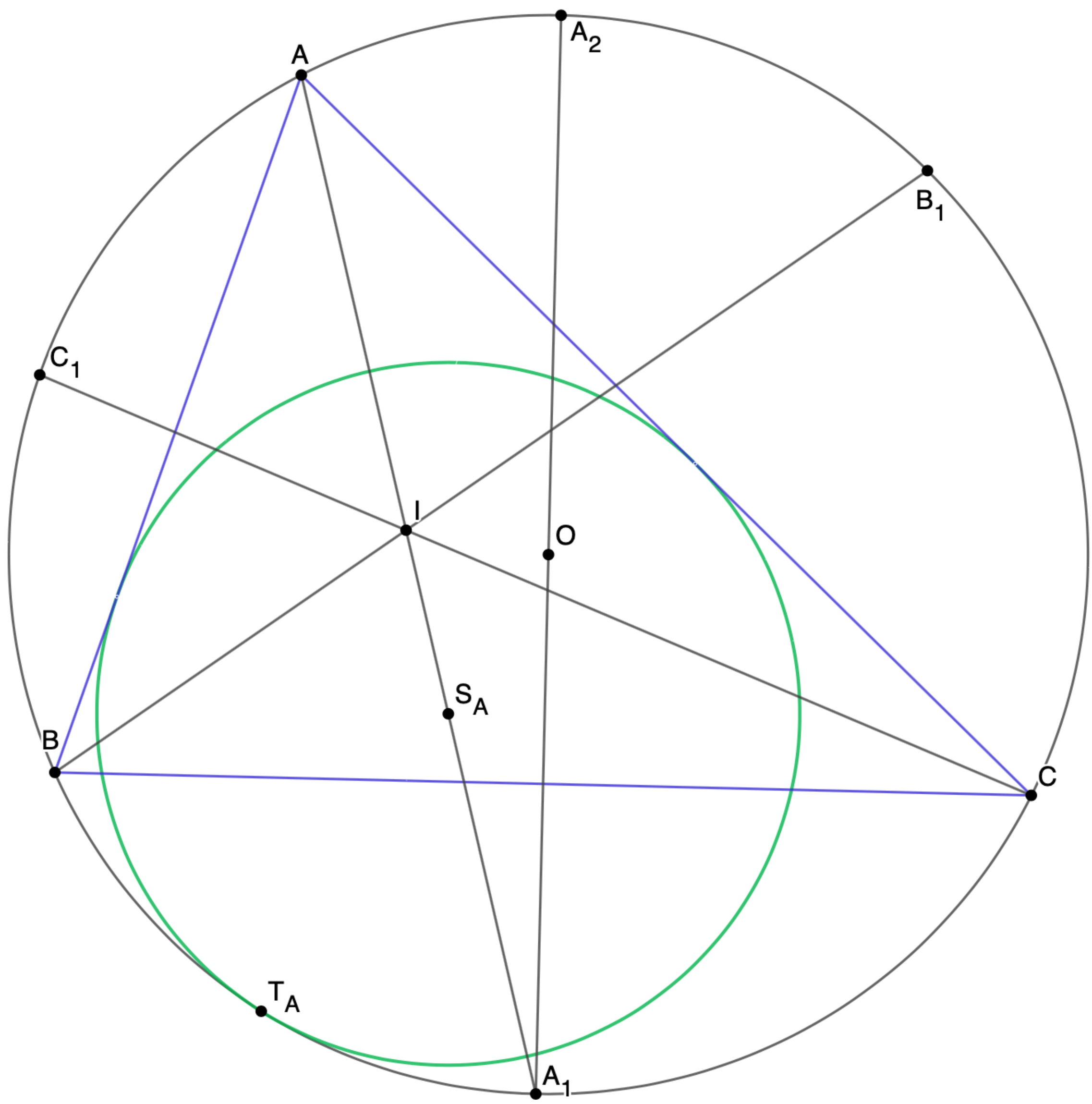
Okrąg mixtilinear i jego własności

Mikołaj Pater



Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie nowych, autorskich wyników dotyczących okręgu *mixtilinear incircle*, zwanego dalej *mixtilinear*. Pojęcie to pojawiło się po raz pierwszy w artykule [3]. Jego autorem jest Leon Bankoff, który będąc z wykształcenia i zawodu stomatologiem leczył wiele znanych gwiazd Hollywood (zob. [1]). Znakomita większość podanych w tej pracy twierdzeń, lematów i wniosków należy do autora niniejszej pracy. Te twierdzenia (lematy), które nie są oryginalne, zostały objęte odniesieniem do bibliografii. Wszystkie podane w tej pracy dowody są także mojego autorstwa. Ewentualne podobieństwo pewnych jej fragmentów do wcześniej opublikowanych wyników jest niezamierzone i może wynikać z niedostatecznego rozpoznania źródeł bibliograficznych.
W pracy będziemy się opierać na następującej definicji i oznaczeniach.

Definicja

Okręgiem A-mixtilinear trójkąta ABC określa się okrąg wpisany w kąt $\angle BAC$ styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Z definicji widać, że punkty styczności okręgu A-mixtilinear z prostymi AB, AC należą do tych boków trójkąta (w przeciwnym razie pewien z punktów styczności leżałby na pewnej z półprostych $AB^{\rightarrow}$, $AC^{\rightarrow}$, poza kołem opisanym na trójkącie ABC, co jest niemożliwe, gdyż okrąg A-mixtilinear zawiera się całkowicie w tym kole jako okrąg styczny do okręgu opisanego na trójkącie).

Oznaczenia

$[ABC]$ - *pole trójkąta ABC*
O - *środek okręgu opisanego o na trójkącie ABC*
I - *środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC*
R - *długość promienia okręgu o*
A_1 - *środek łuku BC okręgu o, nie zawierającego punktu A*
A_2 - *środek łuku BAC okręgu o*
T_A - *punkt styczności okręgu A-mixtilinear z okręgiem o*
S_A - *środek okręgu A-mixtilinear*
E_A - *środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC*
Przyjmujemy także analogiczne oznaczenia dla pozostałych wierzchołków trójkąta ABC.

§ 1. Punkty, proste i okręgi związane z okręgiem A-mixtilinear

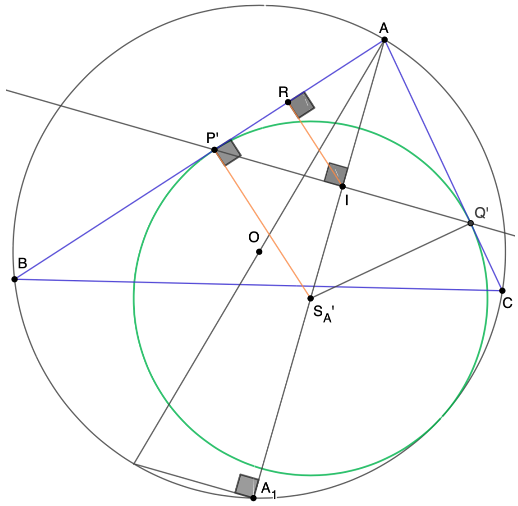
Zaczniemy od wykazania podstawowego twierdzenia, z którym autor spotkał się w [5] na str. 5.
Lemat 1.1
Jeśli $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$, to
$$\cos^2\frac{\angle BAC}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}.$$

Dowód: Z twierdzenia cosinusów
$$\cos\angle BAC = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
więc po zastosowaniu wzoru
$$\cos^2\frac{\angle BAC}{2} = \frac{\cos\angle BAC + 1}{2}$$
otrzymamy tezę.∎

Twierdzenie 1.1

Jeśli $P \in AB$ i $Q \in AC$ są punktami styczności okręgu A-mixtilinear z odpowiednimi bokami trójkąta ABC, to punkt I jest środkiem odcinka PQ.

Twierdzenie 1.1



Dowód: Poprowadźmy przez punkt I prostą prostopadłą do AA_1. Niech P', Q' będą odpowiednio jej punktami przecięcia z prostymi AB, AC. Półprosta $AI^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $\angle BAC$, dlatego punkty P', Q' są symetryczne względem prostej AI. To dowodzi, że istnieje punkt $S'_A \in AI$ taki, że okrąg ω o środku w S'_A jest styczny do półprostych $AB^{\rightarrow}$, $AC^{\rightarrow}$ odpowiednio w punktach P' i Q'. Pokazanie, że okrąg ω jest wewnętrznie styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC będzie implikowało, iż okręgi ω, A-mixtilinear są tożsame (istnieje tylko jeden okrąg mixtilinear wpisany w dany kąt trójkąta) i w konsekwencji $P \in AB$ i $Q \in AC$ skąd wyniknie teza.
Styczność wewnętrzna wymienionych okręgów jest równoważna z warunkiem $S'_AO = OA - P'S'_A$. Oznaczmy przez r długość promienia okręgu wpisanego. Niech R będzie rzutem punktu I na bok AB. Z podobieństwa
$$\Delta S'_AP'A \sim \Delta IRA \ (k,k,k)$$
wynika pierwsza równość
$$\frac{P'S'_A}{r} = \frac{AS'_A}{AI} = \frac{AS'_A}{AP'}\cdot\frac{AP'}{AI} = \frac{1}{\cos\frac{\angle BAC}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\angle BAC}{2}}$$
$$P'S'_A = \frac{r}{\cos^2\frac{\angle BAC}{2}}.$$
Wykorzystując nierówność trójkąta
$$a^2 < a(b+c) \le a(b+c) + 2(b-c)^2 \implies 2(a-b+c)(a+b-c) < a(a+b+c).$$
Druga nierówność jest równoważna
$$\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) < abc\cdot\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}\cdot(a+b+c).$$
Na podstawie wzoru Herona i lematu 1.1 otrzymujemy

$$8[ABC]^2 < abc \cdot \cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot (a+b+c)$$
$$\frac{2[ABC]}{a+b+c} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}} < \frac{abc}{4[ABC]}.$$
Stosując wzór na długość promienia okręgu wpisanego, nierówność przyjmuje postać
$$|P'S'_A| = \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}} < R.$$
W ten sposób uzasadniliśmy równość $R - P'S'_A = |R - P'S'_A|$.
Ponieważ $\angle AP'S'_A = 90°$, to
$$S'_A A = \frac{P'S'_A}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} = \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot \sin \frac{\angle BAC}{2}}$$
Stosujemy twierdzenie cosinusów w trójkącie AOS'_A:
$$S'_A O^2 = AO^2 + S'_A A^2 - 2AO \cdot S'_A A \cdot \cos\angle OAS'_A,$$
$$S'_A O^2 = R^2 + \left(\frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot \sin \frac{\angle BAC}{2}} \right)^2 - 2R \cdot \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot \sin \frac{\angle BAC}{2}} \cdot \cos\angle OAS'_A.$$
Przekształcamy równoważnie równanie, które chcemy wykazać
$$S'_A O = OA - P'S'_A \iff S'_A O = |R - P'S'_A| \iff S'_A O^2 = (R - P'S'_A)^2.$$
Podstawiamy wyprowadzone wyrażenia na $S'_A O^2$ i $P'S'_A$
$$R^2 + \left(\frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot \sin \frac{\angle BAC}{2}} \right)^2 - 2R \cdot \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} \cdot \sin \frac{\angle BAC}{2}} \cdot \cos\angle OAS'_A = \left(R - \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}} \right)^2.$$
Przenosimy odpowiednie wyrażenia z jednej strony na drugą i wyłączamy wspólne czynniki
$$\frac{r^2}{\cos^4 \frac{\angle BAC}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\angle BAC}{2}} - 1 \right) = \frac{2Rr}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}} \left(\frac{\cos\angle OAS'_A}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} - 1 \right).$$
Korzystamy z jedynki trygonometrycznej
$$\frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}}{\sin^2 \frac{\angle BAC}{2}} = 2R \cdot \frac{\cos\angle OAS'_A - \sin \frac{\angle BAC}{2}}{\sin \frac{\angle BAC}{2}}.$$
Skracamy obie strony
$$\frac{r}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} = 2R \cos\angle OAS'_A - 2R \sin \frac{\angle BAC}{2}.$$
Korzystając z definicji sinusa w ΔARI
$$\sin \frac{\angle BAC}{2} = \frac{r}{AI}$$
oraz z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnej AA_1
$$\cos\angle S'_A AO = \frac{AA_1}{2R}$$
i twierdzenia sinusów na łuku CA_1
$$\frac{CA_1}{2R} = \sin \frac{\angle BAC}{2}$$
otrzymujemy
$$AI = \frac{r}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} = 2R \cos\angle OAS'_A - 2R \sin \frac{\angle BAC}{2} = AA_1 - CA_1.$$
Ale ta równość jest prawdziwa, gdyż z lematu o trójliściu
$$AA_1 - CA_1 = AA_1 - A_1 I = AI.\blacksquare$$

Wniosek 1.1.1
Jeśli długość promienia okręgu wpisanego wynosi r, zaś P jest punktem styczności okręgu A-mixtilinear z odcinkiem AB, to promień tego okręgu ma długość $PS_A = \dfrac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}}$.

Wniosek 1.1.2
Ponieważ każdy z okręgów mixtilinear zawiera się w kole opisanym na trójkącie ABC, to możemy wzmocnić nierówność Eulera do postaci

$$R \geq \max \left\{ 2r, \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle BAC}{2}}, \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle ABC}{2}}, \frac{r}{\cos^2 \frac{\angle ACB}{2}} \right\}$$

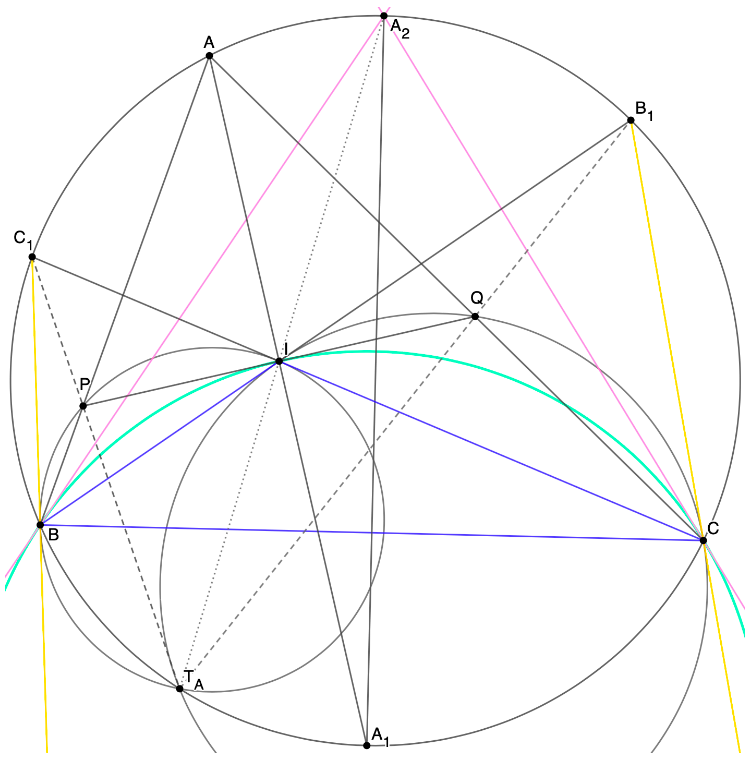
z równością wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Wniosek 1.1.3
Konstrukcja okręgu A-mixtilinear: znaleźć środek okręgu wpisanego I w trójkąt ABC; wyznaczyć punkt przecięcia P prostej prostopadłej do AI przechodzącej przez I z odcinkiem AB; wyznaczyć punkt przecięcia S_A prostej prostopadłej do AB zawierającej punkt P z prostą AI; wykreślić okrąg o środku S_A i promieniu PS_A.

Twierdzenie 1.2 (zob. [6])

Punkty T_A, I, A_2 leżą na symedianie trójkąta BIC. Co więcej, styczne do okręgu opisanego na tym trójkącie w punktach B oraz C przecinają się w punkcie A_2.

Twierdzenie 1.2 - 1.5



Dowód: Na mocy lematu o trójliściu $A_1I = BA_1 = CA_1$, więc punkt A_1 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BIC. Punkty A_1, A_2 są końcami średnicy okręgu o jako środki dwóch różnych łuków BC. Stąd $\angle A_1BA_2 = 90^\circ$ co oznacza, że prosta A_2B jest styczna do okręgu przechodzącego przez punkty B, I, C. Analogicznie dowodzimy, że prosta A_2C jest styczna do tego okręgu. Wobec tego prosta A_2I jest symedianą w trójkącie BIC.
Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Na mocy twierdzenia 1.1 punkt I jest środkiem odcinka PQ. Wspomagając się twierdzeniem o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$AP = AQ \iff \angle APQ = \angle AQP = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} \iff \angle BPI = \angle CQI = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.$$

(∗) Niech punkt $T'_A \neq I$ będzie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BPI oraz CQI. Gdyby punkt T'_A leżał po tej samej stronie prostej BC co punkt A, to $180^\circ < \angle BT'_AI + \angle CT'_AI$. Ale to jest niemożliwe, ponieważ

$$\angle BT'_AI = 180^\circ - \angle BPI = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} < 90^\circ \wedge \angle CT'_AI = 180^\circ - \angle CPI = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} < 90^\circ.$$

Mamy więc równość

$$\angle BT'_A C = \angle BT'_A I + \angle CT'_A I = 180^\circ - \angle BAC,$$

przy czym punkty T'_A, A leżą po przeciwnych stronach prostej BC, więc zapisana równość kątów oznacza $T'_A \in o$.

Mamy zatem

$$\angle BT'_A A_2 = \angle BCA_2 = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = \angle APQ = 180^\circ - \angle BPI = \angle BT'_A I,$$

ale punkty A_2, I leżą po tej samej stronie prostej BC, czyli także prostej BT_A, więc powyższa równość kątów dowodzi współliniowość punktów T'_A, I, A_2.

Z twierdzenia o kątach wpisanych i własności dwusiecznej

$$\angle IT'_A P = \angle IBP = \frac{\angle ABC}{2} \wedge \angle IT'_A Q = \angle ICQ = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Jednak

$$\angle PT'_A Q = \angle IT'_A P + \angle IT'_A Q = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \angle APQ = \angle AQP$$

co po uwzględnieniu twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą oznacza, że okrąg opisany na trójkącie PQT'_A jest styczny do prostych AB, AC odpowiednio w punktach P i Q. Istnieje dokładnie jeden okrąg styczny do prostych AB, AC w tych punktach, więc musi nim być okrąg A-mixtilinear. Skoro T'_A leży zarówno na nim jak i na okręgu o, to $T_A = T'_A$, więc punkty T_A, I, A_2 rzeczywiście leżą na jednej prostej.∎

Warto odnotować, że w powyższej konfiguracji prosta PQ jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie BIC w punkcie I, gdyż $\angle PIA_1 = 90^\circ = \angle QIA_1$.

Śledząc uważnie dowód twierdzenia 1.2 dochodzimy do następujących dwóch twierdzeń:

Twierdzenie 1.3

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Wtedy

I. na czworokątach wypukłych BT_AIP, CT_AIQ można opisać okrąg,

II. proste CC_1, BB_1 są styczne do odpowiednich okręgów w punkcie I.

Dowód I: Z (⊛) w dowodzie twierdzenia 1.2 wiemy, że na czworokątach BT'_AIP, CT'_AIQ można opisać okrąg, co po uwzględnieniu końcowego wniosku $T_A = T'_A$ pozwala stwierdzić, że czworokąty wypukłe BT_AIP, CT_AIQ są wpisane w okręgi.∎

Dowód II: Wykazaliśmy wcześniej także

$$\angle BPI = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle BIC,$$

więc korzystając z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą otrzymujemy, iż prosta CC_1 jest styczna w punkcie I do okręgu opisanego na czworokącie BT_AIP. Analogiczna równość

$$\angle BQI = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle BIC$$

dowodzi, że prosta BB_1 jest styczna w punkcie I do okręgu opisanego na czworokącie CT_AIQ.∎

Twierdzenie 1.4 (zob. [9], str. 5)

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Wtedy trójki punktów T_A, P, C_1 oraz T_A, Q, B_1 są współliniowe w tej kolejności.

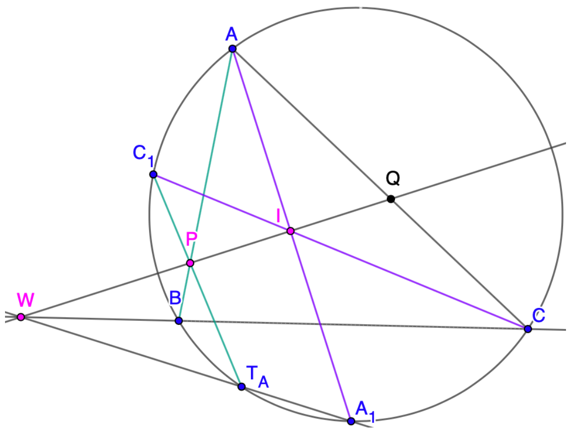
Dowód: Jak widać w dowodzie twierdzenia 1.2 zachodzą równości

$$\angle BT'_A P = \angle BIP = 180^\circ - \angle BPI - \angle PBI = 90^\circ - \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle BCC_1,$$

przy czym pierwsza równość wynika z okręgu opisanego na czworokącie BT'_AIP, a ostatnia równość jest bezpośrednią konsekwencją własności dwusiecznej $C\vec{C_1}$. Skoro $T_A = T'_A$ i punkty B, T_A, C, C_1 leżą w tej kolejności na jednym okręgu to

$$\angle BT_AC_1 = \angle BCC_1 = \angle BT'_AP = \angle BT_AP.$$

Punkty P i C_1 leżą po tej samej stronie prostej BT_A, więc punkty T_A, P, C_1 leżą na jednej prostej w tym porządku.
Dowód dla trójki punktów T_A, Q, B_1 jest analogiczny.∎



Twierdzenie 1.6

Twierdzenie 1.5

Proste BC_1, CB_1 są styczne odpowiednio do okręgów opisanych na trójkątach BT_AI, CT_AI.

Dowód: Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Korzystając z twierdzenia 1.3 wystarczy wykazać, styczność prostych BC_1, CB_1 odpowiednio do okręgów opisanych na trójkątach BT_AP, CT_AQ.

Twierdzenie 1.6

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Jeśli $AB \neq AC$, to proste PQ, BC, T_AA_1 są współpękowe, a w przeciwnym razie są równoległe.

Dowód: Jeśli $AB = AC$, to każda z prostych PQ, BC, T_AA_1 (czyli styczna do okręgu o w punkcie $A_1 = T_A$) jest prostopadła do prostej AA_1. Przyjmijmy teraz $AB \neq AC$. Wtedy każde dwie z tych prostych mają punkt przecięcia. Oznaczmy

$$\{W\} = T_AA_1 \cap BC.$$

Na mocy twierdzenia Pascala zastosowanego do sześciokąta $BAA_1T_AC_1C$ stwierdzamy, że punkty zawarte w zbiorach

$$\{P\} = AB \cap T_AC_1,\ \{I\} = AA_1 \cap C_1C,\ \{W\} = A_1T_A \cap BC$$

leżą na jednej prostej, przy czym pierwsze równanie wynika z twierdzenia 1.4, a druga z własności środka okręgu wpisanego (punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta). Jednak z twierdzenia 1.2 proste PI, PQ są tożsame. Zatem

$$W \in PQ \land W \in T_AA_1 \land W \in BC.$$∎

Lemat 1.2
Zachodzą równości

$$\angle A_2CC_1 = \angle ABB_1,\ \angle A_2BB_1 = \angle ACC_1.$$

Dowód: Wykażemy pierwszą równość, zaś druga wynika bezpośrednio z pierwszej przez odjęcie lub dodanie równania $\angle ACA_2 = \angle ABA_2$ stronami. Przyjmijmy bez straty ogólności $AB \leq AC$ (dowód w przeciwnym przypadku jest analogiczny). Wtedy

$$\angle ACA_2 = \angle BCA_2 - \angle BCA = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} - \angle BCA = \frac{\angle ABC - \angle BCA}{2}.$$

Zatem

$$\angle A_2CC_1 = \angle ACC_1 + \angle ACA_2 = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABB_1.$$∎

Twierdzenie 1.7

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Niech $R \neq T_A$ będzie punktem przecięcia prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear. Wtedy

$$PR || BI \text{ oraz } QR || CI.$$

Dowód: Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą $\angle ADP = \angle DT_A P$. Założenie o współliniowości T_A, I, A_2 oraz twierdzenie 1.2 dają $\angle DT_A P = \angle C_1 T_A A_2$. Z lematu 1.2 wnioskujemy, że

$$\angle C_1 T_A A_2 = \angle C_1 C A_2 = \angle ABB_1 = \angle ABI.$$

Otrzymane równości dowodzą

$$\angle APR = \angle ABI,$$

co jest równoważne z

$$PR || BI.$$

Analogicznie dowodzimy, że $QR || CI$.∎

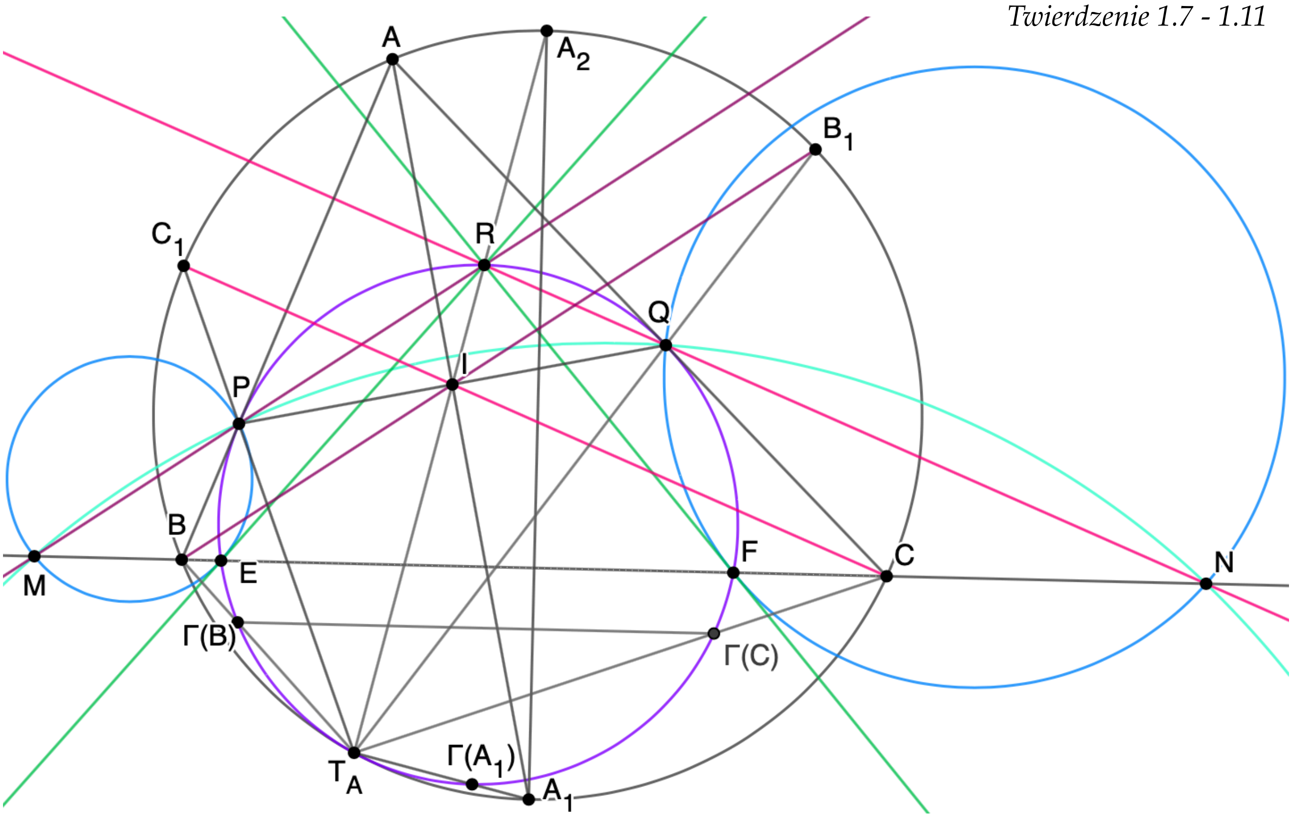
Wniosek 1.7

Jeśli oznaczymy $\{M\} = PR \cap BC$, to $BP = BM$.

Dowód:

$$PR || BI \implies \angle MPB = \angle ABI = \frac{180^\circ - \angle MBP}{2} = \frac{\angle MPB + \angle PMB}{2} \implies BP = BM.∎$$

Twierdzenie 1.7 - 1.11



Twierdzenie 1.8

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia tego okręgu z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Niech $R \neq T_A$ będzie punktem przecięcia prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear, $\{M\} = PR \cap BC$

oraz $\{N\} = QR \cap BC$. *Wtedy prosta* ER *jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie* EPM *oraz prosta* FR *jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie* FQN.

Dowód: Na mocy twierdzenia o kątach wpisanych i współliniowości trójek punktów T_A, R, A_2 (założenie) oraz T_A, P, C_1 (z twierdzenia 1.2) otrzymujemy, że

$$\angle PER = \angle PT_AR = \angle C_1T_AA_2 = \angle C_1CA_2.$$

Na mocy lematu 1.2

$$\angle C_1CA_2 = \angle ABB_1 = \angle ABI = \angle CBI.$$

Z kolei wobec $PR||BI$ (twierdzenie 1.7) mamy

$$\angle CBI = \angle EMP.$$

Łącząc otrzymane równości i wykorzystując twierdzenie o stycznej i cięciwie otrzymujemy

$$\angle PER = \angle EMP,$$

więc prosta ER jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie EPM.
Drugą część tezy uzasadniamy analogicznie.∎

Twierdzenie 1.9

Niech $R \neq T_A$ *będzie punktem przecięcia prostej* T_AA_2 *z okręgiem* A*-mixtilinear. Oznaczmy przez* E, F *punkty przecięcia tego okręgu z odcinkiem* BC *przy czym* $BE < BF$. *Wtedy* $RE = RF$.

Dowód: Okręgi o i A-mixtilinear są wewnętrznie styczne, więc istnieje jednokładność Γ o środku w punkcie T_A, przekształcająca okrąg o na okrąg A-mixtilinear. Dla każdego punktu płaszczyzny X przyjmujemy, że jego obrazem w tej jednokładności jest punkt $\Gamma(X)$. Ponieważ $B, C \in o$ to punkty $\Gamma(B), \Gamma(C)$ leżą na okręgu A-mixtilinear i z własności jednokładności $BC||\Gamma(B)\Gamma(C)$, czyli $EF||\Gamma(B)\Gamma(C)$. Wobec tego łuki $\widehat{E\Gamma(B)}, \widehat{F\Gamma(C)}$ nie zawierające punktu R mają tę samą długość. Współliniowość punktów T_A, R, A_2 implikuje $R = \Gamma(A_2)$, więc skoro łuki A_2B, A_2C nie zawierające punktu T_A są tej samej długości, to ta cecha dotyczy także łuków $\widehat{R\Gamma(B)}, \widehat{R\Gamma(C)}$, do których nie należy T_A. Czyli

$$\widehat{RE} = \widehat{R\Gamma(B)} - \widehat{E\Gamma(B)} = \widehat{R\Gamma(C)} - \widehat{F\Gamma(C)} = \widehat{RF}.\blacksquare$$

Wniosek 1.9.1

Punkty $\Gamma(B), \Gamma(C)$ można równoważnie zdefiniować jako odpowiednio przecięcia odcinków BT_A, CT_A z okręgiem A-mixtilinear. Rozważana jednokładność Γ prowadzi do ciekawych równoległości: $R\Gamma(B)||BA_2$, $R\Gamma(C)||CA_2$, $BB_1||\Gamma(B)Q$, $CC_1||\Gamma(C)P$, $PR||C_1A_2$, $QR||B_1A_2$, $PQ||C_1B_1$ i wielu innych. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt A_2 jest styczna do okręgu o, więc prosta równoległa do prostej $\Gamma(B)\Gamma(C)$ przechodząca przez punkt R jest styczna do okręgu A-mixtilinear. Innymi słowy styczna do okręgu A-mixtilinear w punkcie R jest równoległa do prostej BC.

Wniosek 1.9.2

Punkt $\Gamma\left(A_1\right)$, będący przecięciem odcinka T_AA_1 z okręgiem A-mixtilinear, jest środkiem łuku EF tego okręgu, leżącego naprzeciw punktu A.

Dowód: Odcinek A_1A_2 jest średnicą okręgu o, więc po rozpatrzeniu jednokładności Γ odcinek $R\Gamma\left(A_1\right)$ jest średnicą okręgu A-mixtilinear. Co więcej

$$A_1A_2 \perp BC \implies R\Gamma\left(A_1\right) \perp \Gamma(B)\Gamma(C)||BC.$$

Dlatego

$$R\Gamma\left(A_1\right) \perp EF.$$

Ponieważ $RE = RF$ to otrzymujemy tezę.∎

Twierdzenie 1.10

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear oraz $\{M\} = PR \cap BC \wedge \{N\} = QR \cap BC$. Wtedy na czworokącie $MPQN$ można opisać okrąg.

Wyprowadzone wcześniej rezultaty pozwalają przeprowadzić dowód dwoma sposobami.
Sposób I: Korzystając z twierdzenia 1.8 otrzymujemy

$$RM \cdot RP = RE^2 \wedge RN \cdot RQ = RF^2.$$

Ale z twierdzenia 1.9

$$RE = RF \iff RM \cdot RP = RN \cdot RQ$$

co wobec współliniowości trójek punktów (z założenia) M, P, R oraz N, Q, R dowodzi, że czworokąt $MPQN$ można wpisać w okrąg.∎
Sposób II: Na mocy twierdzenia 1.7

$$\angle APR = \angle ABI \wedge \angle MNQ = \angle BCI$$

dlatego

$$\angle RPQ = \angle APQ - \angle ABI = \frac{\angle ACB}{2} = \angle BCI = \angle MNE.$$

A stąd wynika

$$\angle MPQ + \angle MNQ = 180°.$$

Punkty P, N leżą po przeciwnych stronach prostej MQ, więc na czworokącie wypukłym $MNQP$ można opisać okrąg.∎

Twierdzenie 1.11

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkty przecięcia tego okręgu z odcinkiem BC oznaczono przez E, F przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear, $\{M\} = PR \cap BC$ oraz $\{N\} = QR \cap BC$. Wtedy proste RE, RF są styczne odpowiednio do okręgów opisanych na trójkątach NQE, MPF.

Dowód: Na mocy twierdzenia 1.8 otrzymujemy

$$\angle PMF = \angle PME = \angle PER.$$

Z twierdzenia o kątach wpisanych

$$\angle PER = \angle PFR.$$

Ostatecznie otrzymujemy równość

$$\angle PMF = \angle PFR,$$

która świadczy, że prosta RF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie MPF.
Drugą część tezy dowodzimy analogicznie.∎

Twierdzenie 1.12

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkty przecięcia tego okręgu z odcinkiem BC oznaczono przez E, F przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear oraz $\{M\} = PR \cap BC$ oraz $\{N\} = QR \cap BC$. Niech D i G będą odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach MEP i NFQ. Jeśli $AB \neq AC$, to punkty W, D, G leżą na jednej prostej, gdzie $\{W\} = PQ \cap BC$, a w przeciwnym przypadku $DG || BC$.

Dowód: Gdy $AB = AC$, to punkty D i G są symetryczne względem prostej $A_1A_2 \perp BC$. Niech dalej $AB \neq AC$. Oznaczmy przez $X \neq Q$ punkt przecięcia prostej PQ z okręgiem opisanym na trójkącie NFQ. Mamy kolejno równość kątów wpisanych i wierzchołkowych

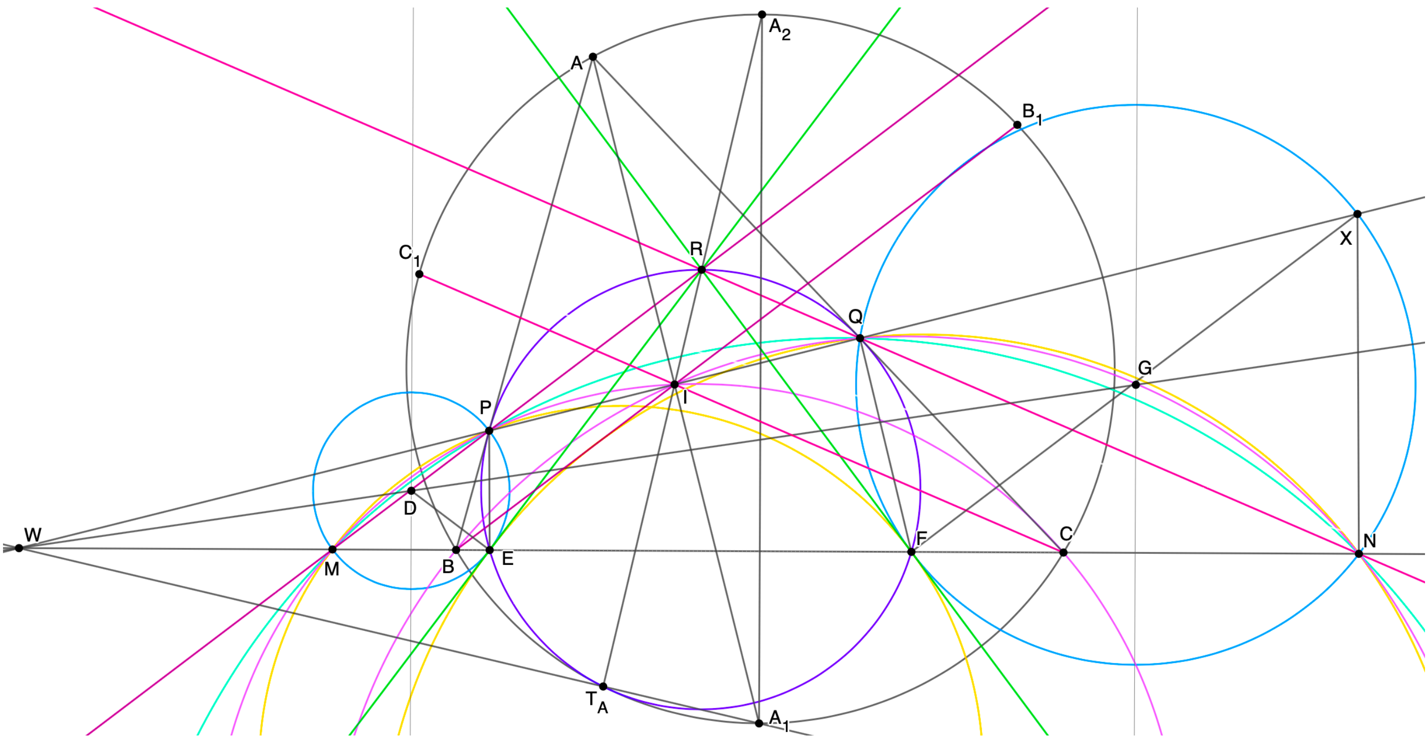
$$\angle XFN = \angle XQN = \angle RQP.$$

Na mocy twierdzenia 1.10
$$\angle RQP = \angle RMN = \angle PME.$$
Na czworokącie $PQFE$ jest opisany okrąg, więc
$$\angle MEP = \angle PQF = 180^{\circ} - \angle XQF = \angle XNF.$$
Otrzymane dwie równości
$$\angle XFN = \angle PME \text{ i } \angle XNF = \angle MEP$$
dowodzą, że
$$\Delta XFN \sim \Delta PME\ (k,k,k) \text{ w tej samej orientacji.}$$
Jednak punkty W, P, Q, X są współliniowe, a także na jednej prostej leżą W, M, E, F, N. W takim razie istnieje jednokładność o środku w punkcie W, przekształcająca trójkąt XFN na PME. To dowodzi, że okrąg opisany na trójkącie XFN przechodzi na okrąg opisany na trójkącie PME. Dlatego ich środki leżą na prostej przechodzącej przez środek jednokładności W.∎

Twierdzenie 1.13

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear, $\{M\} = PR \cap BC$ oraz $\{N\} = QR \cap BC$. Wtedy na każdym z czworokątów $MPIC, NQIB$ można opisać okrąg.

Twierdzenie 1.12 - 1.14



Dowód: Na mocy twierdzenia 1.7
$$QR || CI \implies \angle MNQ = \angle MCI.$$
Wykorzystując twierdzenie 1.10 mamy
$$\angle MPI = \angle MPQ = 180^{\circ} - \angle MNQ = 180^{\circ} - \angle MCI.$$
Skoro punkty C, P leżą po przeciwnych stronach prostej MI to powyższa równość dowodzi, że na czworokącie $MPIC$ można opisać okrąg.
Analogicznie dowodzimy dla czworokąta $NQIB$.∎

Twierdzenie 1.14

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z okręgiem A-mixtilinear, $\{M\} = PR \cap BC$ oraz $\{N\} = QR \cap BC$. Wtedy oś potęgowa każdych dwóch okręgów spośród okręgów opisanych na wielokątach $MPIC$, $NQIB$, NQE, MPF, $MPQN$, EPM, FQN przechodzi przez punkt R.

Dowód: Punkty R, P, M i R, Q, N są z założenia współliniowe. Ponadto wszystkie z wypisanych okręgów zawierają parę punktów P, M lub Q, N. Ponieważ na czworokącie $MPQN$ można opisać okrąg (twierdzenie 1.10), to

$$RM \cdot RP = RQ \cdot RN.$$

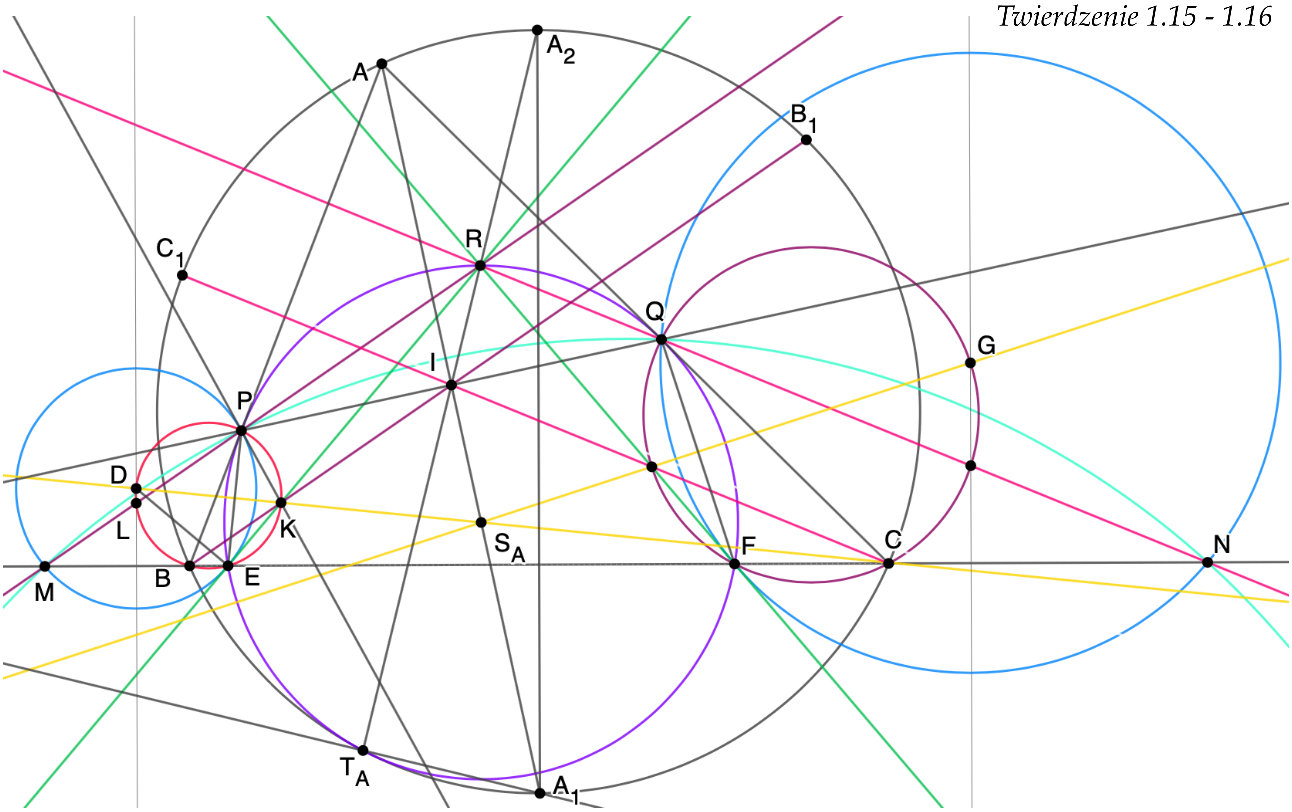
To dowodzi, że potęga punktu P względem każdych dwóch wymienionych okręgów jest równa, skąd wynika teza po uwzględnieniu definicji osi potęgowej.∎

Powyższy rezultat jest szczególnie interesujący po zastosowaniu go do okręgów opisanych na czworokątach $MPIC$ oraz $NQIB$ - prosta T_AI przechodzi przez oba punkty przecięcia tych okręgów.

Twierdzenie 1.15

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem oraz $\{M\} = PR \cap BC$. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Niech punkt L będzie przecięciem symetralnej odcinka ME z prostą MR. Punkt D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie MPE oraz $\{K\} = ER \cap BI$. Wtedy punkty B, D, E, K, L, P leżą na okręgu o średnicy DK oraz $K \in DS_A$. Ponadto punkty P i E są symetryczne względem prostej DK.

Twierdzenie 1.15 - 1.16



Dowód: Punkt L leży na symetralnej odcinka ME, tzn. $ML = EL$, skąd

$$\angle ELP = 2\angle EMP.$$

Ale z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym
$$2\angle EMP = \angle EDP.$$
Z równoległości prostych PR i BI (twierdzenie 1.7) wynika, że
$$2\angle EMP = 2\angle CBI = \angle PBE < 180^\circ.$$
Tak więc
$$\angle ELP = \angle EDP = \angle PBE = 2\angle EMP.$$
Skoro
$$\angle EMP = \angle CBI < 90^\circ,$$
to punkty D i M leżą po tej samej stronie prostej PE. Tak więc punkty B, D, L leżą po tej samej stronie prostej PE i powyższa równość dowodzi współokręgowości B, D, E, L, P. Niech K' będzie punktem antypodycznym do D (innymi słowy odcinek DK' jest średnicą okręgu wyznaczonego przez punkty B, D, E). Na mocy twierdzenia 1.11
$$\angle DER = 90^\circ = \angle DEK',$$
więc
$$K' \in ER.$$
Pamiętamy z definicji środka okręgu opisanego $DE = DP$, więc K' jest środkiem łuku PE nie zawierającego punktu D. To oznacza
$$\angle PBK' = \angle EBK',$$
co po uwzględnieniu definicji dwusiecznej $BI^{\rightarrow}$ oznacza
$$K' \in BI.$$
W takim razie
$$K' = K.$$
Skoro K jest środkiem łuku PE, to leży na symetralnej odcinka PE, który jest wspólną cięciwą okręgu opisanego na trójkącie MPE i okręgu A-mixtilinear, czyli leży na prostej DS_A łączącej ich środki.
Jak zapisano powyżej
$$PK = EK \wedge DE = DP,$$
więc ostatnia część tezy została również uzasadniona.∎
Podobne twierdzenie zachodzi dla okręgu opisanego na trójkącie CQF, gdyż jest to analogiczna konstrukcja, tylko z zamienionymi wierzchołkami B i C oraz powiązanymi z nimi punktami.

Twierdzenie 1.16

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, $\{M\} = PR \cap BC$ oraz $\{K\} = ER \cap BI$. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Wtedy proste KE, KP są styczne do okręgu opisanego na trójkącie MPE.

Dowód: Na mocy twierdzenia 1.15 $\angle DEK = 90^\circ$, gdzie D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie MPE, więc prosta KE jest do niego styczna. To samo twierdzenie oznajmia, że punkty P i E (oba przynależne do tego okręgu) są symetryczne względem prostej DK (przechodzącej przez środek okręgu). Jeśli więc prosta KE jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie MPE, to prosta KP również.∎

Twierdzenie 1.17

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$, zaś jego styczna w punkcie R przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach G i G'. Ponadto

$\{V\} = AI \cap QR$, $\{U\} = BI \cap RF$, $\{K\} = ER \cap BI$ *oraz* $\{H\} = G'S_A \cap PQ$. *Wtedy punkty* G, H, P, K, S_A, V, R, U *leżą na okręgu o średnicy* GS_A.

Dowód: Przyjmijmy bez straty ogólności $AB \le AC$. Uzasadnienie w przeciwnym przypadku będzie podobne - różnice zasygnalizujemy w dalszej części. Niech ω będzie okręgiem o średnicy GS_A. Proste GR, GP są styczne do okręgu A-mixtilinear o środku S_A

$$\angle GRS_A = 90^\circ = \angle GPS_A$$

przez co

$$P \in \omega \wedge R \in \omega.$$

Na mocy wniosku 1.9.1 proste GR i BC są równoległe, dlatego

$$\angle PGR = 180^\circ - \angle ABC.$$

Punkty S_A i G leżą po przeciwnych stronach prostej PR ,więc

$$\angle PS_AR = 180^\circ - \angle PGR = \angle ABC.$$

Z twierdzenia 1.15

$$\angle PKR = 180^\circ - \angle PKE = \angle EBP = \angle ABC = \angle PS_AR.$$

Ale punkty K, S_A leżą po tej samej stronie prostej PR, dlatego

$$K \in \omega.$$

Równoległość $QR || CI$ wynikająca z twierdzenia 1.7 implikuje

$$\angle S_AVR = 180^\circ - \angle AIC = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}.$$

Ponadto z twierdzenia 1.15. dostajemy

$$\angle S_AKR = \angle DKE \text{ (kąty wierzchołkowe)},$$
$$\angle DKE = \angle DPE \text{ (kąty wpisane)},$$
$$\angle DPE = 90^\circ - \frac{\angle EDP}{2} \text{ (trójkąt równoramienny } EDP\text{)},$$
$$\angle EDP = \angle EBP = \angle ABC \text{ (kąty wpisane)}.$$

Łącząc otrzymane równości mamy

$$\angle S_AVR = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = \angle S_AKR.$$

Punkty K, V leżą po tej samej stronie prostej S_AR, więc

$$V \in \omega.$$

Ta część w przypadku $AB > AC$ wyglądałaby w skrócie następująco:

$$QR || CI \implies \angle S_AVR = \angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2} = 180^\circ - \angle S_AKR$$

a skoro punkty K, V leżą po przeciwnej stronie prostej S_AR, to $V \in \omega$. Czytelnik może to sobie lepiej uzmysłowić, patrząc na okrąg o średnicy $G'S_A$ zaznaczony na fioletowo, przerywanymi łukami, traktując punkt C jakby był punktem B.

Korzystając z sumy kątów w trójkącie RUK

$$\angle RUK = 180^\circ - \angle ERF - \angle BKE.$$

Punkty K, P, G, R leżą w tej kolejności na okręgu ω, więc

$$\angle RGK = \angle RGP - \angle PGK = \angle RGP - \angle PRK = \angle PKE - \angle PRK.$$

Z twierdzenia 1.7 $PR || BI$, dlatego

$$\angle PRK = \angle RKU = \angle BKE.$$

Tak więc

$$\angle RUK + \angle RGK = 180^\circ - \angle ERF - 2\angle BKE + \angle PKE.$$

Jednak twierdzenie 1.9 oznajmia $RE = RF$, skąd

$$\angle ERF = 180^\circ - 2\angle REF = 2\angle BEK - 180^\circ$$

Korzystając dodatkowo z sumy kątów w trójkącie BEK otrzymujemy

$$\angle ERF + 2\angle BKE = 2(\angle BEK + \angle BKE) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle KBE.$$

Punkty B, D, E, K, P leżą na okręgu o średnicy DK (twierdzenie 1.15), zatem

$$180^\circ - 2\angle KBE = 2(90^\circ - \angle KDE) = 2\angle DKE,$$

zaś z symetrii punktów E, P względem prostej DK wynika

$$2\angle DKE = \angle PKE.$$

Łącząc otrzymane równości mamy

$$\angle RUK + \angle RGK = 180^\circ,$$

co wobec położenia punktów G i U po przeciwnej stronie prostej KR daje

$$U \in \omega.$$

Na mocy wniosku 1.9.1 $RG'||BC \wedge RG||BC$, dlatego

$$\angle GG'C = 180^\circ - \angle ACB \wedge \angle BGG' = 180^\circ - \angle ABC.$$

Ponieważ proste $PG, GR, G'R$ i $G'Q$ są styczne do okręgu wpisanego w okrąg A-mixtilinear, to

$$\angle HG'Q = \angle S_A'G'Q = \frac{1}{2}\angle GG'C = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$$

oraz

$$\angle PGS_A = \frac{\angle BGG'}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}.$$

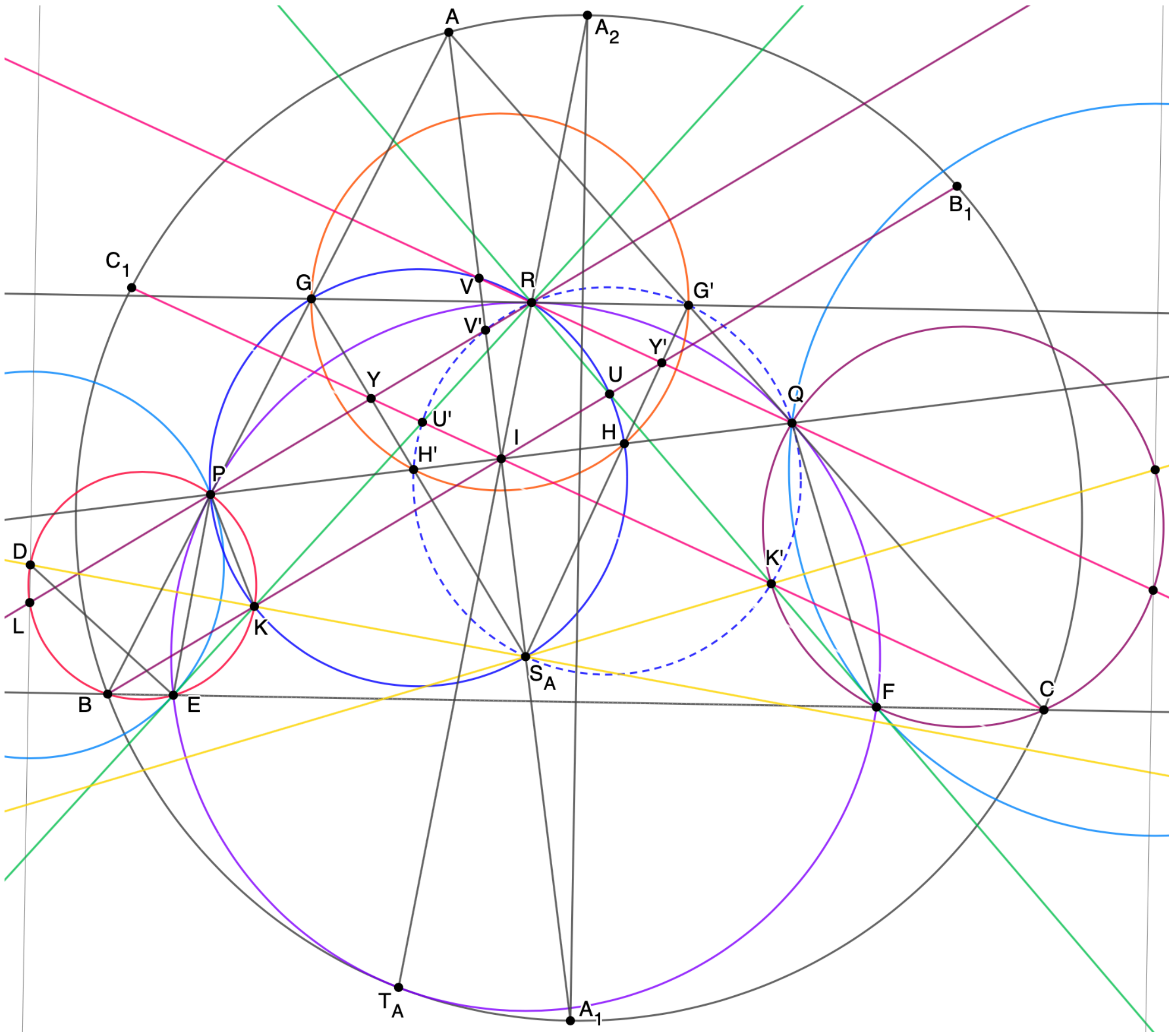
Z kolei twierdzenie 1.1 daje

$$\angle HQG' = \angle AQI = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}.$$

Przez sumę kątów w trójkącie $HG'Q$ i równość kątów wierzchołkowych otrzymujemy

$$\angle PHS_A = \angle G'HQ = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = \angle PGS_A \implies H \in \omega. \blacksquare$$

Twierdzenie 1.17 - 1.21



Twierdzenie 1.18

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$, zaś jego styczna w punkcie R przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach G i G'. Ponadto $\{H'\} = GS_A \cap PQ$ oraz $\{H\} = G'S_A \cap PQ$. Wtedy proste $GH, G'H', S_AR$ zawierają wysokości trójkąta GS_AG'.

Dowód: Na mocy poprzedniego twierdzenia

$$\angle GHG' = 180^\circ - \angle GHS_A = 90^\circ \implies GH \perp G'S_A.$$

Analogicznie dowodzimy

$$G'H' \perp GS_A.$$

Prosta GG' jest styczna do okręgu A-mixtilinear w punkcie R, więc

$$S_AR \perp GG'.\blacksquare$$

Wniosek 1.18

Na czworokącie $GH'HG'$ można opisać okrąg o średnicy GG'.

Twierdzenie 1.19

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś jego styczna w punkcie R przecina bok AB w punkcie G. Ponadto $\{U\} = BI \cap RF$ oraz $\{K\} = ER \cap BI$. Wtedy punkty P, K są odpowiednio obrazami punktów R, U w symetrii względem prostej GS_A.

Dowód: Proste GP, GR są styczne do okręgu o środku S_A i promieniu długości $PS_A = RS_A$, więc punkty P i R są symetryczne względem prostej GS_A. To znaczy, że prosta GS_A jest symetralną odcinka PR. Punkty P, R, K, U leżą na jednym okręgu (twierdzenie 1.18.) co po skonsultowaniu z $PR || KU$ (twierdzenie 1.7) wskazuje, że czworokąt $RPKU$ jest trapezem równoramiennym. Symetralna odcinka PR jest więc symetralną odcinka KU. To pozwala stwierdzić symetrię punktów K, U względem prostej GS_A.$\blacksquare$

Twierdzenie 1.20

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś jego styczna w punkcie R przecina bok AB w punkcie G. Niech Y będzie środkiem odcinka PR. Wtedy $CI \cap GS_A = \{Y\}$.

Dowód: Z poprzedniego twierdzenia wynika wprost po uwzględnieniu własności symetrii $Y \in GS_A$. Z twierdzenia 1.1 widzimy, że odcinek IY jest linią środkową w trójkącie RPQ, przez co $IY || RQ$. Ale $CI || RQ$ (twierdzenie 1.7), więc $Y \in CI$. Gdyby proste CI, GS_A miały więcej niż jeden punkt przecięcia, to $S_A \in CI$, lecz z definicji okręgu wpisanego w kąt $S_A \in AI$, czyli oznaczałoby to $S_A = I$ co jest niemożliwe. Wobec tego $CI \cap GS_A = \{Y\}$.$\blacksquare$

Twierdzenie 1.21

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś jego styczna w punkcie R przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach G i G'. Ponadto $\{H\} = G'S_A \cap PQ$. Wtedy $GH || CI$.

Dowód: Proste $G'R, CG'$ są styczne do okręgu o środku S_A, więc z wniosku 1.9.1

$$\angle S_A G'C = 90^\circ - \frac{\angle GG'A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}.$$

Zatem zachodzi równość

$$\angle S_A G'C + \angle G'CI = 90^\circ,$$

skąd wynika

$$CI \perp G'S_A.$$

Ponieważ

$$GH \perp G'S_A \text{ (twierdzenie 1.18)},$$

więc rzeczywiście

$$GH || CI. \blacksquare$$

Twierdzenie 1.22

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Oznaczmy przez E, F jego punkty przecięcia z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z tym okręgiem, punkt S jest rzutem prostokątnym punktu S_A na odcinek BC, $\{U\} = BI \cap RF$, $\{K\} = ER \cap BI$ oraz L jest środkiem odcinka KU. Prosta BX jest styczna w punkcie $X \neq P$ do okręgu A-mixtilinear oraz $\{Z\} = AI \cap QX$. Wtedy punkty X, S, Z, L, P leżą na okręgu o średnicy BS_A.

Dowód: Oznaczmy przez ω okrąg o średnicy BS_A. Z definicji punktów styczności

$$\angle BPS_A = 90^\circ = \angle BXS_A,$$

więc

$$P \in \omega \wedge X \in \omega.$$

Z definicji punktu S mamy

$$\angle BSS_A = 90^\circ,$$

co jest równoważne z

$$S \in \omega.$$

Punkt S_A leży na symetralnej odcinka KU (twierdzenie 1.19), to jest

$$90^\circ = \angle KLS_A = \angle BLS_A.$$

Oznacza to

$$L \in \omega.$$

Ponieważ Z leży na dwusiecznej kąta $\angle BAC$ oraz $AP = AQ$, to

$$PZ = QZ.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych

$$BP = BX$$

a z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą

$$\angle BXP = \angle PQX = \angle PQZ.$$

Trzy powyższe równania dowodzą

$$\Delta PZQ \sim \Delta PBX \ (b, k, b).$$

Ponieważ proste $BS_A, S_A I$ zawierają odpowiednio wysokości trójkąta PBX i PZQ, to

$$\angle PBS_A = \angle PZI$$

tudzież

$$Z \in \omega. \blacksquare$$

Następny rezultat stanowi rozszerzenie twierdzenia 1.17.

Twierdzenie 1.23

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z tym okręgiem. Prosta BX jest styczna w punkcie

$X \neq P$ do okręgu A-mixtilinear oraz $\{T\} = BS_A \cap RX$. Wtedy na czworokącie PRS_AT można opisać okrąg.

Dowód: Z twierdzenia 1.22 wnioskujemy równość miar kątów wpisanych w okrąg
$$\angle XPS_A = \angle XBS_A.$$
Korzystając z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą
$$\angle XPR = 180^\circ - \angle BXR.$$
Łącząc uzyskane równości
$$\angle S_APR = \angle XPR - \angle XPS_A = 180^\circ - \angle BXR - \angle XBS_A = 180^\circ - \angle BXT - \angle XBT = \angle BTX.$$
Mamy również
$$\angle BTX = \angle RTS_A$$
jako kąty wierzchołkowe. Zatem
$$\angle S_APR = \angle RTS_A,$$
lecz punkty P, T leżą po tej samej stronie prostej S_AR, więc otrzymujemy tezę.∎

Twierdzenie 1.24

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Oznaczmy przez E, F jego punkty przecięcia z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, $\{M\} = PR \cap BC$, zaś punkt $R' \neq R$ to środek jego łuku EF. Prosta BX jest styczna w punkcie $X \neq P$ do okręgu A-mixtilinear. Wtedy proste XR, PR', BC przecinają się w jednym punkcie, a także punkty M, X, R' są współliniowe.

Dowód: Oznaczmy najpierw
$$XR' \cap PR = \{M'\}, R'P \cap RX = \{J\}.$$
Na mocy twierdzenia Pascala zastosowanego do „sześciokąta" $XXR'PPR$ punkty w zbiorach
$$XX \cap PP = \{B\}, XR' \cap PR = \{M'\}, R'P \cap RX = \{J\}$$
leżą na jednej prostej. Punkty R i R' są środkami przeciwległych łuków EF okręgu A-mixtilinear (założenie i twierdzenie 1.9), więc jego styczne w punktach R i R' są równoległe do prostej BC. Na mocy twierdzenia Pascala zastosowanego do „sześciokąta" $R'R'PRRX$ punkty w zbiorach
$$R'P \cap RX = \{J\}, PR \cap R'X = \{M'\}$$
leżą na prostej równoległej do wspomnianej stycznej w punkcie R. Zatem $JM' || BC$, co wraz ze współliniowością punktów B, M', J dowodzi
$$M' \in BC \wedge J \in BC,$$
a więc pierwsza część tezy została wykazana. Po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń
$$\{M'\} = PR \cap BC = \{M\}.$$
Skoro $M' \in R'X$, to oczywiście $M \in R'X$.∎

Twierdzenie 1.25

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Oznaczmy przez E, F jego punkty przecięcia z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, $\{M\} = PR \cap BC$ zaś $R' \neq R$ jest środkiem jego łuku EF. Prosta BX jest styczna w punkcie $X \neq P$ do okręgu A-mixtilinear oraz S jest rzutem prostokątnym punktu S_A na odcinek BC. Wtedy odcinki PR', XR, MS są wysokościami trójkąta MRR'.

Dowód: Z twierdzenia 1.9 odcinek RR' jest średnicą okręgu A-mixtilinear, więc
$$\angle RXR' = 90^\circ = \angle RPR',$$
jednak z założenia $M \in PR$ a z twierdzenia 1.24 $M \in XR'$, dlatego odcinki PR', XR są wysokościami trójkąta MRR'. Skoro R' jest środkiem łuku EF tego okręgu, to wobec
$$RR' \perp EF$$

mamy

$$RR' \perp BC.$$

Ponieważ punkty M, B, S, C są z założenia współliniowe, to $MS \perp RR'$ i odcinek MS jest wysokością trójkąta MRR'.∎

Wniosek 1.25.1
Punkt przecięcia prostych PR', XR jest ortocentrum trójkąta MRR' i leży na odcinku BC.

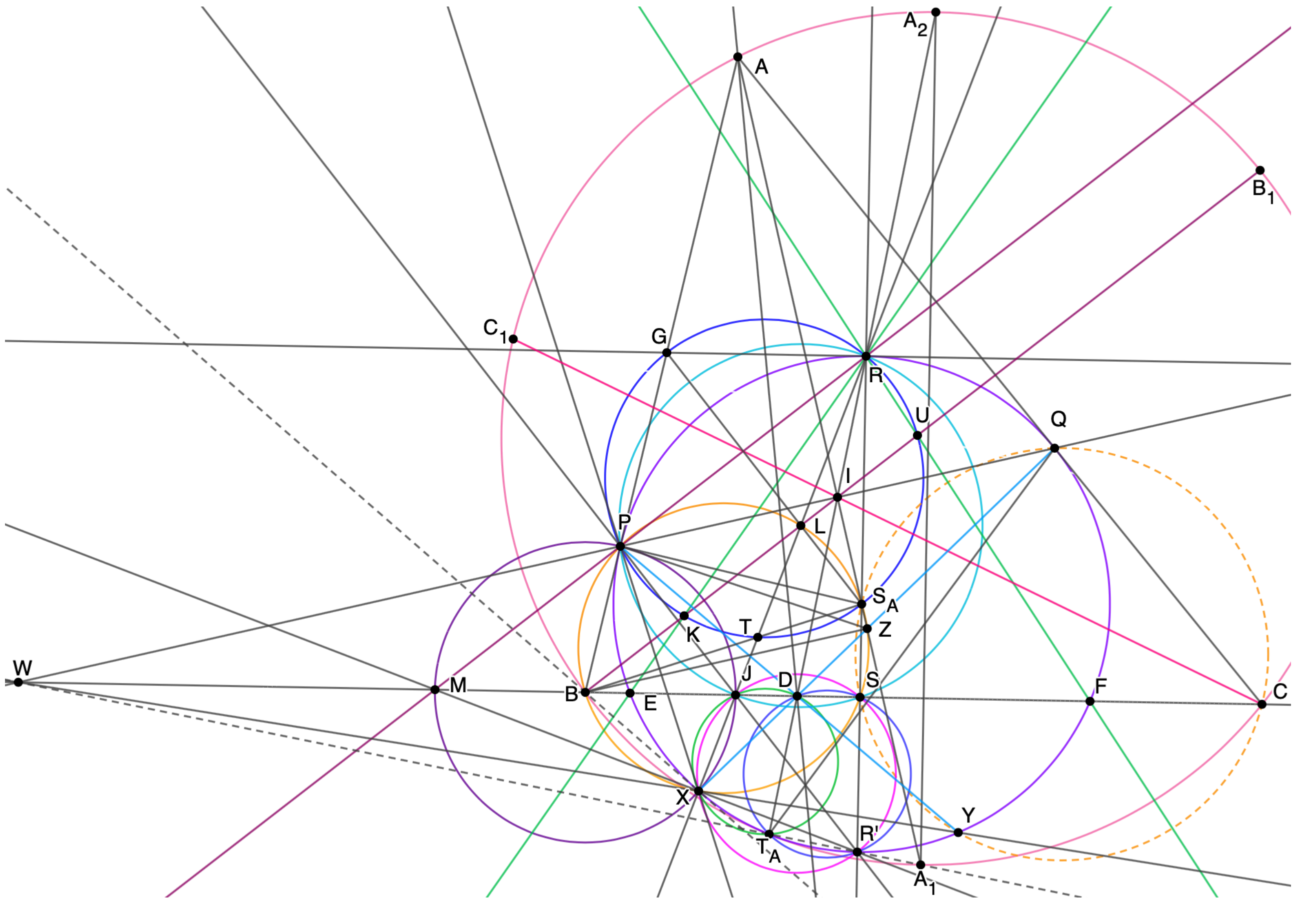
Wniosek 1.25.2
Okrąg o średnicy BS_A jest okręgiem dziewięciu punktów trójkąta MRR'.

Dowód: Okrąg o średnicy BS_A przechodzi przez punkty P, S, X (twierdzenie 1.22.), będące spodkami wysokości trójkąta MRR'.∎

Wniosek 1.25.3
Jeśli $\{J\} = PR' \cap XR$, to na czworokącie $JXR'S$ można opisać okrąg o średnicy JR'.

Dowód: Punkt J jest ortocentrum trójkąta MRR', więc $\angle JSR' = 90^\circ = \angle JXR'$.∎

Twierdzenie 1.22 - 1.32



Twierdzenie 1.26

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, $\{J\} = PR' \cap XR$ oraz $\{M\} = PR \cap BC$. Prosta BX jest styczna w punkcie $X \neq P$ do okręgu A-mixtilinear. Wtedy na czworokącie $MPJX$ można opisać okrąg o środku w punkcie B i średnicy MJ.

Dowód: Z twierdzenia 1.25. punkt J jest ortocentrum trójkąta MRR', więc

$$\angle MPJ = 90^\circ = \angle MXJ.$$

Innymi słowy na czworokącie $MPJX$ można opisać okrąg ω o średnicy MJ. Na mocy wniosku 1.7

$$BP = BM,$$

zaś z twierdzenia o odcinkach stycznych

$$BP = BX.$$

Dlatego punkt B jest środkiem okręgu opisanego trójkąta MPX, a tym bardziej okręgu ω.∎

Twierdzenie 1.27

Niech punkt P będzie punktem styczności okręgu A-mixtilinear z prostą AB. Oznaczmy przez E, F jego punkty przecięcia z odcinkiem BC, przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś $R' \neq R$ jest środkiem jego łuku EF. Ponadto $\{J\} = PR' \cap XR$, $\{U\} = BI \cap RF$, $\{K\} = ER \cap BI$, punkt L jest środkiem odcinka KU oraz S jest rzutem prostokątnym punktu S_A na odcinek BC. Wtedy na czworokącie $RPJS$ można opisać okrąg o średnicy RJ i środku L.

Dowód: Z twierdzenia 1.25. punkt J jest ortocentrum trójkąta MRR', gdzie $\{M\} = PR \cap BC$, więc

$$\angle RPJ = 90^\circ = \angle RSJ.$$

To oznacza, że na czworokącie $RPJS$ można opisać okrąg ω o średnicy RJ. Z twierdzenia 1.19 punkt L leży na osi symetrii punktów P i R, skąd

$$LP = LR.$$

Twierdzenie 1.26 pozwala wywnioskować

$$BP = BJ.$$

Ponieważ półprosta $BI^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $\angle ABC$ i punkt J leży na odcinku BC (wniosek 1.25.1), to

$$\Delta PBL \equiv \Delta JBL \ (b, k, b),$$

skąd

$$LP = JL.$$

Tak więc okrąg ω opisany na trójkącie PRJ ma środek w punkcie L.∎

Twierdzenie 1.28

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC, a proste BX, CY są do niego styczne odpowiednio w punktach $X \neq P$, $Y \neq Q$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem.

I. Wtedy proste BC, PY, QX przecinają się w jednym punkcie.

II. Wtedy proste BC, PQ, XY przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Dowód: Załóżmy na początek istnienie punktu w zbiorze

$$PQ \cap XY = \{W\}.$$

Oznaczmy

$$PY \cap QX = \{D\}.$$

Stosując twierdzenie Pascala do „sześciokąta" $QPPYXX$ stwierdzamy, że punkty w zbiorach

$$PQ \cap XY = \{W\}, PP \cap XX = \{B\}, PY \cap QX = \{D\}$$

leżą na jednej prostej. Z kolei twierdzenie Pascala w „sześciokącie" $PQQXYY$ wskazuje, że punkty w zbiorach

$$PQ \cap XY = \{W\}, QQ \cap YY = \{C\}, PY \cap QX = \{D\}$$

są współliniowe. Czyli

$$W \in BC \wedge D \in BC.$$

Jeśli $PQ || XY$, to otrzymujemy, że punkty B, D i C, D leżą na prostej równoległej do prostej PQ.∎

Twierdzenie 1.29

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Proste BX, CY są do niego styczne odpowiednio w punktach $X \neq P, Y \neq Q$. Ponadto $PY \cap QX = \{D\}$. Wtedy punkt D leży na odcinku $T_A I$.

Dowód: Niech punkt $R \neq T_A$ jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z okręgiem A-mixtilinear, zaś $R' \neq R$ będzie środkiem jego łuku EF. Oznaczmy ponadto

$$RX \cap PR' = \{J\}.$$

Załóżmy najpierw $AB \neq AC$. Wtedy proste BC oraz PQ przecinają się w punkcie W i na mocy twierdzenia 1.28 II

$$\{W\} = BC \cap XY \cap PQ,$$

a z twierdzenia 1.6

$$\{W\} = BC \cap T_A A_1 \cap PQ.$$

Na mocy wniosku 1.9.2 punkt R' leży na odcinku $T_A A_1$, więc proste $R'T_A$, XY przecinają się w punkcie W. Wtedy $AB \neq AC$, gdyż w przeciwnym przypadku punkty X i Y oraz T_A i R' byłyby symetryczne względem symetralnej odcinka BC. Stosując twierdzenie Pascala w sześciokącie $R'T_A RXYP$ otrzymujemy współliniowość punktów w zbiorach

$$R'T_A \cap XY = \{W\}, T_A R \cap PY = \{D'\}, RX \cap PR' = \{J\}.$$

Jednak $W \in BC$ oraz $J \in BC$ (wniosek 1.25.1), więc

$$T_A R \cap PY \cap BC = \{D'\}.$$

Z twierdzenia 1.28 I mamy

$$BC \cap PY \cap QX = \{D\},$$

więc $D' = D$ i oczywiście $D \in T_A R$. Ale z definicji punktu R wynika $D \in T_A A_2$, co przez twierdzenie 1.2 oznacza współliniowość punktów T_A, D, I.

Jeśli teraz $AB = AC$, to punkty P, Q oraz X, Y są symetryczne względem symetralnej odcinka BC na której leżą punkty $T_A = A_1$, D (własność symetrii), I (dwusieczna i symetralna pokrywają się w trójkącie równoramiennym).

W obu przypadkach zapisana kolejność punktów na prostej jest zachowana, gdyż $PY \cap QX = \{D\}$, zaś na mocy twierdzenia 1.1 punkt I jest środkiem odcinka PQ.∎

Wniosek 1.29

Punkty T_A, D, I, R, A_2 leżą w tej kolejności na jednej prostej.

Twierdzenie 1.30

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Proste BX, CY są do niego styczne odpowiednio w punktach $X \neq P, Y \neq Q$. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC, przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej $T_A A_2$ z tym okręgiem, zaś $R' \neq R$ jest środkiem jego łuku EF. Ponadto $PY \cap QX = \{D\}$, $\{J\} = PR' \cap XR$ oraz S jest rzutem prostokątnym punktu S_A na odcinek BC. Wtedy na czworokącie $SDT_A R'$ można opisać okrąg o średnicy DR'.

Dowód: Jak wiemy z twierdzenia 1.9 odcinek RR' łączy środki przeciwległych łuków EF, więc jest średnicą okręgu A-mixtilinear prostopadłą do prostej BC i przechodzi przez punkty S, S_A. Na mocy wniosku 1.25.1 $D \in BC$, więc $S_A S \perp BC$, tj.

$$\angle DSR' = 90^\circ.$$

Na mocy wniosku 1.29

$$\angle DT_A R' = \angle RT_A R' = 90^\circ.$$

Równości

$$\angle DT_A R' = 90^\circ = \angle DSR'$$

są równoważne z tezą po uwzględnieniu, że punkty T_A i S leżą po przeciwnych stronach prostej DR'.∎

Twierdzenie 1.31

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Proste BX, CY są do niego styczne odpowiednio w punktach $X \neq P, Y \neq Q$. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia okręgu A-mixtilinear z odcinkiem BC, przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś $R' \neq R$ jest środkiem jego łuku EF. Ponadto $PY \cap QX = \{D\}$ i $\{J\} = PR' \cap XR$. Wtedy na czworokącie JDT_AX można opisać okrąg.

Dowód: Z twierdzenia 1.9 odcinek RR' łączy środki przeciwległych łuków EF, więc jest średnicą okręgu A-mixtilinear prostopadłą do prostej BC i przechodzi przez punkty S, S_A, skąd

$$\angle XR'R = \angle XR'S.$$

Twierdzenie o kątach wpisanych daje równość

$$\angle XR'R = \angle XT_AR,$$

więc z wniosku 1.29

$$\angle XR'R = \angle XT_AD.$$

Ostatecznie na mocy wniosku 1.25.3

$$\angle XT_AD = \angle XR'S = 180° - \angle XJS = 180° - \angle XJD.$$∎

Twierdzenie 1.32

Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Oznaczmy przez E, F jego punkty przecięcia z odcinkiem BC, przy czym $BE < BF$. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z tym okręgiem, zaś $R' \neq R$ jest środkiem jego łuku EF. Proste BX, CY są do niego styczne odpowiednio w punktach $X \neq P, Y \neq Q$ oraz $PY \cap QX = \{D\}$. Wtedy punkty przecięcia prostych w parach PR', QT_A oraz PT_A, QR' oraz PX, QY leżą na prostej AD.

Dowód: Jeśli $AB = AC$, to punkty P, X są symetryczne odpowiednio do punktów Q, Y względem symetralnej odcinka BC oraz $T_A = A_1 = R'$. Stąd wspomniane punkty przecięcia odpowiednich prostych leżą na symetralnej AD odcinka BC. Niech dalej $AB \neq AC$. Wtedy istnieje punkt W taki, że

$$\{W\} = PQ \cap BC.$$

Prosta PQ jest biegunową punktu A względem okręgu A-mixtilinear i przechodzi przez punkt W, więc na mocy twierdzenia La Hire punkt A leży na biegunowej l punktu W względem tego okręgu. Z wniosku 1.9.2 i twierdzenia 1.6 mamy

$$W \in T_AR'.$$

Czyli

$$\{W\} = T_AR' \cap PQ,$$

więc z definicji prostej l przechodzi ona przez punkt przecięcia prostych PR' i QT_A oraz punkt przecięcia prostych PT_A i QR'. Na mocy twierdzenia 1.28 II

$$\{W\} = BC \cap PQ \cap XY,$$

dlatego znów z definicji prostej l wynika, że przechodzi ona przez punkt D i punkt przecięcia prostych PX, QY.∎

§ 2. Okrąg mixtilinear na płaszczyźnie zespolonej

Będziemy korzystać z twierdzeń 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, podanych w publikacji [4], dostosowując oznaczenia do potrzeb tej pracy. Nie będziemy nigdzie korzystać w obliczeniach bezpośrednio z liczby urojonej, więc punkt i będzie reprezentował na płaszczyźnie zespolonej środek okręgu wpisanego, nie wywołując przy tym dwuznaczności. Ogólnie, małe litery alfabetu będą reprezentowały na płaszczyźnie zespolonej dany punkt oznaczany wielką literą, z wyjątkami zaznaczonymi w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1

Niech okrąg opisany na trójkącie ABC, umieszczony na płaszczyźnie zespolonej, będzie wpisany w okrąg jednostkowy o środku w punkcie 0, zaś I będzie środkiem okręgu wpisanego. Wtedy istnieją liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ takie, że

$$A = a^2, B = b^2, C = c^2 \text{ oraz } A_1 = -bc, B_1 = -ca, C_1 = -ab.$$

Ponadto

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ oraz } i = -(ab + bc + ca).$$

Twierdzenie 2.2

Jeśli A, B, C, D są punktami leżącymi na okręgu jednostkowym, to przecięcie prostych AB, CD ma współrzędne

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli A, B, C, D są parami różnymi punktami na płaszczyźnie zespolonej, to

$$AB \perp CD \iff \frac{d-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)}.$$

Twierdzenie 2.4

Jeśli A, B, C są parami różnymi punktami na płaszczyźnie zespolonej, to

$$\text{punkty } A, B, C \text{ są współliniowe} \iff \frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

Doprecyzujmy, że powyższy rezultat w żaden sposób nie określa ewentualnej kolejności punktów na prostej.

Twierdzenie 2.5

Prawdziwe są równości i ich cykliczne odpowiedniki:

$$t_A = -\frac{2bc + ab + ca}{2a + b + c} \cdot a \wedge s_A = \left(\frac{2bc + ab + ca}{b - c}\right)^2.$$

Dowód: Punkt $T_A \neq A_2 = -A_1 = bc$ jest na mocy twierdzenia 2 punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABC i prostej A_2I. Zatem

$$t_A \cdot \overline{t_A} = |t_A|^2 = 1$$

oraz

$$\frac{a_2 - t_A}{a_2 - i} = \overline{\left(\frac{a_2 - t_A}{a_2 - i}\right)}.$$

Przekształcamy drugą równość:

$$\frac{bc - t_A}{2bc + ab + ac} = \frac{\frac{1}{bc} - \frac{1}{t_A}}{\frac{2}{bc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac}} = \frac{a}{t_A} \cdot \frac{t_A - bc}{2a + c + b}.$$

Dzieląc obustronnie przez $t_A - bc$ (co możemy wykonać, gdyż $T_A \neq A_2$) i mnożąc przez t_A otrzymujemy żądany związek.

Przejdziemy do drugiej części dowodu. W tym celu rozważmy punkt

$$p = \frac{a^2c + a^2b + 2abc + 2ab^2 + 2b^2c}{c - b}.$$

Jego istnienie uzasadnia równoważność

$$B \neq C \iff b^2 \neq c^2 \iff (b \neq c \wedge b + c \neq 0).$$

Wtedy zachodzi równość

$$\frac{p - i}{a^2 - i} = \frac{a^2c + a^2b + 2abc + 2ab^2 + 2b^2c + (ab + bc + ca)(c - b)}{(c - b)(a^2 + ab + bc + ca)} =$$
$$= \frac{(a + c)\left(b + c\right)\left(a + b\right)}{(c - b)(b + c)(a + b)} = \frac{b + c}{c - b}.$$

Nakładając sprzężenie na obie strony

$$\overline{\left(\frac{p - i}{a^2 - i}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{b + c}{b - c} = -\frac{p - i}{a^2 - i},$$

co na mocy twierdzenia 2.3 oznacza

$$PI \perp AI.$$

Teraz chcemy wykazać współliniowość punktów P, A, B korzystając z twierdzenia 2.4

$$\frac{p - a^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2c + a^2b + 2abc + 2ab^2 + 2b^2c - a^2(c - b)}{(a^2 - b^2)(c - b)} =$$
$$= \frac{2b(a + c)(a + b)}{(a^2 - b^2)(c - b)} = \frac{2b(a + c)}{(a - b)(c - b)}.$$

Skąd wynika

$$\overline{\left(\frac{p - a^2}{a^2 - b^2}\right)} = \frac{\frac{2}{b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{2b(a + c)}{(a - b)(c - b)} = \frac{p - a^2}{a^2 - b^2}$$

Na mocy twierdzenia 1.1 wystarczy teraz wykazać $S_AP \perp AB$ i $S_A \in AA_1$.

Pierwszy człon dowodzimy z wykorzystaniem twierdzenia 2.3

$$\frac{s_A - p}{a^2 - b^2} = \frac{\left(2bc + ab + ca\right)^2 - \left(a^2c + a^2b + 2abc + 2ab^2 + 2b^2c\right)(c - b)}{(a^2 - b^2)(c - b)^2} =$$
$$= \frac{2b(a + c)(a + b)(b + c)}{(a^2 - b^2)(c - b)^2} = \frac{2b(a + c)(b + c)}{(a - b)(c - b)^2}.$$

Wyliczamy jeszcze sprzężenie tej liczby

$$\overline{\left(\frac{s_A - p}{a^2 - b^2}\right)} = \frac{\frac{2}{b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)^2} = \frac{2b(a + c)(b + c)}{(b - a)(c - b)^2} = -\frac{s_A - p}{a^2 - b^2}.$$

Z kolei $S_A \in AA_1$ wykazujemy przez twierdzenie 2.4

$$\frac{s_A - a^2}{a^2 + bc} = \frac{(2bc + ab + ca)^2 - (b - c)^2a^2}{(b - c)^2(a^2 + bc)} = \frac{4bc(a + b)(a + c)}{(b - c)^2(a^2 + bc)},$$

$$\overline{\left(\frac{s_A - a^2}{a^2 + bc}\right)} = \frac{\frac{4}{bc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{bc}\right)} = \frac{4bc(a+b)(a+c)}{(b-c)^2(a^2+bc)} = \frac{s_A - a^2}{a^2+bc}. \blacksquare$$

Twierdzenie 2.6

Środek E_A okręgu dopisanego jest zadany wzorem

$$e_A = ab - bc + ac.$$

Dowód:
Środek okręgu wpisanego I leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $\angle ABC$, a środek okręgu dopisanego E_A należy do dwusiecznej kąta zewnętrznego $\angle ABC$, więc $\angle IBE_A = 90°$. Analogicznie $\angle ICE_A = 90°$. Na czworokącie IBE_AC jest więc opisany okrąg o średnicy IE_A. Jednak z lematu o trójliściu mamy $A_1B = A_1C = A_1I$, więc punkt A_1 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCI. To dowodzi, że A_2 jest środkiem odcinka IE_A, skąd

$$e_A = 2(-bc) - i = ab - bc + ca. \blacksquare$$

Przypomnę teraz lemat z pracy [4], str. 4.

Lemat

Jeśli $x, y, z \in \mathbb{C} \wedge |x| = |y| = 1 \wedge x \neq y$, to rzut punktu Z na prostą XY ma współrzędne

$$\frac{1}{2}(z + x + y - xy \cdot \overline{z}).$$

Lemat 2.1

Punkt styczności K okręgu dopisanego do trójkąta ABC o środku E_A z bokiem BC ma współrzędne

$$k = \frac{1}{2}\left(ab + ac + b^2 + c^2 - bc \cdot \frac{b+c}{a}\right).$$

Dowód: Skoro $|b^2| = 1 = |c^2|$, to korzystając z cytowanego lematu otrzymujemy

$$k = \frac{1}{2}\left(e_A + b^2 + c^2 - b^2c^2 \cdot \overline{e_A}\right) = \frac{1}{2}\left(ab - bc + ca + b^2 + c^2 - b^2c^2 \cdot \left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)\right),$$

co po wymnożeniu i redukcji wyrazów podobnych daje tezę.$\blacksquare$

Skorzystamy jeszcze z warunku podobieństwa trójkątów, podanego na stronie 68. publikacji [2].

Twierdzenie 2.7

Trójkąty $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ są podobne i mają tę samą orientację wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

Możemy teraz przystąpić do dowodu właściwej własności.

Twierdzenie 2.8

Niech okrąg dopisany o środku E_A do trójkąta ABC będzie styczny do odcinka BC w punkcie K. Wtedy

$$\Delta ABT_A \sim \Delta AKC \text{ w tej samej orientacji.}$$

Dowód: Ponieważ $T_A \neq A$ więc na mocy twierdzenia 2.5 otrzymujemy

$$\frac{b^2-a^2}{t_A-a^2}=\frac{b^2-a^2}{-\frac{2bc+ab+ca}{2a+b+c}\cdot a-a^2}=\frac{(b^2-a^2)(2a+b+c)}{-2a(a+b)(a+c)}=\frac{(a-b)(2a+b+c)}{2a(a+c)}.$$

Skoro $A \neq C$, to z lematu 2.1 dostajemy

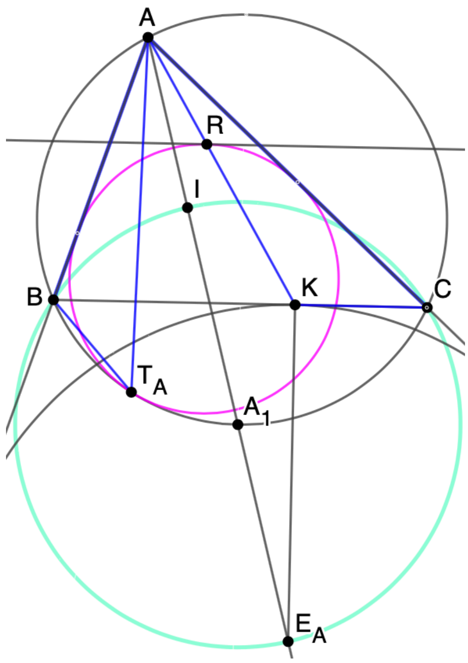
$$\frac{k-a^2}{c^2-a^2}=\frac{(c-a)(a-b)(2a+b+c)}{2a(c^2-a^2)}=\frac{(a-b)(2a+b+c)}{2a(a+c)}=\frac{b^2-a^2}{t_A-a^2},$$

co na mocy twierdzenia 2.7 daje tezę.∎

Twierdzenie 2.9

Niech okrąg dopisany o środku E_A do trójkąta ABC będzie styczny do odcinka BC w punkcie K. Punkt $R \neq T_A$ jest zdefiniowany jako przecięcie prostej T_AA_2 z okręgiem A-mixtilinear. Wtedy punkt R leży na odcinku AK.

Twierdzenie 2.6 - 2.9



Dowód: Okręgi A-mixtilinear i dopisany o środku E_A są wpisane w kąt $\angle BAC$, więc istnieje jednokładność Θ o środku w punkcie A przekształcającą okrąg dopisany do trójkąta ABC o środku E_A na okrąg A-mixtilinear. Prosta k styczna do okręgu A-mixtilinear równoległa do prostej BC, bliższa wierzchołkowi A przechodzi w tej jednokładności na prostą BC. Na mocy wniosku 1.9.1 prosta k jest styczna w punkcie R do okręgu A-mixtilinear, a z założenia okrąg dopisany o środku E_A trójkąta ABC jest styczny do odcinka BC w punkcie K. Wobec tego punkt R jest przekształcany przez jednokładność Θ na punkt K, co dowodzi, że punkt R leży na odcinku AK.∎

Poniższy rezultat stanowił jedno z zadań w [7].

Twierdzenie 2.10

Proste AT_A, BT_B, CT_C przecinają się w jednym punkcie.

Dowód I: Niech D będzie punktem przecięcia prostych AT_A, BC. Z twierdzenia o kątach wpisanych wnioskujemy, że

$$\Delta BDA_2 \sim \Delta T_ADC\ (k,k,k) \wedge \Delta BDT_A \sim \Delta A_2DC\ (k,k,k),$$

zatem

$$\frac{CD}{CT_A}=\frac{DA_2}{BA_2} \wedge \frac{BD}{BT_A}=\frac{DA_2}{CA_2}.$$

Z definicji punktu A_2 wynika równość $CA_2 = BA_2$, zatem

$$\frac{BT_A}{CT_A}=\frac{BD}{CD}.$$

Na mocy twierdzenia o symedianie (por. twierdzenie 1.2)

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BI^2}{CI^2}$$

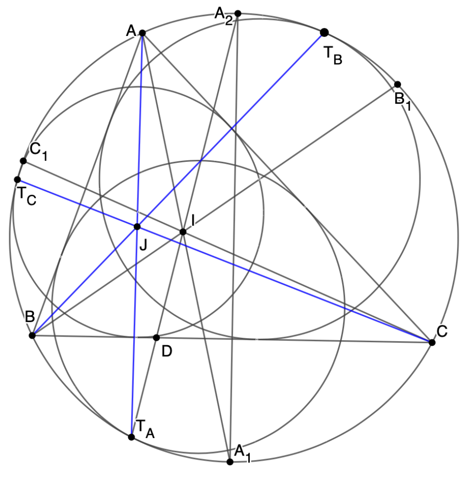
oraz z twierdzenia sinusów

$$\frac{\sin\angle BAT_A}{\sin\angle CAT_A}=\frac{BT_A}{CT_A}.$$

Łącząc otrzymane związki dostajemy

$$\frac{\sin\angle BAT_A}{\sin\angle CAT_A}=\frac{BI^2}{CI^2}.$$

Twierdzenie 2.10



Analogicznie wyprowadzamy równania będące cyklicznymi odpowiednikami

$$\frac{\sin\angle CBT_B}{\sin\angle ABT_B} = \frac{CI^2}{AI^2} \wedge \frac{\sin\angle ACT_C}{\sin\angle BCT_C} = \frac{AI^2}{CI^2}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\frac{\sin\angle BAT_A}{\sin\angle CAT_A} \cdot \frac{\sin\angle CBT_B}{\sin\angle ABT_B} \cdot \frac{\sin\angle ACT_C}{\sin\angle BCT_C} = 1.$$

skąd wynika teza przez twierdzenie odwrotne do trygonometrycznego twierdzenia Cevy. Jego użycie jest uprawnione, ponieważ półproste $\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{BT_B}, \overrightarrow{CT_C}$ są odpowiednio zawarte w kątach $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$, więc każde dwie z nich przecinają się.■

Dowód II: Skorzystamy z twierdzeń 2.2, 2.5. Półproste $\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{BT_B}, \overrightarrow{CT_C}$ są odpowiednio zawarte w kątach $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$, więc każde dwie z nich przecinają się. Możemy więc oznaczyć punkty przecięcia w zbiorach

$$\{J_{AB}\} = AT_A \cap BT_B\,, \{J_{BC}\} = BT_B \cap CT_C\,, \{J_{CA}\} = CT_C \cap AT_A.$$

Przeprowadzamy obliczenia sprowadzające się do podstawienia znanych współrzędnych, a następnie przemnożenia licznika i mianownika przez $(2a+b+c)(a+2b+c)$ i uproszczenia

$$j_{AB} = \frac{a^2t_A(b^2+t_B) - b^2t_B(a^2+t_A)}{a^2t_A - b^2t_B} =$$

$$= \frac{-a^2\cdot(2bc+ab+ac)\cdot a\left(b^2(a+2b+c)-(2ac+ab+bc)b\right) + b^2\cdot(2ac+ab+bc)\cdot b\left(a^2(2a+b+c)-(2bc+ab+ac)a\right)}{-a^2\cdot(2bc+ab+ac)\cdot a\cdot(a+2b+c) + b^2\cdot(2ca+bc+ab)\cdot b\cdot(2a+b+c)} =$$

$$= \frac{2abc(a-b)(a+b)^2(ab+bc+ac)}{(b-a)(a+b)^2\big((a+b)(a+c)(b+c)+2abc\big)} = \frac{2abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)+2abc}.$$

Widzimy, że to wyrażenie jest symetryczne w każdej ze zmiennych a, b, c, dlatego

$$j_{AB} = j_{BC} = j_{CA} = \frac{2abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)+2abc}.■$$

Wniosek 2.10

Proste AT_A, BT_B, CT_C przecinają się w punkcie reprezentowanym przez liczbę zespoloną

$$\frac{2abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)+2abc}.$$

Twierdzenie 2.11

Niech $\{J\} = AT_A \cap BT_B \cap CT_C$. Wtedy punkt J leży na prostej Eulera trójkąta $E_AE_BE_C$.

Dowód: Z własności dwusiecznych mamy

$$AE_A \perp E_BE_C \wedge BE_B \perp E_CE_A \wedge CE_C \perp E_AE_B,$$

więc punkt I jest ortocentrum trójkąta $E_AE_BE_C$ a okrąg o jest jego okręgiem dziewięciu punktów. Dlatego wystarczy wykazać $J \in OI$. Jeśli $O = I$, to trójkąt ABC jest równoboczny i $J = I$. Niech dalej $i \neq 0$. Na mocy twierdzenia 2.4

$$J \in OI \iff \frac{j-0}{i-0} = \overline{\left(\frac{j-0}{i-0}\right)}.$$

Ale z wniosku 2.10

$$\frac{j}{i} = -\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)+2abc} = -\frac{\frac{2}{abc}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{2}{abc}} = \overline{\left(\frac{j}{i}\right)}.■$$

§ 3. Długości odcinków powiązanych z okręgiem A-mixtilinear

Lemat 3.1

Jeśli $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$, zaś K jest zdefiniowane jak w lemacie 2.1, to

$$AK = \sqrt{\frac{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}{4a}}.$$

Dowód: Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABC mamy

$$\cos\angle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy

$$CK = \frac{a+c-b}{2}.$$

Punkt K leży na odcinku BC, więc $\angle ACB = \angle ACK$ i stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie ACK otrzymujemy

$$AK^2 = CK^2 + AC^2 - 2AC\cdot CK\cdot\cos\angle ACB = \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + b^2 -$$

$$-2\cdot b\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2(b-c)^2(b+c)+a(3b^2+3c^2-2bc)a-a^3}{4a} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}{4a}.\blacksquare$$

Twierdzenie 3.1

Jeśli $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$, to długości odcinków BT_A, CT_A, AT_A wyrażają się wzorami:

$$AT_A = 2bc\cdot\sqrt{\frac{a}{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}}$$

$$BT_A = c(a+c-b)\cdot\sqrt{\frac{a}{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}}$$

$$CT_A = b(a+b-c)\cdot\sqrt{\frac{a}{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}}$$

Dowód: Na mocy poprzedniego twierdzenia mamy

$$\Delta ABT_A \sim \Delta AKC,$$

więc

$$BT_A = \frac{CK\cdot AB}{AK} \wedge AT_A = \frac{AC\cdot AB}{AK}.$$

Teraz wystarczy tylko podstawić długość odcinka AK z powyższego lematu i wykorzystać (jak wspomnieliśmy w dowodzie lematu) równość

$$CK = \frac{a+c-b}{2}.$$

We wzorze na długość odcinka BT_A możemy zamienić zmienne b i c ze sobą (ze względu na symetrię) by otrzymać długość odcinka CT_A.$\blacksquare$

Twierdzenie 3.2

Niech D będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC. Wtedy

$$\Delta CDT_A \sim \Delta ABT_A \text{ w tej samej orientacji.}$$

Dowód: Oznaczmy
$$AB = c, BC = a \text{ i } CA = b.$$
Z twierdzenia o odcinkach stycznych
$$CD = \frac{a+b-c}{2}.$$
Na mocy twierdzenia 3.1
$$\frac{CT_A}{CD} = 2b \cdot \sqrt{\frac{a}{(a+b+c)\big(a(b+c-a)+2(b-c)^2\big)}} = \frac{AT_A}{AB},$$
co wobec równości kątów wpisanych
$$\angle DCT_A = \angle BCT_A = \angle BAT_A$$
daje
$$\Delta CDT_A \sim \Delta ABT_A \ (b,k,b).$$
Zgodność orientacji jest oczywista po uwzględnieniu, że punkty D i T_A są zawarte w kącie $\angle BAC$.∎

Lemat 3.2
Jeśli $AB = c, BC = a \text{ i } CA = b$, *to*
$$AI = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}.$$

Ze względu na objętość pracy dowód pomijamy. Jest to jedno z zadań, jakie można znaleźć w pracy [8] na stronie 29.

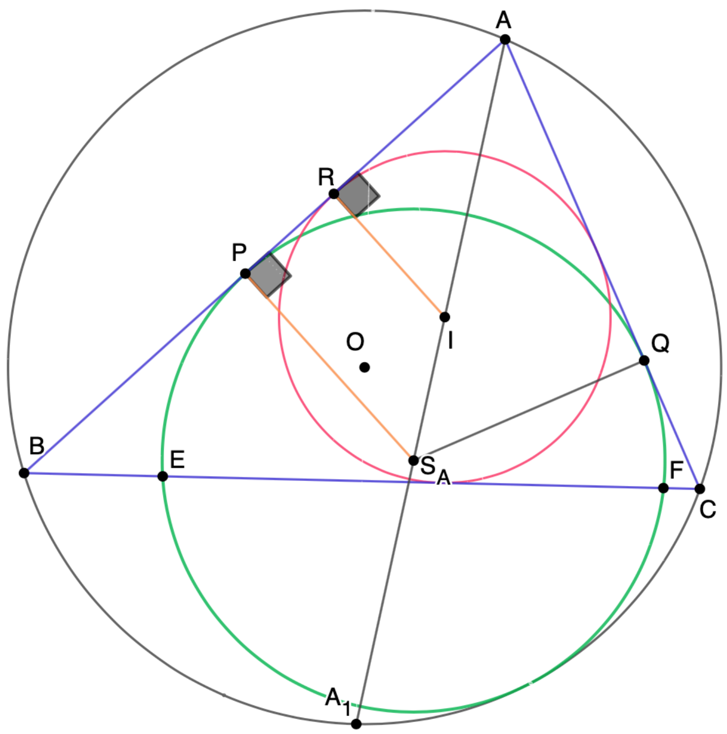
Twierdzenie 3.3
Niech punkty P, Q *będą punktami styczności okręgu* A*-mixtilinear odpowiednio z prostymi* AB *i* AC. *Jeśli* $AB = c, BC = a \text{ i } CA = b$, *to zachodzą następujące równości*
$$AP = AQ = \frac{2bc}{a+b+c}$$
$$BP = c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c} \wedge CQ = b \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}$$
$$AS_A = \frac{4bc\sqrt{bc}}{(a+b+c)\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}.$$

Dowód: Oznaczmy przez R rzut punktu I na bok AB. Wykorzystując twierdzenie o odcinkach stycznych
$$AR = \frac{b+c-a}{2}.$$
Korzystając z wniosku 1.1.1, lematu 1.1 i podobieństwa
$$\Delta ARI \sim \Delta APS_A \ (k,k,k)$$
otrzymujemy
$$AP = \frac{PS_A}{RI} \cdot AR = \frac{b+c-a}{2\cos^2\frac{\angle BAC}{2}} = \frac{2bc}{a+b+c}.$$
Oczywiście $AP = AQ$ z twierdzenia o odcinkach stycznych.
Korzystając jeszcze z lematu 3.2 uzyskujemy
$$AS_A = \frac{AP}{AR} \cdot AI = \frac{4bc}{(a+b+c)(b+c-a)} \cdot \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}.$$
Wystarczy teraz skrócić ułamek.

Punkty P, Q leżą odpowiednio na półprostych AB, AC, dlatego

$$BP = c - AP = c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c} \wedge CQ = b - AQ = b \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Dodatnie wyniki potwierdzają, że punkty P, Q leżą odpowiednio na odcinkach AB, AC.∎



Twierdzenie 3.3-3.4

Twierdzenie 3.4

Przyjmijmy $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$. Niech punkty P, Q będą punktami styczności okręgu A-mixtilinear odpowiednio z prostymi AB i AC. Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia tego okręgu z odcinkiem BC przy czym $BE < BF$. Wtedy

$$EF = \frac{(a+b-c)(a-b+c)\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{a(a+b+c)}$$

$$BE = (a-b+c) \cdot \frac{(a^2+2ab+(b-c)^2) - (a-b+c)\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{2a(a+b+c)}$$

$$CF = (a+b-c) \cdot \frac{(a^2+2ac+(b-c)^2) - (a+b-c)\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{2a(a+b+c)}$$

Dowód: Punkty B, E, F, C leżą w tej kolejności na jednym okręgu, dlatego

(I) $$a = BC = BE + EF + CF$$

Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu otrzymujemy równania

(II) $$BP^2 = BE \cdot (BE + EF) = BE \cdot a - BE \cdot CF$$

(III) $$CQ^2 = CF \cdot (CF + EF) = CF \cdot a - CF \cdot BE$$

Odejmując (II) i (III) od siebie otrzymujemy

$$BE - CF = \frac{BP^2 - CQ^2}{a}.$$

Zatem

(IV) $$2BE = (BE - CF) + (BE + CF) = \frac{BP^2 - CQ^2}{a} + a - EF$$

Wracając z (IV) do (II) otrzymujemy po przemnożeniu obu stron przez 4

$$4BP^2 = \left(\frac{BP^2 - CQ^2}{a} + a - EF\right) \cdot \left(\frac{BP^2 - CQ^2}{a} + a + EF\right),$$

więc ze wzoru skróconego mnożenia

$$EF^2 = \left(\frac{BP^2 - CQ^2}{a} + a\right)^2 - 4BP^2.$$

Podstawiając wyniki z twierdzenia 3.3

$$EF^2 = \left(\frac{\left(c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}\right)^2}{a} + a\right)^2 - 4\left(c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{c^2(a-b+c)^2 - b^2(a+b-c)^2 + a^2(a+b+c)^2}{a(a+b+c)^2}\right)^2 - 4\left(c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^2 =$$

$$= \frac{(a+b+c)^2(a^2-(b-c)^2)^2(a^2+2a(b+c)+(b-c)^2)}{a^2(a+b+c)^4},$$

zatem

$$EF = \frac{|a^2-(b-c)^2|\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{a(a+b+c)}.$$

Z nierówności trójkąta $a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) > 0$, więc otrzymujemy wzór na długość odcinka EF jak w tezie. Podstawiając to do (IV) uzyskujemy

$$2BE = \frac{\left(c \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}\right)^2}{a} + a - \frac{(a+b-c)(a-b+c)\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{a(a+b+c)}$$

$$2BE = \frac{(a-b+c)(a^2+2ab+(b-c)^2)}{a(a+b+c)} - \frac{(a+b-c)(a-b+c)\sqrt{a^2+2a(b+c)+(b-c)^2}}{a(a+b+c)}$$

Po wyłączeniu przed nawias $\frac{a-b+c}{a(a+b+c)}$ i podzieleniu obu stron przez 2 dostajemy tezę. Równanie na CF otrzymujemy przez wzajemną zamianę zmiennych b i c w wyrażeniu na BE.∎

Bibliografia

[1] Alexanderson G.; *A conversation with Leon Bankoff*; The College Mathematics Journal Vol. 23, No. 2, 1992

[2] Andreescu T., Andrica D.; *Complex Numbers from A to… Z*, 2006

[3] Bankoff L.; *A mixtilinear adventure;* Crux Mathematicorum Vol. 9, No. 1, 1983

[4] Chen E.; *Bashing Geometry with Complex Numbers*, 2015

[5] Pompe W., Wróblewski J.; *Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej*, 1999

[6] sunken rock; *Yet another mixtilinear circle problem*, 2010

[7] *XII Olimpíada Matemática Rioplatanese*, 2003

[8] Zetel S.; *Geometria trójkąta*, 1964

[9] Zhao Y.; *Lemmas in Euclidean Geometry*, 2007

Dostęp na 30 IV 2019 r.