$W - zbieżno$ść funkcji

Daniel Goc

April 30, 2020

1 Wprowadzenie

W tej pracy zajmiemy się granicą, którą możemy zdefiniować dla dowolnej funkcji $f(x)$ określonej w punktach $f(0), f(1), f(2), \dots$. Przedstawmy temat naszych rozważań:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{k-z}{k+z}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{z}{k-z}\right)$$

Tą właśnie granicę oznaczmy sobie przez $W(f)(z)$, gdzie pierwszym argumentem jest funkcja f zdefiniowana na liczbach naturalnych, zaś z jest dowolną liczbą zespoloną spełniającą $z \notin \mathbb{Z}$. W obrębie tej pracy będziemy się skupiać tylko na przypadkach w których $f(x)$ jest funkcją holomorficzną określoną na otwartym podzbiorze Ω spełniającym $\mathbb{N} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$. Dla wielu przykładów takich f pokażemy, że istnieje α takie, że dla każdego $z \in \Omega$ o części rzeczywistej większej niż α zachodzi równość $W(f)(z) = f(z)$.

Wprowadźmy sobie teraz następujące pojęcie: funkcję f nazwiemy $W-$*zbieżną* jeśli istnieje α takie, że dla każdego $\Re(z) > \alpha$ granica $W(f)(z)$ jest zbieżna do $f(z)$ (w szczególności z musi należeć do dziedziny). Analogicznie funkcję f nazwiemy $W-$*rozbieżną* jeśli nie jest $W-$*zbieżna*. Dalej niech stwierdzenie: f jest $W-$*zbieżne* dla danego z oznacza po prostu równość $W(f)(z) = f(z)$. W tej pracy skupimy się na pokazaniu, że poszczególne funkcje są lub nie są $W-$*zbieżne*.

Operacja brania granicy $W(f)(z)$ przypomina odtwarzanie funkcji f z jej szeregu Taylora: mając dany ciąg c_i utożsamiony z funkcją f jesteśmy w stanie znaleźć wartości f w pewnym obszarze. Zaznaczam tutaj również, że nie udało mi się nigdzie znaleźć żadnej wzmianki o granicy $W(f)(z)$, niewykluczone więc że jest to nowy, autorski, niezbadany dotychchczas temat. Do dalszych rozważań wprowadzimy sobie kilka oznaczeń:

Liczby naturalne: $\mathbb{N}$ to zbiór liczb całkowitych nieujemnych, zaś $\mathbb{N}_+$ to zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Przesunięte wielomiany Legendre'a: $(-1)^n P_n(x)$ jest tożsame z n-tym przesuniętym wielomianem Legendre'a. Wzór na te wielomiany jest następujący: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-x)^n \cdot \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}$. [2]

funkcja Gamma: Definiujemy $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, gdzie Γ to powszechnie znane uogólnienie silni [3]. Spełniony jest wzór rekurencyjny $\Pi(x) = x \cdot \Pi(x-1)$.

Funkcja zeta: Przez $\zeta(x)$ oznaczać będziemy funkcję dzeta Riemanna. [1] Definicja jest następująca: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Liczby Bernoulliego: B_n to liczby Bernoulliego (wartość B_1 nas nie interesuje). Są one wymierne i spełniają następującą zależność: $\zeta(2s) = \frac{(-1)^{s+1}B_{2s}(2\pi)^{2s}}{2(2s)!}$ dla każdego naturalnego $s \geq 1$. [1]

Dwumian Newtona: Dwumian Newtona $\binom{n+k}{n}$ definiujemy jako $\frac{\Pi(n+k)}{\Pi(n)\Pi(k)}$. W szczególności jeśli $n, k \in \mathbb{Z}$, a także $n < 0$ lub $k < 0$, to $\binom{n+k}{n} = 0$.

Asymptotyka: Notacja $f = \Omega(g)$ oznacza $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| > 0$, zaś zapis $f = \omega(g)$ oznacza $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty$. Przez wyrażenie $f \sim g$ rozumiemy $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Część rzeczywista i urojona: Wreszcie $\Re(z)$ oraz $\Im(z)$ oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby z.

Głównym rezultatem pracy będzie pokazanie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1

1. Funkcja stała jest $W-$zbieżna dla każdego $z \in \mathbb{C}$

2. Wielomian $P(x)$ jest $W-$zbieżny dla każdego $\Re(z) > deg(P) - 1$.

3. Funkcja $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x), Q(x)$ są wielomianami spełniającymi $\deg(P) \leq \deg(Q)$, jest $W-$zbieżna dla $Re(z) > \alpha$, gdzie α to maksymalna część rzeczywista pierwiastków wielomianu $Q(x)$. Zakładamy że $Q(x)$ nie ma pierwiastków naturalnych.

4. $P(x)a^x$ jest $W-$zbieżne dla każdego $a \in (0,1)$, wielomianu $P(x)$ oraz $\Re(z) > max\left(0, \frac{\deg(P)-1}{2}\right)$

5. $\ln(1+x)$ jest $W-$zbieżne dla każdego $\Re(z) > 0$.

6. $\zeta(2x+2)$ *jest* $W-$ *zbieżne dla każdego* $\Re(z)>0$.

7. $\binom{2x}{x}^{-1}$ *jest* $W-$ *zbieżne dla każdego* $\Re(z)>0$.

8. $f(x)$ *jest* $W-$ *rozbieżne dla dowolnej niestałej funkcji okresowej, która ma całkowity okres.*

Naszymi najważniejszymi narzędziami w badaniu $W-$ *zbieżności* będą punkty $1,2,3$ i 4 w głównym twierdzeniu. jak się później przekonamy, wszystkie pozostałe dowody (może poza $W-$ *rozbieżnością* funkcji okresowych) będą w jakimś stopniu bazować na tych 4 wymienionych punktach twierdzenia. Warto zauważyć, że w pracy skupiamy się na raczej znanych klasach funkcji holomorficznych. Jednak temat $W-$ *zbieżności* zdecydowanie nie zamyka się na te "najpopularniejsze" funkcje. W następnej sekcji opowiemy o tym trochę więcej.

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych dwóch funkcji $f(x), g(x)$ oraz stałych c_1, c_2 funkcja $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ również jest $W-$ *zbieżna*. Jednak poza tą prostą własnością i podaniem kilku przykładów funkcji $W-$ *zbieżnych*, ciężko powiedzieć coś więcej o tej przestrzeni. Dalsza część jest tylko w strefie domniemań, ale osobiście uważam temat za naprawdę ciekawy. Odkrywając go i formułując odpowiednie twierdzenia można potencjalnie skategoryzować pewną klasę funkcji, zamknąć ją pod różnymi operacjami, dedukować coś z samego faktu $W-$ *zbieżności*. A ponieważ granicę $W(f)(z)$ możemy badać dla dowolnych wartości $f(0), f(1), ...$, to bylibyśmy w stanie poznawać rozszerzenia dowolnie sformułowanych ciągów. Twierdzenie 1 już pokazuje, że klasa funkcji $W-$*zbieżnych* jest szeroka. Bez dowodu powiem jeszcze, że jednocześnie wykluczone są różne specyficzne funkcje takie jak np. $\sin(x)$, e^x czy też funkcje teorioliczbowe. Więc $W-$ *zbieżność* stanowi bliżej niezbadany podział funkcji na te "normalne" oraz te pod pewnymi względami "nieregularne". Podsumowując: badanie $W-$ *zbieżności* funkcji może prowadzić do rezultatów wykraczających poza nasz obecny temat.

Wracając do granicy, poniżej znajdują się 3 wnioski wypływające z twierdzenia 1:

Wniosek 1.1 *Niech* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *będzie funkcją wymierną, gdzie* $\deg(P) < \deg(Q)$. *Załóżmy, że dla pewnego* $z \in \mathbb{C}$ *zachodzi* $Q(z) = 0$ *oraz:*

$$\sum_{k=0}^{n} R(k)(-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = \omega(n^{2\Re(z)})$$

Wtedy $(x-z)Q(x)$ *ma pierwiastek zespolony* z_0 *spełniający* $\Re(z_0) \geq \Re(z)$.

Wniosek 1.2 *Dla każdego* $s \in \mathbb{N}_+$ *wartość* $\zeta(2s+1)$ *jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy wymierne jest:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2s+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2k+2}(2\pi)^{2k+2}}{(2k+2)!}\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-2s+1}\right)$$

Trzeba tu zaznaczyć, że problem wymierności $\zeta(2s+1)$ jest problemem otwartym.

Wniosek 1.3 *Dla dowolnego* $\Re(z) > 0$ *zachodzi tożsamość:*

$$\frac{1}{\Pi(2z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{2k}\frac{1}{z-k}\right)$$

Warto jeszcze zaznaczyć, że przestrzeń funkcji $W-$ *zbieżnych* nie ma bezpośredniego związku ze zbieżnością szeregu Taylora danej funkcji. Możemy dla przykładu rozważyć funkcję $e^{\pi i x}$. Pierwsza ma okres 2, więc jest $W-$ *rozbieżna*, ale można rozwinąć ją w szereg Taylora zbieżny w całej płaszczyźnie zespolonej. Ogółem ciężko jest znaleźć powiązanie klasy funkcji $W-$ *zbieżnych* ze znanymi nam szeregami, choć nie można wykluczyć istnienia tego związku.

1.1 Historia wzoru

Około 3-4 lat temu postanowiłem, że znajdę wzór ogólny na mój własny ciąg. Początkowo próbowałem chociażby z $c_{n+1} = \ln(1+c_n)$, jednak zadanie okazało się zbyt trudne. Nie mogłem znaleźć odpowiednio zdefiniowanego ciągu, którego wzór nie trywializowałby problemu, a jednocześnie dawałby mi jakiekolwiek szanse. Po pewnym czasie utworzyłem następujące funkcje g_n: dla danego n oraz ciągu $c_1, c_2, c_3, ...$ spełniają one:

$$k \cdot \int_0^1 (1-x)^{k-1} g_n(x)dx = c_k$$

gdzie k przyjmuje każdą wartość od 1 do n. Następnie uznałem, że jeśli $g_n(x)$ będzie wielomianem najmniejszego możliwego stopnia, zaś jego współczynnikami wyrażenia liniowe w zmiennych $c_1, c_2, ..., c_n$, to będę mógł zapisać:

$$c_z = \lim_{n\to\infty} z \int_0^1 (1-x)^{z-1} g_n(x)dx$$

Dalsza część to już tylko duża ilość przeliczeń. Po mniej więcej tygodniu pracy udało mi się wyznaczyć dokładne wzory na $g_n(x)$ (z racji ich rozmiaru pominiemy je). Za pomocą dalszych przekształceń udało mi się zapisać całkę:

$$\int_0^1 (1-x)^{z-1} g_n(x)dx$$

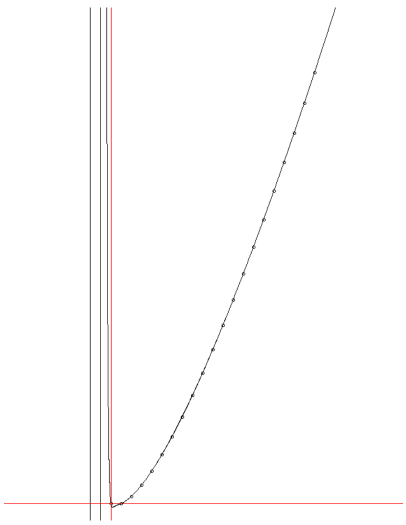
W znacznie bardziej zwięzłej formie. Ostatecznym rezultatem było:

$$c_z = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{z-k}{z+k}\right) \left(\sum_{k=0}^{n} c_{k+1}(-1)^{n-k} \binom{n+k+1}{n} \binom{n}{k} \frac{n+1-z}{k+1-z}\right)$$

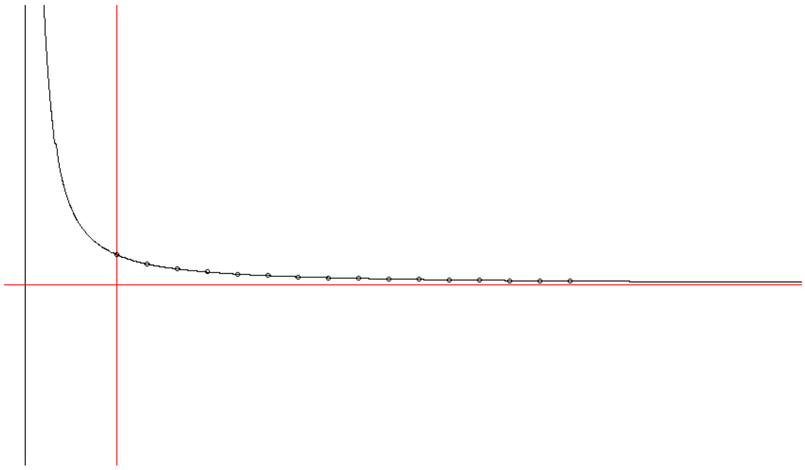
Jednak uważny czytelnik zauważy, że to nie to samo wyrażenie, które obecnie badamy. Dopiero niedawno udało mi się przemienić granicę w jej obecną, przyjaźniejszą formę. Głównym "usprawnieniem" jest zmiana wyrazu $\binom{n+k+1}{n}$ na $\binom{n+k}{n}$, co pozwala bez zbędnych manipulacji posługiwać się wielomianami Legendre'a.

2 Aproksymacja i uogólnianie

Granica $W(f)(z)$ początkowo została stworzona w celu uogólniania. Najprawdopodobniej nie jest ona najlepszym narzędziem do przybliżania wartości różnych funkcji, jednak zaprezentujemy jej zachowanie "w praktyce". Jeśli wybierzemy sobie funkcję $f(x) = \ln(\Pi(x))$, to dla $n = 20$ wykres w zależności od z prezentuje się następująco:



Jeśli wybierzemy sobie punkt $z = 11,5$, to nasza granica zwraca wartość 18.734347511936. To się różni od $\ln(\Pi(11.5))$ o ok. $5 \cdot 10^{-13}$. Ale na przybliżanie funkcji $\Pi(x)$ jest wiele sposobów. Zamiast tego zdefiniujmy sobie ciąg $c_0 = 1 \quad c_{i+1} = \ln(1+c_i)$. Wtedy wykres prezentuje się następująco:



dla $n = 15$. Niestety przy większych n pojawia się coraz większy błąd obliczeniowy ze strony komputera. To ewidentna wada $W(f)(z)$ odnośnie aproksymacji - potrzeba dużej dokładności przy operowaniu na dużych liczbach. Jednak granica była w stanie znaleźć przybliżoną wartość $c_{9,5}$, co można uznać za pewien sukces.

Istnieje pewien intuicyjny argument, dlaczego dla funkcji analitycznej f granica $W(f)(z)$ miałaby być zbieżna właśnie do $f(z)$. Ustalmy sobie pewne n oraz $m \in [0, n]$. Popatrzmy na granicę:

$$\lim_{z \to m} \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{k-z}{k+z} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} f(k)(-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \frac{z}{k-z} \right)$$

Okazuje się, że w środku sumy wyraz dla $k = m$ jest mnożony przez $\frac{1}{m-z}$, co dąży do nieskończoności. Ten ułamek jest jednak anulowany przez wyraz $m - z$ w środku iloczynu. Więc kiedy wszystkie wyrazy w środku sumy będą dążyć do zera, dla $k = m$ wyraz będzie dążyć do:

$$\left(\prod_{k=0, k \neq m}^{n} \frac{k-m}{k+m} \right) \left(f(m)(-1)^m \binom{n+m}{n} \binom{n}{m} \right)$$

Co po wymnożeniu daje nam właśnie $f(m)$. Gdyby więc granica $W(f)(z)$ była zbieżna dla każdego $\Re(z) > \alpha$, to w otoczeniu liczb naturalnych musiałby się zachowywać "podobnie" do f, co już sugeruje, że są tym samym. To oczywiście tylko heurystyczny argument, ale nie udało mi się znaleźć przykładu funkcji, dla której $W(f)(z)$ byłoby zbieżne do wartości innej niż $f(z)$.

Ogólnie zaskakujący jest fakt, że tak naprawdę jedynym miejscem, w którym występuje z, jest ułamek $\frac{1}{k-z}$ w środku sumy. Wszystkie inne miejsca należą do iloczynu.

3 Inne formy granicy

W tym dziale rozpoczniemy przygotowania do dowodów $W - zbieżności$. Pokażemy 2 kluczowe lematy o $W - zbieżności$:

Lemat 2 *Niech dana będzie funkcja f oraz zespolone z takie, że $f(z)$ istnieje. Granica $W(f)(z)$ jest zbieżna do $f(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$0 = \lim_{n \to \infty} n^{-2z} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k) - f(z)}{k - z} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k}$$

Lemat 3 *Niech dana będzie funkcja $f(x)$. Ustalmy ciąg:*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)(-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k}$$

Jeśli istnieje taka stała $C > 1$, że zachodzi $|a_n| = \Omega(C^n)$, to granica $W(f)(z)$ jest rozbieżna dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Przejdziemy od razu do dowodów tych dwóch lematów. Chcę jeszcze zaznaczyć, że oprócz tego na końcu działu znajduje się również alternatywna postać wyrażenia $W(f)(z)$ wykorzystująca całkę okrężną.

Naszym pierwszym krokiem jest rozważenie różnicy wyrażeń $W(f)(z)$ dla $n+1$ oraz n. Aby uściślić, przyjrzyjmy się następującej różnicy:

$$\left(\prod_{k=0}^{n+1}\frac{k-z}{k+z}\right)\left(\sum_{k=0}^{n+1}f(k)(-1)^k\binom{n+1+k}{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{z}{k-z}\right)-\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{k-z}{k+z}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{z}{k-z}\right)=$$

$$=\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{k-z}{k+z}\right)\frac{2z}{n+1+z}\left(\sum_{k=0}^{n+1}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k}\right)=$$

$$=\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{k-z}{k+z}\right)\frac{z}{n+1+z}\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}f(k)(-1)^k\binom{n+1+k}{n+1}\binom{n+1}{k}\right)$$

Tak jak w lemacie 3, ustalmy ciąg:

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}$$

Do udowodnienia lematu 2 będziemy musieli pokazać $W-zbieżność$ funkcji stałej. Bardzo łatwo możemy się przekonać, że wartość wyrażenia $W(f)(z)$ dla $n=0$ oraz dowolnego z wynosi zawsze $f(0)$. Jeżeli więc teraz udowodnimy, że dla $f=const$ zachodzi $a_n+a_{n+1}=0$, to wartość wyrażenia $W(f)(z)$ będzie równa $f(0)$ dla każdego n, bo różnica $W(f)(z)$ dla $n+1$ oraz n będzie wszędzie wynosić zero. Ale jeżeli $f(x)=c$ dla każdego x, to zachodzi $a_n=c\cdot P_n(1)$. My zaś wiemy, że $P_n(1)=(-1)^n$ [2]. Stąd $a_n+a_{n+1}=0$.

Czyli istotnie funkcja stała jest $W-zbieżna$ w każdym punkcie płaszczyzny zespolonej. Do dalszej części dowodu lematu 2 przypomnijmy sobie następującą reprezentację funkcji $\Pi(z)$ [3]:

$$\Pi(z)=\lim_{n\to\infty}n^z\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+z}$$

Co daje nam:

$$\frac{\Pi(z)}{\Pi(-z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{n^{-z}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+z}\frac{k-z}{k}$$

Skąd wynika już wzór asymptotyczny:

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k-z}{k+z}\sim-n^{-2z}\frac{\Pi(z)}{\Pi(-z)}$$

I podstawiając go wreszcie do $W(f)(z)$ otrzymujemy alternatywną formę granicy:

$$W(f)(z)=\frac{-\Pi(z)}{\Pi(-z)}\lim_{n\to\infty}n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{z}{k-z}\right)$$

Jeżeli więc przyrównamy $W(f)(z)$ do $f(z)$ oraz obustronnie odejmiemy $f(z)=f(z)\cdot W(1)(z)$, to otrzymamy zależność:

$$W(f)(z)=f(z)\quad\Leftrightarrow\quad 0=\frac{-\Pi(z)}{\Pi(-z)}\lim_{n\to\infty}n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n}(f(k)-f(z))(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{z}{k-z}\right)$$

Co po podzieleniu prawej równości przez $\frac{-z\Pi(z)}{\Pi(-z)}$ kończy dowód Lematu 1. $\square$

Teraz będziemy dowodzić lemat 3. Przyjmijmy założenia takie, jak w tym lemacie. Uzyskaliśmy już rezultat, że różnica wyrażeń $W(f)(z)$ dla $n+1$ oraz n dana jest wzorem:

$$\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{k-z}{k+z}\right) \frac{z}{n+1+z}(a_n + a_{n+1})$$

Jak już wykazaliśmy, w tym wyrażeniu wyrazy inne niż $a_n + a_{n+1}$ rosną wielomianowo. Niech $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{C^n}\right| = \epsilon$. Jeśli ta granica dąży do nieskończoności, to wystarczy wziąć dowolny skończony ϵ. Więc jeśli dla dowolnie dużych n będzie $|a_n + a_{n+1}| > C^n(C-1)\frac{\epsilon}{2}$, to granica $W(f)$ będzie wszędzie rozbieżna, bo ciąg różnic między wartościami $W(f)(z)$ dla $n+1$ i n będzie rozbieżny. W takim wypadku załóżmy przeciwnie, że dla wszystkich n ograniczonych oddolnie przez powiedzmy N, zachodzi $|a_n + a_{n+1}| \le C^n(C-1)\frac{\epsilon}{2}$. Wtedy dla $n > N$ mamy:

$$|a_n| = |a_N| + \sum_{k=N}^{n-1} (|a_{k+1}| - |a_k|) \le |a_N| + \sum_{k=N}^{n-1} |a_{k+1} + a_k| \le |a_N| + \sum_{k=N}^{n-1} C^k(C-1)\frac{\epsilon}{2} = |a_N| - C^N\frac{\epsilon}{2} + C^n\frac{\epsilon}{2}$$

Część $|a_N| - C^N\frac{\epsilon}{2}$ jest tutaj stałą, co w połączeniu z pozostałym $C^n\frac{\epsilon}{2}$ musi dawać powiedzmy $|a_n| < C^n\frac{2\epsilon}{3}$ dla każdego odpowiednio dużego n. To stoi jednak w sprzeczności z założeniami, tym samym kończąc dowód lematu. $\square$

Teraz przejdziemy do całek okrężnych. Zdefiniujmy sobie funkcję tworzącą $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)x^k}{k-z}$. Przypomnijmy sobie wzór na n-ty przesunięty wielomian Legendre'a [2]:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}$$

W takim razie my tymczasowo zdefiniujemy funkcje $Q_n(x)$:

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} (-x)^k \binom{2n-k}{n}\binom{n}{k} = \frac{(-x)^n P_n(\frac{1}{x})}{n!}$$

Możemy teraz rozważyć funkcję $G(x) = F(x) \cdot Q_n(x)$. Jej n-ta pochodna w zerze wyrażona jest wzorem

$$G^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)}(0) Q_n^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k! f(k)}{k-z} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{n!} \binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} f(k)(-1)^{n-k}\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k-z}$$

A więc sumę występującą w granicy $W(f)(z)$ jesteśmy w stanie zwinąć jako odpowiednią pochodną funkcji $G(x)$. Dobierzmy sobie teraz taki promień r, żeby $F(x)$ było w tym obszarze zbieżne (nie miało żadnych residuum). Niech C będzie ścieżką zamkniętą okrążającą 0 dokładnie raz po okręgu o promieniu r. Wtedy ze wzoru Cauchy'ego [5] możemy zapisać:

$$G^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{F(x)Q_n(x)}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(x)(-x)^n P_n(\frac{1}{x})}{x^{n+1}}dx$$

Podstawiając całość do wzoru na $W(f)(z)$ otrzymujemy drugą ważną formę granicy:

$$W(f)(z) = \frac{-z\Pi(z)}{\Pi(-z)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2z}}{2\pi i}\oint_C \frac{F(x)P_n(\frac{1}{x})}{x}dx$$

Od tego momentu można dalej przekształcać (na przykład wykorzystując formułę Rodrigues'a [2] z podstawieniem $u = \frac{1}{x}$). My jednak tu poprzestaniemy. Mimo że jest to stosunkowo zwięzła forma, my tak naprawdę nie wykorzystamy jej już wcale.

4 Dowody

4.1 Funkcja Stała

Fakt $W(f)(z) = f(z)$ dla dowolnej funkcji stałej f oraz $z \in \mathbb{C}$ udowodniliśmy już w poprzednim dziale. $\square$

4.2 Wielomiany

Niech więc $P(x)$ będzie wielomianem stopnia d. Weźmy dowolne z takie, że $\Re(z) > d-1$. Na podstawie lematu 2 będziemy dowodzić, że:

$$0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)-P(z)}{k-z}(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right)$$

Stąd dowód sprowadza się do pokazania, że suma w nawiasie to $O(n^{2d-2})$. Jako że $\frac{P(k)-P(z)}{k-z}$ jest wielomianem stopnia $d-1$ w zmiennych k, z, to możemy go rozbić na sumę dwumianów $\binom{k}{s}$ (gdzie $0 \le s \le d-1$) przemnożonych przez odpowiednie potęgi z. Tak więc sprowadzilismy dowód do pokazania, że:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{s}\binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = O(n^{2s}) \tag{1}$$

Łatwo można uzasadnić, że $\binom{k}{s}\binom{n}{k} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{k-s}$. Z tego powodu (1) zostanie udowodnione, jeśli wykażemy równość:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-s}{k-s}\binom{n+k}{n} = (-1)^n\binom{n+s}{s} \tag{2}$$

W takim razie pozostaje nam udowodnić (2).

Dla $n = s$ równość jest trywialna. Również dla $s = 0$ już ją pokazaliśmy. Oznaczmy sobie teraz powyższą sumę dla danego n, s przez $T(n,s)$. Zachodzi:

$$T(n,s) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-s}{k-s}\binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-s}{k-s}\binom{n+k-1}{n-1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-s}{k-s}\binom{n+k-1}{n} =$$

$$= (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\sum_{l=1}^{n-s}\binom{n-s-l}{k-s-l+1}\right)\binom{n-1+k}{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-s}{k+1-s}\binom{n+k}{n} =$$

$$= (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + \sum_{l=1}^{n-s}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-s-l}{k-s-l+1}\binom{n-1+k}{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\binom{n+1-s}{k+1-s} - \binom{n-s}{k-s}\right)\binom{n+k}{n} =$$

$$= (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + \sum_{l=1}^{n-s}T(n-1,s+l-1) - T(n,s-1) + T(n,s) \quad\Rightarrow\quad T(n,s-1) = (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + \sum_{l=s}^{n-1}T(n-1,l)$$

A więc zakładając indukcyjnie (2) dla $n-1$ oraz wszystkich s, otrzymujemy:

$$T(n,s-1) = (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + \sum_{l=s}^{n-1}(-1)^{n-1}\binom{n-1+l}{n-1} = (-1)^n\binom{2n-1}{n-1} + (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n} - (-1)^{n-1}\binom{n+s-1}{n}$$

Co już daje (2) i kończy dowód $W-$*zbieżności* wielomianów. $\square$

4.3 Funkcje Wymierne

Ten dowód będzie się różnił w od tego przy wielomianach. Wykorzystamy go przy dowodzie wniosku 1.1.

Wpierw zauważmy, że każdą funkcję wymierną $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dla $\deg(P) \le \deg(Q)$ możemy rozbić na sumę postaci $R(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{c_i}{(x-w_i)^{s_i}}$. W takim razie interesować nas będą tylko funkcje postaci $\frac{1}{(x-w)^s}$. Istotnie, teza zbieżności granicy

$W(R)(z)$ do $R(z)$ będzie prawdziwa jeśli tylko pokażemy zbieżność $W(\frac{1}{(x-w)^s})(z)$ dla każdego $\Re(z) > \Re(w)$.

Najpierw wróćmy się do dowodu lematu 2 odnośnie funkcji stałej. Udowodniliśmy tam, że dla każdego n, x zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x-k} \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} = -\frac{1}{x} \prod_{k=0}^{n} \frac{k+x}{k-x}$$

Będziemy teraz brać s-tą pochodną z obydwu stron równości. Oznaczmy sobie:

$$T(n,x) = -\frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x} \right)$$

Tak, że zachodzi:

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x} \prod_{k=0}^{n} \frac{k+x}{k-x} \right) = -\frac{1}{x} \prod_{k=0}^{n} \frac{k+x}{k-x} \cdot T(n,x)$$

Nie będziemy się zagłębiać w szczegóły. Zauważmy tylko, że $T(n,x)$ dla stałego x oraz rosnącego n zachowuje się tak jak $O(\ln(n))$. Z kolei pochodne funkcji $T(n,x)$ dla stałego x będą odgórnie ograniczone. Z tych powodów napiszemy:

$$\frac{d^s}{dx^s} \left(-\frac{1}{x} \prod_{k=0}^{n} \frac{k+x}{k-x} \right) = -\frac{1}{x} \prod_{k=0}^{n} \frac{k+x}{k-x} \cdot O(\ln^s(n))$$

Z czego już wynika:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x-k)^{s+1}} \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} = O(n^{-2x} \ln^s(n)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-x)^s} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) = 0$$

jeśli tylko $\Re(x) < \Re(z)$. Reszta dowodu to zwykłe zsumowanie odpowiednich wyrażeń z odpowiednimi wagami. Zauważmy prostą zależność:

$$\left(\frac{1}{(k-w)^s} - \frac{1}{(z-w)^s} \right) \frac{1}{k-z} = \frac{\frac{1}{k-w} - \frac{1}{z-w}}{k-z} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{1}{(k-w)^l (z-w)^{s-1-l}} = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{-1}{(k-w)^{l+1} (z-w)^{s-l}}$$

I właśnie z tego powodu dla $\Re(z) > \Re(w)$ mamy:

$$0 = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{-1}{(z-w)^{s-l}} \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-w)^{l+1}} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(k-w)^s} - \frac{1}{(z-w)^s} \right) \frac{1}{k-z} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right)$$

i tak na podstawie lematu 2 otrzymujemy $W(\frac{1}{(x-w)^s})(z) = \frac{1}{(z-w)^s}$. To kończy dowód $W-$ *zbieżności* funkcji wymiernych. □

4.4 Funkcja Wykładnicza i Wielomian

Teraz przejdziemy do granicy, która będzie się nieco różniła od poprzednich. Dla danego $a \in (0,1)$ oraz wielomianu $P(x)$ będziemy dowodzić zbieżności granicy $W(P(x)a^x)(z) = P(z)a^z$ dla każdego $\Re(z) > max\left(0, \frac{\deg(P)}{2} - 1\right)$. A zaczniemy od udowodnienia jednego ciekawego lematu:

Lemat 4 *Niech dane będą liczby $m, n \geq 0$ oraz $x \in (0,1)$. Wtedy zachodzi:*

$$|P_n^{(m)}(x)| \leq \frac{(n+m)!}{n!} (x(1-x))^{-\frac{m}{2}}$$

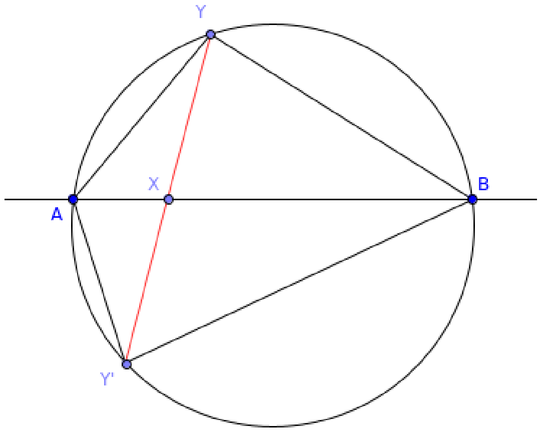
Dowód:

Najpierw przypomnijmy sobie nierówność Cauchy'ego [5] na pochodne:

$$|f^{(m)}(x)| \leq \frac{m!M}{r^m}$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem okręgu o środku w x, zaś M największą wartością bezwzględną przyjmowaną przez f na tym okręgu.

My przyjmiemy następujące wartości: $r = \sqrt{x(1-x)}$ $\quad M = \sqrt{x^n(1-x)^n}$. Najpierw udowodnimy, że istotnie dla każdego y takiego, że $|y-x| = r$ zachodzi $|y^n(1-y)^n| \leq \sqrt{x^n(1-x)^n}$. Równoważnie daje to oczywiście $|y||1-y| \leq \sqrt{x(1-x)}$. Teraz posłużymy się... geometrią syntetyczną! Umieśćmy punkty $A = (0,0)$ $\quad B = (1,0)$ w układzie współrzędnych. Niech także $X = (x, 0)$ oraz $Y = (\Re(y), \Im(y))$. Teza sprowadza się do wykazania $|AY| \cdot |BY| \leq |AB| \cdot |XY|$.



Niech Y' będzie odbiciem punktu Y względem X. Z założeń co do punktu X wnioskujemy, że punkty A, Y, B, Y' leżą na jednym okręgu. Stąd zachodzi: $|AY| \cdot |BY'| + |AY'| \cdot |BY| = |AB| \cdot |YY'|$. Nietrudno zauważyć, że nierówności $|AY| > |AY'|$ oraz $|BY| > |BY'|$ nie mogą zachodzić w tym samym momencie (przeciwne nierówności również), stąd:

$$(|AY| - |AY'|)(|BY| - |BY'|) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |AY||BY| + |AY'||BY'| \leq |AY||BY'| + |AY'||BY| = |AB| \cdot |YY'| = 2|XY||AB|$$

Pola trójkątów AYB oraz $AY'B$ są równe, a więc ze wzoru na pole trójkąta wykorzystującego dwa boki oraz sinus kąta między nimi (wraz z faktem, że $AYB = 180° - AY'B$) dostajemy $|AY||YB| = |AY'||BY'|$. Podstawiając ten wynik do powyższego rezultatu otrzymujemy nierówność $|AY| \cdot |BY| \leq |AB| \cdot |XY|$.

W takim razie z nierówności Cauchy'ego otrzymujemy $\left|\frac{d^m}{dx^m}(x^n(1-x)^n)\right| \leq m! \cdot (x(1-x))^{\frac{n-m}{2}}$. Łącząc to ze wzorem Rodrigues'a $P_n^{(m-n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^m}{dx^m}(x^n(1-x)^n)$ otrzymujemy tezę lematu. □

Z tym rezultatem możemy przejść do dowodu $W(P(x)a^x)(z) = P(z)a^z$. Jeżeli udowodnimy, że równocześnie $W((P(x) - P(z))a^x)(z) = 0$ oraz $W(a^x)(z) = a^z$, to dodając drugie równanie pomnożone przez $P(z)$ otrzymamy tezę. Najpierw zajmijmy się tym wyrażeniem (lemat 2):

$$W((P(x) - P(z))a^x)(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k) - P(z)}{k - z}(-a)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right)$$

Tutaj znowu możemy zauważyć, że $\frac{P(k)-P(z)}{k-z}$ to suma wielomianów w k z odpowiednimi wagami. Wystarczy w takim razie, jeśli udowodnimy prawdziwość następującej granicy:

$$0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^s \frac{(k+s)!}{k!}(-a)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} P_n^{(s)}(a)$$

To zaś na mocy lematu 4 jest prawdziwe dla $\Re(z) > \frac{s}{2}$. Ale wiemy że $s \leq \deg(P) - 1$, więc $\Re(z) > \frac{\deg(P)-1}{2}$ nam wystarcza.

Drugą częścią jest udowodnienie $W(a^x)(z) = a^z$. Tutaj wykonujemy następujące przekształcenia (znowu lemat 2):

$$W(a^x)(z) = a^z \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k - a^z}{k - z} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} a^z \int_a^1 x^{k-z-1} dx (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \int_a^1 x^{-z-1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-x)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) dx$$

To jest coś, co możemy ograniczyć w wartości bezwzględnej przez:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2\Re(z)} \int_a^1 |x^{-z-1}| dx$$

ponieważ $|P_n(x)| \leq 1$. Powyższa granica oczywiście dąży do zera dla $\Re(z) > 0$, co kończy dowód. $\square$

4.5 Logarytm Naturalny

Główną obserwacją jest następująca zależność:

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(z+1)}{k - z} = \int_{z+1}^{k+1} \frac{dx}{(k-z)x} = \int_0^1 \frac{dx}{z + 1 + (k-z)x}$$

Ponownie wykorzystując lemat 2 widzimy, że dla $\Re(z) > 0$ mamy:

$$W(\ln(x+1))(z) = \ln(z+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(1+k) - \ln(1+z)}{k - z} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k - \frac{xz-z-1}{x}} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} dx \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{x}{xz - z - 1} \prod_{k=0}^{n} \frac{k + \frac{xz-z-1}{x}}{k - \frac{xz-z-1}{x}}$$

W takim wypadku będziemy chcieli wykazać, że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi:

$$\left| \prod_{k=0}^{n} \frac{k + \frac{xz-z-1}{x}}{k - \frac{xz-z-1}{x}} \right| < 1 \tag{3}$$

To ograniczenie z pewnością daje nam tezę. Wybierzmy sobie teraz pewne $x \in [0,1]$ i oznaczmy $d = -\frac{xz-z-1}{x}$. Łatwo zauważyć, że dla $\Re(z) > 0$ mamy $\Re(d) \in [1, \infty]$. Możemy teraz dla każdego k osobno rozważyć wyraz $\frac{k-d}{k+d}$ i go osobno ograniczyć. Otóż mamy:

$$\left| \frac{k-d}{k+d} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |k - d| < |k + d| \quad \Leftrightarrow \quad \Re(k-d)^2 < \Re(k+d)^2$$

A to na mocy $k \geq 0$ oraz $\Re(d) > 0$ jest prawdą. Stąd ograniczenie na (3). Tak udowodniliśmy $W - zbieżność$ logarytmu. $\square$

4.6 Funkcja Zeta Riemanna

Z naszym obecnym repertuarem możemy wykorzystać to, co już mamy aby wykazać kilka tożsamości. Zaczynamy od funkcji Zeta Riemanna - w gruncie rzeczy tylko po to, by później to wykorzystać do wniosku 2.

Ten dowód to będzie nic innego, jak pociągnięcie do skutku odpowiednich przekształceń z dowodu $W-zbieżności$ funkcji a^x. Jeśli się teraz przyjrzymy, to zauważymy następującą nierówność:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k - a^z}{k-z}(-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right| \leq a^{\Re(z)} \cdot \int_a^1 |x^{-z-1}| dx = a^{\Re(z)} \frac{1-a^{-\Re(z)}}{-\Re(z)} = \frac{1-a^{\Re(z)}}{\Re(z)} < \frac{1}{\Re(z)}$$

Stąd dla funkcji $\zeta(2x+2)$ mamy:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\zeta(2k+2)-\zeta(2z+2)}{k-z}(-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right| < \sum_{l=1}^{\infty} \left| l^{-2} \cdot \frac{1}{\Re(z)}\right|$$

To jest stałe i skończone. Z tej zależności wprost otrzymujemy $W(\zeta(2x+2))(z) = \zeta(2z+2)$ dla $\Re(z) > 0$. □

4.7 Dwumian Newtona

A raczej jego odwrotność. Wykazanie zbieżności granicy $W\left(\binom{2x}{x}^{-1}\right)(z)$ będzie przydatne we wniosku 1.3.

Zaczynamy z następującą tożsamością dla każdego $\Re(k) > -1$ [4]:

$$\binom{2k}{k}^{-1} = (2k+1)\int_0^{\infty} \frac{x^k}{(1+x)^{2k+2}} dx$$

Co pozwala nam zmienić tezę w następującą równoważną postać (lemat 2):

$$0 = \lim_{n\to\infty} n^{-2z}\left(\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\infty} \frac{\frac{(2k+1)x^k}{(1+x)^{2k+2}} - \frac{(2z+1)x^z}{(1+x)^{2z+2}}}{k-z} dx(-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k}\right)$$

To zaś jak w dowodzie funkcji wykładniczej i wielomianu, rozkładamy na 2 różnice, a następnie rozważamy je osobno. Nie wchodząc już w szczegóły, dla powyższej sumy otrzymujemy następujące ograniczenie górne na wartość bezwzględną:

$$n^{-2\Re(z)}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot 2\, dx + |2z+1| \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{\Re(z)} dx\right) = n^{-2\Re(z)} \cdot 1 \cdot \left(2 + \frac{|2z+1|}{\Re(z)}\right)$$

Czyli $\binom{2x}{x}^{-1}$ jest $W-zbieżne$ dla każdego $\Re(z) > 0$. □

4.8 Funkcja Okresowa

Udowodnijmy wreszcie $W-rozbieżność$. Zanim jednak przejdziemy do funkcji okresowej, rozpatrzmy funkcję $f(x) = e^{sxi}$ dla $s \in (0, 2\pi)$. Niech $\omega = e^{si}$. Podobnie jak w lemacie 3, ustalmy ciąg:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \omega^k (-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = P_n(\omega)$$

Dalej oznaczmy $w = |2\omega - 1|$. Łatwo wykazać, że $w > 1$. Nasze funkcje $P_n(x)$ spełniają następującą zależność rekurencyjną [2]:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = -(2n+1)(2x-1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

W tym momencie załóżmy indukcyjnie, że $|a_{n+1}| \geq |a_n|$. Dla $n = 0$ nierówność jest prawdziwa. Dalej dostajemy takie nierówności:

$$(n+1)a_{n+1} = -(2n+1)(2\omega-1)a_n - na_{n-1} \quad \Rightarrow \quad |(n+1)a_{n+1} + na_{n-1}| = (2n+1)w|a_n| \quad \Rightarrow$$

$$(n+1)|a_{n+1}| + n|a_{n-1}| \geq (2n+1)w|a_n| \quad \Rightarrow \quad |a_{n+1}| \geq \frac{(n+1)w|a_n| + n(w|a_n| - |a_{n-1}|)}{n+1} \geq w|a_n|$$

Co (oprócz kroku indukcyjnego) daje $|a_n| \geq w^{n-1}$. W takim razie na mocy lematu 3, e^{is} jest $W-rozbieżne$.

Dopiero teraz możemy przejść do funkcji okresowej. Niech więc $f(x)$ będzie funkcją okresową o okresie $T \in \mathbb{N}_+$. Nadpisując niech $\omega = e^{\frac{2\pi i}{T}}$. Za pomocą Dyskretnej Transformaty Fouriera [6] możemy funkcję f przedstawić jako suma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{T-1} q_k \omega^{kx}$$

Do oznaczeń z lematu 3 przyjmijmy teraz:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)(-1)^k \binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{T-1} q_k P_n(\omega^k)$$

Ponieważ $f(x)$ nie jest stałe, to istnieje $q_k \neq 0$ dla $k \in [1, T-1]$. Weźmy więc taki indeks j, że $q_j \neq 0$ oraz $q_k = 0$ dla każdego $k \in [j+1, T-j-1]$. Innymi słowy, j jest indeksem wyrazu o największej odległości ω^j od 1. Jak już zauważyliśmy, $j \neq 0$. Ponownie nadpisując niech $w = |2\omega^j - 1|$. Resztę dowodu podzielimy na 2 części.

Pierwsza z nich to pokazanie, że składnik $q_j\omega^{jk}$ rośnie znacznie szybciej od innych. Aby uściślić - wykażemy, że dla każdego $k \notin [j, T-j]$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n(\omega^k)|}{|P_n(\omega^j)|} = 0$. W tym celu rozważymy formę iloczynową przesuniętych wielomianów Legendre'a [2]. Znany faktem jest, że $P_n(x)$ ma swoje wszystkie n pierwiastków w przedziale $[0, 1]$. Co więcej, są one rozmieszczone symetrycznie do $\frac{1}{2}$. W takim razie rozważmy wyrażenie:

$$\frac{|(\omega^k - \alpha)(\omega^k - 1 + \alpha)|}{|(\omega^j - \alpha)(\omega^j - 1 + \alpha)|}$$

Udowodnimy, że niezależnie od α jest ono odgórnie ograniczone przez stałą mniejszą od 1. Oznaczmy sobie $\theta = \frac{2\pi}{T}$ oraz $\epsilon = \cos(k\theta) - \cos(j\theta)$. Najpierw rozpatrzmy różnicę kwadratów mianownika i licznika:

$$|(\omega^j - \alpha)(\omega^j - 1 + \alpha)|^2 - |(\omega^k - \alpha)(\omega^k - 1 + \alpha)|^2 =$$

$$= (1 - 2\alpha\cos(j\theta) + \alpha^2)(1 - 2(1-\alpha)\cos(j\theta) + (1-\alpha)^2) - (1 - 2\alpha\cos(k\theta) + \alpha^2)(1 - 2(1-\alpha)\cos(k\theta) + (1-\alpha)^2) =$$

$$= 2(\cos(k\theta) - \cos(j\theta))(\alpha + \alpha(1-\alpha)^2 + 1 - \alpha + (1-\alpha)\alpha^2 - 2\alpha(1-\alpha)(\cos(k\theta) + \cos(j\theta))) \geq$$

$$\geq 2\epsilon(1 + \alpha(1-\alpha) - 4\alpha(1-\alpha)) \geq \frac{\epsilon}{2}$$

Stąd już łatwo uzyskujemy następującą nierówność:

$$\frac{|(\omega^k - \alpha)(\omega^k - 1 + \alpha)|}{|(\omega^j - \alpha)(\omega^j - 1 + \alpha)|} \leq \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{2|(\omega^j - \alpha)(\omega^j - 1 + \alpha)|^2}} \leq \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{32}}$$

Mnożąc ją dla każdego pierwiastka α funkcji $P_n(x)$ uzysujkemy:

$$\frac{|P_n(\omega^k)|^2}{|P_n(\omega^j)|^2} \leq \sqrt{\left(1 - \frac{\epsilon}{32}\right)^n}$$

A ponieważ $\epsilon > 0$, to dostajemy granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n(\omega^k)|}{|P_n(\omega^j)|} = 0$. Teraz pora na drugą część dowodu.

Mianowicie po Dyskretnej Transformacie Fouriera funkcji $f(x)$ nie rozważyliśmy współczynnika q_{T-j}. Oznaczmy sobie $b_n = q_j P_n(\omega^j) + q_{T-j} P_n(\omega^{-j})$. Jeżeli $j = \frac{T}{2}$, to $|b_n| = 2|q_j||P_n(\omega^j)|$, w przeciwnym wypadku pokażemy, że b_n rośnie (miejscami) tak samo szybko jak $P_n(\omega^j)$. Ponownie korzystając ze wzorów rekurencyjnych mamy:

$$(n+1)b_{n+1} = -(2n+1)((2\omega^j - 1)q_j P_n(\omega^j) + (2\omega_j^{-1} - 1)q_{T-j} P_n(\omega^{-j})) - nb_{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)b_{n+1} = -(2n+1)((2\omega^{-j} - 1)b_n + 2q_j(\omega^j - \omega^{-j})P_n(\omega^j)) - nb_{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)b_{n+1} + nb_{n-1} + (2n+1)(2\omega^j - 1)b_n}{2n+1} = 4q_j \sin(\theta j) P_n(\omega^j) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)|b_{n+1}| + n|b_{n-1}| + (2n+1)|2\omega_j - 1||b_n|}{2n+1} \geq 4|q_j| \sin(\theta j) |P_n(\omega^j)|$$

Skąd przynajmniej jeden spośród wyrazów:

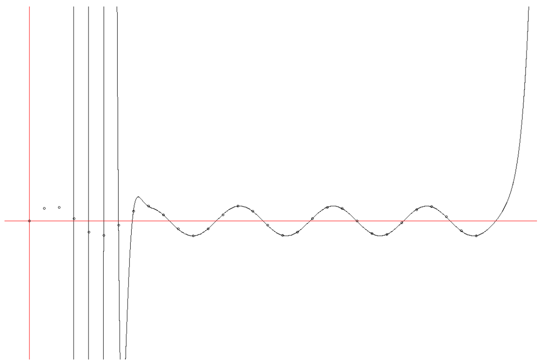
$$\frac{(n+1)|b_{n+1}|}{2n+1} \qquad \frac{n|b_{n-1}|}{2n+1} \qquad |2\omega^j - 1||b_n|$$

Musi wynosić co najmniej $\frac{4}{3}|q_j| \sin(\theta j)|P_n(\omega^j)|$. Z założeń wynika, że $|q_j| \sin(\theta j) \neq 0$, więc dla każdego n spośród trójki $|b_{n+1}|, |b_n|, |b_{n-1}|$ pewna liczba będzie rzędu $|P_n(\omega^j)|$. Łącząc to z rezultatem $\lim_{n\to\infty} \frac{|P_n(\omega^k)|}{|P_n(\omega^j)|} = 0$ otrzymujemy:

$$|a_n| = \left| \sum_{k=0}^{T-1} q_k P_n(\omega^k) \right| = |P_n(\omega^j)| \cdot \left| \frac{b_n}{P_n(\omega^j)} + \sum_{k \notin [j, T-j]} \frac{P_n(\omega^k)}{P_n(\omega^j)} \right| = |P_n(\omega^j)| \cdot \Omega(1) = \Omega(w^n)$$

Krótko mówiąc, nasze ograniczenia wystarczają do użycia lematu 3 i stwierdzenia, że f jest $W - \textit{rozbieżne}$. □

Jako ciekawostkę zostawiam wykres $W(\sin(x))(z)$ dla $n = 30$. Okazuje się, że granica potrafi przybliżać funkcje okresowe, tylko że nie w jednym, stałym punkcie.



4.9 Wniosek 1

W tym dowodzie kluczowe jest wykorzystanie punktu 4 Twierdzenia. Przyjmijmy więc takie oznaczenia, jakie podaliśmy w treści wniosku. Załóżmy teraz, że wielomian $\frac{Q(x)}{x-z}$ nie ma żadnych pierwiastków z_0 spełniających $\Re(z_0) \geq \Re(z)$. Wtedy na podstawie punktu 4 Twierdzenia oraz lematu 2 dostajemy:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R(k)(k-z)}{k-z} \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} = O(n^{2z})$$

co stoi w sprzeczności z założeniami. □

4.10 Wniosek 2

Wystarczy że do punktu 6 Twierdzenia podstawimy $z = s - \frac{1}{2}$ dla $s \in \mathbb{N}_+$. Oprócz tego do naszej granicy musimy dodać następujące zależności:

$$\frac{\Pi(s-\frac{1}{2})}{\Pi(-s+\frac{1}{2})} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad \zeta(2k+2) = \frac{(-1)^k B_{2k+2}(2\pi)^{2k+2}}{2(2k+2)!}$$

Pierwsza z tych zależności wynika ze wzoru rekurencyjnego na Π oraz z faktu $z-\frac{1}{2}-(-z+\frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}$. Po prostym podstawieniu tych zależności do granicy $W(\zeta(2x+2))(s-\frac{1}{2})$ i kilku przekształceniach dostajemy wniosek 2. □

Nie bez powodu zajmujemy się funkcją zeta Riemanna. Istnieje słynny nierozwiązany problem pytający, czy wartości funkcji ζ dla nieparzystych argumentów są niewymierne. Ale jednocześnie znany jest wzór na $\zeta(2s)$. Nasz dobór funkcji $\zeta(2x+2)$ pochodził właśnie od tego, że wartości w punktach parzystych funkcji ζ są znane. Wraz z fortunnie wymiernym ilorazem funkcji Π otrzymujemy alternatywną postać tego słynnego problemu.

4.11 Wniosek 3

Wniosek 3 to nic innego jak rozpisane $W\left(\binom{2x}{x}^{-1}\right)(z)$. Wiemy już, że:

$$\binom{2z}{z}^{-1} = \frac{-\Pi(z)}{\Pi(-z)} \lim_{n\to\infty} n^{-2z} z \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}^{-1} (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k-z} \right)$$

Co przy wykorzystaniu zależności $\binom{2k}{k}^{-1}\binom{n+k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n+k}{2k}$ a także $\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}$ [3] daje rezultat. □

5 Hipotezy

W tej pracy mimo wszystko nie byłem w stanie udowodnić wielu rezultatów. Na koniec pozostawiam kilka hipotez na temat *$W-$ zbieżności*:

Hipotezy 4.1

1. Funkcja $\sqrt{x}$ jest $W-$ zbieżna.

2. Funkcja $\ln(\Pi(x))$ jest $W-$ zbieżna.

3. Funkcja $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ jest $W-$ zbieżna.

4. Jeśli funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ są $W-$ zbieżne, to również ich iloczyn jest $W-$ zbieżny.

5. Załóżmy, że funkcja holomorficzna $f(x)$ ma residuum w punkcie z_0. Wtedy granica $W(f)(z)$ jest zbieżna dla co najwyżej przeliczalnej ilości z spełniających $\Re(z) < \Re(z_0)$.

6. Nie istnieje niestała funkcja $f(x)$, dla której granica $W(f)(z)$ byłaby zbieżna dla każdego zespolonego z.

7. Dla danej funkcji całkowitej (ang. entire function) f granica $W(f)(z)$ jest zbieżna do wartości innych niż $f(z)$ dla co najwyżej przeliczalnej liczby zespolonych z.

8. Jeśli funkcja f jest $W-$ zbieżna, to zbiór punktów, dla których $W(f)(z)$ jest zbieżne, tworzy półpłaszczyznę ograniczoną zależnością $\Re(z) > \alpha$ dla pewnego α.

Odnośnie punktu 4 dodamy jeszcze tylko, że z przekształceń $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$ jasno wynika, że wystarczy udowodnić następujące stwierdzenie: jeśli $h(x)$ jest *$W-$ zbieżne*, to $h^2(x)$ również jest *$W-$ zbieżne*.

Jako że temat *$W-$ zbieżności* wydaje się być czymś oryginalnym, to myślę, że może popchnąć matematyczne badania w nowym, ciekawym kierunku. Być może poza uogólnianiem przyda się w rozwiązywaniu otwartych problemów bądź pozwoli uzyskać skomplikowane tożsamości. A być może jednak granica $W(f)(z)$ pozwoli efektywnie przybliżać funkcje z dużą dokładnością. W każdym razie uważam, że ta praca jedynie zaczęła badać temat *$W-$ zbieżności*, a dalsze wnioski płynące z tego tematu mogą nas jeszcze zaskoczyć.

References

[1] Wikipedia, *Riemann zeta function*, 16 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

[2] Wikipedia, *Legendre polynomials*, 16 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials

[3] Wikipedia, *Gamma function*, 16 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[4] Wikipedia, *Beta function*, 16 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function

[5] Wikipedia, *Cauchy's integral formula*, 16 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula

[6] Wikipedia, *Discrete Fourier transform*, 17 kwietnia, https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform

[7] F. Leja, *Funkcje zespolone*, 2006