest też druga możliwość, że powyższe czworokąty są właśnie bliźniacze. W poniższej pracy będę chciał przybliżyć temat tak zdefiniowanych czworokątów bliźniaczych. Na początku przedstawię dokładną definicję owych czworokątów oraz ich podstawowe własności, w drugiej części sformułuję i udowodnię dwa twierdzenia. W trzeciej zaś przedstawię największy wynik mojej pracy, wspólne uogólnienie poprzednich dwóch twierdzeń, pokażę też jak z niego wynika prawdziwość poprzednich twierdzeń. Na końcu przedstawię trzy zadania wraz z rozwiązaniami opartymi o motywy czworokątów bliźniaczych.

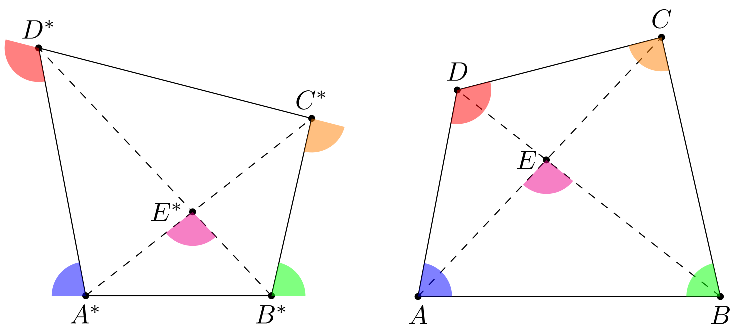
Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ będę nazywał **bliźniaczymi**, jeśli spełnione są dwa warunki:

$$\textbf{(1)} \qquad \angle A + \angle A^* = \angle B + \angle B^* = \angle C + \angle C^* = \angle D + \angle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\textbf{(2)} \qquad \angle A^*E^*B^* = \angle AEB$$

gdzie punkty E i E^* są odpowiednio przecięciami prostych AC i BD oraz A^*C^* i B^*D^*. Zapis $\boldsymbol{ABCD \approx A^*B^*C^*D^*}$ oznacza, że czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze.



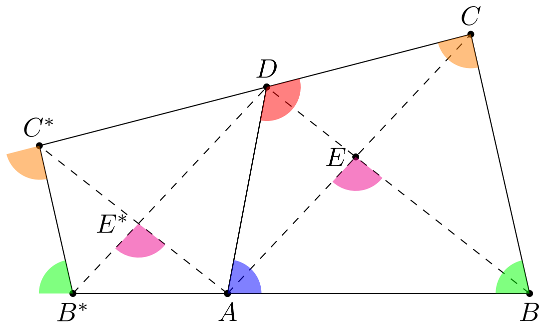
Stwierdzenie 1
Czworokąt bliźniaczy $A^*B^*C^*D^*$ dla danego czworokąta $ABCD$ jest wyznaczany jednoznacznie, z dokładnością do podobieństwa.

Dowód
Przypuśćmy, że dla danego czworokąta $ABCD$ istnieją dwa czworokąty bliźniacze, $A^*B^*C^*D^*$ i $A'B'C'D'$ narysujmy je tak, by $B^* = B'$ oraz $C^* = C'$, oraz by punkty A^* i A' leżały po tej samej stronie prostej $B^*C^* = B'C'$. Załóżmy, że punkty A^*, A' i B' są w tej kolejności współliniowe.

Gdyby tak nie było, to zamiast brać $B^* = B'$ i $C^* = C'$ wzięlibyśmy po prostu $A^* = A'$ i $D^* = D'$. Z definicji musiałoby zachodzić: $\angle B'E'C' = \angle B'E^*C'$, ale punkt E' leży wewnątrz trójkąta $\Delta B^*E^*C^*$, więc równość tych kątów zajść nie może.

Przedstawię teraz dwie konstrukcje czworokąta bliźniaczego, dla danego czworokąta $ABCD$.

Konstrukcja 1
Niech B^* będzie punktem przecięcia prostej AB i prostej równoległej do prostej AC, przechodzącej przez punkt D, niech zaś C^* będzie punktem przecięca prostej CD i prostej równoległej do prostej BD przechodzącej przez punkt A. Wówczas $AB^*C^*D \approx ABCD$.



Dowód
Ponieważ $AC^* \,||\, BD$ i $AC \,||\, B^*D$ to na mocy twierdzenia Pappusa dla punktów B^*, A, B i C, D, C^* mamy, że $BC \,||\, B^*C^*$. Z tego, że $AC^* \,||\, BD$ i $AC \,||\, B^*D$ wynika prawdziwość warunku **(2)**. Oczywiste jest, też, że:

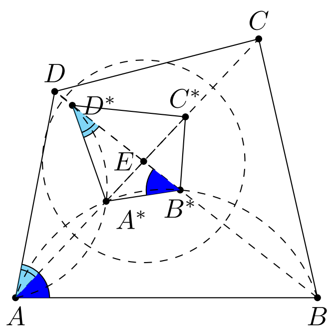
$$\angle DAB^* + \angle BAD = \angle C^*DA + \angle ADC = 180^\circ$$

zaś na mocy $BC \,||\, B^*C^*$ mamy:

$$\angle B^*C^*D + \angle DCB = \angle AB^*C^* + \angle CBA = 180^\circ$$

więc warunek **(1)** też jest spełniony.

Konkstrukcja 2
Rozważmy inwersję (lub antyinwersję), o środku w punkcie E, i skali k. Niech obrazami punktów A, B, C, D w tej inwersji będą odpowiednio punkty A^*, B^*, C^*, D^*. Wówczas $A^*B^*C^*D^* \approx ABCD$.



Dowód
Warunek **(2)** jest spełniony w sposób oczywisty. Zauważmy, że $EB \cdot EB^* = k = EA \cdot EA^*$, z tego wynika, że punkty A, B, B^* i A^* leżą na jednym okręgu, skąd mamy równość: $\angle A^*B^*E = \angle EAB$. Analogicznie wnioskujemy równość: $\angle A^*D^*E = \angle EAD$. Więc:

$$\angle A + \angle A^* = \angle EAB + \angle EAD + \angle A^* = \angle A^*B^*E + \angle A^*D^*E + \angle A^* = 180^\circ$$

rozumując analogicznie dla wierzchołków B, C, D, widzimy, że warunek **(1)** też jest spełniony.

Własność 1
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to $AE \cdot A^*E^* = BE \cdot B^*E^* = CE \cdot C^*E^* = DE \cdot D^*E^*$. Wynika to bezpośrednio z prawdziwości **konstrukcji 2**, ponieważ każdy z powyższych iloczynów jest równy k.

Własność 2
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to:

$$\frac{A^*B^* \cdot C^*D^*}{B^*C^* \cdot A^*D^*} = \frac{\frac{k \cdot AB}{EA \cdot EB} \cdot \frac{k \cdot CD}{EC \cdot ED}}{\frac{k \cdot BC}{EB \cdot EC} \cdot \frac{k \cdot AD}{EA \cdot ED}} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$$

równości te wynikają ze wzoru na odległość obrazów inwersyjnych dwóch punktów. Zachodzi też własność odwrotna, jeśli zachodzą równości kątów:

$$\angle A + \angle A^* = \angle B + \angle B^* = \angle C + \angle C^* = \angle D + \angle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = \frac{A^*B^* \cdot C^*D^*}{B^*C^* \cdot A^*D^*}$$

to $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$. Wiemy, że powyższe warunki spełnia czworokąt bliźniaczy czworokąta $ABCD$, załóżmy, nie wprost, że istnieje jeszcze jeden czworokąt $A'B'C'D'$ równokątny z $A^*B^*C^*D^*$ oraz spełniający warunek:

$$\frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot A'D'} = \frac{A^*B^* \cdot C^*D^*}{B^*C^* \cdot A^*D^*}$$

narysujmy teraz czworokąty $A^*B^*C^*D^*$ i $A'B'C'D'$ tak, by punkty B^* i B' oraz punkty C^* i C' się pokrywały. Bez straty ogólności załóżmy, że punkt przecięcia prostych $A'B'$ i $C'D'$ oraz punkty D', D^* i C' leżą w tej kolejności na prostej $C'D'$, wówczas zachodzą nieróẃości:

$$D'C' > D^*C',\ A'B' > A^*B',\ A'D' < A^*D^*$$

one zaś implikują, że:

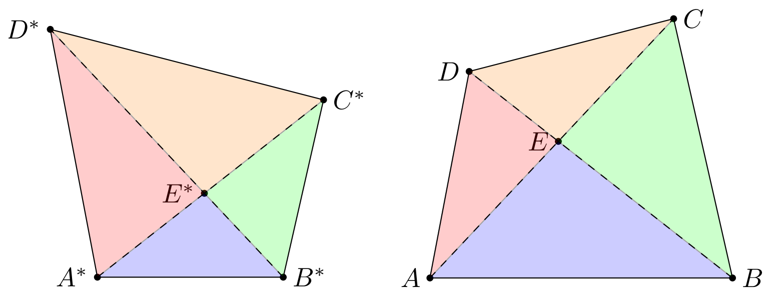
$$\frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot A'D'} > \frac{A^*B^* \cdot C^*D^*}{B^*C^* \cdot A^*D^*}$$

powyższa niedorzeczność kończy dowód.

Własnośc 3
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to zachodzą podobieństwa trójkątów:

$$\Delta DEA \sim \Delta A^*E^*D^* \qquad \Delta CED \sim \Delta D^*E^*C^*$$

$$\Delta AEB \sim \Delta B^*E^*A^* \qquad \Delta BEC \sim \Delta C^*E^*B^*$$



Z definicji wiemy, że $\angle AEB = \angle A^*E^*B^*$, ponadto, z **własności 1** mamy, że: $EA \cdot E^*A^* = EB \cdot E^*B^*$, czyli $\frac{EA}{EB} = \frac{E^*B^*}{E^*A^*}$, więc na mocy cechy podobieństwa trójkątów bok-kąt-bok mamy, że: $\Delta AEB \sim \Delta B^*E^*A^*$. Analogicznie dowodzimy pozostałe trzy podobieństwa.

Oznaczenia
W tej pracy, jeśli nie będzie napisane inaczej, obowiązywać będą oznaczenia: E i E^* punkty przecięcia odpowiednio prostych AC i BD oraz A^*C^* i B^*D^*. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ i ω_D, okręgi opisane odpowiednio na trójkątach $\Delta BCD, \Delta ACD$, ΔABD i ΔABC. Analogicznie definiujemy okręgi $\omega_A{}^*, \omega_B{}^*, \omega_C{}^*$ i $\omega_D{}^*$.

W końcu, niech ω i ω^* oznaczają odpowiednio okręgi opisane na czworokątach $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$, jeśli takowe istnieją.

Definicja
Kątem skierowanym między prostą k i l, nazywamy taką liczbę α z przedziału $[0°, 180°)$, że po obróceniu prostej k przeciwzegarowo o kąt α proste k' i l są równoległe. Kąt skierowany między prostymi YX i YZ będę oznaczał przez $\measuredangle XYZ$.
Podstawowa własność kątów skierowanych to: kąt skierowany między prostą k i l jest równy kątowi skierowanemu między prostą k' i l' i różny od $0°$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $k \cap l, k' \cap l', k \cap k', l \cap l'$ leżą na jednym okręgu. Będę ją nazywał **własnością 4**.

Twierdzenia 1 i 2

Wyżej wymienione dwie konstrukcje i trzy podstawowe własności czworokątów bliźniaczych posłużą mi jako narzędzia przy dowodzie kolejnych twierdzeń. Zajmę się teraz sformułowaniem **Twierdzenia 1** i udowodnieniem go.

Twierdzenie 1

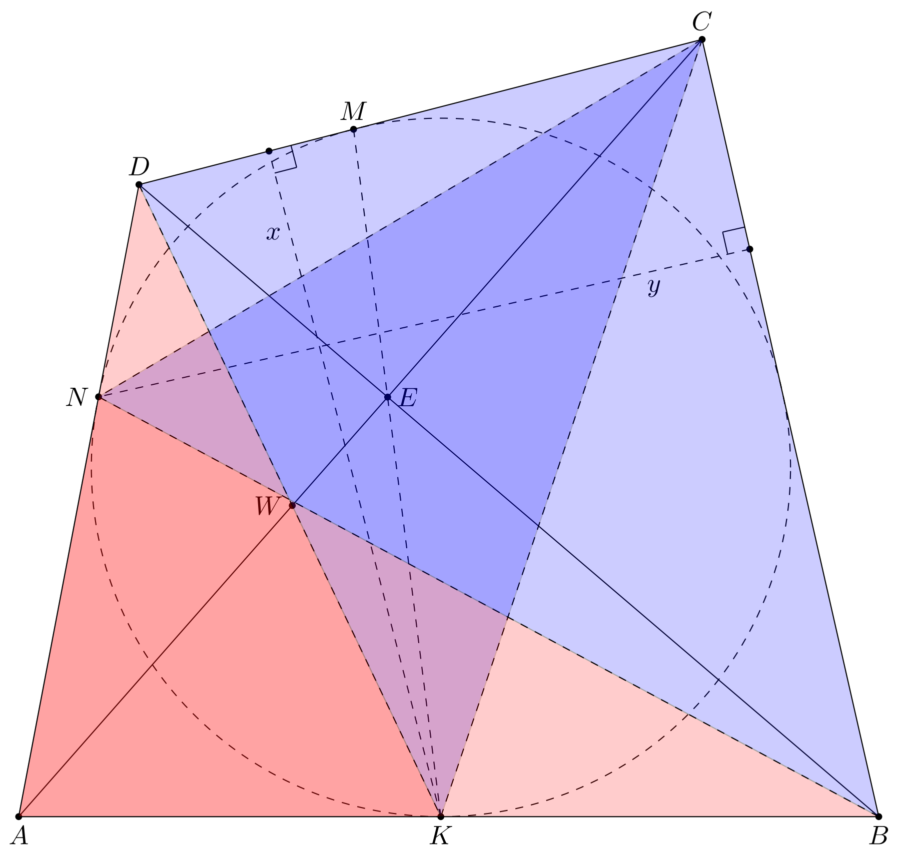
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to z tego, że w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wynika, że w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też da się wpisać okrąg.

Pierwszy dowód Twierdzenia 1
Zacznijmy od dowodu poniższego lematu.

Lemat 1
Jeśli w czworokąt wypukły $ABCD$ da się wpisać okrąg, to zachodzi równość:

$$AB \cdot [CDE] + CD \cdot [ABE] = DA \cdot [BCE] + BC \cdot [ADE]$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.



Przyjmijmy oznaczenia: $F = AB \cap CD$, o ile tylko proste AB i CD nie są równoległe, h_a, h_b, h_c, h_d - odległości punktu E od prostych AB, BC, CD, DA odpowiednio. K, M, N punkty styczności okręgu wpisanego w $ABCD$ z prostymi AB, CD, DA odpowiednio. Niech x i y będą odległościami punktów K i N od odpowiednio prostych CD i BC.

Z twierdzenia Brianchona, dla sześciokąta $DNAKBC$ wiemy, że proste BN, DK i AC są współpękowe, oznaczmy ich punkt przecięcia przez W. Z twierdzenia Brianchona, dla sześciokąta $DAKBCM$ wiemy, że prosta MK przechodzi przez punkt E.

Ponieważ ΔKFM jest równoramienny, to suma odległości punktu należącego do jego podstawy od jego ramion, jest równa wysokości poprowadzonej z wierzchołka K [**Rysunek 1**], na mocy tego faktu mamy: $x = h_a + h_c$, podobnie wnioskujemy, że: $y = h_b + h_d$, jeśli $AB \parallel CD$ to powyższe dwie równości oczywiście też zachodzą.

Przekształćmy teraz tezę równoważnie:

$$AB \cdot [CDE] + CD \cdot [ABE] = DA \cdot [BCE] + BC \cdot [ADE]$$
$$AB \cdot CD \cdot h_c + CD \cdot AB \cdot h_a = DA \cdot BC \cdot h_b + BC \cdot DA \cdot h_d$$
$$AB \cdot CD \cdot x = DA \cdot BC \cdot y$$
$$\frac{AB \cdot CD \cdot x}{DA \cdot BC \cdot y} = 1$$

Zauważmy, że:

$$\frac{CD \cdot x}{BC \cdot y} = \frac{[DKC]}{[BNC]}$$

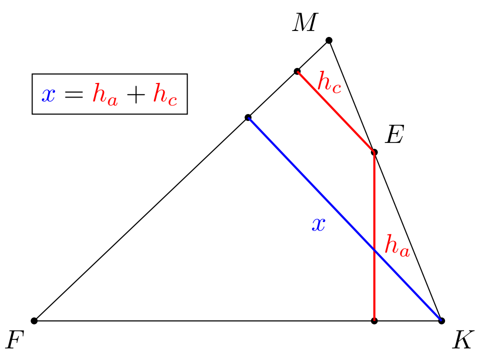
oraz

$$\frac{AB}{DA} = \frac{AB \cdot AN \cdot sin(BAD)}{DA \cdot AK \cdot sin(BAD)} = \frac{[BNA]}{[DKA]}$$

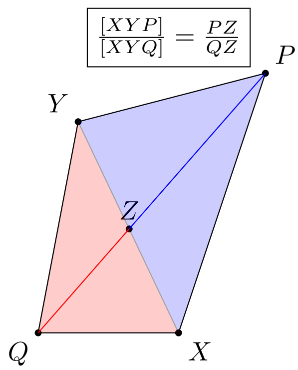
więc:

$$\frac{AB}{DA} \cdot \frac{CD \cdot x}{BC \cdot y} = \frac{[BNA]}{[DKA]} \cdot \frac{[DKC]}{[BNC]} = \frac{[BNA]}{[BNC]} \cdot \frac{[DKC]}{[DKA]} = \frac{AW}{CW} \cdot \frac{CW}{AW} = 1$$

tutaj korzystałem dwa razy z faktu, że stosunek pól trójkątów ΔXYP i ΔXYQ wynosi $\frac{PZ}{QZ}$, gdzie $Z = PQ \cap XY$ [**Rysunek 2**]. Co kończy dowód **lematu 1**.



Rysunek 1



Rysunek 2

Przejdźmy do dowodu **Twierdzenia 1**. Czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ jest opisany na okręgu, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\textbf{(3)} \qquad A^*B^* + C^*D^* = B^*C^* + A^*D^*$$

korzystając z **konstrukcji 2** oraz wzoru na odległość obrazów inwersyjnych dwóch punktów mamy równości:

$$\textbf{(4)} \qquad A^*B^* = \frac{k \cdot AB}{AE \cdot BE}, \qquad B^*C^* = \frac{k \cdot BC}{BE \cdot CE}$$

$$C^*D^* = \frac{k \cdot CD}{CE \cdot DE}, \qquad D^*A^* = \frac{k \cdot DA}{DE \cdot AE}$$

podstawiając równości **(4)** do równania **(3)** otrzymujemy, że równoważne tezie jest to, że:

$$\frac{AB}{AE \cdot BE} + \frac{CD}{CE \cdot DE} = \frac{BC}{BE \cdot CE} + \frac{DA}{DE \cdot AE}$$

$$AB \cdot (CE \cdot DE) + CD \cdot (AE \cdot BE) = BC \cdot (AE \cdot DE) + DA \cdot (BE \cdot CE)$$

to zaś po pomnożeniu stronami przez $\frac{sin(\angle BEC)}{2}$, oraz po skorzystaniu ze wzoru na pole trójkąta, daje:

$$AB \cdot [CDE] + CD \cdot [ABE] = BC \cdot [ADE] + AD \cdot [BCE]$$

co, jest prawdą na mocy **lematu 1**, gdyż w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg, co kończy dowód.

Okazuje się, że można pójść o krok dalej i uogólnić to twierdzenie:

Twierdzenie 1.2
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz w czworkąt $ABCD$ da się wpisać elipsę e, to istnieje taka elipsa e^* wpisana w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ podobna do elipsy e, że zachodzą równości kątów:

$$\angle AEK = \angle B^*E^*K^*, \angle BEK = \angle A^*E^*K^*$$

gdzie punkty K i K^* to punkty styczności elips e i e^* odpowiednio z prostymi AB i A^*B^*. Analogiczne równości kątów zachodzą dla pozostałych punktów styczności.

Dowód
Rozważmy ułożenia czworokątów $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ tak jak w **konstrukcji 1**. Rozważmy takie przekształcenie afiniczne a, by obrazem elipsy e był okrąg o. Ponieważ przekształcenie afiniczne zachowuje równoległości, to na mocy **konstrukcji 1** czworokąty $a(ABCD)$ i $a(A^*B^*C^*D^*)$ są bliźniacze. Na mocy **Twierdzenia 1** w czworokąt $a(A^*B^*C^*D^*)$ da się wpisać okrąg, nazwijmy go o^*. Okrąg o^* przechodzi na okrąg o w pewnej jednokładności o środku w $F = AB \cap CD$. Elipsa $a^{-1}(o^*)$ jest wpisana w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ oraz ponieważ $a \circ J_F \circ a^{-1} = J_F$ to jest ona podobna do elipsy e.
Niech punkty M i N będą punktami styczności okręgu o odpowiednio z prostymi AB i CD, podobnie definiujemy punkty M^* i N^*. Ponieważ $MN \,||\, M^*N^*$ to $a^{-1}(MN) \,||\, a^{-1}(M^*N^*)$. Na mocy twierdzenia Brianchona, proste $a^{-1}(MN)$ i $a^{-1}(M^*N^*)$ przechodzą przez odpowienio punkty E i E^*. Łącząc wyżej wymienione równoległości z rónoległością prostych $BC \,||\, B^*C^*$ otrzymujemy równości kątów $\angle AEM = \angle B^*E^*M^*, \angle BEM = \angle A^*E^*M^*$, co kończy dowód.

Przejdźmy do kolejnego twierdzenia, tym razem konieczne będzie założenie, że czworokąty w tezie są zgodnie zorientowane.

Twierdzenie 2

Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze i zgodnie zorientowane, to jeśli proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta $DB^{*\cdot}$

Pierwszy dowód Twierdzenia 2

Lemat 2
Popatrzmy na taką konfigurację: rozważmy takie punkty P, Q, R, S, T, U, że leżą one w takich kolejnościach P, Q, R i S, T, U na pewnych dwóch nierównoległych prostych oraz, że zachodzi równość $\frac{PQ}{QR} = \frac{ST}{TU}$. Ustalmy kąt α, poprowadźmy teraz przez punkty Q i T odpowiednio proste q_α i t_α, tak by kąt skierowany między prostą q_α a prostą PR, był taki, jak kąt skierowany między prostą t_α a prostą SU i równy α.

Oznaczmy: $q_\alpha \cap t_\alpha = X_\alpha$ oraz $PR \cap SU = Y$. Na półprostej $X_\alpha Q$, poza odcinkiem $X_\alpha Q$, wybierzmy taki punkt Q_α, by zachodziło:

$$Q_\alpha Q = \frac{TS \cdot QR}{TX_\alpha}$$

analogicznie definijemy T_α, więc:

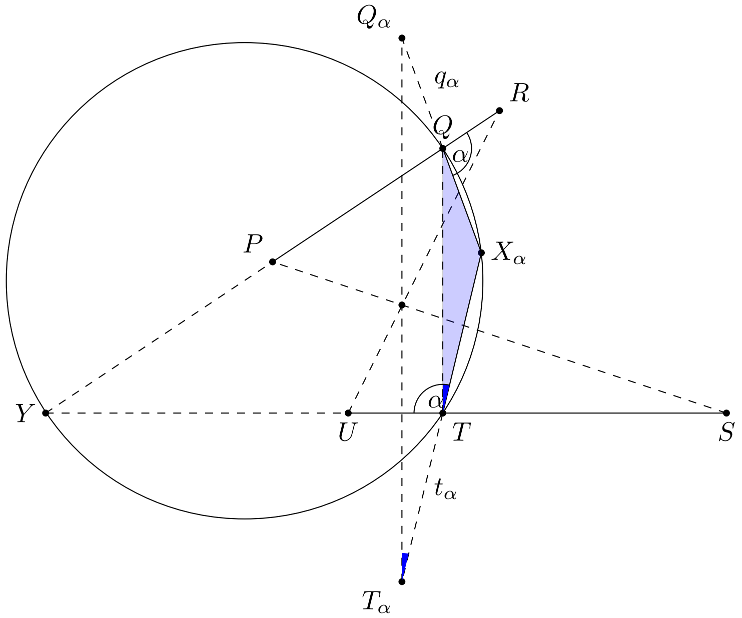
$$T_\alpha T = \frac{PQ \cdot TU}{QX_\alpha}$$

Wykażę teraz, że proste: RU, PS i $Q_\alpha T_\alpha$ są współpękowe. Najpierw wykażę, że dla wszystkich kątów α proste $Q_\alpha T_\alpha$ pokrywają się, następnie pokażę, że dla pewnego szczególnego α_1 teza **lematu 2** zachodzi.

Zauważmy, że:

$$\frac{Q_\alpha Q}{QX_\alpha} = \frac{1}{QX_\alpha} \cdot \frac{TS \cdot QR}{TX_\alpha} = \frac{PQ \cdot TU}{QX_\alpha} \cdot \frac{1}{TX_\alpha} = \frac{T_\alpha T}{TX_\alpha}$$

więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy: $QT \,||\, Q_\alpha T_\alpha$.



Teraz pokażę, że odległość prostej $Q_\alpha T_\alpha$ od prostej QT nie zależy od wyboru kąta α. Odległość ta wynosi:

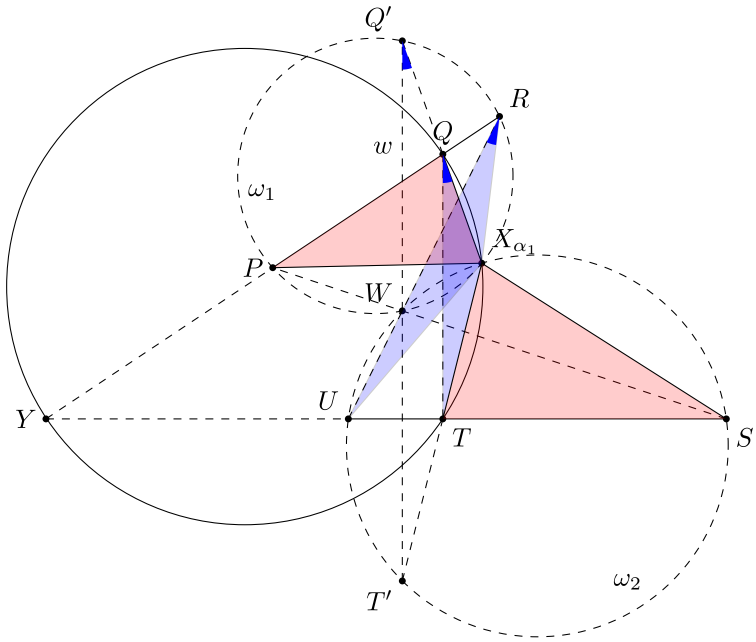
$$T_\alpha T \cdot \sin(\angle X_\alpha T_\alpha Q_\alpha) = T_\alpha T \cdot QX_\alpha \cdot \frac{\sin(\angle QX_\alpha T)}{QT}$$

$$= \frac{PQ \cdot TU}{QX_\alpha} \cdot QX_\alpha \cdot \frac{\sin(\angle TYQ)}{QT} = \frac{\sin(\angle TYQ) \cdot PQ \cdot TU}{QT}$$

Pierwsza równość zachodzi na mocy twierdzenia sinusów dla $\Delta QX_\alpha T$, druga zaś, z faktu: $\angle QX_\alpha T + \angle TYQ = 180°$, który wynika z wpisywalności czworokąta $YTX_\alpha Q$ w okrąg. Wyrażenie $\frac{\sin(\angle TYQ)\cdot PQ\cdot TU}{QT}$ nie zależy od miary kąta α.

Ponieważ przy zmieniającym się kącie α, prosta $Q_\alpha T_\alpha$ nie zmienia swojego nachylenia, nie zmienia swojej odległości od prostej QT oraz jest stale po tej samej stronie prostej QT co punkt Y, to dla wszystkich kątów α proste $Q_\alpha T_\alpha$ pokrywają się.

Teraz pokażę konstrukcję kąta α_1, dla którego udowodnię tezę **lematu 2**. Oznaczmy $RU \cap PS = W$, drugie przecięcie okręgów o_1 i o_2, czyli odpowiednio okręgów opisanych na ΔPRW i ΔSUW nazwijmy X'.



Ze znanej konstrukcji środka podbieństwa spiralnego wiemy, że podobieństwo spiralne przekształcające odcinek PR na odcinek SU, ma środek w X'. Obrazem punktu Q w tym przekształceniu, z warunku $\frac{PQ}{QR} = \frac{ST}{TU}$, jest punkt T. Z tego zaś wynika, że $\angle X'TS = \angle X'QP$. Weźmy teraz $\alpha_1 = \angle X'TS$, niech $X_{\alpha_1} = X'$. Niech w oznacza prostą równoległą do QT przechodzącą przez W, oznaczmy: $w \cap X_{\alpha_1}Q = Q'$.
wówczas mamy:

$$\textbf{(5)} \qquad \angle WQ'X_{\alpha_1} = \angle TQX_{\alpha_1} = \angle URX_{\alpha_1} = \angle WRX_{\alpha_1}$$

pierwsza równość wynika z tego, że $w \parallel QT$, druga zaś z tego, że jeśli w podobieństwie spiralnym, o środku w X_α, punkty R i Q przechodzą na punkty U i T odpowiednio, to $\Delta RX_{\alpha_1}U \sim \Delta QX_{\alpha_1}T$. Z **(5)**, wynika, że $Q' \in o_1$, skąd mamy:

$$\textbf{(6)} \qquad Q'Q = \frac{Q'Q \cdot QX_{\alpha_1}}{QX_{\alpha_1}} = \frac{Pot(Q, o_1)}{QX_{\alpha_1}} = \frac{PQ \cdot QR}{QX_{\alpha_1}} = \frac{TS \cdot QR}{TX_{\alpha_1}} = Q_{\alpha_1}Q$$

przedostatnia równość zachodzi na mocy $\Delta PQX_{\alpha_1} \sim \Delta STX_{\alpha_1}$. Z **(6)** wynika, że $Q' = Q_{\alpha_1}$, analogicznie definiujemy T', analogicznie dowodzimy, że $T' = T_{\alpha_1}$. Więc: $w = Q_{\alpha_1}T_{\alpha_1}$, ponieważ proste RU, PS i w są współpękowe, to proste RU, PS i $Q_{\alpha_1}T_{\alpha_1}$ też, a zatem proste RU, PS i $Q_\alpha T_\alpha$ są współpękowe dla każdego kąta α, zatem teza **lematu 2** została dowiedziona.

Wykażę teraz prawdziwość **Twierdzenia 2**, przy użyciu **lematu 2**. Załóżmy, że proste AC i A^*C^* nie są równoległe. Niech P będzie punktem przecięcia prostych AC^*, CA^* i BD^*. Rozważmy taką jednokładność, by $J_P(D^*) = B$. Z **własności 1** mamy, że:

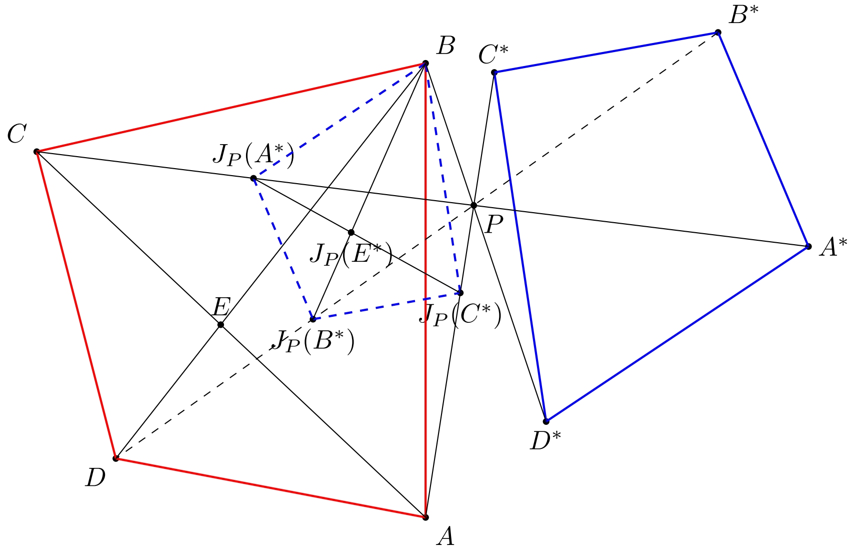
$$\frac{CE}{AE} = \frac{J_P(A^*)J_P(E^*)}{J_P(C^*)J_P(E^*)}$$

z założenia mamy równość kątów $\angle BEC = \angle BJ_P(E^*)J_P(A^*)$. Z **własności 1** mamy, że:

$$DE = \frac{J_P(A^*)J_P(E^*) \cdot AE}{J_P(D^*)J_P(E^*)}, \qquad J_P(B^*)J_P(E^*) = \frac{CE \cdot J_P(C^*)J_P(E^*)}{J_P(D^*)E}$$

skorzystajmy teraz z **lematu 2** dla:

$$(P, Q, R, S, T, U, \alpha) = (C, E, A, J_P(A^*), J_P(E^*), J_P(C^*), \angle BEC)$$



z wyżej wypisanych warunków wynika, że wszystkie założenia **lematu 2** są spełnione. Więc proste $CJ_P(A^*), AJ_P(C^*)$ i $DJ_P(B^*)$ są współpękowe, ponieważ proste $CJ_P(A^*)$ i $AJ_P(C^*)$ tną się w punkcie P, to punkty $D, J_P(B^*)$ i P są współliniowe, ponieważ punkty $B^*, J_P(B^*)$ i P są współliniowe, to też punkty D, B^* i P muszą być współliniowe, co kończy dowód tego przypadka. Jeśli proste AC i A^*C^* byłyby równoległe, to proste BD i B^*D^* też byłyby równoległe. Jednokładność o środku w punkcie P przeprowadzająca odcinek AC na odcinek C^*A^*, z warunku $\frac{AE}{CE} = \frac{C^*E^*}{A^*E^*}$, przeprowadza punkt E na punkt E^*, więc jednokładność o środku w punkcie P przeprowadzająca punkt B na punkt D^* przeprowadza punkt E na punkt E^*, a z warunku $\frac{BE}{DE} = \frac{D^*E^*}{B^*E^*}$ przeprowadzi punkt D na punkt B^*, więc punkty D, B^* i P są współliniowe, co kończy dowód.

Warty odnotowania jest przypadek szczególny **Twierdzenia 2**, gdy punkty B i D^* się pokrywają. Własność ta widnieje na plakacie "W jednym punkcie" Pana Profesora Waldemara Pompe.

Twierdzenie 2.1
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze, zgodnie zorientowane oraz $D = B^*$, to proste AC^*, CA^* i B^*D są współpękowe.

Twierdzenie 3

Konstrukcje 1 i **2** przeprowadzają wierzchołki czworokąta $ABCD$ na wierzchołki czworokąta $A^*B^*C^*D^*$, lecz w żaden sposób nie przeprowadzają one pozostałych punktów czworokąta $ABCD$ na pewne punkty czworokąta $A^*B^*C^*D^*$. Okazuje się jednak, że istnieje pewne wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie (jak się później okaże, nie dla wszyskich puktów) punktów czworkąta $ABCD$ punktom czworokąta $A^*B^*C^*D^*$. O własnościach tego przyporządkowania mówi **Twierdzenie 3**. Zanim jednak je sformułuję i dowiodę, zdefiniować muszę coś takiego jak współrzędne kątowe.

Definicja
Niech dany będzie czworokąt $ABCD$ oraz punkt P, wtedy **współrzędnymi kątowymi** punktu P względem czworokąta $ABCD$ nazwiemy czwórkę:

$$(\measuredangle \mathbf{APB}, \measuredangle \mathbf{BPC}, \measuredangle \mathbf{CPD}, \measuredangle \mathbf{DPA})$$

Współrzędne kątowe punktu P względem czworokąta $ABCD$ będę oznaczał:

$$\mathbf{wk}(\mathbf{P}, \mathbf{ABCD}) = (\measuredangle APB, \measuredangle BPC, \measuredangle CPD, \measuredangle DPA)$$

przyjmijmy ponadto, że:

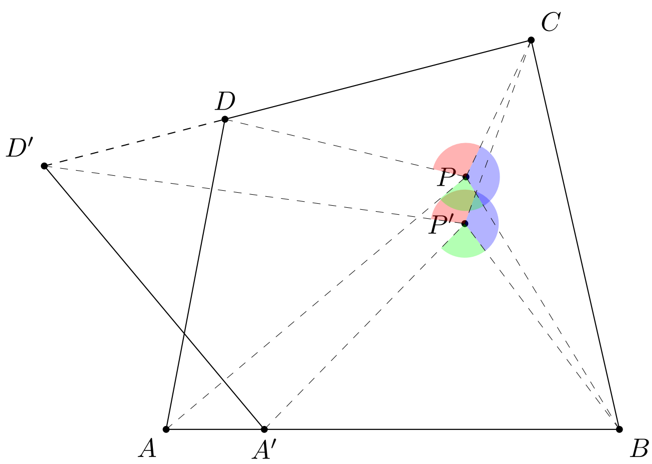
$$wk(A, ABCD) = (180^\circ, \measuredangle BAC, \measuredangle CAD, 180^\circ)$$

zapis

$$wk(A, ABCD) = wk(E, FGHI)$$

oznacza, że $\measuredangle BAC = \measuredangle GEH$ oraz $\measuredangle CAD = \measuredangle HEI$, analogicznie, dla $A := B, C, D$.

Stwierdzenie 2
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są równokątne oraz istnieją takie dwa punkty P i P', że $wk(P, ABCD) = wk(P', A'B'C'D')$, to te czworokąty są podobne.

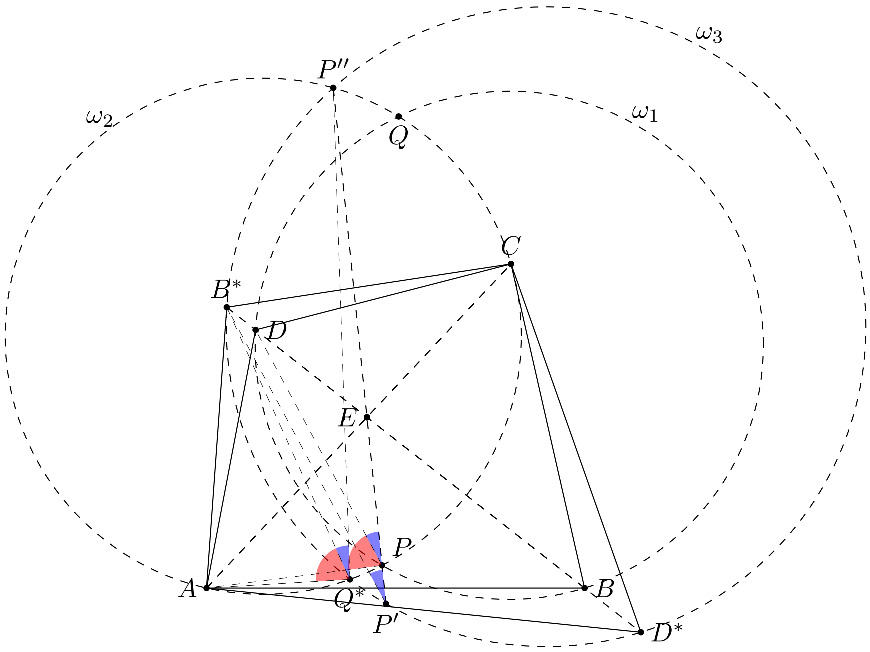


Dowód
Założmy nie wprost, że zaistniała taka sytuacja, narysujmy te czworokąty tak, by punkty B i B' oraz C i C' się pokrywały, oraz punkty P i P' były po tej samej stronie prostej BC. Wtedy proste AD i $A'D'$ są równoległe. Czworokąt $BPP'C$ jest wpisany w okrąg. Niech O będzie takim obrotem, wokół środka okręgu opisanego na $BPP'C$, że $O(P) = P'$. wówczas $O(PD) = P'D'$ oraz $O(PA) = P'A'$, czyli jeśli $DC < D'C$, to $AB > A'B$ oraz gdy $DC > D'C$, to $AB < A'B$, więc proste AD i $A'D'$ mogą być równoległe wtedy i tylko gdy $DC = D'C$ oraz $AB = A'B$, czyli gdy $D = D'$ oraz $A = A'$ czyli, gdy $ABCD \sim A'B'C'D'$, co kończy dowód.

Twierdzenie 3
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, wówczas dla każdego punktu P istnieje taki punkt P^*, że:

$$wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

Dowód
Rozważmy antyinwersję AI_E^t, gdzie $t = AE \cdot CE$. Oznaczmy $AI_E^t(B) = B^*$ oraz $AI_E^t(D) = D^*$, łatwo zauważyć, że $AI_E^t(C) = A$ oraz $AI_E^t(A) = C$. Na mocy prawdziwosci **konstrukcji 2** czworokąty $ABCD$ i CB^*AD^* są bliźniacze. Niech ω_1 i ω_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach ΔBDP i ΔACP, niech punkt Q będzie drugim przecięciem okręgów ω_1 i ω_2. Wykażę, że szukanym punktem P^* jest punkt $AI_E^t(Q) = Q^*$.



Ponieważ $Pot(E, \omega_2) = t$ to okrąg ω_2, w tej antyinwersji, przechodzi sam na siebię. zastanówmy się teraz czym jest okrąg $\omega_3 = AI_E^t(\omega_1)$. Okrąg ω_3 przechodzi na okrąg ω_1 w pewnej jednokładności o środku E, przechodzi on też przez punkty B^* i D^*. Ponieważ Q jest przecięciem okręgów ω_1 i ω_2, to punkt Q^* jest takim przecięciem okręgów ω_2 i ω_3, że punkty Q, E i Q^* są współliniowe. Oznaczmy jeszcze $AI_E^t(P) = P''$, wtedy puknty P, E i P'' są współliniowe.

Najpierw wykażę równość:

$$\measuredangle DPA = \measuredangle B^*Q^*A$$

na mocy **własności 4** wystarczy wykazać, że proste Q^*B^* i PD przecinają się na okręgu ω_2.

To zaś, na mocy **własności 4** jest równoważne temu, że zachodzi równość:

$$\textbf{(7)} \qquad \measuredangle P''PD = \measuredangle P''Q^*B^*$$

niech P' będzie drugim przecięciem prostej $P''P$ z okręgiem ω_3. Ponieważ okrąg ω_3 przechodzi na okrąg ω_1 w pewnej jednokładności o środku w E, to proste DP i B^*P' są równoległe, stąd wynika, że:

$$\textbf{(8)} \qquad \measuredangle P''PD = \measuredangle P''P'B^*$$

ponieważ punkty P'', P', Q^* i B^* leżą na jednym okręgu to na mocy **własności 4** zachodzi równość:

$$\textbf{(9)} \qquad \measuredangle P''P'B^* = \measuredangle P''Q^*B^*$$

warunki **(8)** i **(9)** implikują prawdziwość **(7)**, więc rówość $\measuredangle DPA = \measuredangle B^*Q^*A$ jest spełniona. Nie trudno jest stwierdzić, że zachodzi równość $\measuredangle DPB = \measuredangle B^*Q^*D^*$, na jej podstawie, można wywnioskować, że:

$$\measuredangle APB = \measuredangle APD + \measuredangle DPB = \measuredangle A^*Q^*B^* + \measuredangle B^*Q^*D^* = \measuredangle A^*Q^*D$$

analogicznie udowadniamy równość $\measuredangle CPD = \measuredangle CQ^*B^*$, w końcu prawdziwa też będzie równość $\measuredangle BPC = \measuredangle D^*Q^*C$. Ponieważ:

$$\measuredangle APB = \measuredangle AQ^*D^*, \qquad \measuredangle BPC = \measuredangle D^*Q^*C$$

$$\measuredangle CPD = \measuredangle CQ^*B^*, \qquad \measuredangle DPA = \measuredangle B^*Q^*A$$

to

$$wk(P, ABCD) = (\measuredangle APB, \measuredangle BPC, \measuredangle CPD, \measuredangle DPA)$$

$$= (\measuredangle AQ^*D^*, \measuredangle D^*Q^*C^*, \measuredangle CQ^*B^*, \measuredangle B^*Q^*A) = wk(Q^*, C^*D^*A^*B^*)$$

więc punkt Q^* jest szukanym punktem P^*, co kończy dowód.

Stwierdzenie 3
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ spełniają warunek:

$$\angle A + \angle A^* = \angle B + \angle B^* = \angle C + \angle C^* = \angle D + \angle D^* = 180^\circ$$

oraz istnieją takie punkty P i P^*, że

$$wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

to te czworokąty są bliźniacze.

Dowód
Niech $A'B'C'D'$ będzie czworokątem bliźniaczym do czworokąta $ABCD$, wówczas na mocy **Twierdzenia 3** istnieje taki punkt P', że:

$$wk(P, ABCD) = wk(P', C'D'A'B') = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

z tej równości, oraz z tego, że czworokąty $A'B'C'D'$ i $A^*B^*C^*D^*$ są równokątne wynika, na mocy **stwierdzenia 2**, że są one podobne, z tego zaś wynika, że czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze, co kończy dowód.

Stwierdzenie 4
Przyporządkowanie, o którym wspomniałem na początku tego paragrafu to takie przyporządkowanie $P \mapsto P^*$, że zachodzi:

$$\textbf{(10)} \qquad wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

Pokażę teraz dla jakich punktów P jest ono wzajemnie jednoznaczne, a dla tych punktów P, dla których nie jest, wskażę wszystkie puknty P^* takie, że zachodzi **(10)**.

Przypadek 1, czworokąt $ABCD$ nie jest wpisany w okrąg.
Wówczas jesli $P = A, B, C, D$, to zbiorami takich punktów P^*, że spełniony jest warunek **(10)** są odpowiednio zbiory $\omega_{C^*}, \omega_{D^*}, \omega_{A^*}, \omega_{B^*}$. Jesli $P \in \omega_A$, to jedynym punktem P^*, dla którego jest spełniony warunek **(10)** jest punkt C^*.

Analogiczne wyniki otrzymujemy, gdy: $P \in \omega_B, P \in \omega_C, P \in \omega_D$, są to odpowiednio punkty: D^*, A^*, B^*. Gdy punkt P nie należy do żadnego z wymienionych wyżej okręgów, to istnieje dokładnie jeden taki punkt P^*, że warunek **(10)** jest spełniony.

Przypadek 2, czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.
Wówczas jesli $P \in \omega$, to zbiorem punktów P^*, dla których jest spełniony warunek **(10)** jest okrąg ω^*. Jesli $P \notin \omega$ to istnieje dokładnie jeden taki punkt P^*, że warunek **(10)** jest spełniony.

Pominę prosty dowód powyższych zależnosci, wynikający wprost z **własności 3**. Teraz jeszcze raz dowiodę **Twierdzeń 1** i **2**, tym razem przy pomocy **Twierdzenia 3**.

Twierdzenie 1
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to z tego, że w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wynika, że w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też da się wpisać okrąg.

Drugi dowód Twierdzenia 1
Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Zauważmy, że:

$$wk(I, ABCD) = (\frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2}, \frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2})$$

wobec tego na mocy **Twierdzenia 3** istnieje punkt I^* taki, że:

$$wk(I^*, A^*B^*C^*D^*) = (\frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2}, \frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2})$$

zauważmy, że zachodzi:

$$\frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{180^\circ - \angle A^* + 180^\circ - \angle B^*}{2} = \frac{360^\circ - \angle A^* - \angle B^*}{2} = \frac{\angle C^* + D^*}{2}$$

przeprowadzając analogiczne obliczenia dla pozostałych współrzędnych dochodzimy do wniosku, że:

$$wk(I^*, A^*B^*C^*D^*) = (\frac{\angle C^* + \angle D^*}{2}, \frac{\angle D^* + \angle A^*}{2}, \frac{\angle A^* + \angle B^*}{2}, \frac{\angle B^* + \angle C^*}{2})$$

Niech $A'B'C'D'$ będzie czworokątem równokątnym z $A^*B^*C^*D^*$, w który da się wpisać okrąg, oznaczmy jego środek przez I', zauważmy, że:

$$wk(I', A'B'C'D') = (\frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2}, \frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2})$$
$$= wk(I^*, A^*B^*C^*D^*)$$

z tego zaś, na mocy **stwierdzenia 2** wynika, że $A'B'C'D' \sim A^*B^*C^*D^*$, to zaś implikuje, że w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ da się wpisać okrąg, co kończy dowód.

Drugi dowód **Twierdzenia 1** jest praktycznie natychmiastową konsekwencją **Twierdzenia 3**. Zastosowanie tego twierdzenia bardzo skróciło i uprościło nasz dowód, nie inaczej będzie w przypadku **Twierdzenia 2**.

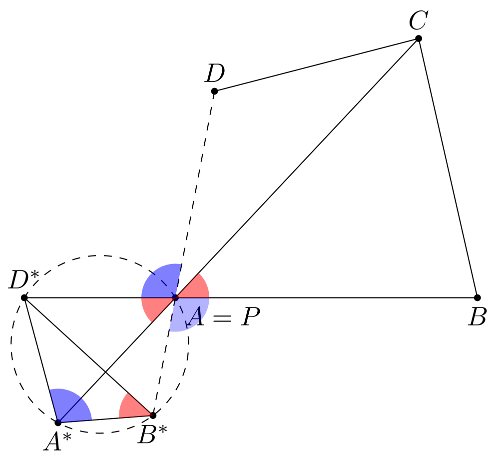
Twierdzenie 2
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta DB^*.

Drugi dowód Twierdzenia 2
Niech punkt P będzie przecięciem wyżej wymienionych trzech prostych.

Przypadek 1, czworokąt $ABCD$ nie jest wpisany w okrąg.

Przypadek 1.1, $P = A, B, C, D, A^*, B^*, C^*$ lub D^*.
Wystarczy rozpatrzyć przypadki, gdy $P = D, A$ reszta przypadków jest analogiczna.

Jeśli $P = D$, to prosta DB^* jest prostą PB^* więc przechodzi przez punkt P.



Jeśli $P = A$, to z założeń mamy, że $D^* \in AB$ oraz $A^* \in AC$. Ponieważ czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są zgodnie zorientowane, to na mocy **własności 3** kąty skierowane są równe:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle D^*B^*A^*$$

więc na czworokącie $AB^*A^*D^*$ można opisać okrąg. Stąd zaś wynika równość kątów:

$$\measuredangle B^*A^*D^* = \measuredangle B^*AB$$

łącząc to z faktem $\measuredangle B^*A^*D^* + \measuredangle BAD = 180°$, otrzymujemy, że punkty D, B^* i A są współliniowe, więc teza zachodzi.

Przypadek 1.2, $P \in \omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega_{A^*}, \omega_{B^*}, \omega_{C^*}$ lub ω_{D^*}.
Jeśli P pokrywa się z jednym z wierzchołków to teza sprowadza się do **przypadku 1.1**, załóżmy, więc że tak nie jest. Znowu wystarczy rozważyć przypadki, gdy $P \in \omega_D, \omega_A$, reszta przypadków będzie analogiczna.

Rozważmy przypadek, gdy $P \in \omega_D$.

$$\measuredangle C^*B^*D^* \overset{1}{=} \measuredangle ACB \overset{2}{=} \measuredangle APB \overset{3}{=} \measuredangle C^*PD^*$$

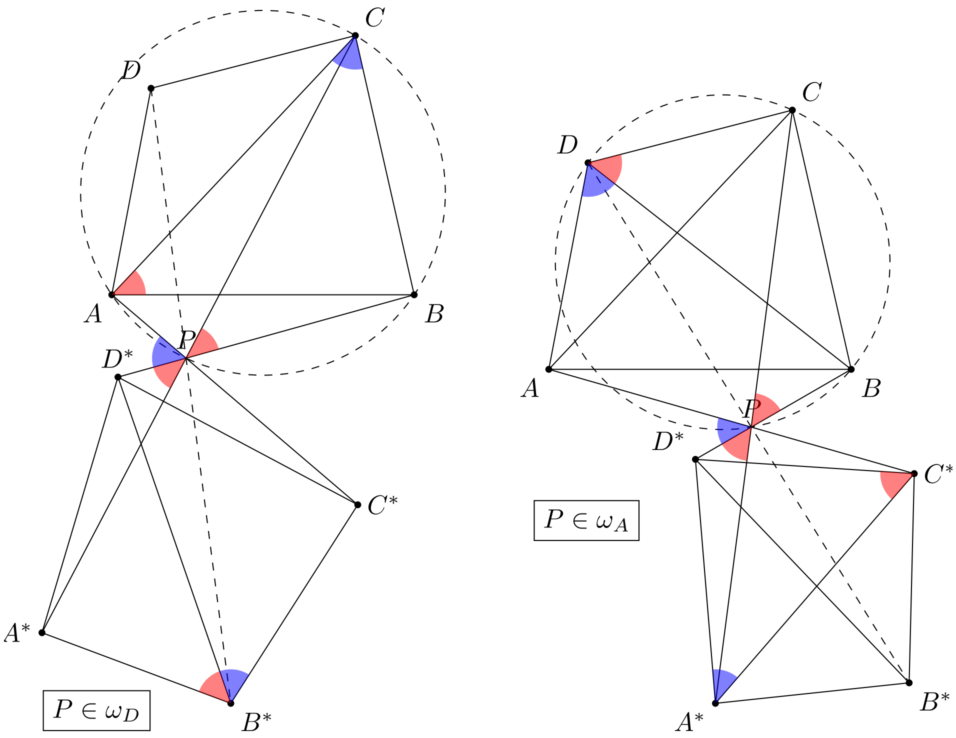
$$\measuredangle D^*B^*A^* \overset{1}{=} \measuredangle BAC \overset{2}{=} \measuredangle BPC \overset{3}{=} \measuredangle D^*PA^*$$

Pierwsze równości zachodzą na mocy **własności 3**, drugie ponieważ $P \in \omega_D$ trzecie zaś ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe. Stąd wynika, że czworokąty $PD^*C^*B^*$ i $PD^*B^*A^*$ są wpisane w okręgi, ponieważ na czworokącie $A^*B^*C^*D^*$ nie da się opisać okręgu, to musi zachodzić $P = B^*$ lub $P = D^*$. Skoro $P = B^*$ lub $P = D^*$ to teza sprowadza się do **przypadku 1.1**.

Rozważmy przypadek, gdy $P \in \omega_A$.

$$\measuredangle A^*C^*D^* = \measuredangle BDC = \measuredangle BPC = \measuredangle A^*PD^*$$

Pierwsza równość zachodzi na mocy **własności 3**, druga ponieważ $P \in \omega_A$ trzecia zaś ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe.



Stąd wynika, że czworokąt $PD^*A^*C^*$ jest wpisany w okrąg.

$$\measuredangle APB = \measuredangle C^*PD^* = \measuredangle C^*AD^* = \measuredangle ADB$$

Pierwsza równość zachodzi, ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, druga, ponieważ czworokąt $PD^*C^*A^*$ jest wpisany w okrąg, trzecia zaś wynika z **własności 3**. Stąd wynika, że czworokąt $PBDA$ jest wpisany w okrąg. Ponieważ czworokąt $PBCD$ też jest wpisany w okrąg, ale czworokąt $ABCD$ nie jest, to musi zachodzić: $P = D$ lub $P = B$, więc teza sprowadza się do **przypadku 1.1**.

Przypadek 1.3, $P \notin \omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega_{A^*}, \omega_{B^*}, \omega_{C^*}$ oraz ω_{D^*}.
Rozważmy taki punkt P^*, by:

$$\textbf{(11)} \qquad wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

istnienie takiego punktu gwarantuje **Twierdzenie 3**. Ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to zachodzą równości kątów:

$$\measuredangle C^*P^*D^* = \measuredangle APB = \measuredangle C^*PD^*$$

$$\measuredangle A^*P^*C^* = \measuredangle CPA = \measuredangle A^*PC^*$$

one zaś implikują, że czworokąty $PD^*C^*P^*$ i $PC^*A^*P^*$ są wpisane w okręgi. Ponieważ czworokąt $PD^*C^*A^*$ nie jest wpisany w okrąg. to musi zachodzić: $P = P^*$. Ponieważ $P = P^*$, to z **(11)** wynika, że $\measuredangle A^*PB^* = \measuredangle CPD$, z tego zaś mamy, że punkty D, P i B^* są współliniowe, więc teza zachodzi.

Przypadek 2, czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

Przypadek 2.1, $P \in \omega$.

$$\measuredangle C^*PA^* = \measuredangle APC = \measuredangle ABC = \measuredangle C^*B^*A^*$$

Pierwsza równość zachodzi, ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, druga ponieważ $P \in \omega$, trzecia wynika z założeń. Z powyższej równości wynika, że $P \in \omega^*$.

$$\measuredangle CPD = \measuredangle CAD = \measuredangle A^*D^*B^* = \measuredangle A^*PB^*$$

Pierwsza równość zachodzi, ponieważ $P \in \omega$, druga na mocy **własności 3**, trzecia ponieważ $P \in \omega^*$. Z równości kątów $\measuredangle DPC = \measuredangle B^*PA^*$ wynika, że punkty D, P i B^* leżą na jednej prostej.

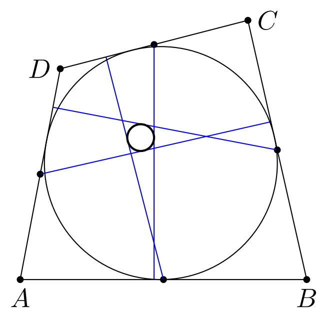
Przypadek 2.2, $P \notin \omega$.
W tym przypadku możemy przeprowadzić zupełnie analogiczne rozumowanie co w **Przypadku 1.3**.

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że drugi dowód **Twierdzenia 2** jest dłuższy i bardziej skomplikowany od pierwszej wersji, lecz sednem tego dowodu jest krótki **przypadek 1.3**, pozostała część to jedynie wymijanie niewygodnych konfiguracji, w których trudniej jest zastosować motyw współrzędnych kątowych.

Zadania

Przedstawię teraz trzy zadania razem z rozwiązaniami opartymi na motywach czworokątów bliźniaczych.

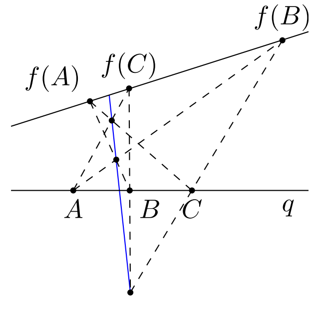
Zadanie 1 (Gl 2017/18, zadanie 10)
W czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB, BC, CD, DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w obszar ten można wpisać okrąg.



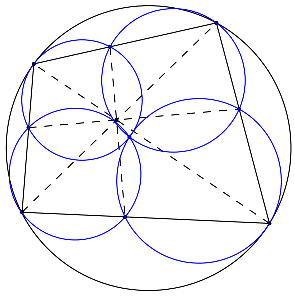
Zadanie 2
Niech i będzie inwersją na prostej q, P zaś podobieństwem na płaszczyźnie. Udowodnić, że zbiorem punktów X spełniających warunek:

$$\exists_{A,B \in q}\ X = Af(B) \cap Bf(A)$$

jest prosta, gdzie $f = P \circ i$.



Zadanie 3 (autorskie)
Dane są punkty A, B, C, D leżące w tej kolejności na okręgu ω. Niech $E = AC \cap BD$, niech dwusieczna kąta $\measuredangle AEB$ przecina prostą AB w punkcie P, zaś prostą DC w punkcie R, niech dwusieczna kąta $\measuredangle BEC$ przecina prostą BC w punkcie Q, zaś prostą AD w punkcie S. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach: $\Delta PBQ, \Delta QCR, \Delta RDS, \Delta SAP$ mają punkt wspólny.



Rozwiązanie zadania 1
Niech A^* będzie punktem przecięcia prostej prostopadłej do prostej CD, przechodzącej przez środek odcinka AB oraz prostej prostopadłej do prostej CB przechodzącej przez środek odcinka AD. Podobnie definiujemy punkty B^*, C^* i D^*. Niech l oznacza prostą prostopadłą do prostej BD przechodzącą przez środek odcinka AC. Niech J będzie jednokładnością o środku w pukncie C i skali 2. Zauważmy, że punkt $J(A^*)$ jest ortocentrum trójkąta ΔABD, stąd wynika, że $A^* \in l$. Analogicznie wykazujemy, że $C^* \in l$, skąd wynika, że proste A^*C^* i BD są prostopadłe. Podobnie wykazujemy, że proste B^*D^* i AC są prostopadłe. Przesuńmy czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ o wektor $[D^*, D]$, następnie jego obraz przekształćmy takim podobieństwem spiralnym, o środku w punkie D, by punkt $A^* + [D^*, D]$ przeszedł na punkt A. Czytelnik sam zechce się przekonać, że powstały czworokąt, jest czworokątem opisanym w **konstrukcji 1**, więc bliźniaczym z $ABCD$. Ponieważ $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to ponieważ w czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, to na mocy **Twierdzenia 1**, czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też.

Rozwiązanie zadania 2
Niech T będzie środkiem inwersji i, zaś k jej skalą. Niech punkt W będzie przecięciem prostych prostopadłych do prostych q i $f(q)$, przechodzących odpowienio przez punkty T i $f(T)$. Niech T' i $f(T)'$ będą takim punktami na odpowiednio półprostych WT i $Wf(T)$, poza odpowiednio odcinkami $Wf(T)$ i $Wf(T)'$, że zachodzi:

$$\textbf{(12)} \qquad T'T = \frac{k}{f(T)W}, \qquad f(T)'f(T) = \frac{k}{TW}$$

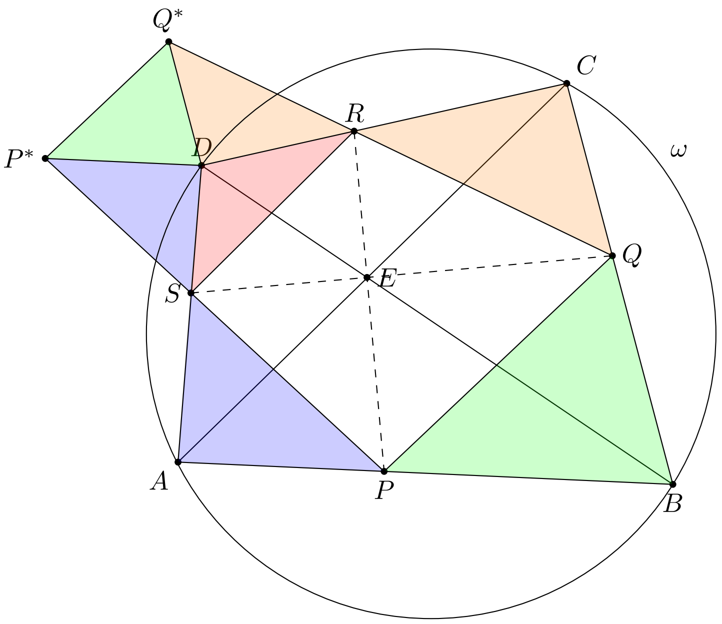
Niech $A, B \in q$, wtedy:

$$\textbf{(13)} \qquad AT \cdot f(A)f(T) = SB \cdot f(T)f(B) = k$$

łącząc **(12)**, **(13)** oraz fakt, że $\measuredangle Af(T)W = \measuredangle WTf(A) = 90°$ mamy, że $AT'BW \approx f(A)Wf(B)f(T)'$ na mocy **konstrukcji 2**, więc, na mocy **Twierdzenia 2.1**, proste $Af(B), Bf(A)$ i $T'f(T)'$ są współpękowe. Więc punkt $Af(B) \cap Bf(A)$ leży na prostej $T'f(T)'$, której położenie nie zależy od wyboru punktów A i B, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 3

Niech Q^* będzie obrazem punktu Q w jednokładnosci o skali $-\frac{DR}{CR}$ i środku w punkcie R, niech P^* będzie obrazem punktu P w jednokładnosci o skali $-\frac{DS}{AS}$ i środku w punkcie S.



Czytelnik zechce sam się przekonać, że poniższe równości są prawdziwe na mocy kilkukrotnie użytego twierdzenia o dwusiecznej.

$$\frac{DQ^*}{DP^*} = \frac{\frac{DR \cdot QC}{CR}}{\frac{DS \cdot PA}{SA}} = \frac{\frac{DR}{CR}}{\frac{DS}{AS}} \cdot \frac{QC}{PA} = \frac{\frac{DE}{EC}}{\frac{DE}{AE}} \cdot \frac{\frac{QC}{QB}}{\frac{PA}{PB}} \cdot \frac{BQ}{BP} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{\frac{EC}{EB}}{\frac{EA}{EB}} \cdot \frac{QB}{PB} = \frac{QB}{PB}$$

Łącząc ten fakt z równością kątów: $\measuredangle P^*DQ^* = \measuredangle PBQ$ mamy podobieństwo trójkątów $\Delta P^*DQ^* \sim \Delta PBQ$.

Skąd wniosek, że:

$$\textbf{(14)} \qquad \measuredangle RQP + \measuredangle P^*Q^*R = \measuredangle RQP + \measuredangle P^*Q^*D + \measuredangle DQ^*R$$
$$= \measuredangle RQP + \measuredangle PQB + \measuredangle CQR = 180^\circ$$

w sposób oczywisty zachodzą równości:

$$\textbf{(15)} \qquad \measuredangle Q^*RS + \measuredangle SRQ = \measuredangle PSR + \measuredangle RSP^* = 180^\circ$$

Znowu korzystając kilka razy z twierdzenia o dwusiecznej mamy, że:

$$\frac{P^*Q^* \cdot SR}{P^*S \cdot Q^*R} \cdot \frac{SP \cdot RQ}{PQ \cdot SR} = \frac{PS}{P^*S} \cdot \frac{RQ}{RQ^*} \cdot \frac{P^*Q^*}{PQ} = \frac{AS}{DS} \cdot \frac{RC}{RD} \cdot \frac{DQ^*}{BQ}$$
$$= \frac{AS}{AD} \cdot \frac{RC}{RD} \cdot \frac{QC \cdot \frac{DR}{RC}}{BQ} = \frac{AE}{DE} \cdot \frac{CE}{DE} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{DE}{CE} = \frac{Pot(E,\omega)}{Pot(E,\omega)} = 1$$

skąd wniosek, że:

$$\textbf{(16)} \qquad \frac{P^*Q^* \cdot SR}{P^*S \cdot Q^*R} = \frac{PQ \cdot SR}{SP \cdot RQ}$$

łącząc **(14)**,**(15)** i **(16)** mamy, na mocy **własności 2**, że:

$$PQRS \approx P^*Q^*RS$$

Zauważmy, że:

$$wk(D, P^*Q^*RS) = (\measuredangle P^*DQ^*, \measuredangle Q^*DR, \measuredangle RDS, \measuredangle SDP^*)$$

więc, na mocy **Twierdzenia 3**, istnieje taki punkt D^*, że:

$$wk(D^*, RSPQ) = (\measuredangle P^*DQ^*, \measuredangle Q^*DR, \measuredangle RDS, \measuredangle SDP^*)$$
$$= (\measuredangle PBQ, \measuredangle QCR, \measuredangle RDS, \measuredangle SAP)$$

skąd łatwo wynika, że każdy z okręgów z tezy przechodzi przez punkt D^*, co kończy dowód.

Podziękowania

Chciałbym bardzo podziękować Panu Profesorowi Waldemarowi Pompe, opiekunowi mojej pracy, za cenne wskazówki merytoryczne jakie otrzymałem podczas pisania tej pracy.

Bibliografia

[1] https://www.mimuw.edu.pl/~pompe/gl

[2] http://www.gogeometry.com/school-college/4/p1351-circumscribed-tangential-quadrilateral-midpoint-perpendicular.htm

[3] http://sem.edu.pl/konferencja-2015/materialy/Pompe/plakat.pdf

Stanisław Hauke, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica,
ul. Nowowiejska 37A, 02-010 Warszawa
adres email: hauke.stas@gmail.com