DWUWYMIAROWE CIĄGI DOLDA

MATEUSZ SCHARMACH

1. Wstęp

Ciągi Dolda odgrywają znaczącą rolę w teorii układów dynamicznych oraz w teorii punktów periodycznych, rozważane były one m. in. w pracach, [1], [2], [4] [5]. Abstrakcyjnie zdefiniowane zostały stosunkowo niedawno w pracy K. Wójcika [5]. Przystępny opis ich właściwości znalazł się w pracy A. Leśniak "O pewnym uogólnieniu Małego Twierdzenia Fermata" opublikowanym w 2015 w Delcie [3].

Celem pracy jest uogólnienie pojęcia ciągu Dolda na przypadek 2-wymiarowy (czyli na ciągi dwuindeksowane). W pierwszej części definiujemy klasyczne ciągi Dolda i opisujemy ich podstawowe własności, podając niekiedy własne dowody faktów znanych z literatury.
W drugiej części określamy i badamy dwuwymiarowe ciągi Dolda. W szczególności pokazujemy, że ciągi dwuwymiarowe nie dają się w prosty sposób zredukować do przypadku jednowymiarowego (Tw.16), jednak w pewien sposób mogą być wyrażone przez ciągi jednowymiarowe Jednym z najważniejszych wyników pracy było pokazanie tego, że klasa dwuwymiarowych ciągów Dolda jest równoważna klasie dwuwymiarowych ciągów, których każda kolumna i każdy wiersz jest ciągiem Dolda. (Tw. 12, Tw. 13 i Tw. 14). Podajemy również interpretację geometryczną ciągów dwuwymiarowych jako punktów stałych złożeń dwóch funkcji.

2. Podziękowania

Chciałbym bardzo podziękować panu dr hab Grzegorzowi Graffowi prof nadzw. PG, oraz panu dr Piotrowi Nowakowi-Przygodzkiemu za opiekę merytoryczną i cenne uwagi podczas pisania pracy.

3. Jednowymiarowe ciągi Dolda

Definicja 1. Funkcję Mobiusa $\mu(n)$ będziemy definiowali w następujący sposób:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą bezkwadratową o parzystej} \\ & \text{liczbie dzielników pierwszych,} \\ -1, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą bezkwadratową o nieparzystej} \\ & \text{liczbie dzielników pierwszych,} \\ 0 & \text{w innym przypadku.} \end{cases}$$

Innymi słowy, jeśli liczbę n da się zapisać w postaci $\prod_{i=1}^{k} p_i$, gdzie p_i są parami różnymi liczbami pierwszymi, to $\mu(n) = (-1)^k$. W szczególności $\mu(1) = 1$. W innym wypadku $\mu(n) = 0$.

Definicja 2. Ciągiem Dolda nazywamy ciag spełniający następujący warunek

$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m) d_{\frac{n}{m}}. \tag{3.1}$$

Definicja 3. Zdefiniujmy ciąg $reg_k(n)$ w następujący sposób:

$$reg_k(n) = \begin{cases} k, & \text{jeśli } k \mid n, \\ 0, & \text{jeśli } k \nmid n. \end{cases}$$

Zauważmy, że ciąg $a_n = reg_k(n)$ będzie ciągiem okresowym o okresie długosci k postaci $(0, 0, ...k, 0, ..., k, ...)$.

Lemat 4. *Każdy ciąg $\{a\}$ postaci $a_n = reg_k(n)$ jest ciągiem Dolda.*

Dowód. Zauważmy, że dla n niepodzielnych przez k każdy z dzielników n będzie niepodzielny przez k, stąd

$$n \mid 0 = \textstyle\sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m.$$

Dla $n = k$ $\sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m = k$, bo jedynym niezerowym składnikiem tej sumy będzie a_n. Jeśli natomiast n jest liczbą podzielną przez k, ale nierówną k, to istnieje skończony zbiór liczb pierwszych p będących dzielnikami n takimi, że $k \mid \frac{n}{p}$. Oznaczmy je $p_1, p_2, ...p_j$, a ich zbiór P_n (dla $i \neq j$, $p_i \neq p_j$). Zauważmy teraz, że składniki sumy

$\sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m = k$ będą zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $m = \frac{n}{\prod_{i=1}^{l} p_{x_i}}$, gdzie l jest liczbą całkowitą mniejszą od j, a $\{x\}$ ciągiem różnych liczb całkowitych mniejszych od j. Wynika to z tego, że jeśli $\frac{n}{m} = \prod_{i=1}^{l} p_{x_i}$ miałoby w swoim rozkładzie pewien czynnnik pierwszy przynajmniej 2 razy, to $\mu(\frac{n}{m}) = 0$, czyli składnik sumy dla takiego m byłby równy 0. Jeśli natomiast $\frac{n}{m}$ byłoby podzielne przez liczbę pierwszą nienależącą do wyżej zdefiniowanego zbioru, to z definicji tego zbioru $d_m = 0$, bo $k \nmid d_m$, czyli ten składnik byłby równy 0. Tak więc $\sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m = \sum_{m} \mu(\frac{n}{m}) d_m$ dla m postaci $m = \frac{n}{\prod_{i=1}^{l} p_{x_i}}$. Czyli jest to suma po m będących ilorazem n i iloczynu liczb z pewnego podzbioru P_n. Zauważmy, że dla podzbiorów P_n o parzystej mocy $\mu(\frac{n}{m}) d_m = 1 * k = k$, a dla podzbiorów o mocy nieparzystej $\mu(\frac{n}{m}) d_m = -1 * k = -k$. Stąd, jako że każdy niepusty skończony zbiór ma tyle samo podzbiorów parzystych co nieparzystych, to składników równych k będzie w tej sumie tyle samo co składników równych $-k$, więc $\sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m = 0$, czyli $n \mid \sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m$. □

Lemat 5. *Niech ciągi a, i b będę postaci $a_i = reg_n(i)$, $b_i = reg_m(i)$, to ciąg c będący ich iloczynem, $c_i = a_i b_i$, będzie postaci $c_i = x reg_y(i)$, dla pewnych całkowitych x, y.*

Dowód. Zauważmy, że dla liczb całkowitych k nie dzielących się przynajmniej przez jedną z liczb m, n $c_k = 0$, gdyż jeden z czynników iloczynu $c_i = a_i b_i$ jest równy 0. Natomiast dla k podzielnych jednocześnie przez n i m, c_k będzie równe nm. Stąd c_k będzie różne od zera tylko dla k podzielnych przez $NWW(n, m)$, a dla k podzielnych przez $NWW(n, m)$ będzie równe $nm = NWD(n, m) NWW(n, m)$. Stąd $c_k = NWD(m, n) reg_{NWW(n,m)}(k)$. □

Lemat 6. *Jeśli a i b są ciągami Dolda, to ciąg c, spełniający warunek: dla każdego dodatniego całkowitego n $c_n = a_n + b_n$ jest ciągiem Dolda.*

Dowód. $n \mid \sum_{m|n} \mu(m) a_{\frac{n}{m}}$ i $n \mid \sum_{m|n} \mu(m) b_{\frac{n}{m}}$, stąd

$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m) a_{\frac{n}{m}} + \sum_{m|n} \mu(m) b_{\frac{n}{m}},$$
$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m)(a_{\frac{n}{m}} + b_{\frac{n}{m}}),$$
$$n \mid \sum_{m|n} \mu(m) c_{\frac{n}{m}}.$$

□

Twierdzenie 7. *Każdy ciąg $\{d\}$ postaci $d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_i reg_k(i)$ jest ciągiem Dolda.*

Dowód. Z lematu 6 wiemy, że suma dowolnej ilości ciągów Dolda jest ciągiem Dolda. Z tego faktu oraz tego, że każdy ciąg postaci $a_n = reg_k(n)$ jest ciągiem Dolda uzyskujemy tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 8. *Każdy ciąg Dolda można przedstawić jako sumę ciągów reg_k ($d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(i)$).*

Dowód. Oznaczmy dany ciąg Dolda jako $\{d\}$. Twierdzenie udowodnimy indukcyjnie.

Załóżmy najpierw, że na przedziale $[0, n-1]$ ciąg ten da się przedstawić w postaci $d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(i)$. ($\{a\}$ jest ciągiem współczynników całkowitych przy kolejnych wyrazach sumy reg-ów). Z twierdzenia 7 wiemy, że przy $d_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(n)$ są spełnione kongruencje definiujące ciąg Dolda ($n \mid \sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m}) d_m$). Jako, że $\{d\}$ jest ciągiem Dolda, to $d_n \equiv_n \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(n)$, stąd

$$d_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(n) + xn = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(n) + x reg_n(n).$$

Ale zauważmy, że na przedziale $[0, n-1]$ reg_n przyjmuje wartość 0, zatem przy zastąpieniu współczynnika a_n wartością $a_n + x$, wartości d_i dla $i = 1, 2, ..., n-1$ nie zmieniłyby się, gdyż w sumie definiującej te wartości a_n jest pomnożone przez 0. Stąd po zastąpieniu a_n przez $a_n + x$ dla dowolnego i z przedziału $[1, n]$ $d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k reg_k(i)$, stąd można ten ciąg na tym przedziale przedstawić jako sumę reg-ów.

Zauważmy w końcu, że dla dowolnego ciągu Dolda $d_1 = w = w reg_1(1)$. Tak więc, na mocy zasady indukcyji matematycznej udowodnilimy, że każdy ciąg Dolda można przedstawić jako sumę reg-ów. □

Twierdzenie 9. *Iloczyn ciągów Dolda jest ciągiem Dolda.*

Dowód. Oznaczmy dwa ciągi Dolda jako $\{a\}$ i $\{b\}$, dla dowolnego naturalnego n

$$a_n b_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k reg_k(n) \sum_{j=1}^{\infty} y_j reg_j(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k reg_k(n)\; y_j reg_j(n).$$

Skorzystalimy tutaj z twierdzenia 8. Z Lematu 5 wiemy natomiast, że iloczyn reg-ów może być przedstawiony jako pewien reg pomnożony przez pewien współczynnik. Stąd:
$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_k reg_k(n)\ y_j reg_j(n) = \sum_{j=1}^{\infty} reg_j(n)\ z_j$, co w połączeniu z twierdzeniem 8 daje nam tezę. □

Poniżej kilka przykładów ciągów Dolda.

- dowolny ciag, którego wszystkie elementy są sobie równe, (jako że jest to ciąg $reg_1(n)$ przemnożony przez pewną stałą
- ciągi sum dzielników kolejnych liczb naturalnych (jako suma $\sum_{k=1}^{\infty} reg_k$)
- ciąg śladów kolejnych potęg dowolnej macierzy kwadratowej [4]
- ilość punktów periodycznych funkcji określonej na pewnym zbiorze skończonym [2].

4. Dwuwymiarowe ciągi Dolda

Definicja 10. Dwuwymiarowym ciągiem Dolda nazwiemy ciąg $\{d\}$ spełniający następujący warunek:

$$NWW(m,n) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\tfrac{n}{i})\mu(\tfrac{m}{j})d_{i,j}.$$

Obserwacja 11. Jeśli $\{a\}$ i $\{b\}$ są ciągami Dolda, to ciąg $\{c\}$, spełniający warunek: dla każdego dodatniego całkowitego n $c_{n,m} = a_{n,m} + b_{n,m}$ jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda.

Dowód. Postępujemy analogicznie jak w Lemacie 8:
$NWW(m,n) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})a_{n,m}$ i $NWW(m,n) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})b_{n,m}$,
stąd $NWW(m,n) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})(a_{n,m} + b_{n,m})$,
więc $NWW(m,n) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})(c_{n,m})$. □

Twierdzenie 12. *Jeśli d jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda, to dla dowolnego k ciąg postaci $a_i = d_{k,i}$ będzie ciągiem Dolda.*
(Mówiąc mniej formalnie, każda kolumna dwuwymiarowego ciągu Dolda jest jednowymiarowym ciągiem Dolda.)

Dowód. Udowodnimy ten fakt korzystając z indukcji matematycznej.
Zauważmy, że dla $k = 1$:
$\sum_{i|k,j|m} \mu(\frac{k}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j} = \sum_{j|m} \mu(1)\mu(\frac{m}{j})d_{1,j}$.

Oznaczmy teraz: $S_{i,j} = \sum_{k|j} \mu(\frac{j}{k})d_{i,j}$, czyli mówiąc mniej formalnie $S_{i,j}$ będzie sumą taką jak w kongruencji definiującej ciągi Dolda dla liczb w i-tym rzędzie, sumując do j-ego elementu (3.1).
Wiemy, że dla każdego dodatniego całkowitego $i \leqslant n-1$ $m \mid S_{i,m}$. Zauważmy teraz, że $\sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j} = \sum_{i|n} \mu(\frac{n}{i})S_{i,m}$. Więc jeśli dla $i \leqslant n-1$ $m \mid S_{i,m}$, co oznacza, że $m \mid S_{i,m}\ \mu(\frac{n}{i})$, czyli m dzieli wszystkie poza $S_{n,m}$ składniki sumy $\sum_{i|n} \mu(\frac{n}{i})S_{i,m}$. Ponieważ zaś m dzieli również całą tę sumę, to $m \mid S_{n,m}$. ☐

Twierdzenie 13. *Jeśli $\{d\}$ jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda, to dla dowolnego k ciąg postaci $a_i = d_{i,k}$ będzie ciągiem Dolda.*
(Mówiąc mniej formalnie, każdy wiersz dwuwymiarowego ciągu Dolda jest jednowymiarowym ciągiem Dolda.)

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w poprzednim twierdzeniu, z tym że odwracamy w dowodzie rozpatrywane indeksy. ☐

Twierdzenie 14. *Każdy dwuwymiarowy ciąg taki, że każdy jego wiersz i każda jego kolumna jest ciągiem Dolda jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda.*

Dowód. Oznaczmy ten ciąg jako $\{d\}$.

Ponadto oznaczmy: $s_{k,l} = \sum_{i|l} \mu(\frac{l}{i})d_{k,i}$, oraz $r_{k,l} = \sum_{i|k} \mu(\frac{k}{i})d_{i,l}$. Jako, że każda kolumna i każdy wiersz ciągu $\{d\}$ jest ciągiem Dolda, to dla każdego naturalnego k, l, $k \mid r_{k,l}$, oraz $l \mid s_{k,l}$. Zauważmy teraz, że $\sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j} = \sum_{i|n}, \mu(\frac{n}{i})s_{i,m} = \sum_{i|m}, \mu(\frac{m}{i})r_{n,i}$. A jako, że dla każdego naturalnego i, $m \mid s_{i,m}$, to

$$m \mid \sum_{i|n} \mu(\frac{n}{i})s_{i,m} = \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}.$$

Analogicznie, jako że $n \mid r_{n,i}$, to

$$n \mid \sum_{i|m} \mu(\frac{m}{i})r_{n,i} = \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}.$$

Tak więc $\sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}$ jest podzielne zarówno przez m, jak i przez n, stąd $NWW(n,m) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}$, czyli ciąg $\{d\}$ jest ciągiem Dolda. ☐

Łącząc trzy ostatnie twierdzenia uzyskujemy, że klasa dwuwymiarowych ciągów Dolda jest równoważna klasie dwuwymiarowych ciągów których każda kolumna i każdy wiersz jest ciągiem Dolda.

Twierdzenie 15. *Iloczyn dwóch ciągów Dolda jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda.*

Dowód. Oznaczmy te ciągi jednowymiarowe jako $\{a\}$ i $\{b\}$, a dwuwymiarowy jako $\{d\}$, tak, żeby $d_{n,m} = a_n b_m$ Oznaczmy przez s_i sumę występującą w kongruencji (3.1) dla ciągu $\{a\}$ i wyrazu a_i, a przez r_i taką samą sumę dla ciągu $\{b\}$. Zauważmy, że:
$\sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j} = \sum_{j|m} \mu(\frac{m}{j})s_n$. A jako, że $n \mid s_n$, to

$$n \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}.$$

Analogicznie, $\sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j} = \sum_{i|n} \mu(\frac{n}{i})r_m$, stąd ta suma jest też podzielna przez m. Tak więc $NWW(n,m) \mid \sum_{i|n,j|m} \mu(\frac{n}{i})\mu(\frac{m}{j})d_{i,j}$, czyli ciąg $\{d\}$ jest dwuwymiarowym ciągiem Dolda. □

Twierdzenie 16. *Nie każdy dwuwymiarowy ciąg Dolda jest iloczynem dwóch ciągów Dolda.*

Dowód. Przykładem dwuwymiarowego ciągu Dolda, który nie jest iloczynem dwóch ciągów jest ciąg postaci $d_{m,n} = reg_x(m) + reg_y(n)$ dla pewnych względnie pierwszych x,y większych od 1.

Zauważmy, że jest to dwuwymiarowy ciąg Dolda, gdyż jest on sumą dwóch dwuwymiarowych ciągów Dolda.
Załóżmy teraz, że ten ciąg jest iloczynem dwóch ciągów Dolda, tzn. istnieją takie ciągi Dolda a, b, że $d_{m,n} = a_m b_n$
Zauważmy teraz, że $d_{x,y} = x + y$, $d_{1,y} = y$, oraz $d_{x,1} = x$. Stąd jako, że $d_{x,y} = a_x b_y$, oraz $d_{x,1} = a_x b_1$, to $a_x \mid d_{x,y}$ i $a_x \mid d_{x,1}$, czyli $a_x \mid x + y$ i $a_x \mid x$, stąd, jako że x, oraz $x + y$ są względnie pierwsze, to $a_x = \pm 1$. Analogicznie, $b_y \mid d_{x,y}$ i $b_y \mid d_{1,y}$, czyli $b_y \mid x + y$ i $b_y \mid y$, czyli $b_y = \pm 1$. Stąd $d_{x,y} = a_x b_y = \pm 1$, co jest sprzeczne z tym, że $d_{x,y} = reg_x(x) + reg_y(y)$. □

Ciągi Dolda mają również duże znaczenie przy badaniu ilości punktów stałych przy n-krotym złożeniu funkcji.

Twierdzenie 17. *Dla dowolnej funkcji* $f\colon X \to X$*, gdzie* X *jest pewnym zbiorem skończonym, ciąg* $\{a\}$*, w którym* $a_n = \#(Fix f^n)$*, czyli* a_n *jest ilością wartości* r *należących do* X *takich, że* $f^n(r) = r$ *jest ciągiem Dolda.* [2]

Twierdzenie 18. *Dla dowolnych funkcji* $f\colon X \to X$*,* $g\colon X \to X$ *gdzie* X *jest pewnym zbiorem skończonym, ciąg dwuwymiarowy* $\{a\}$*, w którym* $a_{n,m}$ *jest ilością par wartości* r, s *należących do* X *takich, że* $f^n(r) = r$*, oraz* $g^m(s) = s$ *jest ciągiem Dolda.*

Dowód. $a_{n,m} = \#Fix(f^n \times g^m) = \#Fix(f^n)\#Fix(g^m)$, czyli jest to iloczyn dwóch ciągów Dolda, stąd jest to dwuwymiarowy ciąg Dolda. □

References

[1] Graff, Grzegorz; Lebiedź, Małgorzata; Nowak-Przygodzki, Piotr "Generating sequences of Lefschetz numbers of iterates", Monatsh. Math. 188 (2019), no.3, 511-525.

[2] Jezierski, Jerzy; Marzantowicz, Wacław, "Homotopy Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory". Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 3. Springer, Dordrecht, 2006.

[3] Leśniak, Anna, "O pewnym uogólnieniu Małego Twierdzenia Fermata" Delta no. 10 (2015).

[4] Steinlein, Heinrich, "Fermat's little theorem and Gauss congruence: matrix versions and cyclic permutations", Amer. Math. Monthly 124 (2017), no. 6, 548-553.

[5] Wójcik, Klaudiusz, "Binomial transform and Dold sequences", J. Integer Seq. 18 (2015), no. 1, Article 15.1.1, 18 pp.