UWAGI NA TEMAT PEWNYCH GRANIC WYSTĘPUJĄCYCH W TEORII FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH

KOSMA KASPRZAK

Streszczenie. W tej pracy przedstawimy nowe dowody związane z istnieniem lub nieistnieniem pewnych granic pojawiających się w teorii funkcji prawie okresowych. Nasze dowody są całkowicie różne od tych przedstawionych w pracach [1] i [3].

1. Wstęp

W latach 1924-26 H. Bohr, duński matematyk, zapoczątkował teorię funkcji prawie okresowych opierając się o rozważania S. Bohla i E. Escalangona. Zdefiniował on pojęcie zbioru względnie gęstego i użył go do zdefiniowania i wnikliwego zbadania klasy funkcji, nazywanych jednostajnie prawie okresowymi lub prawie okresowymi w sensie Bohra. Mówimy, że zbiór A jest względnie gęsty, jeśli istnieje stała I, dla której każdy odcinek o długości I ma punkt wspólny ze zbiorem A. Jeśli dla ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i ustalonego $\varepsilon > 0$ zbiór takich $\tau \in \mathbb{R}$, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

jest względnie gęsty, to mówimy że f jest jednostajnie prawie okresowa. Wiemy, że jeśli f jest ciągłą funkcją okresową, a T jest jej okresem, to również nT jest jej okresem dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$, a więc $f(x+nT) - f(x) = 0$. Oczywiście w każdym odcinku o długości $2T$ znajdziemy wielokrotność T, więc widzimy, że zbiór $\{nT : n \in \mathbb{Z}\}$ jest względnie gęsty. Stąd ciągłość i okresowość implikuje jednostajną prawie okresowość.

Na podstawie tej definicji w późniejszych latach zostały opisane inne klasy funkcji prawie okresowych, jak na przykład funkcje prawie okresowe w sensie Stiepanowa, Weyla, Besicovitcha, Lewitana czy też prawie okresowe względem miary Lebesgue'a.

Funkcje prawie okresowe pojawiają się na przykład w astronomii. Gdy dwa ciała niebieskie orbitują wokół ustalonego innego ciała, ich pozycje względem centralnego ciała są funkcjami okresowymi czasu. Jeśli okresy orbitujących ciał są współmierne, to odległość tych ciał od siebie jest również funkcją okresową. Jeśli natomiast okresy okażą się niewspółmierne, odległość ta, choć już nie okresowa, będzie funkcją jednostajnie prawie okresową. Innymi ważnymi zagadnieniami do badania których bardzo użyteczna jest teoria funkcji prawie okresowych jest chociażby matematyczny opis kwazikryształów czy też model dynamiki sieci neuronowych.

Jednym z klasycznych przykładów funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana oraz względem miary Lebesgue'a jest funkcja $x \mapsto \frac{1}{2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})}$. Zauważmy, że funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, ponieważ aby jej mianownik był równy 0 musiałoby zachodzić

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42A75; 41A10.

Słowa kluczowe. Funkcje prawie okresowe, zachowanie asymptotyczne funkcji, liczby algebraiczne, liczby przestępne, równania Pella, piątkowy system liczbowy.

$\cos x = \cos(x\sqrt{2}) = -1$, co nie jest możliwe. Okazuje się jednak, że mianownik ten może być dowolnie mały, czyli rozważana funkcja jest nieograniczona. W pracy tej będziemy badać asymptotyczne zachowanie tej funkcji i ogólniej funkcji $x \mapsto \frac{1}{2+\cos x+\cos(x\alpha)}$ dla niewymiernych α, poprzez rozważanie granic postaci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2+\cos x+\cos(x\alpha)}. \tag{1}$$

Na początku udowodnimy dwoma różnymi sposobami, że powyższa granica wynosi 0 dla $\alpha = \sqrt{2}$ i $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Jest to wynik uzyskany już w nieco ogólniejszej postaci w pracy [1]. Później przedstawimy uogólnienie drugiego z przedstawionych dowodów, prowadzące do wniosku, że granica (1) wynosi 0 gdy α jest liczbą algebraiczną stopnia n i $f(x) = x^{-2n+2-\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^+$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Szczególny przypadek tego faktu został udowodniony w pracy [3], w której rozważono $\alpha = \sqrt{2}$ i $f(x) = x^{2-\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^+$, gdzie $\varepsilon > 0$.
Te wyniki dają pewien obraz ograniczenia górnego konkretnych funkcji postaci $x \to \frac{1}{2+\cos x+\cos(x\alpha)}$. Warto zwrócić uwagę na to, że funkcje te przyjmują wartości mniejsze lub równe od $\frac{1}{2}$ we wszystkich punktach $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, więc jeśli tylko $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, to granica (1) może albo wynieść 0, albo nie istnieć. Jednak wiadomo, że zawsze istnieje granica górna funkcji. W następnej części pracy rozważamy właśnie zastąpienie granicy w (1) przez granicę górną. Najpierw przedstawimy alternatywny dowód Twierdzenia 4 z [3] poprzez wykazanie, że gdy $\alpha = \sqrt{2}$ i $f(x) = x^{-2}$, $x \in \mathbb{R}^+$, to granica górna ilorazu w (1) jest liczbą rzeczywistą większą od 0. W tym celu użyjemy teorii związanej z równaniami Pella; w szczególności wykorzystamy fakt, że równanie $k^2 - 2l^2 = -1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Ostatnim zaprezentowanym przez nas wynikiem będzie nowy dowód Twierdzenia 7 z [1], sformułowanego przy użyciu granicy górnej ilorazu z (1). W naszym rozumowaniu ważną rolę odegra piątkowy system liczbowy. Na koniec przedstawimy wynikającą z tego twierdzenia uwagę, w której wykażemy, że zbiór liczb przestępnych jest mocy continuum i jest gęsty w $\mathbb{R}$. W naszym rozumowaniu wykorzystamy również Twierdzenie Louville'a (zob. [2]).

2. Główne wyniki

Przez $\{x\}$ i $[x]$ będziemy oznaczać odpowiednio część ułamkową i część całkowitą x. Zdefiniujemy teraz relacje "$\gg$, $\ll$, $\approx$".

Definicja 1. Rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Będziemy mówić, że $f \gg g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{C>0}\exists_{x_1\in\mathbb{R}}\forall_{x>x_1}\ f(x) \geqslant Cg(x).$$

Oczywiście

$$f \ll g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad g \gg f.$$

Ostatecznie

$$f \approx g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f \ll g \quad \text{i} \quad f \gg g.$$

Z powyższej definicji wynika, że "$\approx$" jest relacją równoważności. Ponadto, jeśli granica, granica górna lub granica dolna f w plus nieskończoności jest równa 0 lub $+\infty$, to odpowiednio granica, granica górna lub granica dolna g wynosi 0 lub $+\infty$.

W [1] (Th. 6.13) został udowodniony następujący wynik.

Twierdzenie 1. *Zachodzi*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})} = 0.$$

Teraz udowodnimy powyższe twierdzenie dwoma różnymi sposobami.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon \in (0;2)$. Niech będzie ono równe $2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})$ dla pewnego $x>0$. Wtedy

$$\cos x = \varepsilon - \cos(x\sqrt{2}) - 2 \leqslant \varepsilon - 1.$$

Niech $a = \pi - \arccos(\varepsilon-1)$. Wtedy $x \in [2\pi n+\pi-a\,;\,2\pi n+\pi+a]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Analogicznie $x\sqrt{2} \in [2\pi m+\pi-a\,;\,2\pi m+\pi+a]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}_0$. Przedziały $[2\pi n+\pi-a\,;\,2\pi n+\pi+a]$ i $[2\pi m+\pi-a\,;\,2\pi m+\pi+a]$ zawierają tylko liczby dodatnie, więc

$$\sqrt{2} = \frac{x\sqrt{2}}{x} \in \left[\frac{2\pi m+\pi-a}{2\pi n+\pi+a}; \frac{2\pi m+\pi+a}{2\pi n+\pi-a}\right].$$

Podstawmy $k = 2m+1, l = 2n+1, b = \frac{a}{\pi}$. Otrzymujemy:

$$\sqrt{2} \in \left[\frac{k-b}{l+b}; \frac{k+b}{l-b}\right]$$

i stąd $k-b \leqslant \sqrt{2}(l+b)$, więc $k-l\sqrt{2} \leqslant b(1+\sqrt{2})$. Analogicznie otrzymujemy $k-l\sqrt{2} \geqslant -b(1+\sqrt{2})$, więc

$$|k-l\sqrt{2}| \leqslant b(1+\sqrt{2}).$$

Stąd

$$|k^2-2l^2| \leqslant b(1+\sqrt{2})(k+l\sqrt{2}).$$

Liczba k^2-2l^2 jest całkowita i $k^2-2l^2 \neq 0$, więc $|k^2-2l^2| \geqslant 1$ i stąd

$$k+l\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{b(1+\sqrt{2})}. \tag{2}$$

Dla wystarczająco małych $\varepsilon > 0$ liczby a i b mogą być dowolnie bliskie zera, więc dla wystarczająco małych $\varepsilon > 0$ mamy

$$k-l\sqrt{2} \geqslant -b(1+\sqrt{2}) \geqslant -\frac{1}{2} \geqslant -\frac{k}{2},$$

więc

$$\frac{5}{2}k \geqslant k+l\sqrt{2},$$

i, z (2), otrzymujemy

$$k \geqslant \frac{2}{5(1+\sqrt{2})b}.$$

Dla wystarczająco małych $\varepsilon > 0$ liczba $x\sqrt{2} - (2\pi m + \pi)$ może być dowolnie bliska zera, więc $\frac{x\sqrt{2}}{2\pi m+\pi}$ może być dowolnie bliska 1. Stąd otrzymujemy

$$x = \frac{x\sqrt{2}}{2\pi m + \pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot (2m+1) \geqslant \frac{x\sqrt{2}}{2\pi m + \pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{5(1+\sqrt{2})b} =$$
$$= \frac{x\sqrt{2}}{2\pi m + \pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\pi}{5(1+\sqrt{2})a} = \frac{x\sqrt{2}}{2\pi m + \pi} \cdot \frac{2\pi^2}{5(2+\sqrt{2})a} \geqslant \frac{1}{a}.$$

Stąd dla wystarczająco małych $\varepsilon > 0$ mamy

$$\frac{e^{-x}}{2+\cos x + \cos(x\sqrt{2})} \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{a}}}{\varepsilon} = \frac{e^{-\frac{1}{a}}}{\cos(\pi - a)+1} = \frac{e^{-\frac{1}{a}}}{1-\cos a} =: h(\varepsilon). \tag{3}$$

Rozważmy teraz ε jako zmienną i w konsekwencji a jako zmienną zależną od ε. Używając znanego faktu, że $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$ i reguły de l'Hopitala otrzymujemy

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{a}}}{1-\cos a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{(e^{-\frac{1}{a}})'}{(1-\cos a)'} = \lim_{a\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a^2}}{\sin a} =$$
$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a^3}}{\frac{\sin a}{a}} = \lim_{a\to 0^+} e^{-\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a^3} = \lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a^3}}{e^{\frac{1}{a}}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a^3}} = +\infty,$$

więc

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a^3}}{e^{\frac{1}{a}}} = 0$$

i ostatecznie

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{a}}}{1-\cos a} = 0.$$

Ustalmy $\tilde{\epsilon} > 0$. Skoro $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$, to istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że $h(\varepsilon) < \tilde{\epsilon}$ dla wszystkich $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Niech ε_1 będzie taką dodatnią liczbą, że dla $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ nierówność (3) jest spełniona. Niech $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_0; \varepsilon_1\}$. Ustalmy $x > 0$. Jeśli $2 + \cos x + \cos x\sqrt{2} < \varepsilon_2$,to , z (3), dostajemy $\frac{e^{-x}}{2+\cos x + \cos x\sqrt{2}} < \tilde{\epsilon}$. Jeśli natomiast $2 + \cos x + \cos x\sqrt{2} \geqslant \varepsilon_2$, to $\frac{e^{-x}}{2+\cos x+\cos x\sqrt{2}} \leqslant \frac{e^{-x}}{\varepsilon_2}$, a skoro dla wystarczająco dużych x liczba e^{-x} może być dowolnie mała, to dla wystarczająco dużych x mamy $\frac{e^{-x}}{\varepsilon_2} \leqslant \tilde{\epsilon}$. Ostatecznie dla dowolnego $\tilde{\epsilon} > 0$ dla wystarczająco dużych x mamy $\frac{e^{-x}}{2+\cos x+\cos x\sqrt{2}} < \tilde{\epsilon}$ i stąd $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2+\cos x+\cos x\sqrt{2}} = 0$.

□

Teraz przedstawimy drugi dowód Twierdzenia 1.

Dowód. Zauważmy, że

$$\sqrt{2+\cos(2\pi x)+\cos(2\pi x\sqrt{2})} = \sqrt{1+\cos(2\pi x)+1+\cos(2\pi x\sqrt{2})} =$$
$$= \sqrt{2\cos^2(\pi x)+2\cos^2(\pi x\sqrt{2})} \approx |\cos(\pi x)|+|\cos(\pi x\sqrt{2})| =$$
$$= |\cos(\pi\{x\})|+|\cos(\pi\{x\sqrt{2}\})| \approx \left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|+\left|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}\right| =: g(x).$$

Wykresy dwóch składników funkcji g składają się z odcinków. W pierwszym składniku mają one nachylenie 1 i -1, ; w drugim: $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$. W takim razie wykres funkcji g składa się z odcinków o nachyleniu $1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2};$
$-1+\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}$. Rozważmy lokalne minima tej funkcji. Muszą one występować w punktach nieróżniczkowalności, czyli $\frac{n}{2}$ lub $\frac{n\sqrt{2}}{4}$ dla $n \in \mathbb{N}$, ponieważ dla innych punktów istnieje sąsiedztwo, które jest odcinkiem o niezerowym nachyleniu. Możemy łatwo zauważyć, że nie ma minimów w punktach postaci $\frac{n}{2}$, a w punktach postaci $\frac{n\sqrt{2}}{4}$ minima i maksima występują na przemian. Niech $x_n = \frac{(2n+1)\sqrt{2}}{4}$. Oczywiście funkcja g jest ciągła i osiąga minima w punktach x_n, więc $g(x)$ jest większa lub równa od wartości w jednym z dwóch kolejnych wyrazów ciągu (x_n), pomiędzy którymi leży x. Przypiszmy każdemu $x > x_1$ liczbę $f(x)$ tak, że $f(x_n) = x_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i jeśli $x_n < x < x_{n+1}$, to $f(x) = x_n$ gdy $g(x_n) < g(x_{n+1})$ i $f(x) = x_{n+1}$ w innych przypadkach. Skoro, jak ustaliliśmy, kolejne minima różnią się o $\frac{\sqrt{2}}{2}$, to $|f(x)-x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ i stąd

$$\frac{e^{-\pi x}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} \leqslant \frac{e^{-\pi f(x)}\cdot e^{\pi(f(x)-x)}}{|\{f(x)\}-1/2|} \approx \frac{e^{-\pi f(x)}}{|\{f(x)\}-1/2|}.$$

Zauważmy, że jeśli $f(x) = \frac{2l+1}{2\alpha}$ i $[f(x)] = k$ to $k, l \in \mathbb{N}$ i otrzymujemy (traktując l i k jako funkcje x)

$$|\{f(x)\}-1/2| = \left|\frac{l\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}-k\right| = \frac{|(2l+1)\sqrt{2}-2(2k+1)|}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}\left|\frac{2(2l+1)^2-4(2k+1)^2}{(2l+1)\sqrt{2}+2(2k+1)}\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\frac{1}{(2l+1)\sqrt{2}+2(2k+1)}\right| \gg \frac{1}{l} \approx \frac{1}{f(x)}.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{2+\cos(2\pi x)+\cos(2\pi x\sqrt{2})}} \approx \frac{e^{-\pi x}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} \leqslant \frac{e^{-\pi f(x)}\cdot e^{\pi(f(x)-x)}}{|\{f(x)\}-1/2|} \approx$$
$$\approx \frac{e^{-\pi f(x)}}{|\{f(x)\}-1/2|} \ll f(x)e^{-\pi f(x)}.$$

Gdy x dąży do plus nieskończoności, $f(x)$ dąży do plus nieskończoności, więc

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})} = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{2+\cos(2\pi x)+\cos(2\pi x\sqrt{2})}}\right)^2 \leqslant \left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-\pi x}\right)^2 = 0,$$

co kończy dowód. □

Naturalnym uogólnieniem udowodnionego twierdzenia jest próba zastąpienia liczby $\sqrt{2}$ przez inne liczby niewymierne i znalezienia funkcji malejącej wolniej niż e^{-x} w roli licznika. Następujący wniosek, związany z granicą (1), jest rozszerzeniem Wniosku 1 z [3] (zobacz również [5]).

Wniosek 1. *Jeśli α jest liczbą algebraiczną stopnia n, to*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-2n+2-\varepsilon}}{2+\cos x+\cos(x\alpha)}=0 \quad \textit{dla dowolnego} \quad \varepsilon>0.$$

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $\alpha>1$, gdyż dla $\alpha<1$ podstawiając $u=\frac{x}{\alpha}$ otrzymujemy

$$\frac{x^{-2n+2-\varepsilon}}{2+\cos x+\cos(x\alpha)}\approx\frac{u^{-2n+2-\varepsilon}}{2+\cos u+\cos(\frac{u}{\alpha})}$$

i $\frac{1}{\alpha}>1$ jest liczbą algebraiczną stopnia n. Analogicznie do drugiego dowodu Twierdzenia 1 wnisokujemy, że wystarczy rozważyć funkcję

$$x\mapsto\frac{x^{-n+1-\varepsilon}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\alpha\}-\frac{1}{2}|}.$$

Jej minima występują w punktach $\frac{2l+1}{2\alpha}$, ponieważ $\alpha>1$. Zdefiniujmy f, l i k jak w drugim dowodzie Twierdzenia 1.

$$\frac{x^{-n+1-\varepsilon}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|}\leqslant\frac{f(x)^{-n+1-\varepsilon}\cdot(\frac{x}{f(x)})^{-n+1-\varepsilon}}{|\{f(x)\}-1/2|}\approx\frac{f(x)^{-n+1-\varepsilon}}{|\{f(x)\}-1/2|}.$$

Niech P będzie wielomianem stopnia n o całkowitych współczynnikach, dla którego $P(\alpha)=0$. Skoro α jest pierwiastkiem P, to wielomian ten jest postaci $(x-\alpha)Q(x)$ dla pewnego wielomianu Q. Z definicji k i l mamy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2l+1}{2k+1}=\alpha,$$

więc

$$\lim_{x\to+\infty}Q\left(\frac{2l+1}{2k+1}\right)=Q(\alpha).$$

Skoro $\alpha>1$, mamy

$$|\{f(x)\}-1/2|=\left|\frac{2l+1}{2\alpha}+\frac{1}{2}-k\right|=\frac{|(2l+1)-(2k+1)\alpha|}{2\alpha}\approx\left|\frac{P\left(\frac{2l+1}{2k+1}\right)}{Q\left(\frac{2l+1}{2k+1}\right)}\right|(2k+1)=$$

$$=\left|\frac{(2k+1)^nP\left(\frac{2l+1}{2k+1}\right)}{(2k+1)^nQ\left(\frac{2l+1}{2k+1}\right)}\right|(2k+1)\gg\frac{1}{(2k+1)^{n-1}}\approx f(x)^{-n+1}.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{x^{-n+1-\varepsilon}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\alpha\}-\frac{1}{2}|}\ll f(x)^{-n+1-\varepsilon}\cdot f(x)^{n-1}=f(x)^{-\varepsilon},$$

co w połączeniu z $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{-\varepsilon}=0$ kończy dowód. $\square$

W następującym twierdzeniu badamy zachowanie asymptotyczne funkcji $x \mapsto \frac{x^{-2}}{2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})}$. Udowodnimy pewne uogólnienie Twierdzenia 4 z [3].

Twierdzenie 2. *Zachodzi*

$$0 < \limsup_{x\to+\infty} \frac{x^{-2}}{2+\cos x+\cos(x\sqrt{2})} < +\infty.$$

Dowód. Zauważmy, że z Definicji 1 i drugiego dowodu Twierdzenia 1 wynika, iż wystarczy udowodnić, że

$$0 < \limsup_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} < +\infty.$$

Wiemy, że

$$\frac{x^{-1}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} \ll \frac{f(x)^{-1}}{|\{f(x)\}-1/2|} \ll f(x)f(x)^{-1} = 1,$$

gdzie f jest zdefiniowane jak w drugim dowodzie Twierdzenia 1. Wskażemy teraz ciąg (l_n), dla którego ta funkcja nie dąży do zera. Rozważmy równanie Pella $k^2-2l^2=-1$. Dobrze znanym faktem jest, że jest ono spełnione przez nieskończenie wiele par liczb naturalnych, a rozważając to równanie modulo 4 widzimy, że k i l muszą być nieparzyste. Niech (l_n) i (k_n) będą rosnącymi ciągami liczb naturalnych l_n i k_n występujących w tych parach. Wtedy

$$\left|\left\{\frac{l_n}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right|+\left|\left\{\frac{l_n\sqrt{2}}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right| = \left|\left\{\frac{l_n\sqrt{2}}{2}-\frac{k_n}{2}+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right| = \left|\left\{\frac{1}{2k_n+2l_n\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2k_n+2l_n\sqrt{2}}.$$

Stąd

$$\frac{2l_n^{-1}}{|\{\frac{l_n}{2}\}-\frac{1}{2}|+|\{\frac{l_n}{2}\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} = 4\frac{k_n}{l_n}+4\sqrt{2} > 1$$

i

$$1 < \limsup_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{|\{x\}-\frac{1}{2}|+|\{x\sqrt{2}\}-\frac{1}{2}|} < +\infty.$$

□

Na koniec przedstawimy krótki dowód Twierdzenia 7 z [1] związanego z granicą (1).

Twierdzenie 3. *Dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, dowolnego $a\in\mathbb{R}$ i dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\alpha\in\mathbb{R}$ dla którego*

$$|a-\alpha|<\varepsilon \quad i \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2+\cos x+\cos(x\alpha)} = +\infty.$$

Dowód. Ustalmy $a\in\mathbb{R}$ i $\varepsilon>0$. Skonstruujemy taką liczbę α i ciąg (πl_n), że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(\pi l_n)}{2+\cos(\pi l_n)+\cos(\pi l_n\alpha)} = +\infty.$$

Niech $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} 5^{-a_i}$, gdzie (a_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie w następujący sposób: $a_1 = 1$ i a_{i+1} jest najmniejszą liczbą całkowitą większą od a_i dla której

$$\frac{f(\pi 5^{a_i})}{2\pi \cdot 5^{a_i - a_{i+1}}} > i.$$

Takie a_{i+1} w oczywisty sposób istnieje i skoro (a_n) jest rosnące, to szereg definiujący β jest zbieżny. Rozważmy przedział $(a - \beta - \varepsilon; a - \beta + \varepsilon)$. Musi on zawierać liczbę postaci $\frac{m}{5^N}$ dla pewnych liczb całkowitych m i N (wyrażenia $\frac{[5^n(a-\beta+\varepsilon)]}{5^n}$, będąc mniejsze od liczby $a - \beta + \varepsilon$, mogą być jej dowolnie bliskie, więc dla wystarczająco dużych $n \in \mathbb{N}$ muszą one być większe od $a - \beta - \varepsilon$). Niech $\alpha = \beta + \frac{m}{5^N}$. Zdefiniujmy ciągi (l_n) i (k_n) jako $l_n = 5^{a_n}$ i $k_n = [5^{a_n} \cdot \alpha]$. Zauważmy, że

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} 5^{a_i - a_n} \leqslant \frac{1}{5-1} \leqslant 1,$$

więc dla $a_i > N$ mamy

$$k_i = m \cdot 5^{a_i - N} + [5^{a_i} \cdot \beta] = m \cdot 5^{a_i - N} + 5^{a_i - a_1} + 5^{a_i - a_2} + \cdots + 5^{a_i - a_i},$$

a skoro $5^{a_i}\beta - [5^{a_i}\beta] > 0$, to

$$0 < l_i\alpha - k_i = \sum_{j=i+1}^{\infty} 5^{a_i - a_j} < 2 \cdot 5^{a_i - a_{i+1}} < 1.$$

Co więcej, jeśli $a_i > N$, liczby k_i i k_{i+1} są różnej parzystości, więc jeden z ciągów (k_{2n}) i (k_{2n+1}) zawiera tylko liczby nieparzyste od pewnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{f(\pi l_i)}{2 + \cos(\pi l_i) + \cos(\pi l_i \alpha)} = \frac{f(\pi l_i)}{1 - \cos(\pi l_i \alpha - \pi k_i)} > \frac{f(\pi l_i)}{\pi l_i \alpha - \pi k_i} >$$
$$> \frac{f(\pi 5^{a_i})}{2\pi \cdot 5^{a_i - a_{i+1}}} > i,$$

dla podciągów (k_{2n}) i (l_{2n}) lub (k_{2n+1}) i (l_{2n+1}) dla wystarczająco dużych n. Stąd α i jeden z ciągów (πl_{2n}), (πl_{2n+1}) spełniają zadane warunki. □

Uwaga 1. W powyższym dowodzie można zastąpić liczbę 5 w definicji β przez dowolną liczbę nieparzystą większą od 1 i konsekwentnie używać jej w całym dowodzie. Gdybyśmy spróbowali zastąpić ją przez liczbę parzystą, na przykład przez liczbę 10, nasze l_n byłoby parzyste i $\cos(\pi l_n)$ byłoby równe 1 zamiast -1.

Uwaga 2. Zauważmy, że podstawienie $f(x) = e^{-x}$ w Twierdzeniu 3 i skorzystanie z Wniosku 1 prowadzi do powszechnie znanego faktu dotyczącego istnienia liczb przestępnych. Istotnie, skoro $e^x \gg x^a$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, dowolna liczba α spełniająca

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2 + \cos x + \cos(x\alpha)} = +\infty,$$

spełnia również równanie

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{x^{-n+1-\varepsilon}}{2 + \cos x + \cos(x\alpha)} = +\infty,$$

więc z Wniosku 1 wnosimy, że α nie jest liczbą algebraiczną stopnia n dla żadnego $n \in \mathbb{N}$, więc jest ono liczbą przestępną. Wtedy Twierdzenie 3 implikuje, że zbiór wszystkich liczb przestępnych jest gęsty w $\mathbb{R}$.
Co więcej, zauważmy że jeśli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony dla pewnego ściśle rosnącego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych, to używając Twierdzenia Liouville'a można łatwo udowodnić, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 5^{-a_i}$ jest liczbą przestępną. Niech $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym takim ciągiem, że $e_n \in \{0,1\}$. Wiadomo, że zbiór wszystkich takich ciągów jest nieprzeliczalny. Jeśli zdefiniujemy $a_n = (n+1)! + e_n$, to można łatwo sprawdzić że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > n$ i liczby $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 5^{-a_i}$ są różne dla różnych ciągów $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Z tego wynika, że zbiór wszystkich liczb przestępnych jest mocy continuum.

Podziękowania

Pragnę podziekować mojemu nauczycielowi prof. UAM dr hab. D. Bugajewskiemu za cenne uwagi, które znacznie ulepszyły angielską wersję tej pracy, przyjętą do druku w czasopiśmie Topological Methods in Nonlinear Analysis.

Literatura

[1] D. Bugajewski and A. Nawrocki, *Some remarks on almost periodic functions in view of the Lebesgue measure with applications to linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), 809–836.
[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Number Theory*, 4th ed., Clarendon Press, 1971.
[3] A. Nawrocki, *Diophantine approximations and almost periodic functions*, Demonstr. Math. **50** (2017), 100–104.
[4] A. Nawrocki, *On some applications of convolution to linear differential equations with Levitan almost periodic coefficients*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **50** (2017), no. 2, 489–512.
[5] A. Nawrocki, *O pewnych uogólnieniach funkcji prawie okresowych i ich zastosowaniach*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 2017, Rozprawa doktorska.
[6] S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.

XXXVIII Dwujęzyczne LO im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego, ul. Małoszyńska 38, 60-176 Poznań,
kosma.kasprzak@wp.pl