

Przekształcenia rzutowe i involucje

Filip Konieczny

29.04.2020

Przedmowa

Praca ta zawiera wyniki studiów nad geometrią rzutową, którą postarałem się uchwycić w najszerszym możliwym kontekście. Zrezygnowałem jednak z „klasycznego”, aksjomatycznego podejścia, na rzecz przedstawienia tego tematu na nowy sposób, skierowany bardziej na zastosowanie w procesie rozwiązywania problemów geometrycznych.

Pisząc ten skrypt kierowałem się kilkoma założeniami: chciałem by w jak największym stopniu był samowystarczalny, jasno i intuicyjnie wprowadzał w temat oraz prezentował nowy punkt widzenia na geometrię rzutową, o bardziej olimpijskim charakterze. Oczywiście stał się on także okazją do zaprezentowania własnych rezultatów - wśród nich znajduje się między innymi zastosowanie punktów kołowych, nowy „inny niż wszystkie” dowód twierdzenia o symedianie, uogólnienie techniki *moving points* oraz twierdzenie 2.4, które nazwałem *wszechstronnym* ze względu na zakres możliwych zastosowań. Warty uwagi jest także nowy dowód inwolucyjnego twierdzenia Desargues’a. Ponadto w ostatnim rozdziale znajduje się zestaw twierdzeń opisujących moje obserwacje związane z badaniem pewnych konfiguracji geometrycznych w programie Geogebra¹.

W pierwszym rozdziale znajduje się wprowadzenie do geometrii rzutowej, prezentujące podstawowe struktury, z których własności będę korzystał w dalszych częściach pracy.

Następny rozdział składa się z dwóch części. W pierwszej z nich przedstawiony jest koncept przekształceń rzutowych na prostej i płaszczyźnie, ich podstawowe własności oraz klasyfikacja. Inspiracją były tutaj artykuły z czasopisma Delta „Desargues i nożyce” oraz „Geometria rzutowa”. Sformułowane i udowodnione jest wspomniane wszechstronne twierdzenie 2.4, które natychmiast uogólnia pojęcia zdefiniowane w pierwszym rozdziale na zespoloną płaszczyznę rzutową. Druga część tego rozdziału poświęcona jest specjalnemu typowi przekształceń zachowujących dwustosunek, które nazwałem mapami rzutowymi (inspirując się wprost angielskim terminem *projective maps*) oraz specyficznej technice rozwiązywania problemów geometrycznych, uogólnionej dodatkowo za pomocą wszechstronnego twierdzenia.

Trzeci rozdział poświęcony jest tak zwanym inwolucjom, będącymi spełniającymi dodatkowe założenia mapami rzutowymi. Ów wzmocnienie założeń umożliwia wyciągnięcie szerokiej klasy wniosków na temat tych funkcji.

Czwarty rozdział prezentuje jedną z pierwszych przyczyn powstania tej pracy - inwolucyjne twierdzenie Desargues’a - oraz pokazuje jego zastosowania.

Całości towarzyszą liczne zadania prezentujące poznane techniki i terminy. Występują wśród nich własne problemy oraz te zaadoptowane z różnego rodzaju olimpiad krajowych i międzynarodowych [1] [2] [3] [4]. Wszystkie przedstawione dowody, zarówno zadań, jak i twierdzeń, są autorskie, a ze względu na zastosowane metody często istotnie różnią się od rozwiązań wzorcowych.

Na koniec chciałbym podziękować nauczycielowi Marcinowi Radwańskiemu za sugestię i opiekę nad tą pracą oraz Rafałowi Pyzikowi za pomoc w wyszukiwaniu błędów.

Filip Konieczny

¹Wszystko w myśl idei przyświecającej tak zwanym „geoburom”, którą można określić jako rysowanie mniej lub bardziej losowych obiektów w Geogebrze licząc na otrzymanie jakiegoś nieoczywistego wniosku, który można następnie udowodnić i wykorzystać jako zadanie geometryczne.

Spis treści

1	Wstęp do geometrii rzutowej	4
1.1	Płaszczyzna rzutowa	4
1.2	Dwustosunek	8
1.3	Okrąg i stożkowe	17
1.4	Biegunowe	29
1.5	Dualizm	36
2	Przekształcenia zachowujące dwustosunek	39
2.1	Przekształcenia rzutowe	39
2.2	Mapy rzutowe	50
3	Inwolucje	64
3.1	Klasyfikacja	65
4	Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a	73
4.1	Podstawowa wersja	73
4.2	Postać dualna	79
5	O sprzężeniu harmonicznym i czworokącie zupełnym	95
5.1	Sprzężenie harmoniczne punktu względem czworokąta zupełnego	95
5.2	Czworokąt i czworobok zupełny	102

Uwagi wstępne

W pracy stosowane są między innymi następujące oznaczenia i umowy:

1. Odcinki skierowane

Przez zapis $|AB|$ należy rozumieć długość odcinka w standardowym tego określenia znaczeniu. Natomiast oznaczenie \overline{AB} będziemy rozumieć jako *skierowaną* długość odcinka. Prostej nadajemy układ współrzędnych i przyjmujemy

$$\overline{AB} = b - a$$

gdzie a, b to współrzędne punktów odpowiednio A i B .

Powyższa umowa służy głównie unifikacji wielu przypadków twierdzeń, a także radzenia sobie za jednym razem ze wszystkimi konfiguracjami geometrycznymi danego problemu (np. równość $\overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = 0$ zachodzi dla współliniowych punktów X, Y, Z niezależnie od ich kolejności na prostej). Definicję tę stosujemy także w przypadku prostej zespolonej.

2. Inwersja

Dany jest punkt właściwy O , prosta rzutowa p przez niego przechodząca oraz $k \neq 0$. Inwersją na prostej o środku w O i potędze k \mathcal{I}_O^k nazywamy przekształcenie, które punkt właściwy $P \in p$ różny od O przekształca w $P' \in p$ taki, że $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$ oraz dodatkowo $\mathcal{I}_O^k(O) = \infty_p$ i $\mathcal{I}_O^k(\infty_p) = O$.

Uwaga Warto zauważyć, że dla $k \in \mathbb{R}_+$ powyższe przekształcenie pokrywa się z inwersją o środku w O i promieniu \sqrt{k} , a dla $k \in \mathbb{R}_-$ jest to antyinwersja o tym samym środku i promieniu $\sqrt{-k}$ (inwersja złożona z odbiciem symetrycznym względem środka inwersji).

3. Czworokąt zupełny

Cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe wyznaczają sześć prostych. Proste te nazywamy *bokami* czworokąta zupełnego, z kolei punkty *wierzchołkami*. Boki niemające wspólnego wierzchołka nazywamy *naprzeciwległymi* i przecinają się one w *punktach przekątniowych*. Proste łączące punkty przekątniowe określane będą jako *przekątne*.

4. Czworobok zupełny

Jest to figura dualna do czworokąta zupełnego. Składa się z czterech prostych, z których żaden trzy nie są współpękowe, zwanych *bokami*, które przecinają się w sześciu punktach nazywanych *wierzchołkami*. Wierzchołki nazywamy *naprzeciwległymi*, gdy nie leżą na jednym boku czworoboku. Każda para wierzchołków naprzeciwległych wyznacza *przekątną* czworoboku, i przecinają się one w *punktach przekątniowych*.

Rozdział 1

Wstęp do geometrii rzutowej

W rozdziale tym zaprezentowane i wyjaśnione będzie większość pojęć występujących w geometrii rzutowej (idąc za [5] i rozszerzając część z nich). Autor zaznacza, że nie jest tu wyłożone *klasyczne* podejście do geometrii rzutowej, głównym założeniem było pokazać ją w kontekście możliwych zastosowań w rozwiązywaniu problemów oraz w sposób intuicyjny.

1.1 Płaszczyzna rzutowa

Definicja 1.1. *Płaszczyzną rzutową nad \mathbb{K} , $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ nazywamy zbiór prostych i przechodzących przez punkt $O = (0, 0, 0)$ w przestrzeni \mathbb{K}^3 . Wtedy *prostą rzutową* jest dowolna płaszczyzna przechodząca przez O , a *punktem rzutowym* dowolna prosta zawierająca O .*

W tej pracy poruszone zostaną zagadnienia związane szczególnie z płaszczyzną rzutową rzeczywistą $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ oraz zespoloną $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Jedną z ich kluczowych cech jest:

Obserwacja 1.1. Każde dwie proste rzutowe przecinają się w dokładnie jednym punkcie, a przez każde dwa punkty rzutowe przechodzi dokładnie jedna prosta.

Szczególnie przydatnymi modelami $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ oraz $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ są:

1. Model algebraiczny - wprost z definicji, płaszczyznę rzutową tworzą trójki postaci $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$, gdzie trójki $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ utożsamiamy ze sobą, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ taka, że $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$ oraz $z_1 = \lambda z_2$. Dalej w pracy współrzędne punktów rzutowych w tym modelu będą zapisywane $[x : y : z]$ dla podkreślenia tej jednorodności. Prostym rzutowym odpowiadają płaszczyzny o równaniach postaci $ax + by + cz = 0$.
2. Model euklidesowy - standardową płaszczyznę $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$ uzupełniamy o *punkty w nieskończoności* (punkty niewłaściwe, kierunki). Do każdej prostej p dołączamy jej punkt w nieskończoności ∞_p , będący punktem wspólnym jej oraz wszystkich prostych do niej równoległych. Zbiór punktów niewłaściwych l_∞ nazywamy *prostą w nieskończoności* (prostą niewłaściwą, horyzontem). Zapewnia to realizację wcześniej wspomnianej własności - proste równoległe także przecinają się w jednym

punkcie. Prosta uzupełniona o punkt w nieskończoności jest w tym modelu odpowiednikiem prostej rzutowej.

Uwaga. W drugim modelu przypadek zespolony kryje swego rodzaju konflikt oznaczeń. Zespolona prosta rzutowa $\mathbb{C}P^1$ jest zbiorem liczb zespolonych uzupełnionym o punkt w nieskończoności. Jest to jednak *prosta*, każde trzy punkty na niej są współliniowe, co jest sprzeczne z powszechnym wyobrażeniem zbioru liczb zespolonych jako płaszczyzny, dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej nad \mathbb{R} .

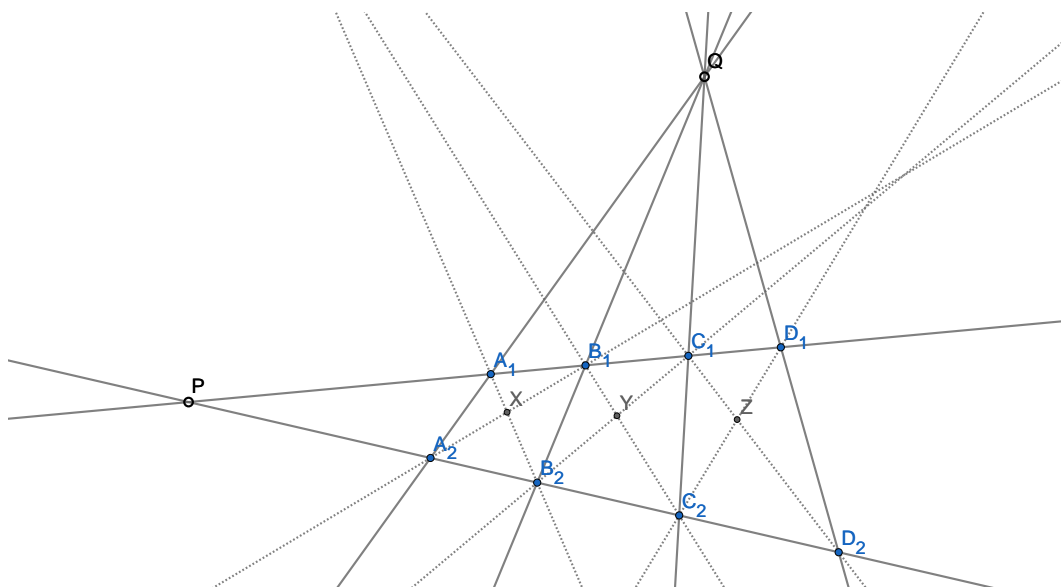
Łatwo dostrzec jak można przechodzić między tymi modelami. Rzeczywiście, by drugi uzyskać z pierwszego wystarczy przeciąć zbiór prostych przez O dowolną płaszczyzną π przez ten punkt nieprzechodzącą, na przykład z płaszczyzną reprezentowaną równaniem $z = 1$. W tym przypadku punkt $[x : y : z]$ dla $z \neq 0$ przechodzi w punkt $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) \in \pi$, natomiast punkty $[x : y : 0]$ odpowiadają punktom w nieskończoności π . Prosta w nieskończoności jest reprezentowana wtedy płaszczyzną $z = 0$. W drugą stronę natomiast wystarczy wybrać dowolny punkt O nienależący do π i przez każdy punkt tej płaszczyzny przeprowadzić prostą przechodzącą przez O .

Główną własnością powyższych przekształceń jest następująca

Obserwacja 1.2. Proste w tych przejściach przechodzą na proste, a pęki prostych na pęki prostych. Oznacza to, że zachowują one współliniowość punktów i współpękowość prostych.

Już same te proste spostrzeżenia pozwalają na rozwiązanie następującego problemu:

Zadanie 1.1 (Twierdzenie o nożycach). Dany jest punkt Q i cztery poprowadzone przez niego proste a, b, c, d . Proste k, l nieprzechodzące przez Q przecinają się w P . Oznaczmy przecięcie a prostymi z l, k odpowiednio jako A_1, A_2 i analogicznie definiujemy $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. Udowodnić, że punkty $X = A_1B_2 \cap A_2B_1, Y = B_1C_2 \cap B_2C_1$ oraz $Z = C_1D_2 \cap C_2D_1$ są współliniowe.



Dowód. Pracujemy nad rozszerzoną płaszczyzną euklidesową i korzystamy z poczynionych obserwacji. Wybierzmy punkt O nienależący do płaszczyzny zadania (oznacmy ją przez π) oraz dowolną płaszczyznę π' równoległą do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty O, P, Q . Przekształcenie biorące dowolny punkt $T \in \pi$ i przenoszące go na przecięcie prostej OT z π' zachowuje współliniowość (współliniowość punktów jest równoważna współliniowości ich obrazów), więc otrzymany w ten sposób obraz jest równoważny pierwotnemu. Proste k, l oraz a, b, c, d przejdą na dwie grupy prostych równoległych (ponieważ ich punkty wspólny przejdą na punkty na prostej w nieskończoności), więc punkty X, Y, Z przechodzą na środki równoległoboków, co z oczywistych względów kończy dowód. \square

Powyższy przykład pokazuje elegancką prostotę płaszczyzny rzutowej. Przecinanie się standardowych prostych ze szkolnej płaszczyzny euklidesowej jest na niej równoważne ich równoległości, oba te rodzaje wzajemnego położenia traktowane są równorzędnie, co upraszcza wiele problemów dotyczących prostych i punktów. Przeprowadzone działanie, zwane *rzutem perspektywicznym* jest jednym z tak zwanych *przekształceń rzutowych*, które są szerzej omówione w rozdziale drugim.

Warto także uświadomić sobie „życiową”, intuicyjną interpretację powyższych przekształceń. Wyobrażając sobie, że proste w zadaniu 1.1 to tory, to początkowy układ odpowiada patrzeniu na nie z perspektywy kogoś stojącego na powierzchni (płaskiej) ziemi i posiadającego niezerową wysokość, natomiast obraz widoczny po przerzutowaniu na płaszczyznę π' odpowiada patrzeniu na ten układ z lotu ptaka. Powyższy przykład będzie jeszcze niejednokrotnie przywoływany ze względu na swoją prostotę i reprezentatywność.

Poniższa seria zadań ma na celu wyrobienie podstawowych intuicji oraz ukazanie ich znaczenia oraz efektywności w rozwiązywaniu problemów o charakterze rzutowym.

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Desargues'a). *Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A'B'C'$. Oznaczmy punkty przecięcia prostych BC z $B'C'$ jako X , AC z $A'C'$ jako Y i AB z $A'B'$ jako Z . Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy proste AA', BB', CC' są współpękowe.*

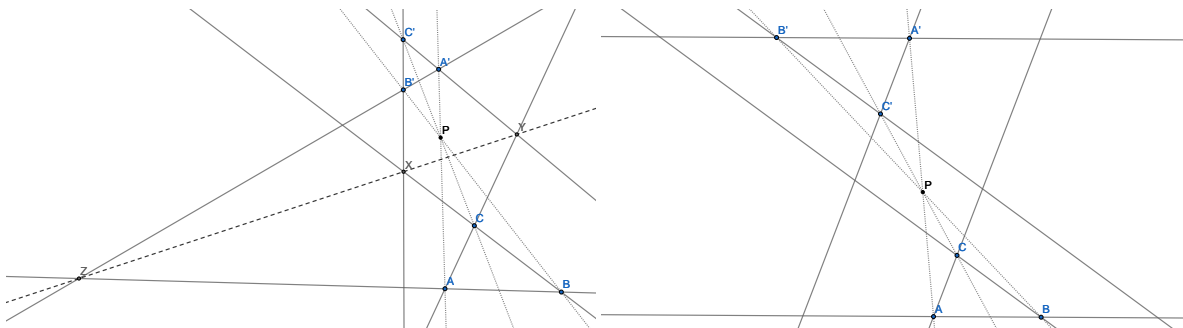
Dowód.

(\implies)

Podobnie jak wcześniej, wybierzmy punkt O nienależący do płaszczyzny zadania π i przerzutujmy z niego założenia na płaszczyznę równoległą do tej przechodzącej przez punkty O, X, Y, Z . Trójkąty $ABC, A'B'C'$ przejdą na takie, których odpowiednie boki są równoległe. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych BB' oraz CC' . Jednokładność w środku w P przekształcająca B na B' oraz C na C' (taka istnieje, ponieważ proste BC oraz $B'C'$ są równoległe) przekształca prostą AB na prostą do niej równoległą przechodzącą przez B' , a prostą AC na prostą do niej równoległą przechodzącą przez C' , czyli przenosi punkt A na A' , więc punkty $AA'P$ są współliniowe, co kończy dowód.

(\impliedby)

„Wyrzucimy” jak wcześniej prostą YZ do nieskończoności. Wtedy proste $AC, A'C'$ oraz $AB, A'B'$ są do siebie równoległe, a proste AA', BB', CC' są współpękowe (w punk-

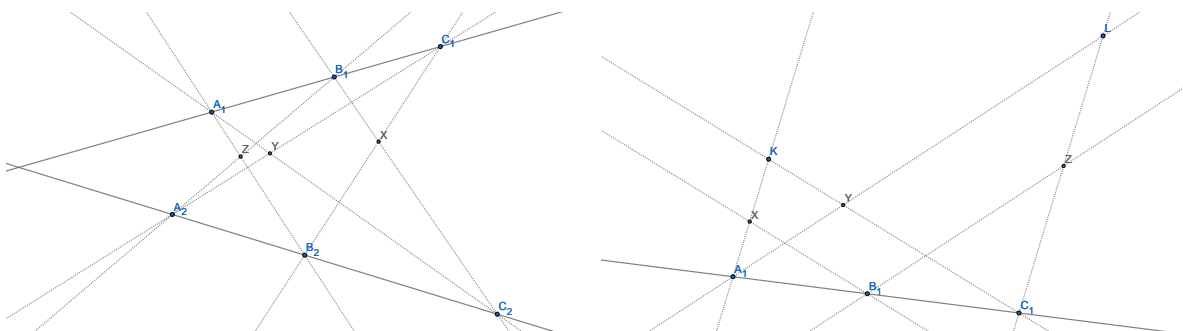


cie P). Z twierdzenia Talesa możemy zapisać

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PC}{PC'}$$

co jest równoważne równoległości prostych BC i $B'C'$, więc punkt X także trafił na prostą w nieskończoności, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie Pappusa). *Trójka punktów A_1, B_1, C_1 leży na prostej k , a trójka punktów A_2, B_2, C_2 leży na prostej $l \neq k$. Oznaczmy $X = B_1C_2 \cap B_2C_1, Y = A_1C_2 \cap A_2C_1$ oraz $Z = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Wykazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.*



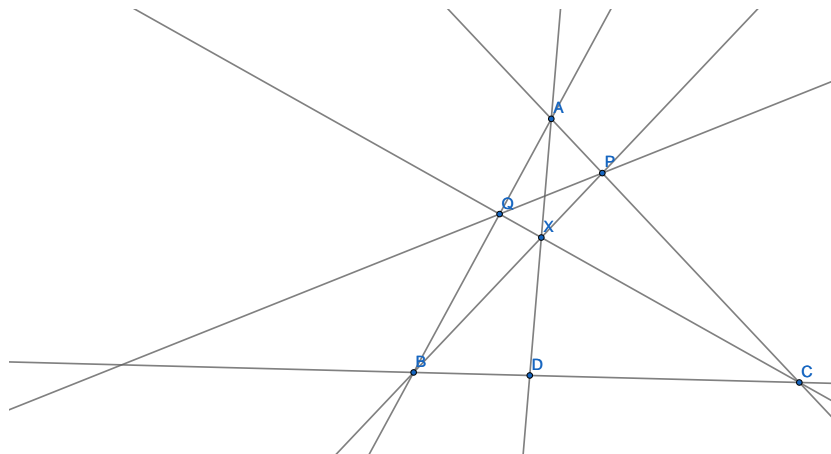
Dowód. Wybierzmy punkt O nienależący do płaszczyzny zadania i rzutujmy przez niego zadanie na płaszczyznę równoległą do tej wyznaczonej przez punkt O i prostą l . Punkty A_2, B_2, C_2 przejdą na punkty w nieskończoności. W wyniku tego proste przecinające się początkowo w tych punktach przejdą na pary prostych równoległych, więc otrzymana sytuacja wygląda tak jak na powyższym rysunku.

Oznaczmy dodatkowo przez K przecięcie prostej A_1B_2 z C_1A_2 oraz przez L przecięcie prostych A_1C_2, C_1B_2 . Trójkąty A_1YK oraz LYC_1 są podobne, więc aby wykazać współliniowość XYZ wystarczy pokazać, że punkty X oraz Z dzielą odpowiednie podstawy w tym samym stosunku (wtedy jednokładność o środku w Y przekształcająca A_1K na LC_1 przenosi Z na X). Ale

$$\frac{A_1Z}{ZK} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{LX}{XC_1}$$

co było do pokazania. \square

Zadanie 1.2. Dany jest trójkąt ABC i punkt D leżący na BC . Na prostej AD wybrano punkt X , a następnie poprowadzono proste BX i CX . Punkty ich przecięcia z, odpowiednio, prostymi CA i BA to P i Q . Udowodnić, że niezależnie od wyboru punktu X na prostej AD , punkt przecięcia prostej PQ i BC jest stały.



Dowód. Ustalmy punkt X , oznaczmy $R = PQ \cap BC$ i jak wcześniej przenieśmy prostą RA w nieskończoność. W wyniku tego (równoważnego) przekształcenia prosta PQ jest równoległą do BC , a proste AB, AC, AD są równoległe. dodatkowo wiemy, że proste BP i CQ przecinają się na prostej AD w X . Ale $BCPQ$ to równoległobok, więc punkt D jest środkiem BC . Skoro tak, to niezależnie od wyboru X' na AD otrzymana prosta $P'Q'$ będzie równoległą do BC , więc będzie się z nią przecinając w punkcie w nieskończoności - punkcie Q , co kończy dowód. \square

Z powyższych przykładów widzimy w jakim stopniu te proste przekształcenie, jakim jest „spojrzenie na rysunek z innej perspektywy”, upraszcza problem. Z drugiej strony wiele na tym tracimy - z powyższych przykładów jasno widać, że niewiele wspólnego ma obraz pierwotny z przekształconym, do tej pory korzystaliśmy jedynie z zachowywanej współliniowości. Wszystko inne - kąty, podobieństwa czy, jak wynika z ostatniego zadania, stosunek długości odcinków na prostej (D pierwotnie był dowolnym punktem na BC , a po przekształceniu jego środkiem) nie musi być zachowane.

1.2 Dwustosunek

Zdefiniujemy jedno z najważniejszych pojęć geometrii rzutowej

Definicja 1.2. Dwustosunek czwórki współliniowych punktów A, B, C, D oznaczamy $(A, B; C, D)$ i definiujemy jako

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Gdy na prostej przyjęte są współrzędne to powyższe wyrażenie wynosi

$$(A, B; C, D) = \frac{a - c}{c - b} \div \frac{a - d}{d - b}$$

gdzie a, b, c, d to współrzędne punktów odpowiednio A, B, C, D (umowa ta obowiązuje w całości pracy, o ile nie prowadzi do nieścisłości).

W obu przypadkach, gdy pewien z punktów jest punktem niewłaściwym, powyższe wyrażenia traktujemy jako granicę.

Z definicji wynika od razu pochodzenie nazwy: jest to stosunek w jakim punkt C dzieli odcinek AB podzielony przez stosunek w jakim punkt D dzieli odcinek AB . Jest to więc, w pewnym sensie, *stosunek stosunków* i stąd nazwa.

W przypadku problemów geometrycznych na płaszczyźnie rzeczywistej znacznie bardziej konwencjonalne jest stosowanie zapisu pierwszego, z kolei drugi jest o wiele wygodniejszy ze względów algebraicznych - pozwala wyznaczać współrzędne punktów, stosować podejście analityczne, a co najważniejsze, wprost uogólnia się na prostą rzutową zespoloną $\mathbb{C}P^1$, gdzie pierwsza definicja staje się nieintuicyjna.

Własności

Wprost z definicji dwustosunku wynika

1. $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$,
2. $(A, B; C, D) \cdot (A, B; D, C) = (A, B; C, D) \cdot (B, A; C, D) = 1$,
3. $(A, B; C, D) = 1 \Rightarrow A = B$ lub $C = D$,
4. Dla danych A, B, C i liczby rzeczywistej (zespolonej) λ istnieje dokładnie jedno D spełniające $(A, B; C, D) = \lambda$,
5. Dla $A \neq B$ $(A, B; C, D) = (A, B; C, D') \Rightarrow D = D'$ i analogicznie dla pozostałych punktów.

Dowód. Rozpisanie danej równości pokazuje, że jest ona równoważna

$$\frac{a-d}{d-b} = \frac{a-d'}{d'-b}$$

co w połączeniu z różnowartościowością funkcji homograficznej dla $a \neq b$ $x \rightarrow \frac{a-x}{x-b}$ implikuje tezę. □

Następne twierdzenie przedstawia najważniejszą cechę dwustosunku, determinującą jego fundamentalność w geometrii rzutowej.

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie o dwustosunku). *Na prostej k leżą punkty A, B, C, D a na prostej l punkty A', B', C', D' takie, że proste AA', BB', CC', DD' są współpękowe w P . Wtedy $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$*

Dowód. Skorzystamy z tak zwanego *Ratio lemma*

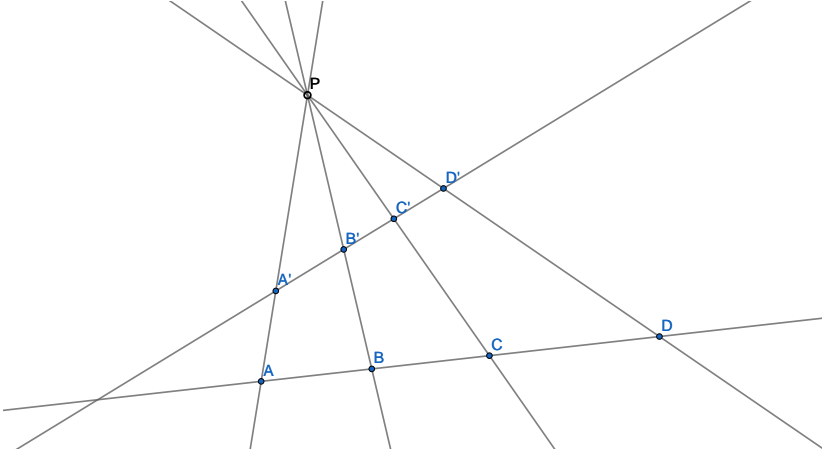
Lemat. *W trójkącie ABC punkt D leży na prostej BC . Wtedy*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{AB \cdot \sin \sphericalangle BAD}{AC \cdot \sin \sphericalangle DAC}$$

gdzie kąty są skierowane.

Wynika on wprost z następującego ciągu równości ($[ABC]$ oznacza skierowane pole trójkąta ABC)

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{[BDA]}{[DCA]} = \frac{AD \cdot AB \cdot \sin \sphericalangle BAD}{AD \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle DAC} = \frac{AB \cdot \sin \sphericalangle BAD}{AC \cdot \sin \sphericalangle DAC}$$



Przechodząc do zasadniczej części zauważmy, że

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{PA \cdot \sin \sphericalangle APC}{PB \cdot \sin \sphericalangle CPB} \div \frac{PA \cdot \sin \sphericalangle APD}{PB \cdot \sin \sphericalangle DPB} = \\ &= \frac{\sin \sphericalangle APC}{\sin \sphericalangle CPB} \div \frac{\sin \sphericalangle APD}{\sin \sphericalangle DPB} = (A', B'; C', D') \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Uwaga. Dowód twierdzenia zawiera subtelną lukę, dotyczącą punktów niewłaściwych. Można je formalnie rozważyć jako osobne przypadki i analogicznym rachunkiem pokazać ich prawdziwość. Innym sposobem jest potraktowanie tych przypadków jako przejść granicznych i skorzystanie z ciągłości geometrii.

Niestety, to podejście *nie* uogólnia się na przypadek $\mathbb{C}P^2$. Wersja zespolona (oraz uzupełnienie) powyższego dowodu, jak i pozostałych w tym rozdziale, znajduje się w rozdziale drugim.

Twierdzenie 1.3 pozwala na wprowadzenie następującego oznaczenia.

Definicja 1.3. Dwustosunkiem czterech prostych współpękowych a, b, c, d nazywamy wartość $(A, B; C, D)$, gdzie punkty A, B, C, D to przecięcia odpowiednich prostych z dowolną prostą nieprzechodzącą przez środek pęku. Dwustosunek prostych oznaczamy przez analogię jako $(a, b; c, d)$. Definicja jest poprawna ze względu na niezależność wartości od wyboru prostej.

W celu uniknięcia nieścisłości w miejscach, gdzie zajdzie konieczność, dodatkowo w indeksie dolnym będzie zaznaczany obiekt, na którym liczony jest dwustosunek. Przy-

kładowo, zapis $(A, B; C, D)_l$ oznacza dwustosunek punktów znajdujących się na prostej l , natomiast $(a, b; c, d)_P$ oznacza dwustosunek prostych należących do pęku w punkcie P .

Podstawowym wnioskiem z tego twierdzenia jest następująca

Obserwacja 1.3. Dwustosunek jest niezmiennikiem w rzucie perspektywicznym.

Rzeczywiście, weźmy dowolne cztery punkty współliniowe z płaszczyzny π . Wtedy proste OA, OB, OC, OD tworzą układ z twierdzenia 1.3.

Czwórki harmoniczne

Na szczególną uwagę zasługują tak zwane *czwórki harmoniczne*.

Definicja 1.4. Czwórkę punktów współliniowych spełniającą $(A, B; C, D) = -1$ nazywamy czwórką harmoniczną. Mówimy także, że odcinki AB, CD dzielą się harmonicznie, punkty C, D są harmonicznie sprzężone względem AB oraz punkty A, B są harmonicznie sprzężone względem CD .

Określenia te są poprawne ze względu na symetrię pojęcia, to znaczy, gdy A, B, C, D tworzą czwórkę harmoniczną, wtedy

$$(A, B; C, D) = (A, B; D, C) = (B, A; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = -1$$

Analogicznie definiujemy

Definicja 1.5. Pęk prostych a, b, c, d , dla którego zachodzi $(a, b; c, d) = -1$ nazywamy pękiem harmonicznym.

Jedną z przyczyn istotności czwórek harmonicznych jest ich wszechobecność w geometrii syntetycznej. Przykładami są

1. Czwórka $(A, B; M, \infty)$ jest harmoniczna dla M będącego środkiem odcinka AB .
2. Niech D, D' to odpowiednio przecięcia dwusiecznej wewnętrznej i zewnętrznej kąta $\angle BAC$ z prostą BC . Wtedy $(B, C; D, D') = -1$.

Dowód. Natychmiastowy, wystarczy przenieść dwustosunek z prostej BC na dowolną prostą równoległą do AD' by otrzymać sytuację z punktu pierwszego. \square

3. Punkty A, B, X leżą na prostej. Niech X' będzie obrazem punktu X w inwersji względem okręgu o średnicy AB . Wtedy $(A, B; X, X') = -1$.

Dowód. Bez strat ogólności niech punkty A, B mają współrzędne $-1, 1$. Wtedy X' ma współrzędną $1/x$, a teza odpowiada następującemu rachunkowi

$$(A, B; C, D) = \frac{1-x}{x+1} \div \frac{1-1/x}{1/x+1} = \frac{1-x}{x+1} \div \frac{x-1}{x+1} = -1$$

\square

4. Dane są dwa okręgi ortogonalne ω_1, ω_2 o środkach odpowiednio w O_1, O_2 . Prosta przez O_1 przecina ω_1 w punktach A, B , a ω_2 w punktach C, D . Wtedy czwórka A, B, C, D jest harmoniczna.

Dowód. Ze względu na ortogonalność okręgów punkty spełniają $\overline{O_1C} \cdot \overline{O_1D} = R^2$ gdzie R to promień ω_1 , więc C, D są wzajemnie swoimi obrazami w inwersji względem okręgu ω_1 , co na podstawie wcześniejszego punktu kończy dowód. \square

5. Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio w O_1, O_2 . Niech S_+ i S_- będą środkami jednokładności przekształcających okrąg O_1 na O_2 o skali odpowiednio dodatniej i ujemnej. Wtedy $(O_1, O_2; S_+, S_-) = -1$.

Dowód. Niech R_1, R_2 oznaczają promienie odpowiednio ω_1 i ω_2 . Wtedy

$$(O_1; O_2; S_+, S_-) = \frac{\overline{O_1S_+}}{S_+O_2} \div \frac{\overline{O_1S_-}}{S_-O_2} = -\frac{R_1}{R_2} \div \frac{R_1}{R_2} = -1$$

\square

6. Dane są dwa punkty A, B . Okrąg λ -Apoloniusza punktów A i B przecina ich prostą w punktach X, Y . Wtedy $(A, B; X, Y) = -1$.

Dowód. Bez strat ogólności niech punkt X należy do odcinka AB . Wtedy, z definicji okręgu Apoloniusza

$$(A, B; X, Y) = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \div \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}} = -\lambda \div \lambda = -1$$

\square

Innym, bardzo ważnym, przykładem jest następujące

Twierdzenie 1.4 (Twierdzenie o czworokącie zupełnym). *Dane są cztery punkty A, B, C, D , takie, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Niech E, F będą przecięciami, odpowiednio prostych AB, CD oraz BC, AD . Proste AC, BD przecinają EF odpowiednio w X, Y . Wtedy $(E, F; X, Y) = -1$.*

Przedstawię dwa, istotnie różne, dowody.

Dowód. Z twierdzenia Cevy na trójkąta AEF i punktu C otrzymujemy

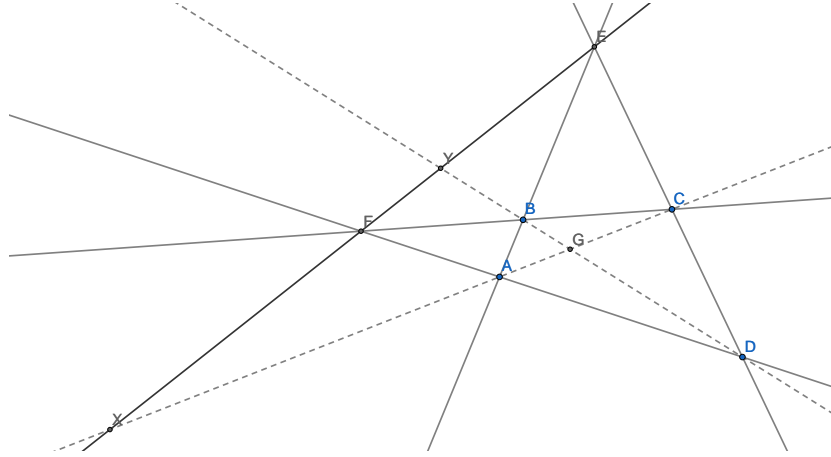
$$1 = \frac{\overline{EX}}{\overline{XF}} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \quad (1.1)$$

Z kolei z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta AEF i prostej BDY otrzymujemy

$$-1 = \frac{\overline{EY}}{\overline{YF}} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \quad (1.2)$$

Dzieląc równość 1.1 przez 1.2 otrzymujemy

$$-1 = \frac{\overline{EX}}{\overline{XF}} \div \frac{\overline{EY}}{\overline{YF}} = (E, F; X, Y)$$



co kończy dowód. □

Drugie uzasadnienie tego twierdzenia nad pierwszym ma zdecydowaną przewagę - ze względu na swój rzutowy charakter nie trzeba się w dowodzie przejmować czysto technicznymi szczegółami związanymi z obsługą przypadków gdy niektóre z prostych są równoległe, a niektóre z punktów - punktami niewłaściwymi. Dodatkowo dowód pozostaje poprawny pracując nad $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Dowód. Oznaczmy G jako przecięcie prostych BD z AC . Korzystając wielokrotnie z twierdzenia 1.3 możemy zapisać

$$\begin{aligned} (E, F; X, Y)_{EF} &= (CE, CF; CX, CY)_C = (D, B; G, Y)_{BD} = (AD, AB; AG, AY)_A \\ &= (F, E; X, Y)_{EF} = \frac{1}{(E, F; X, Y)_{EF}} \end{aligned}$$

czyli

$$(E, F; X, Y)_{EF}^2 = 1$$

więc nasz szukany dwustosunek $(E, F; X, Y)_{EF} = \pm 1$, ale $E \neq F$ oraz $X \neq Y$, co daje $(E, F; X, Y) = -1$. □

Uwaga. W dalszym ciągu pracy w miejsce równości

$$(A, B; C, D)_k = (PA, PB; PC, PD)_P = (E, F; G, H)_l$$

stosowany będzie bardziej praktyczny zapis $(A, B; C, D)_k \stackrel{P}{=} (E, F; G, H)_l$. Dodatkowo, w przypadku pęku zamiast zapisu $(PA, PB; PC, PD)_P$ będzie używany $P(A, B; C, D)$.

Twierdzenie 1.4 pokazuje, że czworokąt zupełny jest wręcz „fabryką” czwórek harmonicznych. Korzystając z notacji na rysunku widzimy, że także czwórka $(B, D; G, Y)$ jest harmoniczna, podobnie jak pęki $A(E, F; X, Y)$, $E(B, D; G, F)$, $F(A, B; G, E)$ - ogólnie, pęk z punktu przekątniowego zawierający parę boków oraz parę przekątnych czworoboku jest harmoniczny. Ważne jest zapamiętanie oraz dostrzeżenie powyższej konfiguracji.

Więcej przykładów czwórek harmonicznych będzie pojawiać się w dalszej części tej pracy wraz z wprowadzaniem nowych pojęć.

Punkt 2 z listy przykładów pozwala na sformułowanie następującego, niezwykle przydatnego, lematu

Lemat 1.1. *Dane są cztery współliniowe punkty A, B, C, D i punkt P poza ich wspólną prostą. Z dowolnych dwóch poniższych warunków wynika trzeci*

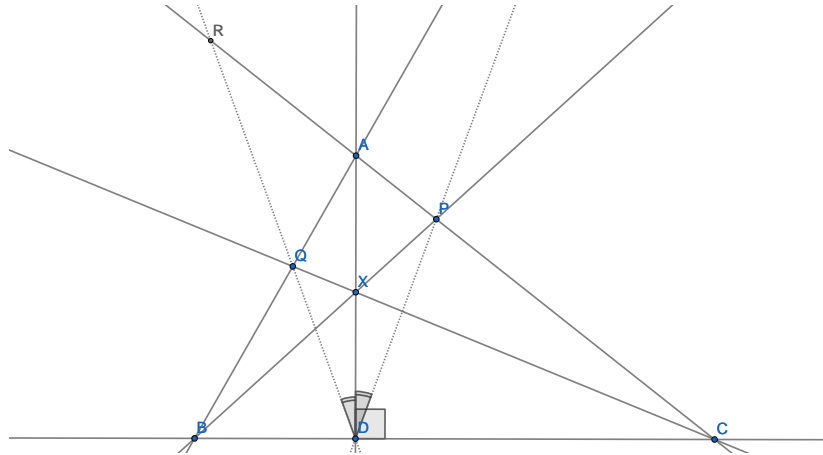
1. $P(A, B; C, D) = -1$
2. PC jest dwusieczną kąta $\angle APB$
3. $PC \perp PD$

Dowód. Wynikanie podpunktu pierwszego z pozostałych jest treścią punktu 2 z listy czwórek harmoniczych. Pozostała część dowodu jest wnioskiem z jednoznaczności dwustosunku. W przypadku podpunktu drugiego, niech punkt B' na prostej będzie taki, że prosta PC jest dwusieczną kąta $\angle APB'$, ale wtedy $(A, B'; C, D) = (A, B; C, D)$, czyli $B' = B$ skąd teza. Analogicznie dla podpunktu trzeciego: niech punkt D' będzie taki, że $PC \perp PD'$, ale wtedy z harmoniczności czwórki A, B, C, D' otrzymujemy równość $D = D'$, co kończy dowód. \square

Podjęcie stosowane w powyższym dowodzie, polegające na zdefiniowaniu nowego punktu, o którym „można coś powiedzieć”, by potem udowodnić jego równość z innym punktem, jest techniką często wykorzystywaną w tej pracy.

Udowodniony lemat, ze względu na swój syntetyczny charakter, a także powszechność przedstawionej w nim konfiguracji (kąty wraz z dwusiecznymi), często znajduje zastosowanie w zadaniach o charakterze olimpijskim. Przykładem tego jest poniższa seria, mająca też na celu wyrobienie podstawowych intuicji w posługiwaniu się pojęciami.

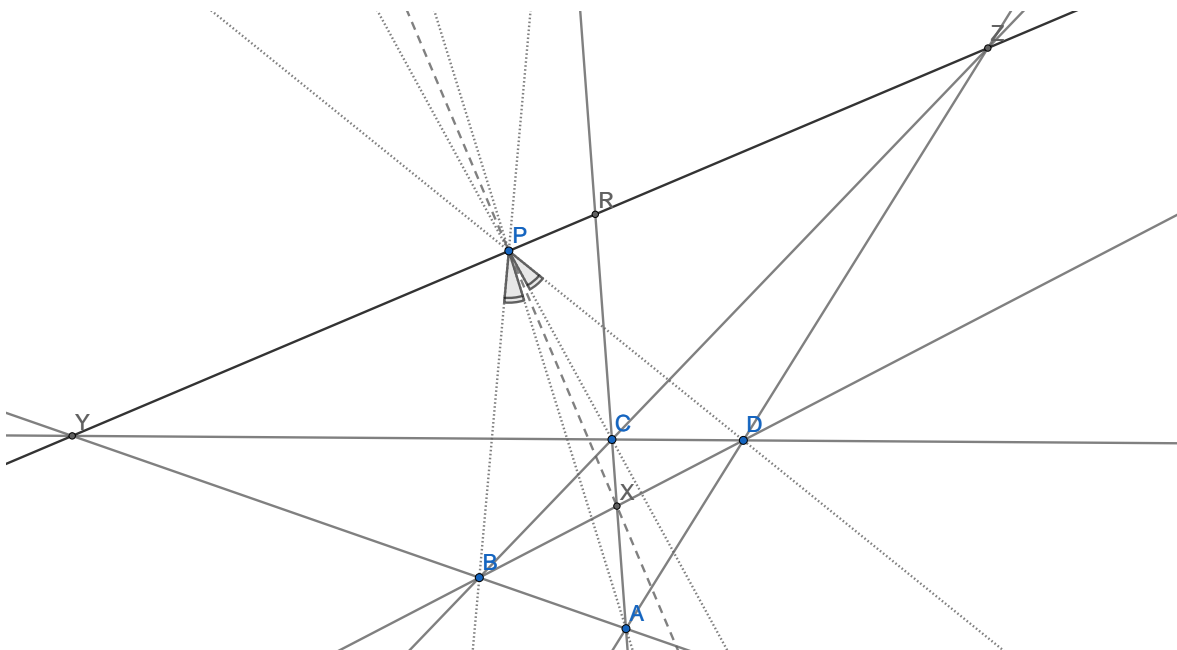
Zadanie 1.3. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz punkt D będący spodkiem wysokości z wierzchołka A na prostą BC . Wybrano punkt X na prostej AD a następnie poprowadzono proste BX i CX i przecięto je, odpowiednio, z prostymi AC i AB w punktach P i Q . Udowodnić, że $\angle QDA = \angle ADP$.



Dowód. Oznaczmy $R = DQ \cap AC$. Wtedy z twierdzenia 1.4 dla czworokąta $BDXQ$ otrzymujemy, że czwórka $(A, C; P, R)$ jest harmoniczna, a więc także dla pęku o środku

w punkcie D zachodzi $D(A, C; P, R) = -1$, ale $DA \perp AC$, więc na podstawie lematu 1.4 prosta DA jest dwusieczną kąta $\angle QDA$, co było do wykazania. \square

Zadanie 1.4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego naprzeciwległe boki nie są równoległe. Niech $X = AC \cap BD, Y = AB \cap CD$ oraz $Z = AD \cap BC$. Punkt P jest rzutem X na prostą YZ . Udowodnić, że $\angle APB = \angle CPD$.



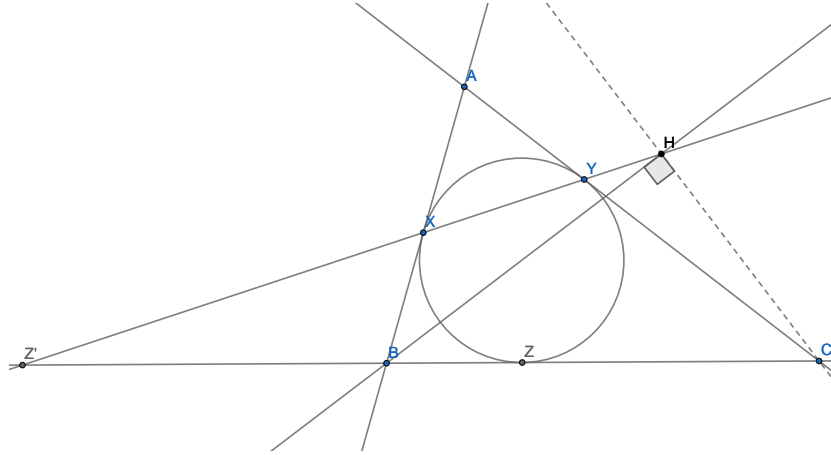
Dowód. Wystarczy pokazać, że prosta PX jest dwusieczną zarówno kąta $\angle APC$ jak i $\angle BPD$. Oznaczmy $R = AC \cap YZ$. Wtedy z twierdzenia 1.4 $(A, C; X, R) = -1$, a więc także $P(A, C; X, R) = -1$, co wraz z prostopadłością prostych PX i YZ oraz lematem 1.1 daje żądany fakt. Analogiczne rozumowanie może zostać przeprowadzone dla kąta $\angle BPD$, co kończy dowód. \square

Zadanie 1.5. Dany jest trójkąt ABC i okrąg w niego wpisany ω . ω jest styczny do AB, AC odpowiednio w punktach X, Y . Dwusieczna wewnętrzna kąta $\angle ABC$ przecina XY w P . Udowodnić, że kąt BPC jest prosty.

Dowód. Oznaczmy przez Z punkt styczności ω z prostą BC . Skoro proste AZ, BY, CX są współpękowe (wystarczy skorzystać wprost z twierdzenia Cevy - punkt wspólny tych prostych to punkt Gergonne'a) to punkt $Z' = XY \cap BC$ spełnia $(Z, Z'; B, C) = -1$, co patrząc z perspektywy punktu P oznacza, że kąt $\angle BPC$ jest prosty wtedy i tylko wtedy gdy prosta PB jest dwusieczną kąta $\angle Z'PZ$. Jest tak, ponieważ czworokąt $BZPX$ jest deltoidem, a prosta PB jest jego osią symetrii. \square

Warto w tym miejscu spojrzeć ponownie na zadania 1.1 oraz 1.2, tym razem z innej perspektywy.

Zadanie 1.6. Dany jest trójkąt ABC i punkt D leżący na BC . Na prostej AD wybrano punkt X , a następnie poprowadzono proste BX i CX . Punkty ich przecięcia



z, odpowiednio, prostymi CA i BA to P i Q . Udowodnić, że niezależnie od wyboru punktu X na prostej AD , punkt przecięcia prostej PQ i BC jest stały.

Dowód. Zauważmy, że z twierdzenia 1.4 dla czworokąta $APQX$ punkt przecięcia prostych PQ i BC (oznaczmy go przez R) spełnia $(B, C; D, R) = -1$, co z jedyności takiego punktu na prostej BC kończy dowód. \square

Zadanie 1.7. Dany jest punkt Q i cztery poprowadzone przez niego proste a, b, c, d . Proste k, l nieprzechodzące przez Q przecinają się w P . Oznaczmy przecięcie a prostymi z l, k odpowiednio jako A_1, A_2 i analogicznie definiujemy $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. Udowodnić, że punkty $X = A_1B_2 \cap A_2B_1, Y = B_1C_2 \cap B_2C_1$ oraz $Z = C_1D_2 \cap C_2D_1$ są współliniowe.

Dowód. Korzystając twierdzenia 1.4 dla, kolejno, czworokątów $A_1A_2B_2B_1, B_1B_2C_2C_1, C_1C_2D_2D_1$ otrzymujemy, że pęki $(k, l; PQ, PX), (k, l; PQ, PY), (k, l; PQ, PZ)$ są harmoniczne, więc proste PX, PY, PZ są sobie równe. \square

Widzimy, że pojęcie dwustosunku w zasadzie trywializuje (a przynajmniej istotnie upraszcza) ten problem. Jego znacznym uogólnieniem, będącym jednocześnie większym wyzwaniem jest następujące

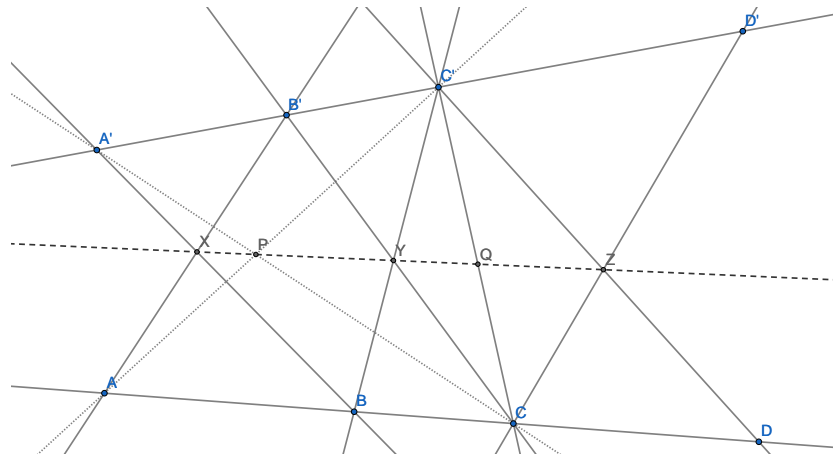
Zadanie 1.8. Dwie czwórki punktów A, B, C, S oraz A', B', C', D' leżą na dwóch różnych prostych. Oznaczmy $X = AB' \cap A'B, Y = BC' \cap B'C$ oraz $Z = CD' \cap C'D$. Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

Dowód. Oznaczmy $P = AC' \cap A'C$. Z twierdzenia Pappusa punkt P leży na prostej XY . Dodatkowo niech $Q = CC' \cap XY$. Wtedy

$$(P, Y; Q, C'D \cap XY) \stackrel{C'}{=} (A, B; C, D) = (A', B'; C', D') \stackrel{C}{=} (P, Y; Q, CD' \cap XY)$$

Więc proste $CD', C'D$ przecinają się na prostej XY .

W drugą stronę postępujemy analogicznie. Załóżmy, że punkty X, Y, Z są współliniowe i oznaczmy punkt D'' taki, że $(A, B; C, D'') = (A', B'; C', D')$ Wtedy punkty



$X, Y, CD' \cap C'D''$ są współliniowe, więc $CD' \cap C'D'' = Z$ i $D = D''$ co kończy dowód. \square

Ten wynik jest niejako geometrycznym sposobem na sprawdzanie równości dwustosunków punktów na różnych prostych.

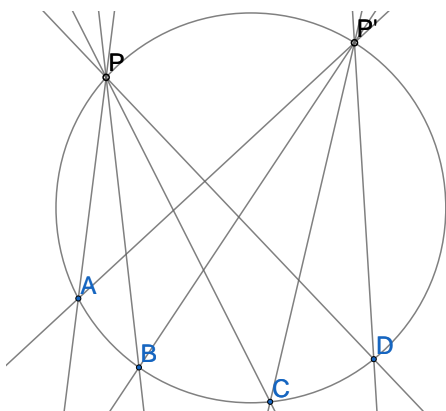
1.3 Okrąg i stożkowe

Celem tej części jest rozszerzenie rozważań o okrąg oraz krzywe rzutowo z nim równoważne - krzywe stożkowe. Wraz z wprowadzaniem nowych pojęć prezentowane będą wyniki wyprowadzone z badań własności tych obiektów.

Fundamentem studiów nad rzutowym charakterem okręgu jest poniższe

Twierdzenie 1.5. *Różne punkty A, B, C, D, P, P' leżą na okręgu ω . Wtedy*

$$P(A, B; C, D) = P'(A, B; C, D)$$



Dowód. Z trygonometrycznej wersji definicji dwustosunku możemy zapisać

$$P(A, B; C, D) = \frac{\sin \sphericalangle APC}{\sin \sphericalangle CPB} \div \frac{\sin \sphericalangle APD}{\sin \sphericalangle DPB}$$

Na podstawie własności kąta wpisanego w okrąg oraz tożsamości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ wartość drugiego wyrażenia jest niezależna od wyboru punktu P . \square

Uwaga. Powyższe twierdzenie można rozszerzyć o przypadek gdy punkt P pokrywa się z jednym z punktów A, B, C, D . Wtedy przez prostą, na przykład AA , rozumiemy styczną do ω w punkcie A . Dowód przebiega zupełnie analogicznie.

Twierdzenie pozwala na wprowadzenie nowego pojęcia.

Definicja 1.6. Na okręgu ω leżą różne punkty A, B, C, D . Dwustosunkiem punktów na okręgu nazywamy wartość $P(A, B; C, D)$ dla dowolnego punktu P należącego do ω i oznaczamy poprzez analogię jako $(A, B; C, D)_\omega$.

Podobnie jak poprzednio, definicja ta jest poprawna ze względu na dowolność wyboru punktu P . Dwustosunek punktów na okręgu posiada analogiczne własności do tego zdefiniowanego na prostej czy pęku, w szczególności kluczową jednoznaczność.

Poznane własności pozwalają na proste udowodnienie następującego

Zadanie 1.9 (Twierdzenie o motylku). Punkt M jest środkiem cięciwy AB okręgu ω . Dwie cięciwy PQ, RS przecinają się w punkcie M . Oznaczono $X = PS \cap AB$ oraz $Y = QR \cap AB$. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka XY .

Dowód. Z twierdzenia 1.5 zachodzi

$$S(A, P; R, B) = (A, P; R, B)_\omega = Q(A, P; R, B)$$

co po rzutowaniu na prostą AB daje równość $(A, X; M, B) = (A, M; Y, B)$. Rozpisując równość dwustosunków z definicji otrzymujemy

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MX}} \div \frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YM}} \div \frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} \iff \frac{\overline{BX}}{\overline{XM}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YM}}$$

co oznacza, że punkt X dzieli odcinek BM w takim samym stosunku (skierowanym) w jakim punkt Y dzieli odcinek AM , co kończy dowód. \square

Innym zastosowaniem jest dowód słynnego

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie Pascala). *Sześciokąt $ABCDEF$ (niekoniecznie wypukły) jest wpisany w okrąg ω . Wtedy punkty przecięcia naprzeciwległych boków są współliniowe.*

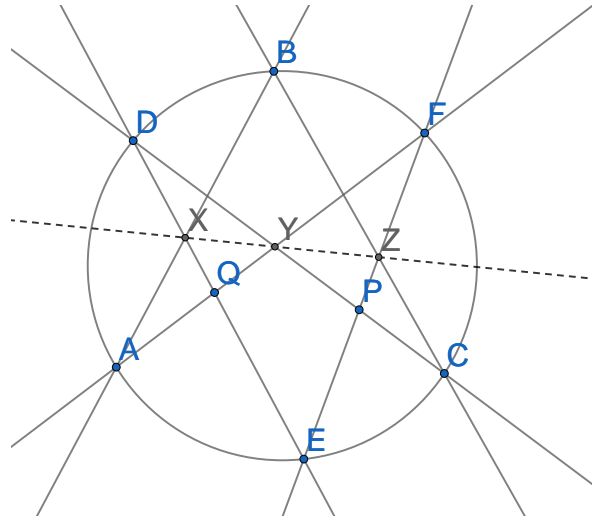
Dowód. Oznaczmy przecięcia par prostych AB i DE, CD i AF oraz BC i EF kolejno jako X, Y, Z . Dodatkowo niech $P = CD \cap EF, Q = AF \cap DE$ oraz $Z' = EF \cap XY$. Celem jest udowodnienie, że $Z' = Z$. Przekształcając

$$(P, E; F, Z) \stackrel{C}{=} (D, E; F, B)_\omega \stackrel{A}{=} (D, E; Q, X) \stackrel{Y}{=} (P, E; F, Z')$$

otrzymujemy żadaną równość $Z' = Z$, co kończy dowód. \square

W analogiczny sposób można dowieść twierdzenia Pappusa¹.

¹Nie jest to przypadek. Można je traktować jako zdegenerowany przypadek twierdzenia Pascala, gdy stożkową w tezie twierdzenia 1.8 jest suma mnogościowa prostych występujących w twierdzeniu Pappusa.



Czworokąt harmoniczny

Podobnie jak wcześniej warto osobno rozważyć szczególny przypadek, gdy punkty na okręgu leżą względem siebie harmonicznie.

Definicja 1.7. Czworokąt cykliczny $ABCD$ wpisany w okrąg ω nazywamy harmonicznym gdy zachodzi $(A, C; B, D)_\omega = -1$.

Okazuje się, że czworokąt harmoniczny posiada zaskakująco wiele własności.

Twierdzenie 1.7 (O czworokącie harmonicznym). *Dany jest okrąg ω i czworokąt w niego wpisany $ABCD$. Następujące warunki są równoważne.*

1. Zachodzi $(A, C; B, D)_\omega = -1$.
2. Czworokąt $ABCD$ jest harmoniczny.
3. Proste styczne do ω w B i D oraz prosta AC przecinają się w jednym punkcie.
4. Prosta AC jest symedianą w trójkącie ABD .
5. $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$.

Dowód. Równoważność dwóch pierwszych punktów jest definicją czworokąta harmonicznego.

By udowodnić punkt trzeci, przywołajmy twierdzenia 1.14 i 1.15 z następnej części. Oznaczmy przez P przecięcia stycznych w A i C . Niech C' będzie drugim przecięciem prostej AT z ω . Z twierdzenia 1.14 prosta BD jest biegunową punktu T , więc na podstawie twierdzenia 1.15 zachodzi $(A, C'; T, AC \cap BD) = -1$, co po rzutowaniu na ω z punktu B daje $(A, C'; B, D) = -1$, więc $C' = C$. Jedyność takiego punktu C dowodzi równoważności z punktem pierwszym.

Punkt czwarty jest równoważny z trzecim na podstawie twierdzenia o symedianie.

Dla punktu piątego, pokażemy na początku, że gdy czworokąt jest harmoniczny, to zachodzi podana równość. Niech środkowa trójkąta ABD poprowadzona z punktu

A przecina ω w punkcie C' . Oczywiście, skoro C jest przecięciem symediany z tego wierzchołka z ω to punkty C, C' są symetryczne względem symetralnej odcinka BD . Wystarczy w takim razie pokazać równość $|AB| \cdot |BC'| = |AD| \cdot |DC'|$. Niech C'' będzie odbiciem C' względem środka odcinka BD . Wtedy czworokąt $C'BC''D$ jest równoległobokiem. Proste przeliczenia na kątach pokazują podobieństwo $\triangle C''C'D \sim \triangle DBA$, z której wprost wynika żądana równość.

By wykazać jedyność takiego punktu C na okręgu ω , dla którego zachodzi równość z tezy, przywołajmy twierdzenie Ptolemeusza i założmy nie wprost, że istnieje drugi taki punkt X . Niech najpierw punkt X leży na łuku BCD okręgu. Z twierdzenia Ptolemeusza zachodzą równości

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD| \quad \text{oraz} \quad |AB| \cdot |XD| + |BX| \cdot |DA| = |AX| \cdot |BD|$$

Korzystając z założeń o punktach C i X dzieląc te równania stronami otrzymujemy:

$$\frac{2|AB| \cdot |CD|}{2|AB| \cdot |XD|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AX| \cdot |BD|} \iff \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|XD|}{|AX|}$$

Wynika z tego, że punkt X leży na okręgu Apoloniusza punktów A, D o stałej $\frac{|CD|}{|AC|}$. Drugie przecięcie tego okręgu z ω nie należy do łuku BCD , więc otrzymujemy sprzeczność.

W przypadku gdy punkt X należy łuku DAB okręgu na podstawie twierdzenia Ptolemeusza otrzymujemy (w zależności od położenia punktu X względem A):

$$|AX| \cdot |BD| + |XD| \cdot |AB| = |XB| \cdot |AD| \quad \text{lub} \quad |AX| \cdot |BD| + |BX| \cdot |AD| = |XD| \cdot |AB|$$

Obie możliwości w połączeniu z równością $|AB| \cdot |XD| = |BX| \cdot |AD|$ prowadzą do oczywistej sprzeczności, co kończy dowód. \square

Stożkowe

W części tej zajmiemy się rzutowymi odpowiednikami okręgu.

Definicja 1.8. Rozważmy nieskończony, obustronny stożek. Krzywe otrzymane z przecięcia go płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek nazywamy *krzywymi stożkowymi*.

Do ich podstawowych własności należy

1. Przez dowolne 5 punktów na płaszczyźnie, z czego żadne trzy nie są współliniowe przechodzi dokładnie jedna stożkowa. Istnieje dokładnie jedna stożkowa styczna do pięciu prostych, z których żadne trzy nie są współpękowe.
2. Rozróżniamy trzy typy krzywych stożkowych: elipsę, parabolę oraz hiperbolę. Mają one odpowiednio 0,1,2 rzeczywiste punkty wspólne z prostą w nieskończoności. Przekształcenia afiniczne zachowują typ krzywej (jako że zachowują prostą w nieskończoności)

3. Krzywe stożkowe są krzywymi stopnia drugiego. Opisują je równania postaci $a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$. Dodatkowo każde równanie tej postaci nie dające się przedstawić w formie $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ (krzywe zdegenerowane będące sumą mnogościową dwóch prostych) reprezentuje krzywą stożkową.

Uwaga. Fakty te są znane, a ich dowody szeroko opisane w literaturze przedmiotu [6] i ze względu na swój głównie obliczeniowy charakter nie będą tutaj zaprezentowane.

Bazą rozważań będzie

Obserwacja 1.4. Krzywe stożkowe są rzutowo równoważne okręgowi. To znaczy, istnieje przekształcenie zachowujące współliniowość i dwustosunek punktów oraz prostych, które przekształca dowolną stożkową na okrąg.

Rzeczywiście, oznaczmy przez O wierzchołek stożka znajdującego się w definicji stożkowej, a przez π przecinającą go płaszczyznę. Wybierzmy teraz płaszczyznę π' , której przecięcie ze stożkiem jest okręgiem. Rzut perspektywiczny o środku O z płaszczyzny π na π' zachowuje dwustosunek i przekształca krzywą na okrąg.

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego są następujące uogólnienia twierdzenia Pascala oraz twierdzenia 1.5.

Twierdzenie 1.8 (Uogólnienie 1.6). *Sześciokąt jest wpisany w stożkową wtedy i tylko wtedy gdy punkty przecięcia naprzeciwległych boków są współliniowe.*

Dowód. Jeśli sześciokąt jest wpisany w stożkową, to rozważmy przekształcenie rzutowe, które przekształca ją na okrąg. Otrzymujemy udowodnioną już wersję z okręgiem powyższego twierdzenia.

W drugą stronę, nazwijmy kolejne wierzchołki sześciokąta przez A, B, C, D, E, F a punkty przecięcia naprzeciwległych boków przez X, Y, Z jak w dowodzie twierdzenia 1.6.

Rozważmy stożkową Γ przechodzącą przez punkty A, B, C, D, E i oznaczmy jej punkt przecięcia z prostą AF przez F' . Wtedy z twierdzenia Pascala punkty $X, Y, EF' \cap BC$ są współliniowe, więc $Z = EF' \cap BC$ i $F = F'$, co kończy dowód twierdzenia odwrotnego. \square

Twierdzenie to dostarcza często wygodne kryterium współstożkowości punktów.

Twierdzenie 1.9 (Uogólnienie 1.5). *Dla sześciu różnych punktów A, B, C, D, P, P' na stożkowej Γ zachodzi $P(A, B; C, D) = P'(A, B; C, D)$. Dla czwórki punktów i stożkowej definiujemy ich dwustosunek na tejże jako $(A, B; C, D)_\Gamma = P(A, B; C, D)$ dla dowolnego punktu P na stożkowej.*

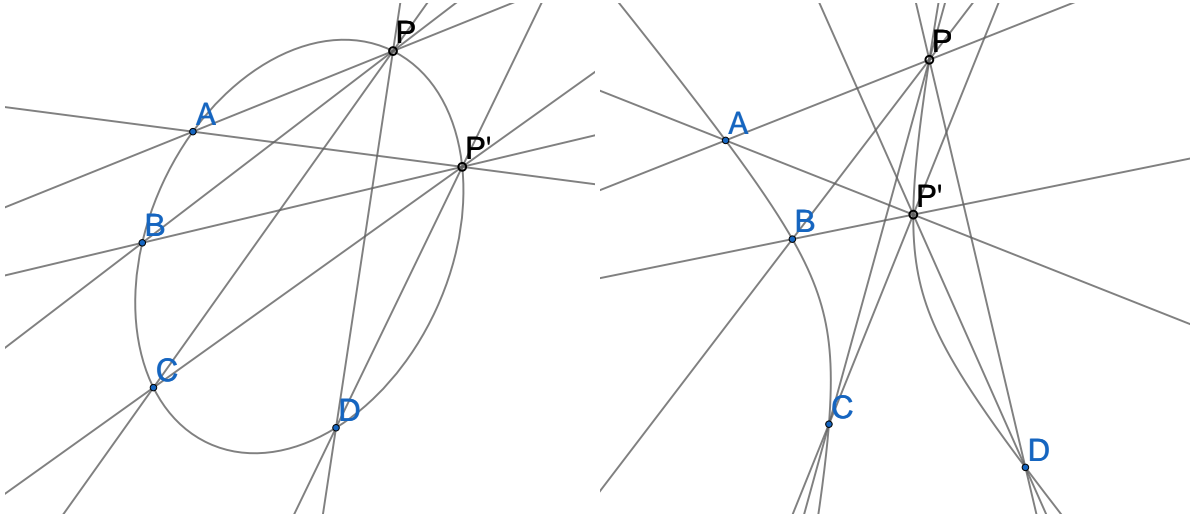
Dowód jest natychmiastowy.

Prawdziwe jest także swego rodzaju twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 1.10. *Dane jest pięć punktów A, B, C, D, P , z których żadne trzy nie są współliniowe. Wtedy zbiór punktów X , dla których zachodzi*

$$X(A, B; C, D) = P(A, B; C, D)$$

jest krzywą stożkową przechodzącą przez punkty A, B, C, D, P .



Dowód. Rozważmy stożkową Γ przechodzącą przez punkty A, B, C, D, P i założmy nie wprost, że istnieje punkt X , dla którego zachodzi $X(A, B; C, D) = (A, B; C, D)_\Gamma$, a który nie należy do tej stożkowej. Oznaczmy przez X' drugi punkt przecięcia prostej XB z Γ i niech Q, R będą przecięciami prostych odpowiednio BX', CX' z AD . Oczywiście zachodzi $X'(A, B; C, D) = (A, B; C, D)_\Gamma$, więc także $X'(A, B; C, D) = X(A, B; C, D)$. Po rzutowaniu powyższej równości na prostą AD otrzymujemy

$$(A, Q; R, D) = (A, Q; CX \cap AD, D),$$

więc $R = CX \cap AD$, co oznacza, że punkty C, R, X są współliniowe, ale wtedy $X = X'$ i sprzeczność kończy dowód. \square

Powyższe twierdzenie ma bardzo ciekawe konsekwencje.

Zadanie 1.10. Dany jest trójkąt ABC oraz prosta l nieprzechodząca przez żaden z jego wierzchołków. Wtedy zbiór punktów, których izogonalne sprzężenia względem trójkąta ABC leżą na prostej l tworzy stożkową przechodzącą przez punkty A, B, C . Inaczej, obrazem prostej w izogonalnym sprzężeniu jest stożkowa.

Dowód. Na początek zauważmy, że izogonalnymi sprzężeniami punktów przecięcia l z bokami trójkąta jest odpowiednio wierzchołki, więc na pewno obrazem prostej nie jest prosta, dlatego znajdziemy cztery takie punkty na l , że ich obrazy w izogonalnym sprzężeniu nie są współliniowe (wystarczy wziąć punkty odpowiednio blisko przecięć z bokami).

Rozważmy cztery punkty P, Q, R, S należące do prostej l . Oznaczmy izogonalne sprzężenie punktu przez dodanie apostrofu. Oczywiście kąty między prostymi w pęku $A(P, Q; R, S)$ są takie same jak w pęku $A(P', Q'; R', S')$. Analogiczna własność zachodzi dla punktu B i C , więc na podstawie twierdzenia 1.10 punkty P', Q', R', S', A, B, C leżą na jednej stożkowej, nazwijmy ją Γ .

W drugą stronę, wybierzmy dowolny punkt X' na Γ i rozważmy dwustosunek punktów P', Q', R', X' . Oznaczmy przez T punkt na l , dla którego

$$(P', Q'; R', X')_\Gamma = (P, Q; R, T)_l$$

Oczywiście zachodzi $A(P', Q'; R', X') = A(P, Q; R, X)$, gdzie X jest izogonalnym sprzężeniem X' . Ale skoro

$$A(P, Q; R, T) = (P', Q'; R', X')_{\Gamma} = A(P', Q'; R', X') = A(P, Q; R, X)$$

to punkt X leży na prostej AT . Analogicznie pokazujemy, że punkt X leży na prostych BT i CT , więc $X = T$, co kończy dowód. \square

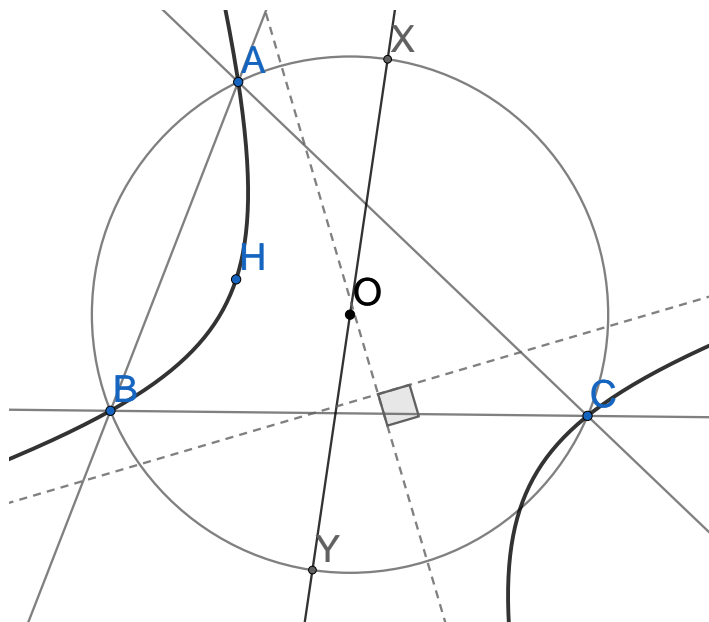
Prawdziwy jest także fakt odwrotny.

Zadanie 1.11. Stożkowa Γ przechodzi przez wierzchołki trójkąta ABC . Udowodnić, że jej obrazem w izogonalnym sprzężeniu względem tego trójkąta jest prosta.

Dowód. Wybierzmy dowolne dwa punkty X, Y na Γ i niech X', Y' oznaczają ich sprzężenia izogonalne. Rozważmy prostą $X'Y'$ i jej obraz w izogonalnym sprzężeniu. Na podstawie poprzedniego zadania będzie nią stożkowa przechodząca przez wierzchołki A, B, C oraz punktu X, Y , więc to Γ , co kończy dowód. \square

Wynika z niego następujące

Twierdzenie 1.11. W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum. Wtedy stożkowa Γ przechodząca przez punkty A, B, C, H jest hiperbolą o asymptotach przecinających się pod kątem prostym (jest tak zwaną hiperbolą prostokątną).

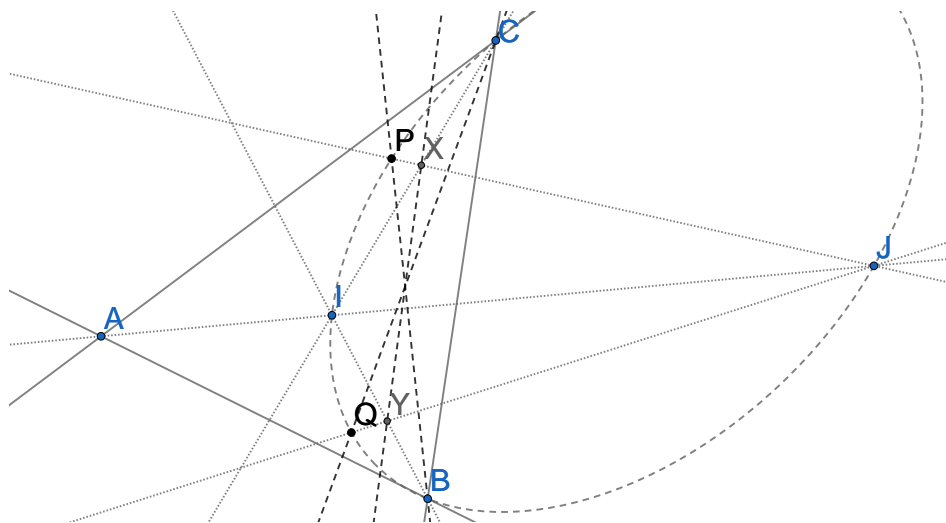


Dowód. Na podstawie zadania 1.11 sprzężenie izogonalne Γ to prosta przechodząca przez O - środek okręgu opisanego na ABC . Niech punkty przecięcia tej prostej z okręgiem opisanym to X, Y . Wtedy oczywiście $\sphericalangle XAY = 90^\circ$, a więc także $\sphericalangle X'AY' = 90^\circ$ gdzie X', Y' to sprzężenia izogonalne odpowiednio punktów X, Y . Punkty X', Y' leżą na prostej w nieskończoności, co oznacza, że Γ ma dwa rzeczywiste punkty na prostej l_∞ - jest więc hiperbolą - a ponadto proste AX', AY' są równoległe odpowiednio do asymptot stycznych do Γ w X' i Y' , co wraz z $\sphericalangle X'AY' = 90^\circ$ kończy dowód. \square

Analogicznie można udowodnić, że obrazem prostej w izotomicznym sprzężeniu jest stożkowa przechodząca przez wierzchołki trójkąta. Zachęcam do przeprowadzenia własnego rozumowania.

Innym przykładem zastosowania jest następujące

Zadanie 1.12. W trójkącie ABC I jest środkiem okręgu wpisanego, J środkiem okręgu dopisanego stycznego do prostej BC , a P, Q są izogonalnie sprzężone. Dodatkowo $X = JP \cap CI$, a $Y = JQ \cap BI$. Pokazać, że proste BP, CQ, XY są współpękowe.



Dowód. Zauważmy, że $B(I, J; P, Q) = C(I, J; P, Q) = -1$, więc z twierdzenia 1.10 sześciokąt $IBPJQC$ jest wpisany w stożkową. Zastosowanie do niego twierdzenia Pascala daje tezę. \square

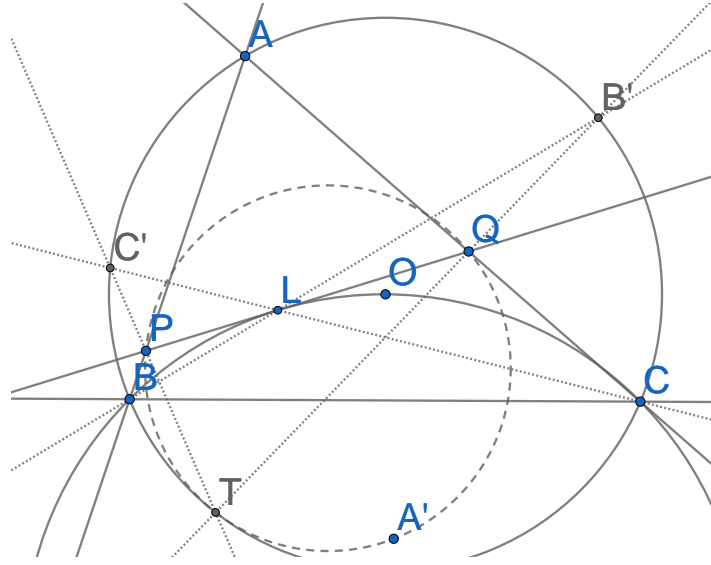
Ciekawe i nieoczywiste zastosowanie twierdzenia Pascala (a w zasadzie doń odwrotnego) pokazuje

Zadanie 1.13. Trójkąt ABC ma środek okręgu opisanego w punkcie O . Niech l będzie styczna do okręgu opisanego na trójkącie BOC w punkcie L . Prosta ta przecina ona boki AB, AC odpowiednio w punktach P, Q . Niech A' będzie odbiciem symetrycznym punktu A względem l . Udowodnić, że okrąg przechodzący przez punkty P, Q, A' jest styczny do okręgu opisanego na ABC .

Dowód. Oznaczmy okrąg opisany na ABC przez Ω . Proste LB, LC przecinają Ω w punktach kolejno B', C' . Niech $T = PC' \cap QB'$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala dla sześciokąta $BACC'TB'$ (punkty P, Q, L są współliniowe) otrzymujemy, że punkty te leżą na jednej stożkowej. Ale A, B, C, B', C' leżą na Ω , więc także T leży na tym okręgu.

Niech $\alpha = \angle BAC$. Wtedy $\angle BLC = \angle BOC = 2\alpha$. Jeśli przez β oznaczamy kąt $\angle C'TB' = \angle C'CB'$, to zachodzi

$$\alpha + \beta = \angle BB'C + \angle C'CB' = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$



z sumy kątów w trójkącie $B'LC$. Skoro $\angle PTQ = \alpha = \angle PAQ = \angle PA'Q$ to punkty $PQTA'$ są współkregowe. Wystarczy teraz pokazać styczność tego okręgu z Ω .

Z prostego rachunku na kątach $\angle CLQ = \angle CBB' = \angle CC'B'$, więc proste PQ i $B'C'$ są równoległe. Rozważmy jednokładność w punkcie T przekształcającą punkty P, Q na C', B' odpowiednio. Przekształca ona także okrąg opisany na TPQ w Ω , ale jej środek jest ich punktem wspólnym, czyli T to punkt styczności, co było do pokazania. \square

W dalszej części będę wyciągał wnioski z poniższego

Twierdzenie 1.12 (Kryterium współstożkowości punktów). *Dany jest trójkąt ABC oraz sześć punktów $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżących parami odpowiednio na prostych BC, AC, AB . Punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na jednej stożkowej wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi następująca równość*

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = 1$$

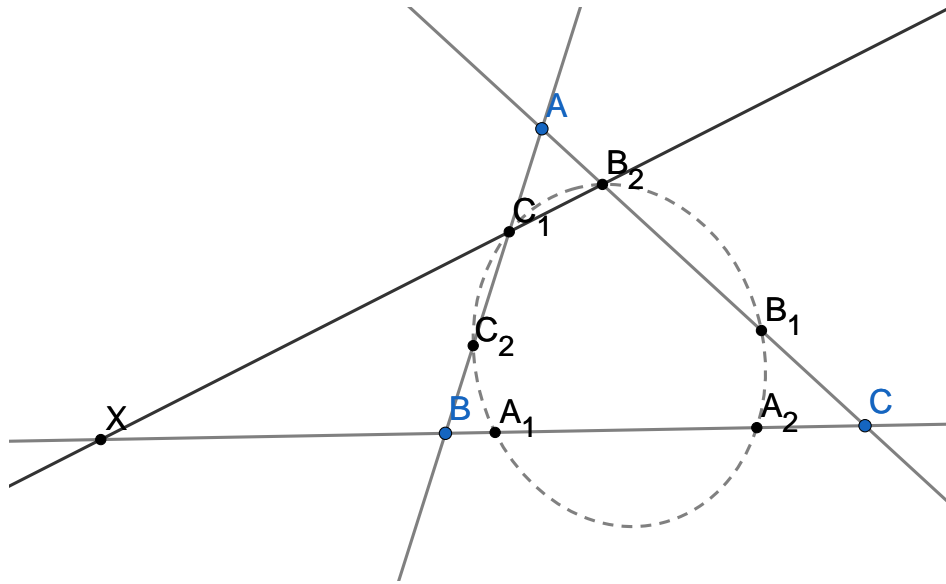
Dowód. Oczywiście z twierdzenia Pascala współstożkowość danych punktów jest równoważna ze współliniowością punktów $X = A_1A_2 \cap B_2C_1, Y = B_1B_2 \cap C_2A_1$ oraz $Z = C_1C_2 \cap A_2B_1$. Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ABC i prostej B_2C_1 możemy zapisać

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} = -1$$

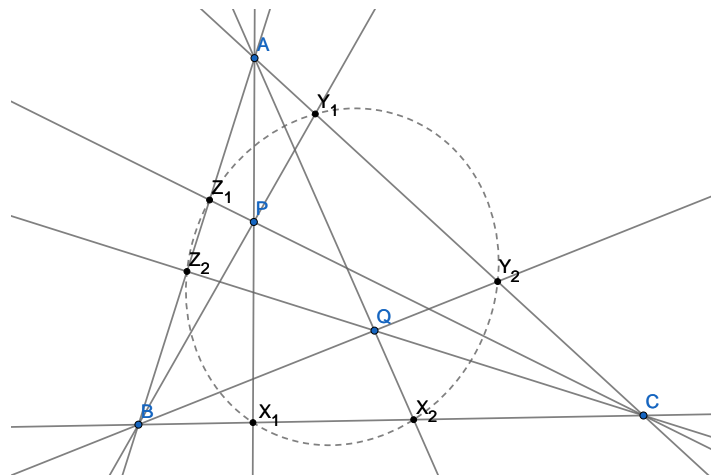
Po wymnożeniu ze sobą powyższej równości wraz z analogicznymi wyrażeniami dla punktów Y i Z otrzymujemy

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = -\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}$$

Z twierdzenia Menelaosa otrzymujemy, że punkty X, Y, Z są współliniowe, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi żądana równość, co kończy dowód. \square



Zadanie 1.14. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty P, Q wewnątrz niego. Proste AP, AQ przecinają BC w punktach odpowiednio X_1, X_2 . Analogicznie definiujemy dla pozostałych wierzchołków punkty Y_1, Y_2 oraz Z_1, Z_2 . Udowodnić, że punkty te leżą na jednej stożkowej.



Dowód. Zapisując twierdzenie Cevy dla punktów P, Q i wymnażając otrzymujemy równość z kryterium 1.12, co kończy dowód. \square

Zadanie 1.15. Dany jest trójkąt ABC . Punkty X_1, X_2 leżą na boku BC i spełniają $\overline{BX_1} = \overline{X_2C}$. Analogicznie definiujemy punkty Y_1, Y_2 oraz Z_1, Z_2 na prostych odpowiednio CA i AB . Udowodnić, że punkty $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ leżą na jednej stożkowej.

Dowód. Wstawiając punkty $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ wprost do kryterium 1.12 otrzymujemy żadaną równość, co kończy dowód. \square

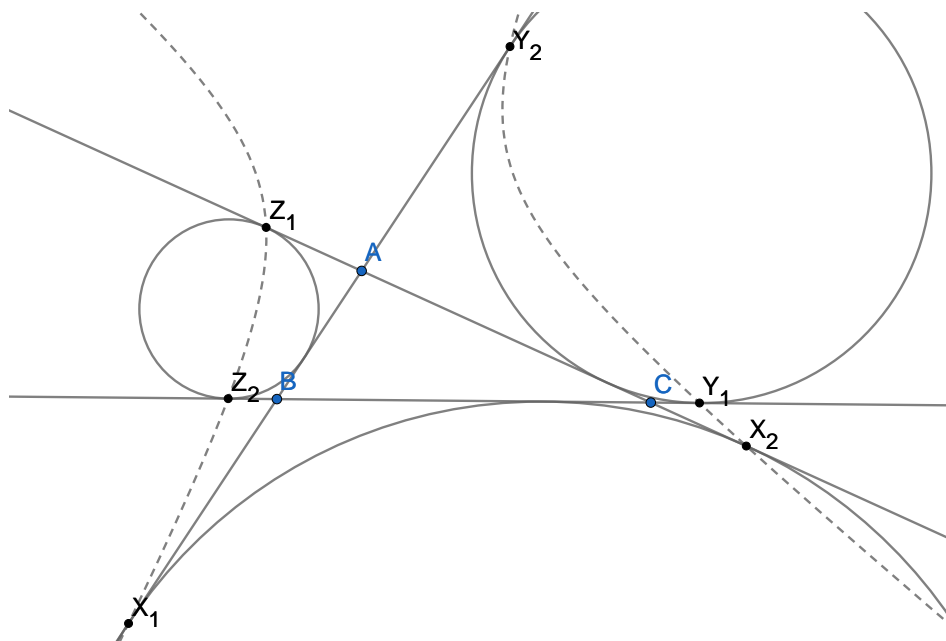
Zadanie 1.16. Dany jest trójkąt ABC i punkt P wewnątrz niego. Proste AP, BP, CP przecinają naprzeciwległe boki odpowiednio w punktach X, Y, Z . Okrąg opisany na trójkącie XYZ przecina boki BC, CA, AB kolejno w X', Y', Z' . Pokazać, że proste AX', BY', CZ' są współpękowe.

Dowód. Dzieląc równość z kryterium 1.12 dla okręgu opisanego na trójkącie XYZ przez równość otrzymaną z twierdzenia Cevy dla punktu P otrzymujemy

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX'}}{\overline{X'C}} \cdot \frac{\overline{CY'}}{\overline{Y'A}} = 1$$

co kończy dowód. □

Zadanie 1.17. Okrąg dopisany do trójkąta ABC leżący naprzeciwko wierzchołka A jest styczny do prostych AB, AC odpowiednio w punktach X_1, X_2 . Analogicznie definiujemy Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 . Udowodnić, że punkty $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ leżą na jednej stożkowej.



Dowód. Niech a, b, c oznaczają długości o odpowiednich boków trójkąta ABC , a s - połowę jego obwodu. Wtedy

$$\frac{\overline{AX_1}}{\overline{X_1B}} \cdot \frac{\overline{CX_2}}{\overline{X_2A}} \cdot \frac{\overline{BY_1}}{\overline{Y_1C}} \cdot \frac{\overline{AY_2}}{\overline{Y_2B}} \cdot \frac{\overline{CZ_1}}{\overline{Z_1A}} \cdot \frac{\overline{BZ_2}}{\overline{Z_2C}} = \frac{s}{c-s} \cdot \frac{b-s}{s} \cdot \frac{s}{a-s} \cdot \frac{c-s}{s} \cdot \frac{s}{b-s} \cdot \frac{a-s}{s} = 1$$

co na podstawie kryterium 1.12 jest równoważne tezie. □

Zadanie 1.18. Dany jest trójkąt ABC . Stożkowa Γ przecina prostą BC w punktach A_1, A_2 . Analogicznie definiujemy B_1, B_2 oraz C_1, C_2 . Niech X_1, X_2 oznaczają punkty na prostej BC , dla których zachodzi $(B, C; A_1, X_1) = (B, C; A_2, X_2) = -1$. Analogicznie definiujemy Y_1, Y_2 oraz Z_1, Z_2 . Udowodnić, że punkty $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ leżą na jednej stożkowej.

Dowód. Punkt X_1 spełnia

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = -\frac{\overline{BX_1}}{\overline{X_1C}}$$

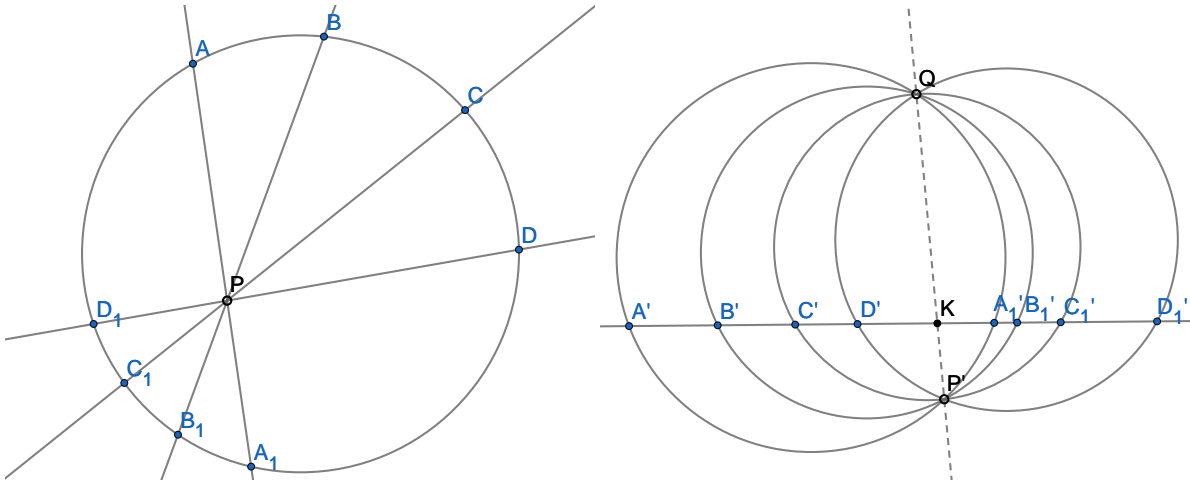
Wstawiając to i analogiczne wyrażenia dla punktów X_1, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 do kryterium 1.12 napisanego dla stożkowej Γ otrzymujemy równość równoważną współstożkowości tych punktów. \square

Wraz z pojęciem dwustosunku na okręgu pojawia się kolejny sposób przekształcania go.

Twierdzenie 1.13. *Na stożkowej Γ leżą punkty A, B, C, D . Z punktu P nienależącego do niej prowadzimy proste PA, PB, PC, PD , które przecinają Γ po raz drugi w punktach odpowiednio A_1, B_1, C_1, D_1 . Wtedy $(A, B; C, D)_\Gamma = (A_1, B_1; C_1, D_1)_\Gamma$.*

Dowód. Najpierw równoważnie przekształćmy twierdzenie do wersji, gdy Γ jest okręgiem (oznaczymy go przez ω).

Gdy punkt P leży na prostej w nieskończoności (proste $AA', BB' \dots$ są równoległe) to teza jest oczywista z symetrii. Dalej punkt P jest punktem właściwym.



Wyberzmy dowolny punkt Q na okręgu. Oczywiście teza jest równoważna równości $Q(A, B; C, D) = Q(A_1, B_1; C_1, D_1)$. Wykonajmy inwersję o dowolnym dodatnim promieniu i środku w punkcie Q . Proste, których dwustosunku szukamy, są w tej inwersji zachowane. Rzutując z nich dwustosunek na ω' widzimy, że wystarczy pokazać równość $(A', B'; C', D)_{\omega'} = (A'_1, B'_1; C'_1, D'_1)_{\omega'}$. Proste AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 przechodzą w tej inwersji na okręgi przechodzące przez odpowiednie obrazy tych punktów a także przez Q i P' , co oznacza, że prosta QP' jest wspólną prostą potęgową tych okręgów. Niech $K = \omega' \cap QP'$. Wtedy z potęgi punktu dla pewnej stałej c zachodzi

$$c = \overline{KA'} \cdot \overline{KA'_1} = \overline{KB'} \cdot \overline{KB'_1} = \overline{KC'} \cdot \overline{KC'_1} = \overline{KD'} \cdot \overline{KD'_1}$$

z czego wynika, że pary (A', A'_1) są swoimi obrazami w inwersji o środku w K i potędze c , a skoro inwersja na prostej zachowuje dwustosunek (dwustosunek punktów jest równy dwustosunkowi ich obrazów), to otrzymujemy

$$(A', B'; C', D)_{\omega'} = (A'_1, B'_1; C'_1, D'_1)_{\omega'}$$

co było do pokazania. \square

Uwaga. Fakt, że inwersja na prostej zachowuje dwustosunek jest udowodniony w rozdziale drugim, jednakże łatwo się samemu przekonać o jego prawdziwości - wystarczy wprost zastosować definicję inwersji i dwustosunku.

Powyższe twierdzenie jest niezwykle ważne, a przy tym prezentuje dość powszechną konfigurację w zadaniach geometrycznych.

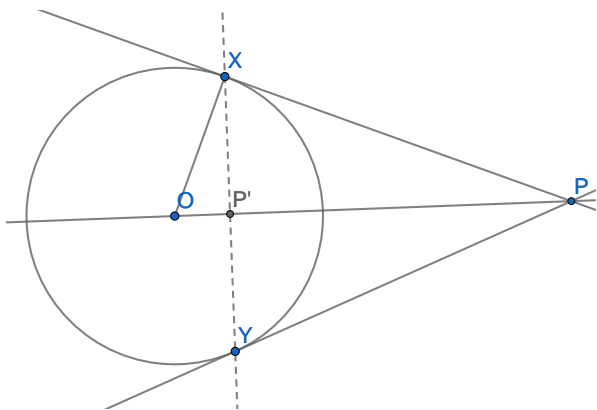
1.4 Biegunowe

Zacznijmy od definicji

Definicja 1.9. Dany jest okrąg ω o środku w O . Prosta biegunową względem ω punktu P różnego od O nazywamy prostą p prostopadłą do prostej OP przechodzącą przez punkt P' , taki, że punkty przecięcia prostej OP z ω i P, P' dzielą się harmonicznie (jeśli X, Y to punkty przecięcia, wtedy $(X, Y; P, P') = -1$). W takiej sytuacji punkt P nazywamy *biegunem* prostej p . Dodatkowo zakładamy, że biegunową punktu O jest prosta w nieskończoności, a O jest też biegunem.

Na początek warto przyjrzeć jak znaleźć biegunowe w „naturalnych” sytuacjach.

Twierdzenie 1.14. Z punktu P poprowadzono styczne do okręgu ω o środku w O . Prosta przechodząca przez punkty styczności X i Y jest biegunową punktu P względem ω .



Dowód. Oczywiście prosta w zadaniu jest prostopadła do prostej OP . Wystarczy pokazać, że ich punkt przecięcia - punkt P' - jest obrazem punktu P w inwersji względem ω . Z podobieństwa $\triangle OXP' \sim \triangle OPX$ otrzymujemy $|OX|^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$ co kończy dowód. \square

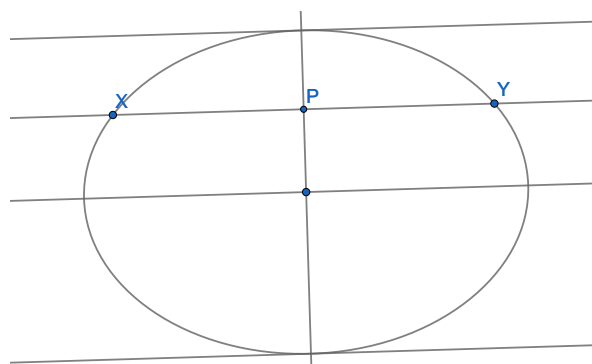
Twierdzenie 1.15. Dany jest okrąg ω , punkt P oraz jego biegunowa p . Prosta przechodząca przez P przecina okrąg w punktach X, Y , a p w punkcie P' . Wtedy

$$(P, P'; X, Y) = -1$$

Dowód. Rozważymy osobno dwa przypadki.

1. Punkt P leży na zewnątrz okręgu ω .

Rozważmy rzut perspektywiczny przekształcający prostą prostopadłą do OP przechodzącą przez P na prostą w nieskończoności. Okrąg ω przechodzi na pewną elipsę. Następnie wykonajmy przekształcenie afiniczne przekształcające otrzymaną elipsę ponownie w okrąg (warto zapamiętać ten *trik* pozwalający zachować okrąg po przekształceniu rzutowym). Punkt P pozostaje cały czas punktem niewłaściwym. Wszystkie zastosowane przekształcenia zachowują relację styczności prostej do okręgu, więc prosta p wciąż będzie prostą przechodzącą przez punkty styczności prostych stycznych do okręgu ω poprowadzonych z P , w tym przypadku, prostych równoległych. Także prosta w zadaniu przejdzie na prostą równoległą do stycznych, a skoro p jest średnicą okręgu prostopadłą do nich - punkt P' będzie środkiem odcinka XY , co kończy dowód.



2. Punkt P leży wewnątrz okręgu ω .

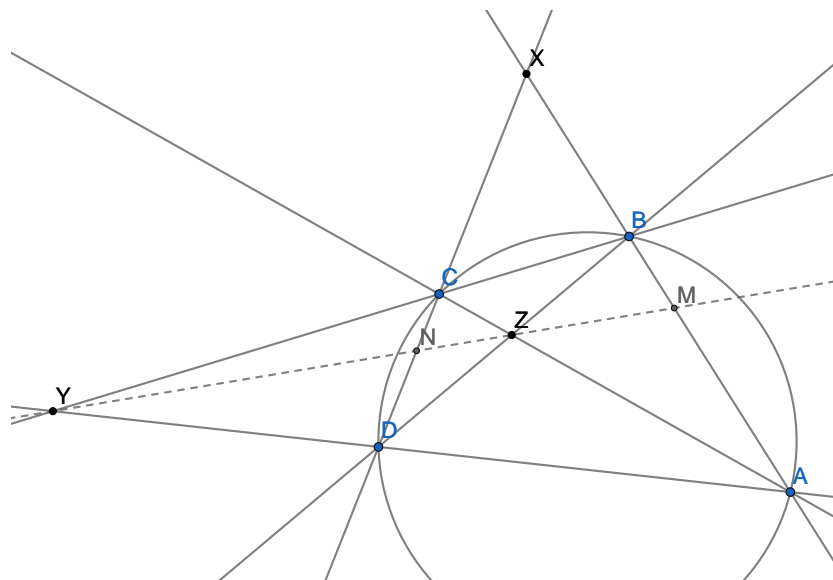
Niech prosta l zawiera średnicę ω oraz punkt P i przecina ω w punktach X', Y' . Oczywiście $(X', Y'; P, l \cap p) = -1$ z definicji biegunowej.

Rozważmy następujący rzut perspektywiczny: Wybierzmy punkt S znajdujący się na prostej prostopadłej do płaszczyzny zadania przechodzącej przez przecięcie prostej l i p . Następnie rzutujemy z punktu S na płaszczyznę równoległą do tej wyznaczonej przez punkt S i prostą p . Prosta p przejdzie wtedy na prostą w nieskończoności, a z symetrii prosta l będzie osią symetrii powstałej z ω elipsy. Analogicznie jak wyżej zastosujemy dodatkowo przekształcenie afiniczne zamieniające elipsę będącą obrazem ω z powrotem w okrąg. Dzięki dobraniu przekształceń prosta l w dalszym ciągu zawiera średnicę ω , a skoro zachodziło $(X', Y'; P, l \cap p) = -1$ i przecięcie prostych l i p znajduje się teraz w nieskończoności, to punkt P jest środkiem odcinka $X'Y'$ oraz co za tym idzie - środkiem okręgu ω . Teza staje się oczywista - cięciwa przechodząca przez środek okręgu jest dzielona przez niego na połowy, a punkt P' znajduje się w nieskończoności, co kończy dowód.

□

Następne twierdzenie wyjaśnia powszechność występowania (nienaturalnej na pierwszy rzut oka) relacji biegun-biegunowa.

Twierdzenie 1.16. *Czworokąt zupełny $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω . Pary naprzeciwległych boków, to jest $(AB, CD), (BC, DA), (AC, BD)$ przecinają się odpowiednio w punktach X, Y, Z . Wtedy biegunową punktu X jest prosta YZ .*

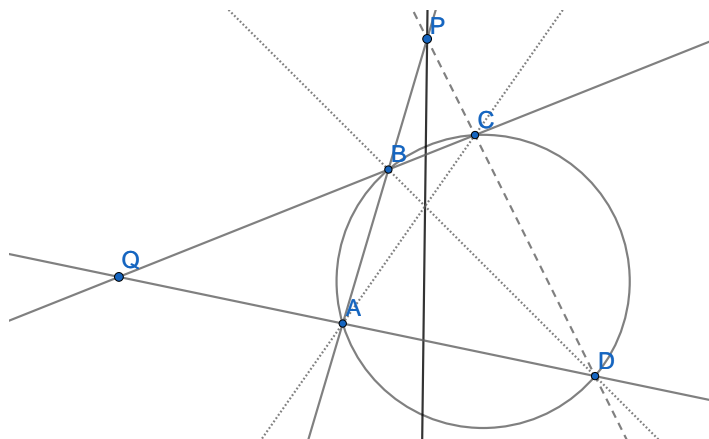


Dowód. Oznaczmy przez M, N punkty przecięcia prostej YZ odpowiednio z prostymi AB, CD . Z twierdzenia 1.4 zachodzi $(A, B; M, X) = -1$, więc z twierdzenia 1.15 punkt M należy do biegunowej punktu X . Analogicznie do tej biegunowej należy punkt N , co kończy dowód.

W podobny sposób dowodzimy, że biegunową punktu Y jest prosta XZ , a biegunową punktu Z - prosta XY . □

Następnym w serii własności biegunowych jest

Twierdzenie 1.17 (Lemat La Hire, prawo wzajemności biegunowych). *Punkt P leży na biegunowej punktu Q wtedy i tylko wtedy gdy punkt Q leży na biegunowej punktu P .*



Dowód. Oznaczmy okrąg, do którego wszystko się odnosi, jako ω i załóżmy, że punkt P leży na biegunowej punktu Q . Sieczna z punktu P przecina okrąg ω w punktach A, B . Proste QA, QB przecinają po raz drugi ω w punktach odpowiednio D, C . Na podstawie twierdzenia 1.16 proste AB, CD oraz AC, BD przecinają się na biegunowej punktu Q , co oznacza, że $P = AB \cap CD$. Ponownie korzystając z twierdzenia 1.16 otrzymujemy, że punkt Q leży na biegunowej punktu P , co kończy dowód. \square

Podstawowym wnioskiem z prawa wzajemności biegunowych jest następujące kryterium współliniowości i współpękowości:

Obserwacja 1.5. Bieguny są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy ich biegunowe są współpękowe.

Kolejnym aspektem pokazującym rzutowy charakter biegunowych jest następujące twierdzenie:

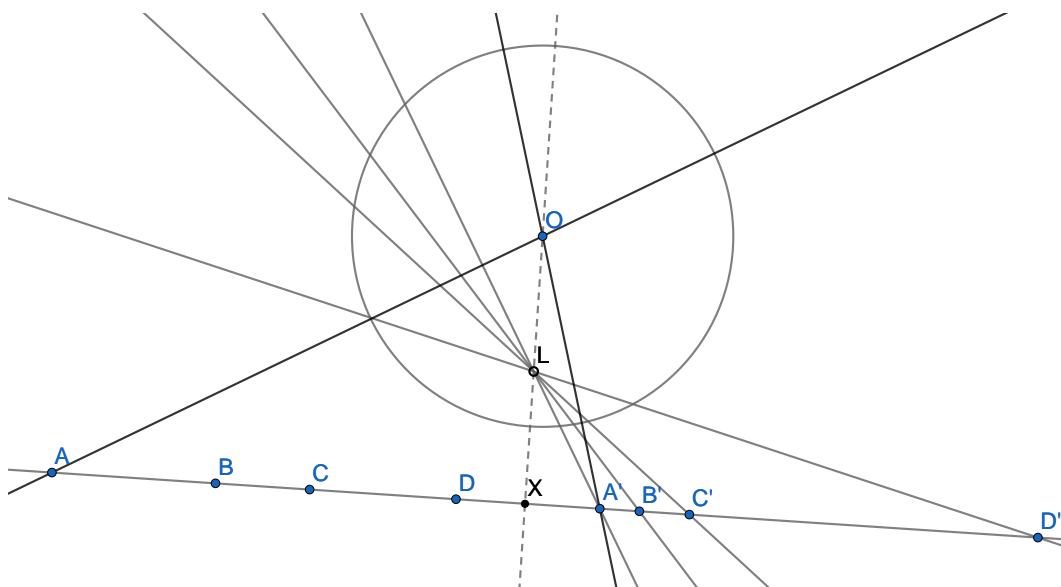
Twierdzenie 1.18. *Dane są cztery punkty A, B, C, D leżące na prostej l oraz okrąg ω . a, b, c, d oznaczają kolejno biegunowe punktów A, B, C, D . Zachodzi $(A, B; C, D) = (a, b; c, d)$.*

Dowód. Rozpoczniemy od lematu

Lemat 1.2. *W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum, a D spodkiem wysokości opuszczonej z A . Wtedy*

$$\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DH} \cdot \overline{DA}$$

Odbijając punkt B symetrycznie względem D dostajemy punkt B' , a z prostego rachunku na kątach otrzymujemy, że punkty $ACB'H$ są współokręgowe. Potęgą punktu D względem otrzymanego okręgu kończy dowód lematu.



Przechodząc do zasadniczej części - oczywiście skoro punkty A, B, C, D są współliniowe to ich bieguny przecinają się w jednym punkcie, co oznacza, że teza twierdzenia

ma sens - oznaczmy ten punkt przez L . Przecięcie prostej a z l to A' i analogicznie B', C', D' . Wystarczy pokazać, że $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Niech środkiem okręgu ω będzie O . Prosta a przechodzi przez L i spełnia $a \perp AO$. Podobnie $OL \perp l$, co oznacza, że L jest ortocentrum trójkąta AOA' , więc spełniona jest zależność

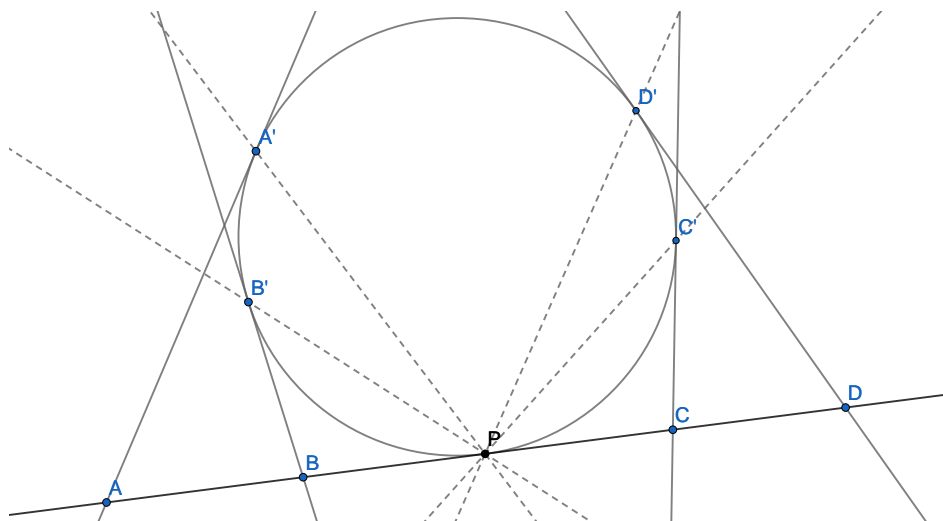
$$\overline{XA} \cdot \overline{XA'} = \overline{XL} \cdot \overline{XO}$$

gdzie $X = OL \cap l$. Analogiczną własność mają punkty B, C, D , a więc pary te są swoimi obrazami w inwersji o potęgze $\overline{XL} \cdot \overline{XO}$. Inwersja na prostej zachowuje dwustosunek, co kończy dowód. \square

Twierdzenie to pozwala na wprowadzenie nowego typu dwustosunku.

Definicja 1.10. Dany jest okrąg ω oraz pięć stycznych do niego a, b, c, d, p . Oznaczmy $A = a \cap p$ i analogicznie B, C, D . Definiujemy dwustosunek $(a, b; c, d)_\omega = (A, B; C, D)_p$.

Wystarczy pokazać, że powyższa definicja jest poprawna, to jest, niezależna od wyboru prostej p .



Dowód. Rozważmy obraz biegunowy punktów A, B, C, D względem okręgu ω . Okazuje się, że są to proste PA', PB', PC', PD' , gdzie A' jest punktem styczności a z ω , a ich dwustosunek, na podstawie twierdzenia 1.9, jest niezależny od wyboru P , co kończy dowód. \square

Relacja biegun-biegunowa uogólnia się na krzywe stożkowe - zmienić trzeba jedynie definicję.

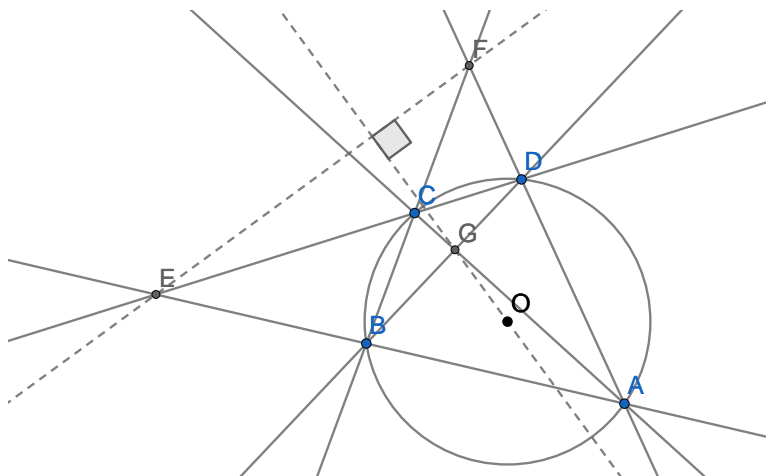
Definicja 1.11. Biegunową punktu P względem stożkowej Γ nazywamy

1. W przypadku gdy punkt leży na zewnątrz stożkowej - prostą przechodzącą przez punkty styczności prostych stycznych poprowadzonych z P do Γ .
2. W przypadku gdy punkt leży wewnątrz stożkowej - biegunową definiujemy korzystając z prawa wzajemności. Dowolne dwie sieczne przechodzące przez P przecinają Γ w punktach X_1, Y_1, X_2, Y_2 . Styczne do Γ w tych punktach przecinają się odpowiednio w Q, R . Prosta QR jest wtedy biegunową punktu P .

Przekształcenie rzutowe przenoszące stożkową na okrąg pokazuje, że wszystkie powyższe twierdzenia zachowują prawdziwość, gdy obiektem, względem którego bierzemy biegunową jest stożkowa (tracona jest jednak własność mówiąca o tym, że biegunowa jest prostopadła do prostej łączącej biegun ze środkiem stożkowej).

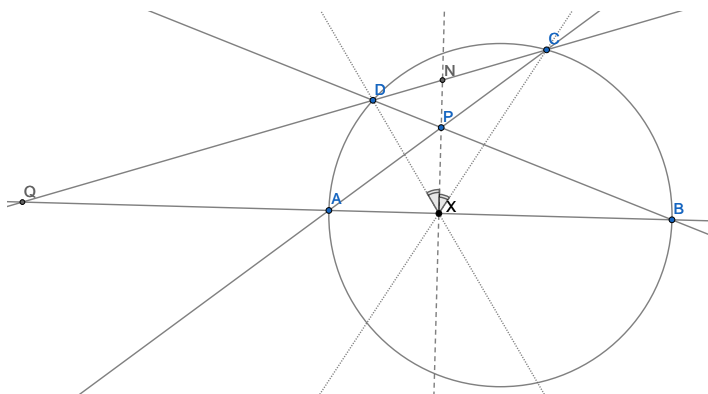
Wszystko to sprawia, że biegunowe są niezwykle przydatnym narzędziem, znajdującym zastosowanie w szerokiej gamie sytuacji. Oto seria przykładów, mająca także na celu wyrobienie intuicji w posługiwaniu się poznanymi pojęciami.

Zadanie 1.19. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$ ze środkiem okręgu opisanego w punkcie O . Oznaczono $AC \cap BD = G$, $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$. Udowodnić, że O jest ortocentrum trójkąta EFG .



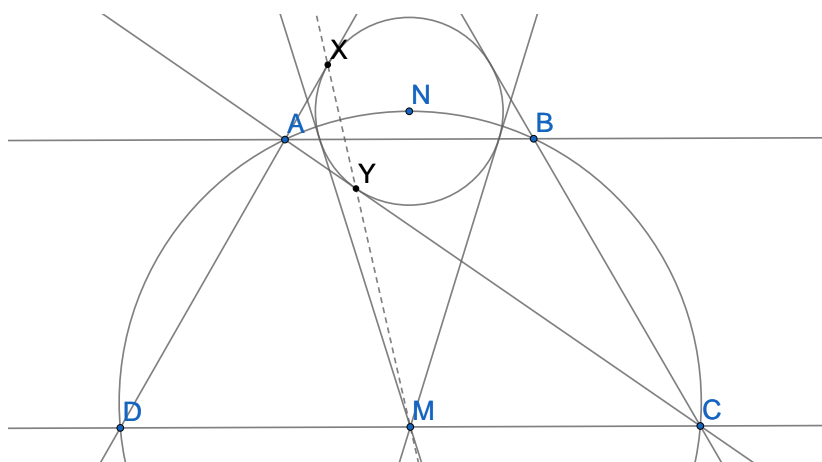
Dowód. Z twierdzenia 1.16 prosta EF jest biegunową punktu G , a co za tym idzie, jest prostopadła do prostej OG . Analogicznie dowodzimy, że pary prostych OE, FD oraz OF, EG są prostopadłe, więc O to ortocentrum trójkąta EFG . \square

Zadanie 1.20. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω . Punkt przecięcia przekątnych oznaczmy przez P . Niech rzut P na AB to X . Udowodnić, że jeżeli $\angle CXP = \angle PXD$, to AB jest średnicą ω .



Dowód. Oznaczmy przecięcie prostych PX oraz CD jako N , a prostych AB i CD przez Q . Pęk $X(D, C; P, Q)$ jest harmoniczny, więc $(D, C; N, Q) = -1$ i co za tym idzie N należy do biegunowej punktu Q . Z twierdzenia 1.16 także punkt P do niej należy. Skoro prosta PX jest biegunową punktu Q , to $PX \perp QO$, gdzie O to środek okręgu ω . Ale PX jest także prostopadłe do prostej ABQ , więc O leży na prostej AB , co było do pokazania. \square

Zadanie 1.21. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD wpisany w okrąg Ω . Niech środek łuku AB niezawierający punktu C to N . Okrąg ω o środku w N jest styczny do prostej AC . Udowodnić, że styczne do ω w punktach przecięcia ω z AB przecinają się na środku CD .



Dowód. Z symetrii jasnym jest, że także prosta BD jest styczna do ω . Dodatkowo, skoro N to środek łuku, to prosta DN jest dwusieczną kąta $\angle BDA$, więc prosta AD także jest styczna do okręgu ω . Teza jest równoważna temu, że prosta AB jest biegunową punktu M - środka odcinka CD - względem okręgu ω . Z prawa wzajemności biegunowych wystarczy pokazać, że punkt M leży na biegunowych punktów A i B . Z symetrii oczywiście wystarczy pokazać jedną z tych zależności (trapez jest równoramienny). Oznaczmy punkty styczności prostych AD, AC z ω odpowiednio przez X i Y . Prosta XY jest biegunową punktu A , więc wystarczy pokazać, że punkty X, Y, M są współliniowe. Na podstawie twierdzenia Menelaosa w trójkącie ADC jest to równoważne równości

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{XD}} = -1$$

która zachodzi z zależności $|AX| = |AY|$ oraz $|XD| = |CY|$ wynikających z twierdzenia o odcinkach stycznych. \square

1.5 Dualizm

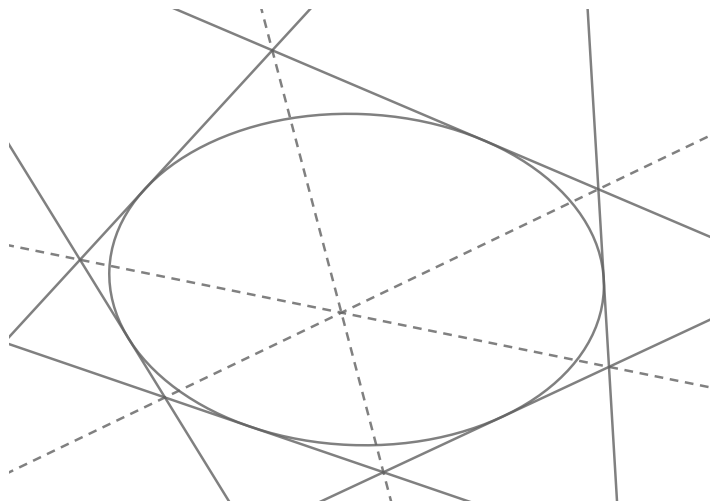
Lemat La Hire jest podstawą² do sformułowania następującej zasady dualności:

Twierdzenie 1.19. *Każde twierdzenie dotyczące prostych i punktów ma swój równoważny, dualny odpowiednik - w sformułowaniu twierdzenia zamieniamy proste na punkty, punkty na proste, relację współliniowości na relację współpękowości i w drugą stronę.*

Istotnie - wybierzmy dowolny okrąg na płaszczyźnie i weźmy obraz biegunowy względem niego. Proste i punkty w położeniu ogólnym przejdą odpowiednio na punkty i proste w położeniu ogólnym, pęki prostych na punkty współliniowe i na odwrót.

Najlepiej prześledzić to na przykładach:

Twierdzenie 1.20 (Twierdzenie Brianchona). *W sześciokąt można wpisać stożkową wtedy i tylko wtedy gdy jego przekątne główne są współpękowe.*



Dowód. Weźmy obraz biegunowy względem stożkowej wpisanej w sześciokąt. Proste styczne przejdą na wierzchołki sześciokąta, kolejne jego wierzchołki na kolejne boki sześciokąta wpisanego, główne przekątne na przecięcia naprzeciwległych boków, a teza dotycząca współpękowości - na współliniowość. Otrzymaliśmy tezę twierdzenia Pascala!

W drugą stronę dowód przebiega analogicznie. Weźmy stożkową styczną do pięciu boków sześciokąta i weźmy względem niej obraz biegunowy. Reszta dowodu przebiega identycznie jak w przypadku twierdzenia 1.8. \square

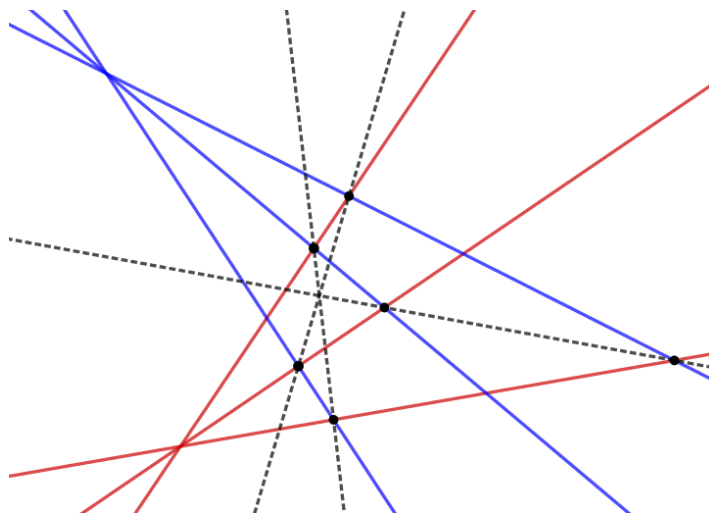
W ciekawej sytuacji znajduje się twierdzenie Desargues'a.

Obserwacja 1.6. Twierdzenie Desargues'a jest samodualne.

Innym przykładem jest dualne twierdzenie Pappusa.

²W ramach tej pracy jest podstawą. W klasycznym podejściu zasada dualności wynika wprost z aksjomatów geometrii rzutowej.

Twierdzenie 1.21 (Dualne twierdzenie Pappusa). *Dane są dwa pęki prostych a, b, c oraz d, e, f . Punkty przecięcia par prostych $(b, d), (a, e), (a, f), (c, d), (b, f), (c, e)$ to odpowiednio X, X', Y, Y', Z, Z' . Wtedy proste XX', YY', ZZ' są współpękowe.*



Zadanie 1.22. Dany jest czworobok zupełny, w który wpisany jest okrąg ω . Wtedy trójkąt utworzony przez jego proste przekątne jest samodualny względem ω (biegunami boków są naprzeciwległe wierzchołki).

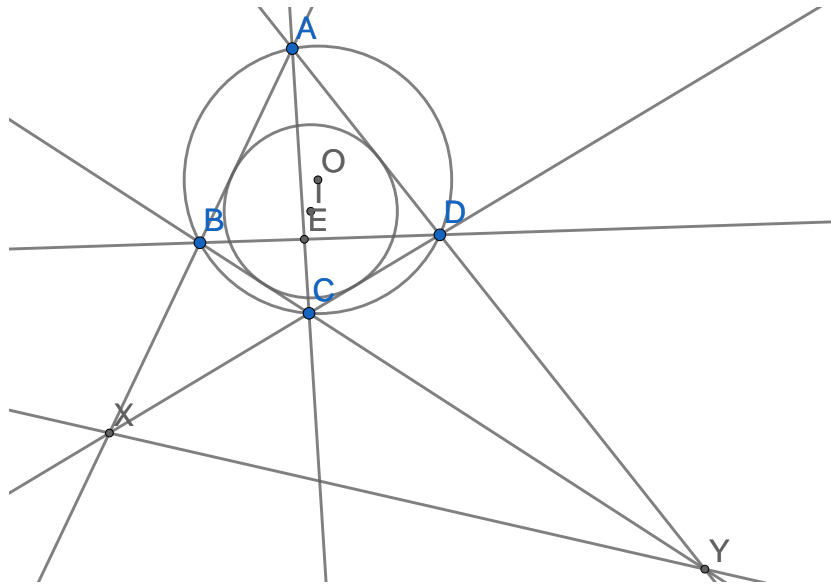
Dowód. Po wzięciu obrazu biegunowego względem ω otrzymujemy tezę twierdzenia 1.16. □

Zadanie 1.23. Obrazem biegunowym stożkowej względem innej stożkowej jest zbiór prostych stycznych do pewnej stożkowej.

Dowód. Wybierzmy dowolne pięć punktów A, B, C, D, P na stożkowej Γ . Niech stożkową względem której bierzemy obraz biegunowy będzie Ω . Z równoważnej definicji stożkowa Γ jest zbiorem punktów X , takich, że $P(A, B; C, D) = X(A, B; C, D)$. Skoro bieranie biegunowej zachowuje dwustosunek, to obrazem Γ będzie zbiór prostych x spełniających $(p \cap a, p \cap b; p \cap c, p \cap d) = (x \cap a, x \cap b; x \cap c, x \cap d)$, a z dualnej wersji twierdzenia 1.10 zbiór ten jest stycznymi do krzywej stożkowej stycznej do prostych a, b, c, d, p □

Zadanie 1.24. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu Ω o środku w O i wpisany w okrąg ω o środku w I . Oznaczmy $E = AC \cap BD$. Pokazać, że punkty E, I, O są współliniowe.

Dowód. Oznaczmy $X = AB \cap CD$ i $Y = BC \cap DA$. Z twierdzenia 1.16 otrzymujemy, że prosta XY jest biegunową punktu E względem okręgu Ω , a co za tym idzie $EO \perp XY$. Natomiast dzięki dualnej wersji tego twierdzenia (zadanie 1.22) wiemy, że prosta XY jest biegunową punktu E także względem okręgu ω , więc zachodzi także $EI \perp XY$, co kończy dowód. □



Warto zastanowić się nad dualnymi wersjami twierdzeń i faktów zaprezentowanych powyżej.

Tym dość długim wstępem autor starał się przybliżyć pojęcia występujące w geometrii rzutowej. Kluczowe jest dokładne zapoznanie się z przykładami reprezentującymi daną technikę lub obiekt - to one budują intuicję w poruszaniu się wśród obcych pojęć i gwarantują zrozumienie, zwłaszcza, że temat ze swej natury odbiega dość od standardowego pojmowania geometrii syntetycznej.

Rozdział 2

Przekształcenia zachowujące dwustosunek

W tym rozdziale przybliżone i usystematyzowane zostaną kwestie związane z wspomnianymi już w poprzedniej części przekształceniami rzutowymi. Charakter tego działu jest dość algebraiczny - w zamian otrzymuje się zestaw naprawdę *ogólnych* i silnych narzędzi pozwalających radzić sobie z szeroką gamą problemów geometrycznych.

2.1 Przekształcenia rzutowe

Definicja 2.1. *Przekształceniem rzutowym* płaszczyzny rzutowej nazywamy każde bijectywne przekształcenie \mathbb{RP}^2 (\mathbb{CP}^2) na siebie zachowujące współliniowość punktów oraz dwustosunek punktów na prostej.

Analogicznie definiujemy przekształcenia prostej rzutowej

Definicja 2.2. *Przekształceniem rzutowym* prostej rzutowej nazywamy każde bijectywne przekształcenie prostej rzutowej \mathbb{RP}^1 (\mathbb{CP}^1) na siebie zachowujące dwustosunek punktów.

Przekształcenia rzutowe prostej rzutowej

Rozważania będą prowadzone nad zespoloną prostą rzutową \mathbb{CP}^1 , równoważną z uzupełnionym o nieskończoność zbiorem liczb zespolonych $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Ma to na celu przede wszystkim uogólnienie większości twierdzeń występujących w poprzednim dziale na przypadek zespolony, a także uproszczenie i unifikację wielu dowodów. Wszystkie z poniższych wyników posiadają swoje analogi nad rzeczywistą prostą rzutową.

Jednoznaczność dwustosunku pozwala na udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Każde przekształcenie rzutowe jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości w trzech punktach. To znaczy, jeżeli f spełnia $f(A) = X, f(B) = Y, f(C) = Z$, gdzie punkty A, B, C są parami różne i podobnie X, Y, Z to istnieje tylko jedno takie f .*

Dowód. Dla dowolnego D na prostej zachodzi

$$(A, B; C, D) = (f(A), f(B); f(C), f(D)) = (X, Y; Z, f(D))$$

czyli punkt $f(D)$ jest wyznaczony jednoznacznie. \square

Natychmiastowym wnioskiem jest

Obserwacja 2.1. Przekształcenie rzutowe prostej mające trzy punkty stałe jest przekształceniem identycznościowym.

Szczególne znaczenie dla przekształceń rzutowych prostej ma jedna ze znanych ze szkolnej praktyki funkcji.

Definicja 2.3. Funkcją homograficzną nazywamy funkcję $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ postaci

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (2.1)$$

dla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ spełniających $ad - bc \neq 0$.

Ostatnie założenie ma na celu zagwarantowanie, że funkcja nie degeneruje się do funkcji stałej. Standardową definicję uzupełniamy o przypadki

- 1) $f(\infty) = \frac{a}{c}$ dla $c \neq 0$
- 2) $f(-d/c) = \infty$ dla $c \neq 0$
- 3) $f(\infty) = \infty$ dla $c = 0$

Tak zdefiniowaną funkcję nazywać będziemy *transformacją Möbiusa* [7]. Jest ona bijekcją $\overline{\mathbb{C}}$ w siebie, a w dodatku:

Twierdzenie 2.2. Zdefiniujmy przekształcenie F prostej rzutowej następująco: obrazem punktu A o współrzędnej a jest punkt $A' = F(A)$ o współrzędnej $f(a)$, gdzie f jest transformacją Möbiusa. Wtedy F jest przekształceniem rzutowym.

Dowód. Oczywiście F jest bijekcją prostej rzutowej. Dowód równości

$$(a, b; c, d) = (f(a), f(b); f(c), f(d))$$
$$\frac{a - c}{c - b} \cdot \frac{a - d}{d - b} = \frac{f(a) - f(c)}{f(c) - f(b)} \cdot \frac{f(a) - f(d)}{f(d) - f(b)}$$

dla dowolnych punktów A, B, C, D o współrzędnych odpowiednio a, b, c, d to przeliczenie wprost. \square

Zachodzi także twierdzenie odwrotne - każde przekształcenie rzutowe prostej rzutowej można zapisać w postaci transformacji Möbiusa.

Dla wygody w dalszej części utożsamiamy punkty z ich współrzędnymi na prostej rzutowej.

Twierdzenie 2.3. f jest przekształceniem rzutowym prostej rzutowej. Wtedy f jest transformacją Möbiusa.

Dowód. Każde przekształcenie rzutowe jest jednoznacznie zdefiniowane przez wartości w trzech punktach. Udowodnimy więc: dla dowolnej trójki par punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, gdzie x_i są parami różne i y_i są parami różne istnieje transformacja Möbiusa spełniająca $f(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Załóżmy na początek, że $c \neq 0$, a dzięki jednorodności

(przemnożenie a, b, c, d przez niezerową stałą nie zmienia funkcji) możemy założyć, że $c = 1$, ponadto niech x_i, y_i będą punktami właściwymi. Gdy pewne z nich są punktem w nieskończoności dowód przebiega analogicznie.

Problem sprowadza się do rozwiązania układu równań postaci

$$\begin{cases} \frac{ax_1+b}{x_1+d} = y_1 \\ \frac{ax_2+b}{x_2+d} = y_2 \\ \frac{ax_3+b}{x_3+d} = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1 + b - dy_1 = x_1y_1 \\ ax_2 + b - dy_2 = x_2y_2 \\ ax_3 + b - dy_3 = x_3y_3 \end{cases}$$

Istnienie jednoznacznego rozwiązania powyższego układu równań o zmiennych a, b, d jest równoważne z niezerowaniem się następującego wyznacznika

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -y_1 \\ x_2 & 1 & -y_2 \\ x_3 & 1 & -y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Powyższy wyznacznik jest równy zero, jak łatwo sprawdzić, wtedy i tylko wtedy gdy punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ są współliniowe (w przypadku rzeczywistym wyznacznik ten opisuje pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach). Ponieważ y_i są parami różne, to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{C}$, takie, że $y_i = ax_i + b$ dla $i = 1, 2, 3$, więc w tym przypadku przekształcenie także jest żądanej postaci. \square

Oczywistym wynikiem powyższych rozważań jest wniosek, że przekształcenia opisywane następującymi równaniami zachowują dwustosunek:

1. $f(x) = \frac{a}{x}$ (Inwersja o potędze a)
2. $f(x) = ax$ (Jednokładność połączona z obrotem, lub symetria połączona z jednokładnością w przypadku rzeczywistym)
3. $f(x) = x + a$ (Translacja)

Widzimy zatem, że przekształcenia rzutowe na prostej dają się dobrze sklasyfikować, każde z nich przedstawia się równaniem postaci 2.1. Okazuje się, że na tego typu przekształcenia można zaskakująco często natknąć się w zwykłej sytuacji geometrycznej. Znaczącym wynikiem tego dotyczącym jest następujące

Twierdzenie 2.4 (Wszechstronne twierdzenie). *Każde odwracalne przekształcenie f prostej rzutowej wyrażające się funkcją wymierną zachowuje dwustosunek.*

Dowód. Skoro f jest funkcją wymierną, to możemy zapisać

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

dla pewnych względnie pierwszych wielomianów g, h . Z faktu, że f jest odwracalna dostajemy, że równanie $f(x) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, co oznacza, że równanie wielomianowe

$$g(x) - zh(x) = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego $z \in \mathbb{C}$ poza co najwyżej jednym (odpowiadającym $f(\infty)$). Z tego wynika, że stopnie g, h są mniejsze od dwóch, więc f jest transformacją Möbiusa, co kończy dowód. \square

Jego konsekwencje są, krótko mówiąc, wybitnie szerokie. Czemu? Znakomitą wielkość sytuacji na płaszczyźnie można przedstawić w postaci równań wielomianowych, wymiernych. Do tego by przekształcenie opisane pewną konstrukcją geometryczną było rzutowe często wystarczy by było ono jednoznaczne (gdy prosta przecina okrąg nie rozróżniamy od siebie tych punktów przecięcia) i odwracalne.

Pozwala ono w prosty sposób udowodnić (między innymi) twierdzenia 1.3, 1.9, 1.15. Co więcej, to podejście od razu uogólnia je na przypadek zespolony. Prześledźmy cały proces na przykładowych dowodach kilku z nich.

Twierdzenie (Uogólnienie twierdzenia 1.3). *Dany jest pęk czterech prostych a, b, c, d w punkcie P . Przecinają one proste k, l odpowiednio w punktach $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Wtedy $(A, B; C, D)_k = (A', B'; C', D')_l$.*

Dowód. Działamy w $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Bez strat ogólności P to początek układu współrzędnych, proste k, l nie są prostopadłe (wystarczy przekształcić afinicznie w przypadku gdy są, jest to przekształcenie równoważne), a prosta k ma równanie $y = 1$. Zrzutujemy punkty A', B', C', D' na prostą k . Otrzymane punkty mają ten sam dwustosunek co wcześniejsze (rzutowanie prostokątne zachowuje stosunki długości odcinków na prostej, a więc także dwustosunek). Wystarczy pokazać, że przekształcenie biorące punkt X na prostej k , rzutujące go przez punkt P na prostą l , a następnie rzutujące go prostokątnie na prostą k jest rzutowe.

Niech punkt X ma współrzędne $(x_0, 1)$. Wtedy prosta PX ma równanie $y = \frac{x}{x_0}$, a jej przecięcie z prostą l o równaniu $y = ax + b$ ma współrzędne $(\frac{bx_0}{1-x_0a}, t)$ dla pewnego t , więc jego rzut na k jest punktem $(\frac{bx_0}{1-x_0a}, 1)$. Funkcja $f(x) = \frac{bx}{1-ax}$ jest transformacją Möbiusa, więc na podstawie twierdzenia 2.2 zachowuje dwustosunek, co kończy dowód. \square

Niezbyt eleganckie, ale też o oryginalnym dowodzie ciężko powiedzieć, że był w pełni syntetyczny. Ten ma w dodatku istotną przewagę - radzi sobie od razu z przypadkami brzegowymi, gdzie w rachubę wchodzi punkty niewłaściwe. Czytelnik wprawny w przekształceniach algebraicznych od razu spostrzeże, że powyższe kalkulacje można istotnie skrócić korzystając z twierdzenia 2.4 (jedyne co robimy, to składamy ze sobą funkcje wymierne zależne od x_0 , więc ostatecznie także otrzymamy funkcję wymierną). Dowód wygląda wtedy mniej więcej tak:

Dowód. Przekształcenie dowolnego punktu X na prostej k rzutujące go przez punkt P na prostą l , a następnie rzutujące prostopadłe na prostą k wyraża się funkcją wymierną od współrzędnych punktu X i jest odwracalne (w oczywisty sposób), więc na podstawie wszechstronnego twierdzenia 2.4 zachodzi teza. \square

Prześledźmy powyższą metodę na kolejnych przykładach.

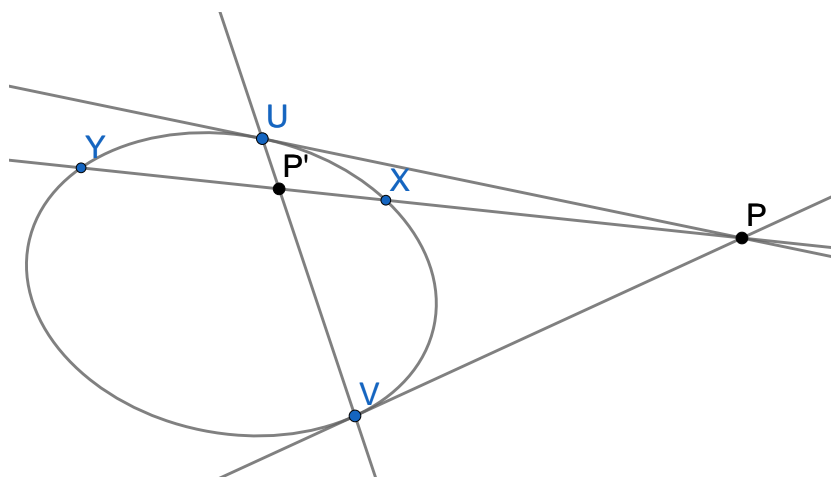
Twierdzenie 2.5 (Uogólnienie twierdzenia 1.9). *Dana jest stożkowa Γ oraz sześć punktów A, B, C, D, P, P' na niej. Wtedy $P(A, B; C, D) = P'(A, B; C, D)$.*

Dowód. Wybierzmy dowolną prostą k nieprzechodzącą przez punkty P, P' , bez strat ogólności niech ma ona równanie $y = 0$. Rozważmy następujące przekształcenie: wybieramy punkt X na k , bierzemy drugie przecięcie prostej PX z Γ (oznaczymy ten punkt przez X'), następnie bierzemy punkt przecięcia prostej $P'X'$ z k i tak definiujemy obraz punktu X w tym przekształceniu. Łatwo widać, powyższe przejścia są odwracalne, więc wystarczy pokazać, że ta zależność wyraża się funkcją wielomianową. Współrzędne punktu X' na pewno się nią wyrażają (jest to przecięcie krzywej stopnia drugiego z prostą, sprowadza się do rozwiązania równania stopnia drugiego, ale znając jedno przecięcie, drugie możemy wyznaczyć korzystając ze wzorów Viete'a), więc także współrzędne obrazu (przecięcie dwóch prostych) są wyrażone funkcją wymierną zależną jedynie od współrzędnej X , co na podstawie wszechstronnego twierdzenia 2.4 kończy dowód. \square

Dużym plusem z działania na liczbach zespolonych jest ich dobrze znana własność. Jako ciało są zbiorem algebraicznie domkniętym, więc *każde* dwie krzywe stopnia n i m przecinają się w nm punktach (licząc z krotnościami oraz ewentualnymi wspólnymi punktami w nieskończoności). W szczególności oznacza to, że prosta przecina się z krzywą stożkową w dokładnie dwóch punktach lub jest do niej styczna. Ten niezwykle przyjemny fakt umożliwia przeprowadzanie bardzo eleganckich w swej prostocie dowodów. Oto przykład

Twierdzenie 2.6 (Uogólnienie twierdzenie 1.15). *Dany jest punkt P oraz stożkowa Γ . Prosta przechodząca przez P przecina Γ w punktach X i Y , a biegunową punktu P w P' . Zachodzi $(X, Y; P, P') = -1$.*

Dowód. Biegunowa, jak łatwo się przekonać, jest prostą przechodzącą przez punkty przecięcia Γ ze stycznymi poprowadzonymi z punktu P . Oznaczmy je przez U, V . Wtedy



$$(X, Y; P, P') \stackrel{U}{=} (X, Y; U; V)_\Gamma \stackrel{V}{=} (X, Y; P', P)$$

Więc $(X, Y; P, P') = \pm 1$, ale $X \neq Y$ i $P \neq P'$, co kończy dowód. \square

Przekształcenia rzutowe płaszczyzny rzutowej

W tej części rozważania rozszerzymy do płaszczyzny rzutowej. Przykładowymi przekształceniami rzutowymi są:

1. Izometrie
2. Jednokładność
3. Przekształcenia afiniczne

Wszystkie z powyższych zachowują współliniowość i stosunek długości odcinków na prostej, a co za tym idzie, dwustosunek dowolnej czwórki punktów. Na początku tego skryptu zaprezentowane zostało kolejne z nich - rzutowanie perspektywiczne.

Dowolną trójkę niewspółliniowych punktów jesteśmy w stanie przekształcić na inną taką trójkę za pomocą przekształceń afinicznych, co więcej, istnieje dokładnie jedno takie przekształcenie. Jako że przekształcenia rzutowe tworzą ogólniejszą klasę przekształceń, to do jednoznacznego wyznaczenia tegoż potrzebować będziemy czegoś więcej. Okazuje się, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.7. *Dane są dwa przekształcenia rzutowe płaszczyzny rzutowej ϕ i ψ , które pokrywają się w czwórce punktów, takich że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Wtedy $\phi = \psi$.*

Dowód. Udowodnimy, że przekształcenie rzutowe, które ma cztery punkty stałe A, B, C, D jest przekształceniem identycznościowym.

Skoro punkty A, B, C, D przechodzą na siebie, to zgodnie z założeniem o zachowywaniu współliniowości, na siebie przechodzą także punkty $X = AB \cap CD, Y = BC \cap DA, Z = AC \cap BD$. Każdy z boków czworokąta zupełnego $ABCD$ ma więc trzy punkty stałe w tym przekształceniu, czyli na podstawie obserwacji 2.1 każdy punkt na boku czworokąta $ABCD$ przechodzi na siebie.

Rozważmy dowolną prostą na płaszczyźnie. Ma ona co najmniej trzy punkty wspólne z bokami czworokąta $ABCD$, więc na podstawie obserwacji 2.1 jest ona prostą punktów stałych. Otrzymujemy, że każdy punkt płaszczyzny przechodzi na siebie.

Rozważmy teraz przekształcenia ϕ i ψ pokrywające się w czterech punktach. Wtedy przekształcenie $\phi \circ \psi^{-1}$ ma cztery punkty stałe, więc na podstawie wcześniejszych uwag

$$\phi \circ \psi^{-1} = id \implies \phi = \psi$$

co kończy dowód. □

Do pełnej klasyfikacji brakuje nam jedynie

Twierdzenie 2.8. *Dane są dwa czworokąty zupełne. Istnieje wtedy dokładnie jedno przekształcenie rzutowe przenoszące jeden na drugi.*

Dowód. Udowodnimy, że dla każdego czworokąta zupełnego istnieje przekształcenie rzutowe przenoszące go na kwadrat jednostkowy. Z tego faktu wprost wynika istnienie przekształcenia z tezy, a twierdzenie 2.7 gwarantuje nam jego jedyność.

Oznaczmy kolejne wierzchołki czworokąta przez A, B, C, D , oraz niech $X = AB \cap CD$ i $Y = BC \cap DA$. Rozważmy rzutowanie perspektywiczne, które przenosi prostą XY do nieskończoności. Pary prostych AB, CD oraz BC, DA stają się po nim równoległe. Następnie zastosujemy przekształcenie afiniczne przenoszące punkty A, B, C na punkty $(0, 1), (0, 0), (1, 0)$. Oczywiście skoro przekształcenia afiniczne zachowują równoległość, to punkt D przejdzie na $(1, 1)$, co kończy dowód. \square

Powyższe rozumowanie pokazuje także, że każde przekształcenie rzutowe jest złożeniem tych wymienionych we wstępie tej części. W takim razie kolejnym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest

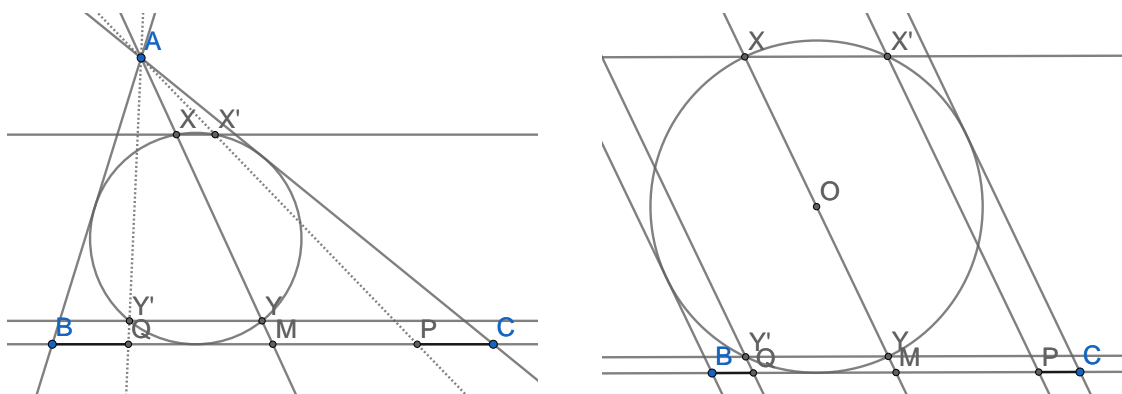
Obserwacja 2.2. Obrazem krzywej stożkowej w *dowolnym* przekształceniu rzutowym jest krzywa stożkowa.

Podsumowując, wybranie obrazu czterech punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe jednoznacznie zadaje przekształcenie rzutowe. Widzimy więc, że dowolne czworokąty zupełne są ze sobą rzutowo równoważne, co więcej, dowolny czworokąt zupełny tworzy „ramę”, która definiuje przekształcenie rzutowe.

Oto kilka przykładów prezentujących zastosowania powyższych wniosków.

Zadanie 2.1. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ wraz z okręgiem wewnątrz wpisanym ω . Środkowa poprowadzona z A przecina ω w punktach X i Y . Proste równoległe do BC przechodzące przez X, Y przecinają ω ponownie w punktach odpowiednio X', Y' . Punkty przecięcia prostych AX', AY' z BC to, kolejno P, Q . Udowodnić, że $|BP| = |QC|$.

Dowód. Niech oznaczmy środek odcinka BC przez M . Wybierzmy punkt O znajdujący się na prostej prostopadłej do płaszczyzny zadania przechodzącej przez M i rzutujemy całość na płaszczyznę równoległą do dowolnej płaszczyzny przechodzącej przez punkt O oraz prostą równoległą do BC przechodzącą przez A . Wtedy teza się nie zmienia ze względu na symetrię, punkt A trafia na prostą w nieskończoności, a ω przechodzi na pewną elipsę. Zastosujemy teraz przekształcenie afiniczne, które przekształca otrzymaną elipsę z powrotem na okrąg.



Zadanie wygląda teraz następująco: dwie proste równoległe, na nich punkty B i C . Prosta równoległa do obu prostych przechodząca przez środek odcinka BC (środek został zachowany, podobnie jak punkt w nieskończoności prostej BC) przecina okrąg

wpisany w te trzy proste w punktach X i Y . Proste równoległe do BC przechodzące przez X i Y przecinają okrąg ponownie w punktach X' i Y' . Wtedy proste równoległe do tych początkowych przechodzące przez X' i Y' przecinają BC w punktach P i Q . Teza pozostaje niezmienną. W tym układzie dowód jest już prosty: wynika prost z symetrii względem środka okręgu ω . \square

Analogicznie rozwiązać można następujące uogólnienie tego zadania (do czego zachęcam Czytelnika):

Zadanie 2.2. Dany jest trójkąt ABC wraz z okręgiem weń wpisanym ω . Proste p i q przechodzące przez A są izotomicznie sprzężone w ABC . Prosta p przecina ω w punktach X, Y , gdzie X leży bliżej punktu A niż Y , a prosta q przecina go w X', Y' , gdzie X' leży bliżej punktu A niż Y' . Proste równoległe do BC przechodzące przez X i Y' przecinają ω w punktach, odpowiednio, P i Q . Udowodnić, że proste AP i AQ są izotomicznie sprzężone w ABC .

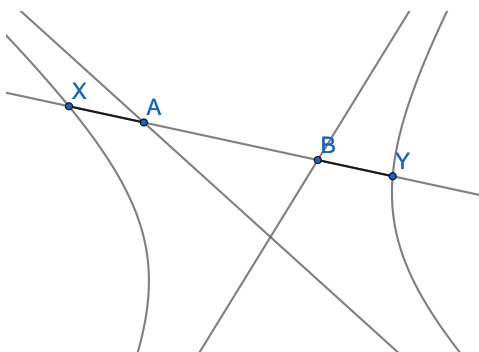
Warto zaznaczyć, że powyższe zadania są *trudne*.

Zobaczymy ponownie na problem 1.1.

Zadanie 2.3. Dany jest punkt Q i cztery poprowadzone przez niego proste a, b, c, d . Proste k, l nieprzechodzące przez Q przecinają się w P . Oznaczmy przecięcie a prostymi z l, k odpowiednio jako A_1, A_2 i analogicznie definiujemy $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. Udowodnić, że punkty $X = A_1B_2 \cap A_2B_1, Y = B_1C_2 \cap B_2C_1$ oraz $Z = C_1D_2 \cap C_2D_1$ są współliniowe.

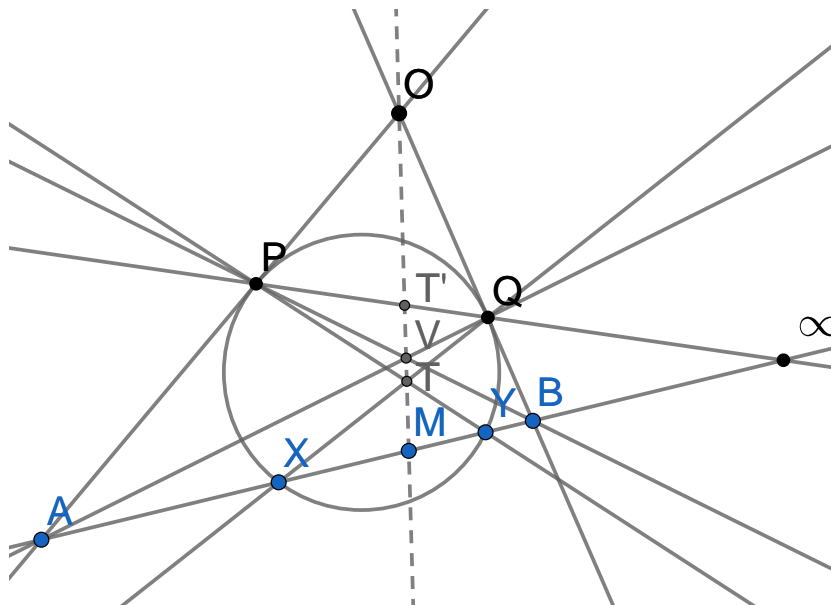
Dowód. Rozważmy przekształcenie rzutowe przenoszące czworokąt A_1, A_2, B_2, B_1 na kwadrat. Teza staje się oczywista. \square

Zadanie 2.4. Dana jest hiperbola Γ o asymptotach k i l . Prosta p przecina Γ w punktach X i Y , a proste k i l odpowiednio w A i B . Udowodnić, że $\overline{AX} = \overline{YB}$.



Dowód. Oznaczmy przez M środek odcinka AB , a przez O punkt przecięcia asymptot. Tezę można wtedy równoważnie zapisać jako $(A, B; M, \infty_p) = (X, Y; M, \infty_p)$. Rozważmy przekształcenie rzutowe przenoszące hiperbolę Γ na okrąg. Prosta w nieskończoności przejdzie na prostą przecinającą ten okrąg (oznaczymy te punkty przecięcia jako P i Q). Asymptoty przejdą na proste styczne do Γ w P i Q . Styczne te przecinają p odpowiednio w X i Y . Punkt ∞_p przejdzie na przecięcie prostej PQ z p , a punkt M

spełnia $(A, B; M, \infty_p) = -1$. Z twierdzenia 1.4 otrzymujemy, że gdy $T = XQ \cap PY$ to wtedy prosta OT przecina PQ w punkcie T' takim, że $(P, Q; T', \infty_p) = -1$. Z twierdzenia 1.16 gdy zdefiniujemy $V = AQ \cap BP$, to punkt V leży na biegunowej punktu ∞_p . Z drugiej strony, punkt ∞_p leży na biegunowej punktu O , więc z prawa wzajemności biegunowych punkt O leży na biegunowej ∞_p , a z tego wynika, że prosta OV jest biegunową ∞_p , więc przecina p w M .



Wystarczy więc pokazać, że punkty O, T, V są współliniowe. Jednakże prosta OV jako biegunowa ∞_p przecina prostą PQ w punkcie V' spełniającym $(P, Q; V', \infty_p) = -1$, więc $T' = V'$, co kończy dowód. \square

Punkty okręgowe

Okrąg w geometrii ma szczególne znaczenie ze względu na swoje własności syntetyczne oraz dużą symetrię. Z tego powodu po zastosowaniu przekształcenia rzutowego do sytuacji geometrycznej zawsze staraliśmy się „odzyskać” okrąg poprzez użycie odpowiedniego przekształcenia afinicznego. Jednak jest to możliwe jedynie gdy prosta, którą przenieśliśmy do nieskończoności nie miała punktów wspólnych z okręgiem - w przeciwnym wypadku otrzymujemy parabolę lub hiperbolę, których nie jesteśmy w stanie przenieść afinicznie na okrąg.

W tym miejscu pojawia się kolejna zaleta pracy nad $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ - jesteśmy w stanie przenieść dowolną prostą, która nie jest styczna do okręgu, do nieskończoności, jednocześnie zachowując ten okrąg. Podstawą do tego są tak zwane *punkty okręgowe*.

Definicja 2.4. Punkty na prostej w nieskończoności o współrzędnych

$$\zeta = [i : 1 : 0] \quad \bar{\zeta} = [-i : 1 : 0]$$

nazywamy punktami okręgowymi.

Poniższy fakt wyjaśnia pochodzenie nazwy:

Twierdzenie 2.9. *Krzywa stożkowa jest okręgiem wtedy i tylko wtedy gdy przechodzi przez punkty okręgowe.*

Dowód. Wstawiając punkty $\zeta, \bar{\zeta}$ do ogólnego równania stożka:

$$a_{20}X^2 + a_{02}Y^2 + a_{11}XY + a_{10}XZ + a_{01}YZ + a_{00}Z^2 = 0$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} -a_{20} + a_{02} + ia_{11} &= 0 \\ -a_{20} + a_{02} - ia_{11} &= 0 \end{aligned} \implies a_{11} = 0, a_{20} = a_{02}$$

co po przejściu na współrzędne kartezjańskie oznacza, że krzywa spełnia równanie postaci

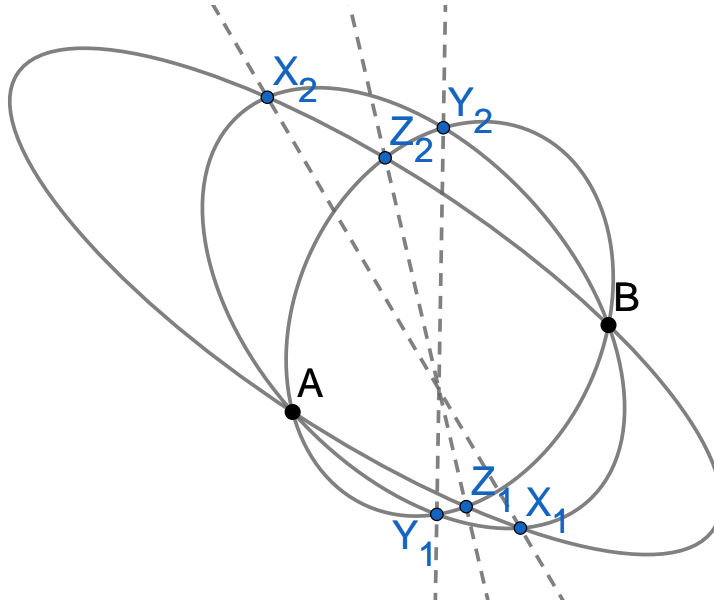
$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

czyli jest okręgiem ($a \neq 0$ z założenia). Sprawdzenie, że okrąg przechodzi przez punkty okręgowe przebiega analogicznie, co kończy dowód. \square

Uwaga. Gdy pracujemy nad \mathbb{CP}^2 twierdzenie to odnosi się także do okręgów urojonych (na przykład zalicza się do niego okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = -1$), a także tych o współczynnikach zespolonych - $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Prześledźmy zastosowanie istnienia tych punktów na przykładach.

Zadanie 2.5. Przez dwa punkty A, B przechodzą trzy elipsy $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Oznaczmy pozostałe punkty przecięcia elips $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ jako Z_1, Z_2 , elips $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ jako X_1, X_2 oraz elips $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1$ jako Y_1, Y_2 . Udowodnić, że proste X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 są współpękowe.

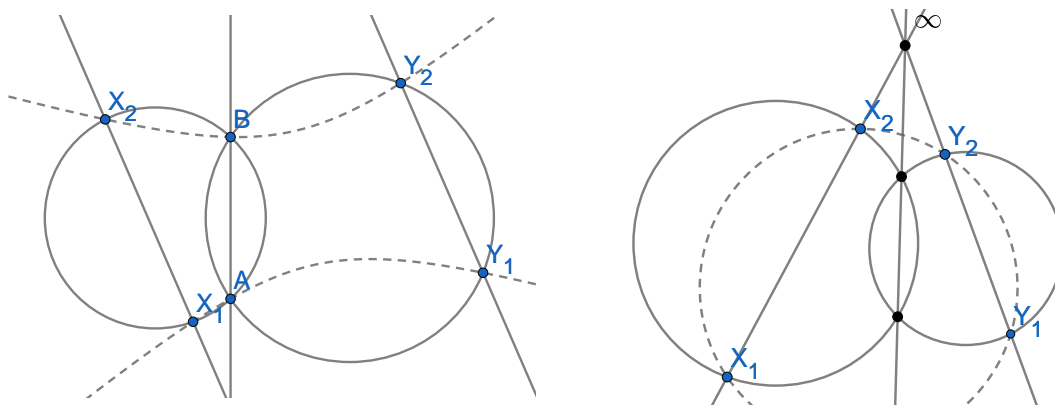


Dowód. Rozważmy przekształcenie rzutowe przekształcające punkty A, B na $\zeta, \bar{\zeta}$. Obrazy $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ przejdą wtedy na stożkowe przechodzące przez punkty okręgowe, więc

staną się okręgami. Teza przekształca się w treść twierdzenia o trzech osiach potęgowych. \square

Zadanie 2.6. Okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach A, B . Proste równoległe k, l przecinają ω_1, ω_2 odpowiednio w parach punktów X_1, X_2 oraz Y_1, Y_2 . Niech $P = X_1B \cap AX_2, Q = Y_1B \cap AY_2$ oraz $R = X_1Y_2 \cap X_2Y_1$. Udowodnić, że punkty P, Q, R są współliniowe.

Dowód. Jeśli pewne z trzech punktów A, B, X_1, X_2, Y_1, Y_2 są współliniowe, to łatwo udowodnić, że pozostałe trzy także są (jest to treść tak zwanego twierdzenia Reim'a), więc teza wynika z twierdzenia Pappusa. W dalszym ciągu zakładamy, że żadna trójka z nich nie jest współliniowa.



Oczywiście na podstawie twierdzenia Pascala teza jest równoważna temu, że przez punkty A, B, X_1, X_2, Y_1, Y_2 przechodzi krzywa stożkowa. Rozważmy przekształcenie przynoszące czwórkę punktów $(A, B, \zeta, \bar{\zeta})$ na czwórkę $(\zeta, \bar{\zeta}, A, B)$. Oczywiście obrazy krzywych ω_1, ω_2 wciąż przechodzą przez punkty okręgowe, więc pozostają okręgami. Punkt w nieskończoności prostych k, l był współliniowy z punktami $\zeta, \bar{\zeta}$, co oznacza, że po tym przekształceniu pozostaną współliniowe. Teza zamienia się na współokręgowość punktów $X_1X_2Y_1Y_2$, co oczywiście zachodzi z potęgi punktu dla ∞_k . \square

Uwaga. Współstożkowość punktów w zadaniu można w prosty sposób udowodnić także na podstawie twierdzenia 1.12 zastosowanego do trójkąta złożonego z prostych AB, k, l .

Uwaga. W powyższych dowodach przemilczany został fakt, że po zastosowanym w nich przekształceniach rzutowych proste i krzywe mogą zostać przeniesione na zespolone odpowiedniki. Jednakże rozumowania pozostają poprawne o ile potraktować występujące w nich twierdzenia jako pewne tożsamości algebraiczne - interpretowane w ten sposób pozostają prawdziwe także w dziedzinie liczb zespolonych.

2.2 Mapy rzutowe

W tej części omawiane będą tak zwane *mapy rzutowe* związane z techniką *moving points*, która rozszerzona została na potrzeby tej pracy. Wraz z wszechstronnym twierdzeniem 2.4 pojęcie to stanowi *bardzo* ogólne narzędzie, znajdujące zastosowanie w wielu problemach geometrycznych.

Uwaga. Określenie mapa rzutowa będzie stosowane zamiennie z przekształceniem rzutowym. Termin ten został wprowadzony by odróżnić przekształcenia opisywane w tym dziale od przekształceń rzutowych płaszczyzny rzutowej opisywanych wcześniej.

Definicja 2.5. Bijektywną funkcję $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ nazywamy mapą rzutową, gdy dla dowolnych $a, b, c, d \in A$ zachodzi

$$(a, b; c, d)_{\mathbb{A}} = (f(a), f(b); f(c), f(d))_{\mathbb{B}}$$

Za zbiory \mathbb{A}, \mathbb{B} można przyjąć cokolwiek na czym można zdefiniować dwustosunek. W tej pracy pojawiły się w tym kontekście już:

1. Zbiór punktów prostej rzutowej
2. Pęk prostych
3. Zbiór punktów na stożkowej
4. Zbiór stycznych do stożkowej

Posługiwanie się mapami rzutowymi wymaga pewnej zmiany myślenia w stosunku do tradycyjnego pojmowania geometrii. Syntetyczne podejście, a zaprezentowane w tej części „funkcyjne” różnią się ideowo, jednak stosowane razem potrafią umożliwić rozwiązanie szerokiej gamy problemów geometrycznych jednocześnie polepszając rozumienie geometrii „jako takiej”.

Podstawą techniki tu rozwijanej będzie analog twierdzenia 2.1.

Twierdzenie 2.10. *Jeśli mapa rzutowa jest zadana w trzech punktach to jest ona wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Niech A, B, C to punkty, X, Y, Z ich obrazy, a z kolei P - dowolny. Wtedy

$$(A, B; C, P)_{\mathbb{A}} = (f(A), f(B); f(C), f(X))_{\mathbb{B}} = (X, Y; Z, f(P))_{\mathbb{B}}$$

z czego wynika, że $f(P)$ jest wyznaczony jednoznacznie na \mathbb{B} , co kończy dowód. \square

Oto lista przykładowych map rzutowych:

1. Wszystkie złożenia, odwrotności i dualne wersje map rzutowych są mapami rzutowymi.
2. Niech f będzie dowolną izometrią, jednokładnością lub przekształceniem afinicznym, a \mathfrak{C} prostą, pękiem lub stożkową. Wtedy przekształcenie $f : \mathfrak{C} \rightarrow f(\mathfrak{C})$ jest mapą rzutową.

3. Mapa biorąca punkt X z prostej k i przyporządkowująca mu prostą PX dla $P \notin k$ jest rzutowa.
4. Dane są stożkowa Γ i punkt $P \in \Gamma$. Mapowanie punktu X na stożkowej w prostą PX jest rzutowe.
5. Dane są stożkowa Γ i punkt $P \notin \Gamma$. Mapowanie punktu X na stożkowej na drugi punkt przecięcia Γ z prostą XP jest rzutowe.
6. Dane są dwie proste k, l oraz punkt $P \notin k, l$. Mapa przyporządkowująca punktowi X na k punkt $PX \cap l$ jest rzutowa.
7. Dane są punkty P, Q oraz prosta k nieprzechodząca przez te punkty. Mapowanie prostej z pęku w P na prostą w pęku Q , taką, że proste te przecinają się na k jest rzutowe.
8. Dane są okrąg\prosta ω przechodząca przez punkt O . Niech ϕ_O to dowolna inwersja o środku w O . Wtedy mapa przyporządkowująca punktowi $X \in \omega$ punkt $\phi_O(X) \in \phi_O(\omega)$ jest rzutowa.
9. Dane są punkty A, B na prostej k . Mapowanie punktu X na punkt X' , spełniający $(A, B; X, X') = -1$ jest rzutowe.
10. Dane są dwa punkty A, B oraz prosta k nieprzechodząca przez te punkty. Mapowanie punktu X na drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABX z prostą k jest rzutowe.
11. Dane są dwie proste k, l przecinające się w punkcie P oraz punkt Q poza tymi prostymi. Mapowanie punktu $X \in k$ na drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na trójkącie PQX z prostą l jest rzutowe.
12. Dana jest prosta\stożkowa \mathcal{C} oraz stożkowa Γ . Mapa przyporządkowująca punktowi $X \in \mathcal{C}$ jego biegun względem Γ jest rzutowa.
13. Dana jest stożkowa Γ oraz dwa punkty P, Q na niej leżące. Mapa przyporządkowująca prostej p z pęku w P prostą q w pęku w Q taką, że proste te mają wspólny drugi punkt przecięcia z Γ jest rzutowa.
14. Dana jest stożkowa Γ oraz dwie styczne do niej proste k, l . Mapa przenosząca punkt X na prostej k w przecięcie drugiej stycznej z X do Γ z prostą l jest rzutowa.
15. Dane są cztery punkty A, B, C, D oraz prosta k . Mapowanie dowolnego punktu $X \in k$ na drugi punkt przecięcia stożkowej przechodzącej przez punkty $ABCDX$ z prostą k jest rzutowe.
16. Wszystko co spełnia założenia wszechstronnego twierdzenia 2.4.

Dowód.

1. Wynika to wprost z definicji oraz twierdzenia 1.18.
2. Oczywiście.

3. Jest to treść twierdzenia 1.3.
4. Jest to treść twierdzenia 1.5.
5. Jest to treść twierdzenia 1.13.
6. Jest to złożenie 3) i jego odwrotności.
7. Jest to dualna wersja poprzedniego podpunktu.
8. W przypadku prostej - wynika to z zachowywania dwustosunku przez inwersję na prostej. W przypadku okręgu jest to konsekwencja następujących równości (dla dowolnych punktów $A, B, C, D \in \omega$):

$$(A, B; C, D)_\omega = O(A, B, C, D) = (A', B'; C', D')_{\omega'}$$

Gdzie ω' jest prostą będącą obrazem okręgu ω w tej inwersji, a punkty A', B, C', D' są obrazami odpowiednio punktów A, B, C, D .

9. Mapa ta pokrywa się z inwersją względem okręgu o średnicy AB .
10. Niech prosta AB przecina k w punkcie O . Wtedy dla dowolnego X z potęgi punktu

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = c$$

dla pewnej stałej c , więc przekształcenie to pokrywa się z inwersją o środku w O i potędze c .

11. Niech $X' \in l$ będzie obrazem punktu $X \in k$ w tym przekształceniu. Wtedy $\sphericalangle XPX' = \sphericalangle XQX'$, więc dana mapa pokrywa się z następującym złożeniem: punkt X mapujemy na prostą QX , tę obracamy o kąt $\sphericalangle(k, l)$ antyzegarowo i rzutujemy na prostą l . Oczywiście te mapy są rzutowe więc ich złożenie także.
12. Wynika to z twierdzenia 1.18.
13. Jest to złożenie mapy z punktu 4. z jej odwrotnością.
14. Jest to dualna wersja poprzedniego punktu.
15. Jest to teza inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a - dowód w rozdziale mu poświęconemu.
16. Wynika to z tezy wszechstronnego twierdzenia 2.4. Co więcej, rzutowość wszystkich powyższych map można udowodnić na podstawie tego twierdzenia.

□

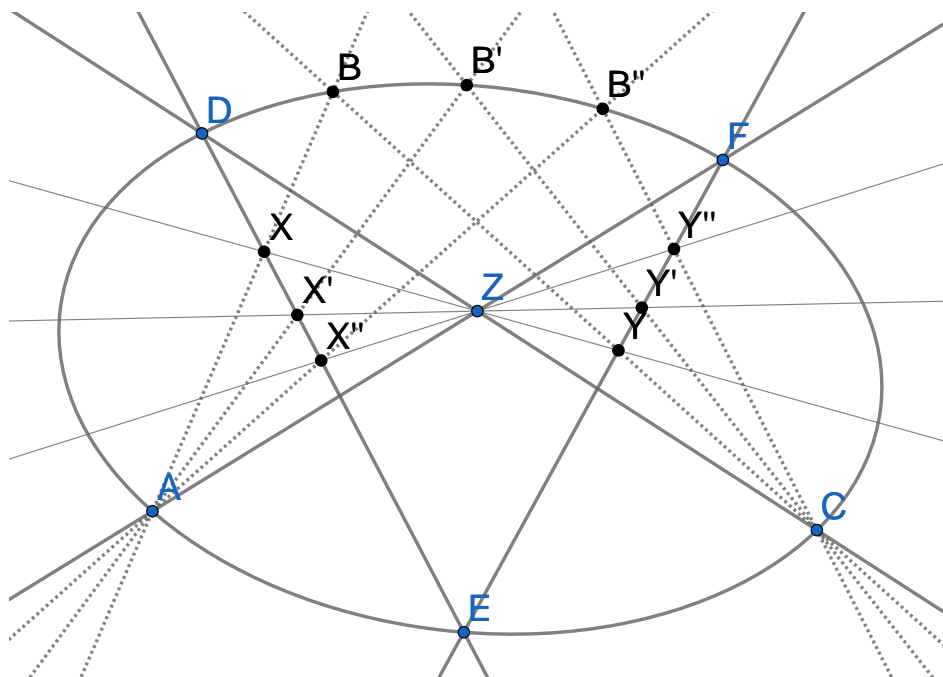
Powyższe wyniki wraz z twierdzeniem 2.2 pozwala na zastosowanie następującej metody w problemie geometrycznym: udowadniamy, że przekształcenia dzięki którym z założeń konstruujemy obiekty z tezy są rzutowe, więc na podstawie twierdzenia 2.2 wystarczy udowodnić prawdziwość tezy w trzech wybranych punktach. Najlepiej zaprezentować tę technikę na przykładach.

Uwaga. W całej dalszej części fakt, że mapowanie elementu X z obiektu \mathbb{A} na element Y z obiektu \mathbb{B} jest rzutowe będzie oznaczane następująco:

$$\mathbb{A}(X) \mapsto \mathbb{B}(Y)$$

Zadanie 2.7. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ wpisany w stożkową Γ . Udowodnić, że przecięcia jego naprzeciwległych boków $X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA$ są współliniowe.

Dowód. Jest to oczywiście twierdzenie Pascala. Udowodnimy je metodą prezentowaną w tym dziale. Ruszamy punktem B po krzywej Γ .



Wtedy

$$\Gamma(B) \mapsto A(AB) \mapsto DE(X)$$

co oznacza, że przekształcenie punktu B na Γ w punkt X na prostej DE jest rzutowe. Podobnie

$$\Gamma(B) \mapsto C(CB) \mapsto EF(Y)$$

a skoro odwrotności map rzutowych także są rzutowe, to mapa przekształcająca punkt X na prostej DE w punkt Y na prostej EF jest rzutowa. Aby pokazać tezę chcemy udowodnić, że pokrywa się ona z przetrzuceniem względem punktu Z (przekształcenie 6. z listy), a na podstawie twierdzenia 2.2 wystarczy to udowodnić dla trzech *wybranych* pozycji punktu B .

Biorąc B równe kolejno D, E, F , w których to przypadkach teza jest oczywista (prosto można się o tym samodzielnie przekonać), otrzymujemy, że rzeczywiście pokrywa się ona z przetrzuceniem względem Z , co kończy dowód. \square

Filozofia powyższego rozumowanie wygląda następująco: wybieramy pewien punkt, którym „ruszamy” po obiekcie, a następnie, traktując wszystko, co w zadaniu pozostaje

niezmienne przy ruszaniu punktem, jako „rusztowanie”, staramy się otrzymać obiekty z tezy, by następnie pokazać jej zachodzenie dla trzech *dowolnych* wyborów punktu, którym ruszaliśmy (oczywiście najlepiej wybrać takie punkty, dla których teza staje się oczywista).

Zadanie 2.8. Dany jest trójkąt ABC z środkiem okręgu wpisanego I . Niech D to punkt styczności okręgu wpisanego w ABC z prostą BC . Wybrano punkt X na prostej BI . Prosta prostopadła do DX przechodząca przez D przecina CI w punkcie Y . Udowodnić, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle BAI$.

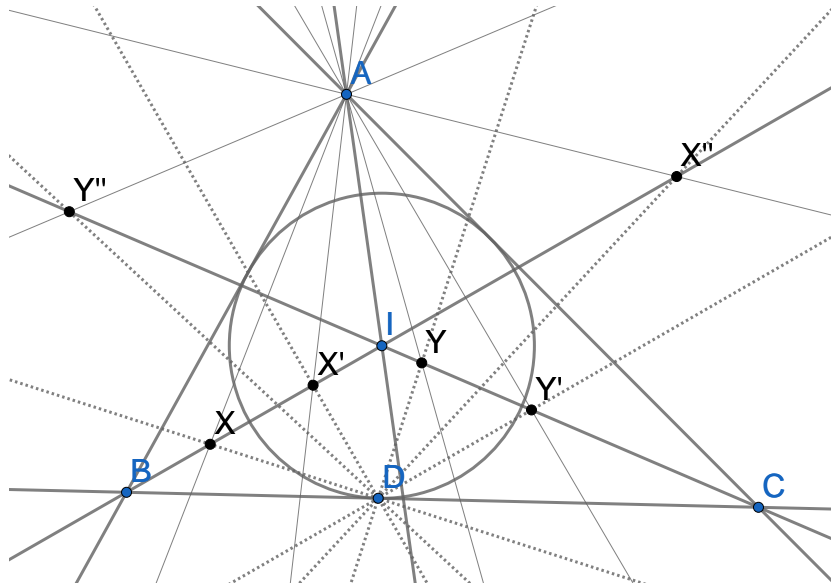
Dowód. Oczywiście ruszamy punktem X po prostej BI . Otrzymujemy

$$BI(X) \mapsto D(DX) \mapsto D(x) \mapsto CI(Y)$$

gdzie x jest prostą prostopadłą do DX przechodzącą przez D (ta mapa jest rzutowa, ponieważ jest obrotem pęku o 90°). Chcemy udowodnić, że ta mapa pokrywa się z następującą:

$$BI(X) \mapsto A(AX) \mapsto A(x') \mapsto CI(x' \cap CI)$$

gdzie x' jest prostą AX obróconą o kąt $\sphericalangle BAI$ wokół punktu A . Wystarczy więc pokazać zachodzenie tezy w trzech punktach by udowodnić równość tych map.



1. Dla $X = B$ teza jest oczywista, gdyż punkt odpowiadający mu punkt Y pokrywa się z punktem I .
2. Dla $X = I$ teza także jest oczywista, gdyż punkt Y przechodzi na punkt C .
3. Dla $X = \infty_{BI}$ prosta DX przechodzi na prostą równoległą do BI , więc punkt Y jest w tym przypadku przecięciem prostej prostopadłej do BI przechodzącej przez D z prostą CI . Ale ta prosta prostopadła z symetrii przechodzi także przez drugi punkt styczności okręgu wpisanego, jest więc biegunową punktu B względem

okręgu wpisanego, czyli na podstawie zadania 1.5 punkt Y jest rzutem punktu A na prostą CI . Wystarczy więc pokazać, że kąt pomiędzy prostą prostopadłą do CI a prostą BI wynosi $\sphericalangle BAI = \alpha$. Z prostego przeliczenia zachodzi $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \alpha$, z czego łatwo wynika teza.

Co kończy dowód. □

Zadanie 2.9. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a Γ to okrąg opisany na tym trójkącie. Prosta AI przecina Γ po raz drugi w punkcie D . Wybrano punkt X na boku BC oraz punkt Y na łuku BDC spełniający $\sphericalangle BAX = \sphericalangle YAC$. Niech M to środek odcinka XI . Udowodnić, że proste DM oraz YI przecinają się na Γ .

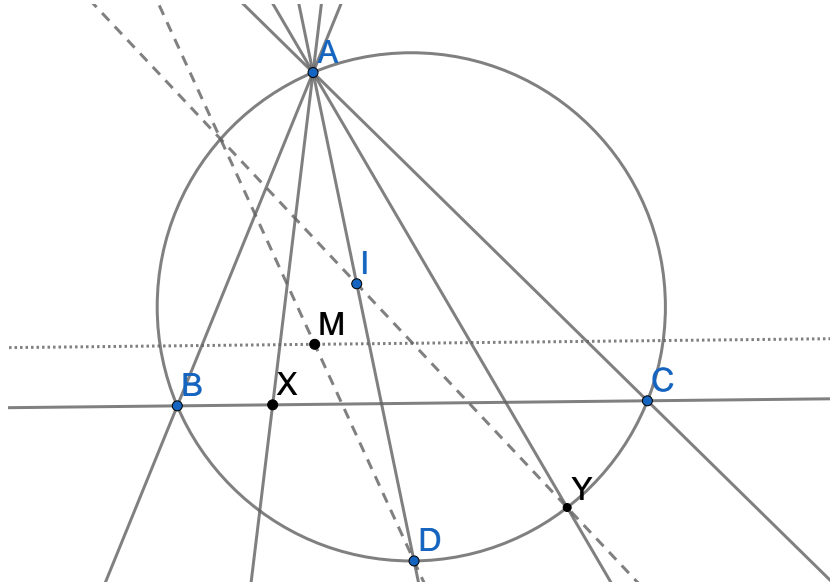
Dowód. Ruszamy punktem X po prostej BC . Rozważmy następujące dwie mapy

$$BC(X) \mapsto A(AX) \xrightarrow[\text{wzg. } AI]{\text{sym.}} A(AY) \mapsto \Gamma(Y) \xrightarrow{I} \Gamma(IY \cap \Gamma)$$

oraz

$$BC(X) \mapsto \phi(BC)(M) \mapsto D(DM) \mapsto \Gamma(DM \cap \Gamma)$$

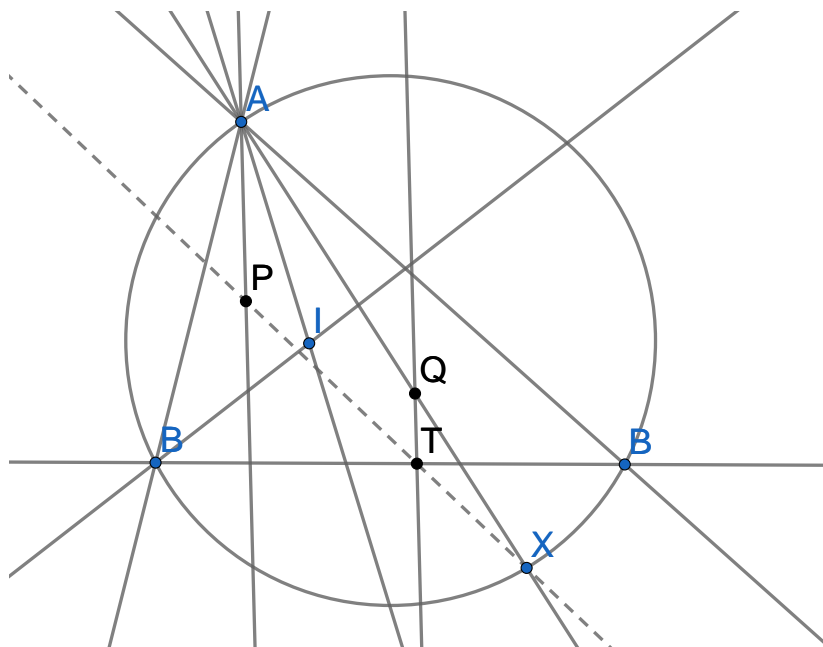
gdzie ϕ oznacza jednokładność o środku w I i skali $\frac{1}{2}$. Chcemy udowodnić, że te mapy się pokrywają, więc wystarczy pokazać to dla trzech wyborów punktu X . Dla $X = B, C$ teza jest oczywista, ponieważ punkt Y przechodzi odpowiednio na C, B .



Rozważmy jeszcze $X = BC \cap AI$. Wtedy prosta AY staje się styczną do Γ w A , więc $Y = A$. Oczywiście środek odcinka $IX = I\infty_{BC}$ pozostaje punktem w nieskończoności, więc $M = \infty_{BC}$. Chcemy pokazać, że prosta $YI = AI$ przecina Γ w tym samym punkcie co prosta równoległa do BC przechodząca przez D , ale ta prosta jest styczna do Γ , gdyż D to środek łuku, co kończy dowód. □

Zadanie 2.10. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa punkty z nim izogonalnie sprzężone P i Q . Prosta równoległa do AP przechodząca przez Q przecina BC w T . Udowodnić, że proste PT i AQ przecinają się na okręgu opisanym na ABC .

Dowód. Ustalmy prostą AP i ruszajmy po niej punktem P . Wtedy punkt Q rusza się po (również ustalonej) prostej AQ . Niech punkt przecięcia AQ z okręgiem opisanym to X , a I to środek okręgu wpisanego w ABC . Rozważmy następujące mapy rzutowe:



$$AP(P) \mapsto X(XP) \mapsto BC(T)$$

oraz

$$AP(P) \mapsto B(BP) \xrightarrow[\text{wzg. } BI]{\text{sym.}} B(BQ) \mapsto AQ(Q) \xrightarrow{\infty_P} BC(T)$$

Wystarczy więc sprawdzić, że teza zachodzi w trzech przypadkach.

1. Dla $P = A$ mamy $Q = BC \cap AQ = T$, więc działa.
2. Dla $P = AP \cap BC$ mamy $Q = A$ oraz $T = P$, więc działa.
3. Dla $P = \infty_{AP}$ mamy $Q = X$ (sprzężenie izogonalne punktu w nieskończoności leży na okręgu opisanym), więc teza także zachodzi.

Co kończy dowód. □

Przed przejściem do następnych przykładów zajmiemy się klasyfikacją map rzutowych pomiędzy dwiema prostymi oraz dwoma pękami. Ponieważ są to pojęcia wzajemnie dualne przedstawię całość w formie tabeli wersja podstawowa-wersja dualna.

Zacniemy od lematu

Lemat 2.1.

<p>Dane są dwa pęki w punktach P i Q. Niech ϕ będzie mapą rzutową pomiędzy tymi pękami spełniającą $\phi(PQ) = PQ$ (prosta PQ jest punktem stałym tej mapy). Wtedy zbiór $x \cap \phi(x)$ dla x należącego do pęku P tworzy prostą.</p>	<p>Dane są dwie proste p i q. Niech ϕ będzie mapą rzutową pomiędzy tymi prostymi spełniającą $\phi(p \cap q) = p \cap q$ (przecięcie prostych p, q jest punktem stałym tej mapy). Wtedy proste $X\phi(X)$ dla X leżącego na prostej p są współpękowe.</p>
<p><i>Dowód.</i> Weźmy dowolne $x, y \in P$ oraz niech $x' = \phi(x), y' = \phi(y)$. Oznaczmy punktu przecięcia $A = x \cap x', B = y \cap y'$. Wtedy ϕ pokrywa się w trzech punktach z mapą</p>	<p><i>Dowód.</i> Weźmy dowolne $X, Y \in p$ oraz niech $X' = \phi(X), Y' = \phi(Y)$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych XX', YY' jako A. Wtedy ϕ pokrywa się w trzech punktach z mapą</p>
$P(x) \mapsto AB(x \cap AB) \mapsto Q(x')$ <p>opisaną w tezie (pary te to $(x, x'), (y, y'), (PQ, PQ)$), więc z twierdzenia 2.2 pokrywa się z nią, co kończy dowód. \square</p>	$p(X) \mapsto A(AX) \mapsto q(X')$ <p>opisaną w tezie (pary te to $(X, X'), (Y, Y'), (p \cap q, p \cap q)$), więc z twierdzenia 2.2 pokrywa się z nią, co kończy dowód. \square</p>

Ma on bardzo ciekawe konsekwencje. Jeśli znajdziemy mapowanie pomiędzy dwiema prostymi i udowodnimy, że mapowanie to zachowuje punkt przecięcia prostych, to istnieje punkt P przez którego przechodzą wszystkie proste punkt-obraz.

Przekształcenia opisane wyżej nazywamy *przekształceniami perspektywicznymi*. Do pełnej klasyfikacji brakuje nam jedynie twierdzenia Steinera.

Twierdzenie 2.11 (Twierdzenie Steinera \ dualne twierdzenie Steinera).

<p>Dane jest nieperspektywiczne przekształcenie rzutowe ϕ pomiędzy pękami prostych P, Q. Wtedy punkty przecięcia $x \cap \phi(x)$ dla $x \in P$ leżą na pewnej stożkowej przechodzącej przez punkty P, Q.</p>	<p>Dane jest nieperspektywiczne przekształcenie rzutowe ϕ pomiędzy prostymi p, q. Wtedy proste $X\phi(X)$ dla $X \in p$ są stycznymi do pewnej stożkowej stycznej do prostych p, q.</p>
<p><i>Dowód.</i> Wybierzmy dowolne trzy punkty postaci $x \cap \phi(x)$ dla $x \in P$ i oznaczmy je A, B, C. Niech stożkowa przechodząca przez punkty A, B, C, P, Q to Γ. Wtedy ϕ pokrywa się w trzech punktach z następującą mapą rzutową:</p>	<p><i>Dowód.</i> Wybierzmy dowolne trzy proste postaci $X\phi(X)$ dla $X \in p$ i oznaczmy je a, b, c. Niech stożkowa styczna do prostych a, b, c, p, q to Γ. Wtedy ϕ pokrywa się w trzech punktach z następującą mapą rzutową:</p>
$P(x) \mapsto \Gamma(\text{drugie prz. z } x = X) \mapsto Q(QX)$ <p>więc ϕ jest jej równa, co kończy dowód. \square</p>	$p(X) \mapsto \Gamma(\text{druga sty. z } X = x) \mapsto q(q \cap x)$ <p>więc ϕ jest jej równa, co kończy dowód. \square</p>

Przechodzimy do dalszych przykładów.

Zadanie 2.11. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jest prosta Eulera k . Niech B', C' będą odbiciami punktów B, C względem k . Punkt P leży na k . Proste $B'P, C'P$ przecinają AC, AB odpowiednio w punktach X, Y . Udowodnić, że odbicie ortocentrum H względem prostej XY leży na okręgu opisanym.

Dowód. Oczywiście ruszamy punktem P po prostej k . Rozpoczniemy od wykazania, że mapa $AC(X) \mapsto AB(Y)$ jest rzutowa. Ale

$$k(P) \mapsto B'(B'P) \mapsto AC(X)$$

oraz

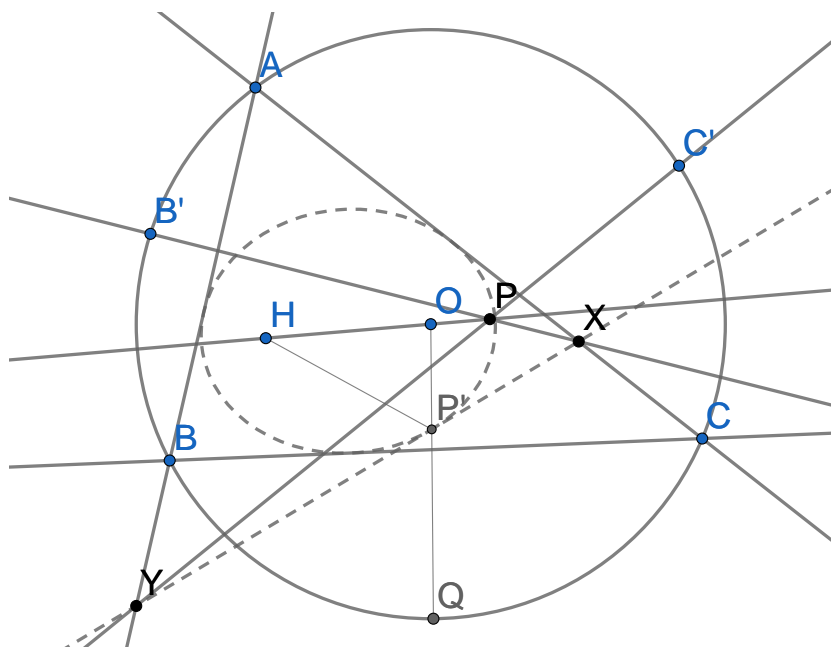
$$k(P) \mapsto C'(C'P) \mapsto AB(Y)$$

co tego dowodzi.

Zastanówmy się czym muszą być proste XY by teza zachodziła. Są one symetralnymi odcinków HQ dla Q leżącego na okręgu opisanym. Gdy oznaczymy przez P' przecięcie takiej symetralnej z odcinkiem OQ to spełnione jest

$$|HP'| + |P'O| = R$$

więc punkty P' leżą na elipsie o ogniskach O, H oraz jak łatwo się przekonać, stycznej do boków trójkąta ABC , oznaczmy ją przez \mathcal{E} . Naszym celem jest więc udowodnić, że proste XY są styczne do elipsy \mathcal{E} .



Załóżmy, że przekształcenie $AC(X) \mapsto AB(Y)$ nie jest perspektywiczne. Skoro nie jest, to na podstawie dualnego twierdzenia Steinerja istnieje stożkowa styczna do prostych AB, AC taka, że proste XY są do niej styczne. Skoro stożkowa jest jednoznacznie wyznaczona przez pięć prostych, to wystarczy pokazać, że trzy z prostych XY (różne od AB, AC) są styczne do \mathcal{E} by dowieść tezy.

1. Dla $P = O$ prosta XY jest prostą BC jest więc styczna do \mathcal{E} .
2. Dla $P = B'C' \cap k$ prosta XY jest symetryczna do BC względem k , a skoro BC jest styczna do \mathcal{E} oraz k jest jej osią symetrii (przechodzi przez jej ogniska), więc także jest styczna.
3. Dla $P = AB \cap k$ prosta XY jest odbiciem symetrycznym prostej AB względem k , więc analogicznie jak wyżej prosta ta jest styczna do \mathcal{E} .

Z czego wynika teza. Oczywiście proste zdefiniowane w poprzednich punktach nie są współpękowe, więc założenie o tym, że mapa nie jest perspektywiczna było poprawne. \square

Zadanie 2.12. W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum. Na okręgu opisanym na trójkącie BHC wybrano punkt P . Proste BP, CP przecinają proste AC, AB odpowiednio w X i Y . Udowodnić, że okręgi AXY przy zmieniającym się punkcie P przechodzą przez ustalony punkt różny od A .

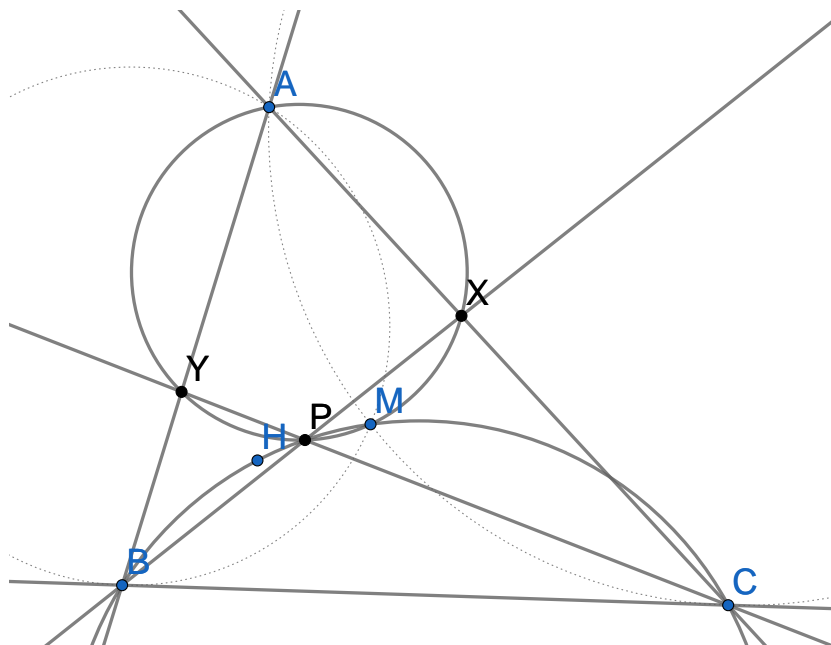
Dowód. Na początek zauważmy, że na okręgu opisanym na AXY leży także punkt P . Wynika to z następującej równości

$$180^\circ - \angle BAC = \angle BHC = \angle BPC = \angle XPY$$

Udowodnimy, że szukanym drugim punktem wspólnym tych okręgów jest przecięcie środkowej poprowadzonej z wierzchołka A z okręgiem opisanym na BHC - oznaczmy ten punkt przez M , a okrąg BHC przez ω . Ruszamy punktem P po ω . Następujące mapy są rzutowe:

$$\omega(P) \mapsto B(BP) \mapsto AC(X)$$

$$\omega(P) \mapsto C(CP) \mapsto AB(Y)$$



Więc punkt X jest rzutowy z Y . Rozważmy przekształcenie: wybieramy punkt X na AC i przyporządkowujemy mu drugie przecięcie okręgu opisanego na trójkącie AMX z prostą AB . Na podstawie listy to mapowanie jest rzutowe. Chcemy udowodnić, że pokrywa się ono z tym zdefiniowanym wcześniej. Rozpatrzmy trzy przypadki:

1. Na początku niech P będzie odbiciem punktu A względem środka odcinka BC . Leży on na ω ponieważ okrąg ten jest symetryczny do okręgu opisanego na ABC

względem środka BC . W tej sytuacji X, Y przechodzą na punkty w nieskończoności, więc okrąg $AXYP$ staje się prostą AP będącą oczywiście środkową, więc zawiera punkt M .

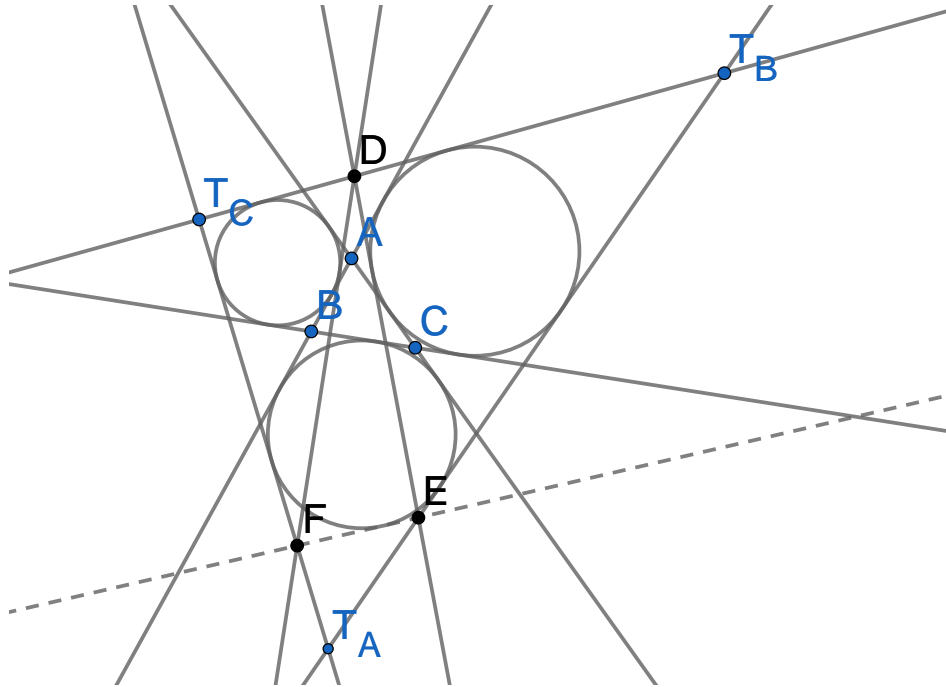
2. Przypadek $P = B$ i $P = C$ będziemy dowodzić jednocześnie. Okręgi AXY to w tych przypadkach okręgi przechodzące przez A i styczne do prostej BC w punktach odpowiednio B i C . Oznaczmy ich punkt wspólny różny od A jako N . Chcemy udowodnić, że $N = M$.

Prosta AN jest prostą potęgową tych okręgów, więc połowi ich wspólną styczną, którą jest BC . Wystarczy więc pokazać, że N leży na okręgu BHC , to znaczy, $\angle BNC = 180^\circ - \angle BAC$. Jednakże

$$\angle BNC = 180^\circ - \angle CBN - \angle NCB = 180^\circ - \angle BAC$$

Co kończy dowód. □

Zadanie 2.13. Okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ są okręgami dopisanymi do trójkąta ABC leżącymi odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C . Styczne zewnętrzne do każdej z par tych okręgów tworzą trójkąt T_A, T_B, T_C przy czym punkty te leżą naprzeciwko odpowiednio wierzchołków A, B, C trójkąta. Z punktu D na prostej $T_B T_C$ poprowadzono styczne różne od $T_B T_C$ do okręgów ω_B, ω_C . Pierwsza z nich przecina $T_A T_B$ w E natomiast druga przecina $T_A T_C$ w F . Pokazać, że prosta EF jest styczna do ω_A .



Dowód. Ruszamy punktem D po $T_B T_C$. Mapy

$$T_B T_C(D) \mapsto T_A T_B(E)$$

oraz

$$T_B T_C(D) \mapsto T_A T_C(F)$$

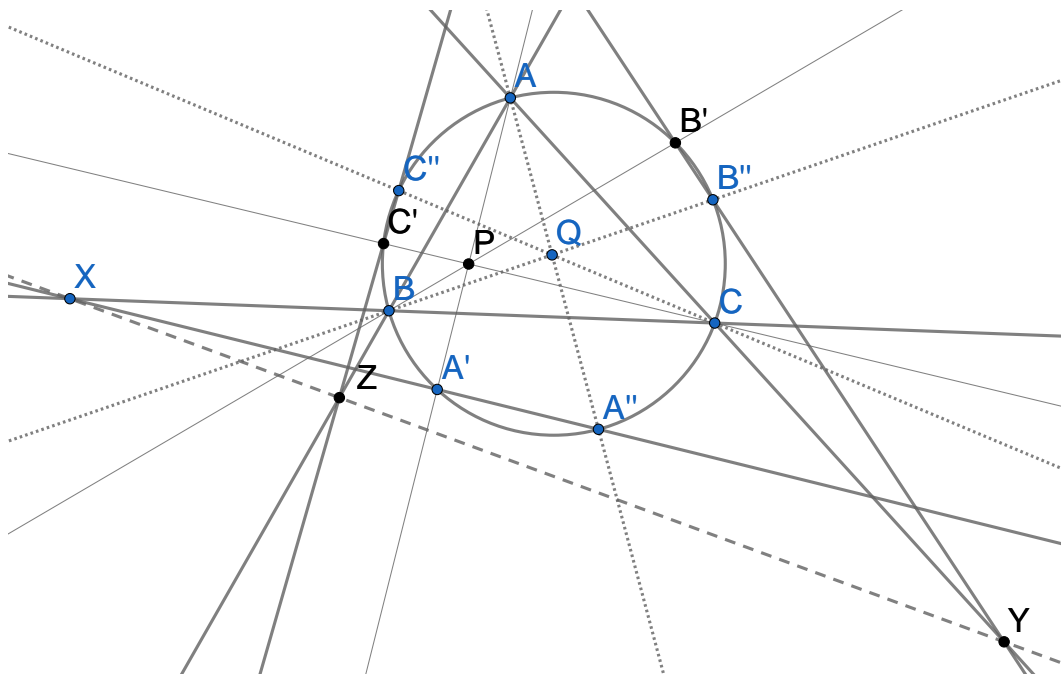
są rzutowe (jest to punkt 14. z listy), więc przekształcenie z punktu E na F jest rzutowe. Załóżmy, że przekształcenie to nie jest perspektywiczne. Udowodnimy, że ω_A jest stożkową występującą w dualnym twierdzeniu Steinera.

1. Dla $D = T_B T_C \cap BC$ prosta EF pokrywa się z prostą BC , jest więc styczna do ω_A .
2. Dla $D = T_B T_C \cap AC$ prosta EF pokrywa się z prostą AC , jest więc styczna do ω_A .
3. Dla $D = T_B T_C \cap AB$ prosta EF pokrywa się z prostą AB , jest więc styczna do ω_A .

Oczywiście proste AB, BC, CA nie są współpękowe, więc przekształcenie istotnie nie jest perspektywiczne. Okrąg ω_A jako styczny do prostych $AB, BC, CA, T_A T_B, T_A T_C$ jest stożkową z tego twierdzenia, co kończy dowód. \square

Zadanie 2.14. Dany jest trójkąt ABC wraz z okręgiem opisanym Ω i punkty P, Q różne od A, B, C . Oznaczmy $A' = AP \cap \Omega$ oraz $A'' = AQ \cap \Omega$. Analogicznie definiujemy B', B'', C', C'' . Udowodnić, że trójkąt złożony z prostych $A'A'', B'B'', C'C''$ jest perspektywiczny z ABC .

Dowód. Niech przecięcie prostych BC i $A'A''$ to X , analogicznie Y, Z . Teza to współliniowość punktów X, Y, Z .



Ustalmy prostą AA' i nazwijmy ją a . Mapy

$$a(P) \mapsto C(CP) \mapsto \Omega(C') \mapsto C''(C''C') \mapsto AB(Z) \mapsto X(XZ)$$

oraz

$$a(P) \mapsto B(BP) \mapsto \Omega(B') \mapsto B''(B''B') \mapsto AC(Y) \mapsto X(XY)$$

są rzutowe.

Otrzymujemy, że przekształcenie $X(XY) \mapsto X(XZ)$ jest rzutowe. Chcemy udowodnić, że jest to przekształcenie tożsamościowe, więc wystarczy to pokazać w 3 przypadkach:

1. Dla $P = A$ oczywiście, punkty Y, Z się pokrywają.
2. Dla $P = a \cap BC$ także oczywiście, punkty Y i Z trafiają na prostą BC .
3. Dla $P = A'$ teza wynika z zastosowania twierdzenia Pascala dla sześciokątów $A'C''CABB''$ (współliniowość Y, Z, Q) oraz $A'A''ACBB''$.

Co kończy dowód. □

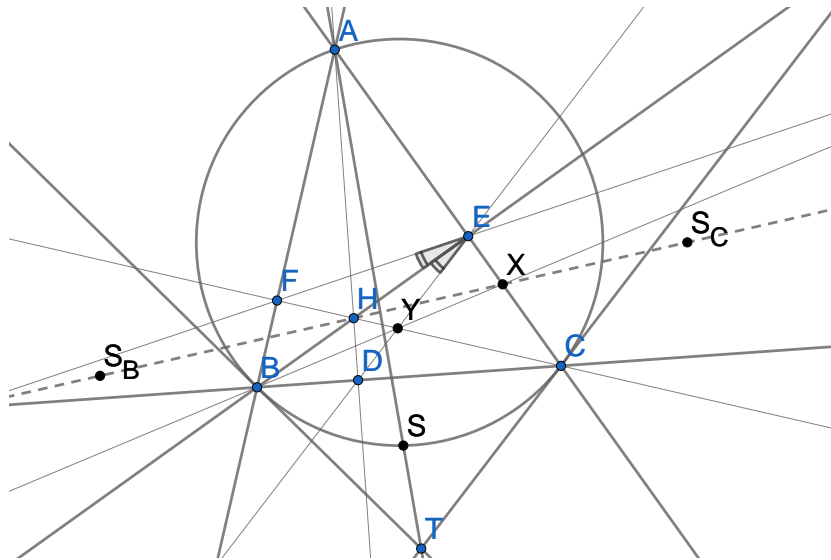
Uwaga. Powyższe zadanie ma ciekawe konsekwencje, szczególnie interesujący jest przypadek dla $P = Q$ - otrzymujemy wtedy dualną wersję twierdzenia Steinbarta. Z kolei gdy przyjmiemy, że punkty P, Q są izogonalnie sprzężone w kątach $\angle ABC$ i $\angle BCA$ to łatwo otrzymamy, że są także sprzężone w kącie $\angle BAC$, jest więc to alternatywny dowód twierdzenia o izogonalnym sprzężeniu. Dodatkowo, w żadnym miejscu nie korzystaliśmy z faktu, że Ω jest okręgiem, więc teza tego zadania zachodzi dla dowolnej krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty A, B, C w miejsce okręgu Ω .

Na koniec zaprezentuję przykład korzystający bezpośrednio z wszechstronnego twierdzenia 2.4.

Zadanie 2.15. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC . Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta. Proste AH, BH, CH przecinają BC, CA, AB odpowiednio w D, E, F . Styczne do ω w punktach B, C przecinają się w T . Prosta AT przecina po raz drugi ω w S . Niech odbicia S względem AB, AC to odpowiednio S_B, S_C . Prosta $S_B S_C$ przecina AC w X , prosta BX przecina CF w Y . Udowodnić, że prosta EF jest dwusieczną kąta FEY .

Dowód. Skoro AT jest symedianą w ABC , to czworokąt $ABSC$ jest harmoniczny. Prosta $S_B S_C$ jest prostą Steinera punktu S przechodzi więc przez H . Udowodnimy, że mapa przekształcająca punkt na ω w jego prostą Steinera (należącą do pęku H) jest rzutowa.

Wybermy dowolną prostą k rozłączną z ω (bez strat ogólności jej równanie to $y = 0$) i punkt $P(t, 0)$ na niej. Drugie przecięcia prostej AP z ω wyraża się funkcją wymierną od t , podobnie odbicia tego przecięcia względem prostych AB i AC , więc także przecięcie (X') prostej wyznaczonej przez te odbicia z AC . Prosta CX' przecina prostą k w punkcie X'' , którego współrzędne wyrażają się funkcją wymierną od t . Na podstawie wszechstronnego twierdzenia 2.4 wystarczy pokazać, że jest to przekształcenie odwracalne. To wynika z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o prostej Steinera (każdemu punktowi na okręgu odpowiada dokładnie jedna prosta Steinera z pęku H i *vice versa*).



Skoro czworokąt $ABSC$ jest harmoniczny, to z udowodnionego faktu proste Steiner'a punktów A, S, B, C (te proste dla A, B, C to odpowiednie wysokości) tworzą pęk harmoniczny. Po zrzutowaniu tego pęku na prostą AC otrzymujemy, że

$$-1 = (A, X; E, C) \stackrel{B}{=} (F, Y; H, C)$$

ale skoro $AC \perp EH$ to na podstawie lematu 1.1 zachodzi teza. \square

Jak widać spektrum zastosowań jest niezwykle szerokie, co czyni tę metodę bardzo ogólnym narzędziem. Najważniejsze w stosowaniu powyższej techniki jest dobry wybór punktu, którym się „rusza” oraz pewna intuicja w konstruowaniu map rzutowych.

Rozdział 3

Inwolucje

Ten rozdział poświęcony jest szczególnej klasie map rzutowych znanych *inwolucjami*.

Definicja 3.1. Inwolucją nazywamy przekształcenie rzutowe $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, które dla dowolnego $x \in \mathfrak{C}$ spełnia $f(f(x)) = x$, gdzie \mathfrak{C} to obiekt, na którym można zdefiniować dwustosunek. Dodatkowo zakładamy, że involucja nie jest identycznością. Pary $(X, f(X))$ nazywamy parami involucji f .

Przykłady involucji pokazane były już wcześniej, jest to między innymi inwersja na prostej. Analizę zaczniemy od wykazania ich kilku ogólnych własności. Na początek wniosek ze wzmocnienia założeń względem ogólnych map rzutowych.

Twierdzenie 3.1. *Inwolucja jest zdeterminowana jednoznacznie poprzez zadanie wartości w dwóch punktach*

Dowód. Niech $f(P) = P'$ i $f(Q) = Q'$. Załóżmy na początek, że przynajmniej jeden z danych punktów nie jest punktem stałym. Bez strat ogólności niech $P \neq P'$. Wtedy dla dowolnego $X \in \mathfrak{C}$

$$(P, P'; Q, X)_{\mathfrak{C}} = (f(P), f(P'); f(Q); f(X))_{\mathfrak{C}} = (P', P; Q', f(X))_{\mathfrak{C}}$$

czyli punkt $f(X)$ jest zadany jednoznacznie.

W przypadku gdy $f(P) = P$ i $f(Q) = Q$ zachodzi

$$(P, Q; X, f(X))_{\mathfrak{C}} = (f(P), f(Q); f(X), f(f(X)))_{\mathfrak{C}} = (P, Q, f(X), X)_{\mathfrak{C}}$$

więc $(P, Q; X, f(X)) = \pm 1$, ale skoro $X \neq f(X)$ (gdyby involucja miała trzy punkty stałe to byłaby identycznością) to $f(X)$ jest sprzężeniem harmonicznym punktu X względem P, Q .

Teraz w drugą stronę, dla dowolnych dwóch par punktów $(P, P'), (Q, Q')$ pokażemy, że istnieje involucja spełniająca $f(P) = P', f(Q) = Q'$. Bez strat ogólności działamy na prostej rzutowej. Wtedy istnieje transformacja Möbiusa f spełniająca $f(P) = P', f(P') = P$ i $f(Q) = Q'$ (zakładamy, że $P \neq P'$ - w sytuacji, gdy oba punkty są punktami stałymi to przekształcenie pokrywa się z braniem sprzężenia harmonicznego względem P, Q , co także spełnia tezę). Teraz dla dowolnego X na prostej

$$\begin{aligned} (P, P'; X, f(X)) &= (f(P), f(P'), f(X), f(f(X))) \\ &= (P', P; f(f(X)), f(X)) \implies f(f(X)) = X \end{aligned}$$

oraz w szczególności $f(Q') = Q$, co kończy konstrukcję. \square

Twierdzenie 3.2. *Mapa rzutowa $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ dla pewnego P spełnia $f(f(P)) = P$ oraz $f(P) \neq P$. Wtedy f jest inwolucją.*

Dowód. Oznaczmy $P' = f(P)$. Z założeń dla dowolnego $X \in \mathfrak{C}$

$$\begin{aligned} (P, P'; X, f(X))_{\mathfrak{C}} &= (f(P), f(P'); f(X), f(f(X)))_{\mathfrak{C}} = (P', P; f(X), f(f(X)))_{\mathfrak{C}} \\ &= f(P, P'; f(f(X)), f(X))_{\mathfrak{C}} \end{aligned}$$

więc $f(f(X)) = X$ co było do pokazania. \square

3.1 Klasyfikacja

Okazuje się, że inwolucje dają się dobrze sklasyfikować, co ma ciekawe konsekwencje.

Twierdzenie 3.3 (Inwolucje na prostej). *Dana jest inwolucja $f : p \rightarrow p$ gdzie p jest prostą rzutową. Wtedy f jest symetrią lub inwersją o niezerowej potędze.*

Dowód. Rozważymy dwa przypadki

1. $f(\infty) = \infty$.

Wyberzmy dowolny punkt właściwy $X \in p$ i oznaczmy przez M środek odcinka $Xf(X)$. Wtedy inwolucja pokrywa się w dwóch miejscach z symetrią względem punktu M (symetria jest inwolucją), więc są one sobie równe.

2. $f(\infty) = P \neq \infty$.

Wyberzmy dowolny punkt właściwy $X \in p$ i oznaczmy $X' = f(X)$. f pokrywa się wtedy w dwóch punktach z inwersją \mathcal{I}_P^c o środku w P i potędze $c = \overline{OX} \cdot \overline{OX'}$, więc na podstawie twierdzenia 3.1 $f = \mathcal{I}_P^c$.

\square

Uwaga. Symetrię można traktować jako graniczny przypadek inwersji o środku w punkcie w nieskończoności.

Uwaga. Alternatywnym dowodem tego twierdzenia jest rozwiązanie równania $f(f(x)) = x$, gdzie f jest transformacją Möbiusa.

Powyższe twierdzenie pokazuje od razu także interesujący fakt.

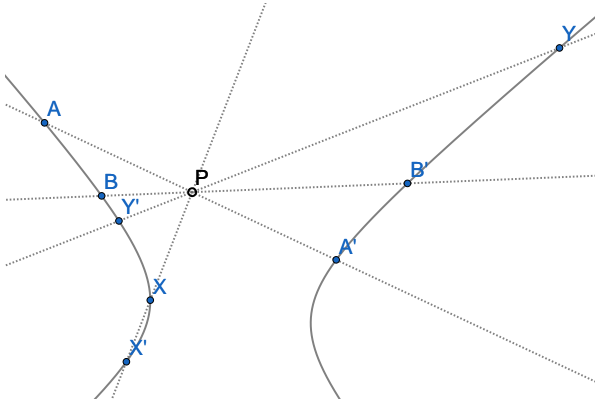
Obserwacja 3.1. Inwolucja na prostej $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ma dokładnie dwa punkty stałe (ich współrzędne są pierwiastkami równania $x^2 = c$ w przypadku inwersji o środku w 0) i pokrywa się z braniem sprzężenia harmonicznego względem tych punktów.

W przypadku rzeczywistym inwolucja ma 0 lub 2 punkty stałe (w zależności od znaku c).

Twierdzenie 3.4 (Inwolucje pęku). *Każda involucja f pęku prostych pokrywa się z braniem sprzężenia harmonicznego względem pewnej ustalonej pary prostych (być może zespolonych) będących jednocześnie punktami stałymi tego przekształcenia.*

Dowód. Po zrzutowaniu f na dowolną prostą nieprzechodzącą przez środek pęku otrzymujemy tezę twierdzenia. \square

Twierdzenie 3.5 (Inwolucje na stożkowej). *Dana jest stożkowa Γ . Inwolucja $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ pokrywa się z przetrzudem przez pewien ustalony punkt nienależący do Γ .*



Dowód. Wybierzmy dwa punkty $X, Y \in \Gamma$ i niech $f(X) = X', f(Y) = Y'$. Oznaczmy przecięcie prostych XX', YY' jako P . Wtedy f pokrywa się w dwóch punktach z przetrzudem względem P , więc na podstawie twierdzenia 3.1 jest jej równa, co kończy dowód. \square

W przypadku stożkowej punktami stałymi są punkty styczności stycznych (być może zespolonych) poprowadzonych z punktu P do Γ .

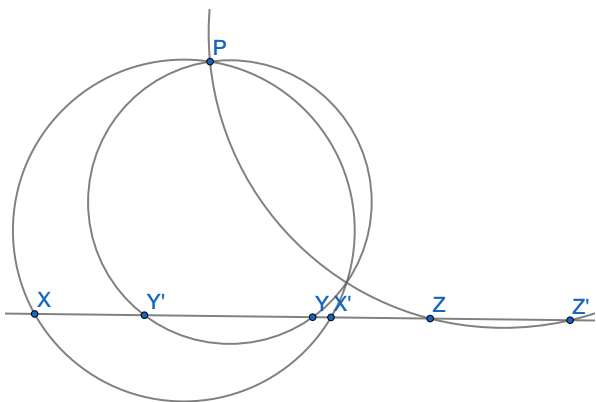
Twierdzenie 3.6 (Inwolucje stycznych do stożkowej). *Niech \mathbb{S} oznacza zbiór stycznych do pewnej stożkowej Γ . Inwolucja $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ pokrywa się wtedy z następującym przekształceniem: dla pewnej ustalonej prostej k niech $P = x \cap k$ dla $x \in \mathbb{S}$. wtedy $f(x)$ jest drugą styczną z punktu P .*

Dowód. Zarówno treść twierdzenia jak i jego dowód jest dualną wersją twierdzenia 3.5. \square

A oto przykładowe zastosowania powyższych faktów.

Lemat 3.1. *Dana jest prosta p i involucja f na niej. Punkt P nie należy do prostej p . Wtedy okręgi opisane na trójkątach $PXf(X)$ dla $X \in p$ mają punkt wspólny różny od P (lub są w tym punkcie styczne).*

Dowód. W przypadku gdy f jest symetrią teza jest oczywista - gdy S to środek tej symetrii, to wszystkie okręgi z treści przechodzą przez odbicie P względem prostej prostopadłej do p przechodzącej przez S bądź są styczne w S w przypadku, gdy punkt leży na tej prostopadłej.



W innym wypadku jest f inwersją więc istnieje punkt T spełniający dla dowolnych $X, Y \in p$

$$\overline{TX} \cdot \overline{Tf(X)} = \overline{TY} \cdot \overline{Tf(Y)}$$

więc leży na osi potęgowej tych okręgów, co oznacza, że wszystkie okręgi z tezy mają wspólną oś potęgową, co kończy dowód. \square

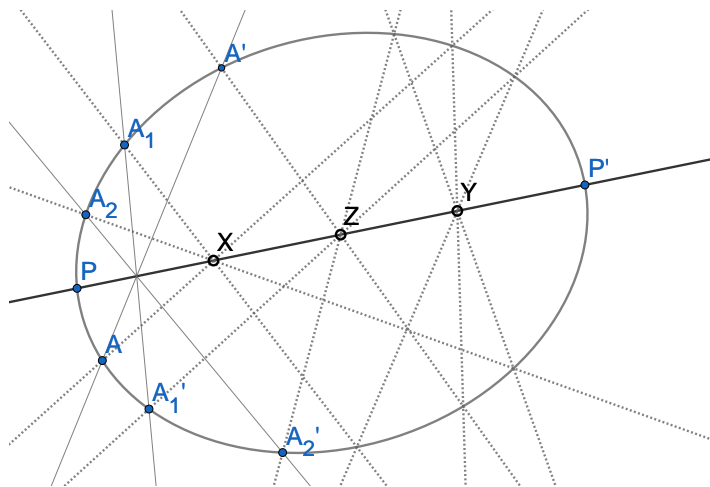
Lemat 3.2. *Dana jest stożkowa Γ i współliniowe punkty X, Y, Z na niej nie leżące. Niech f_X oznacza przrzut względem punktu X . Analogicznie definiujemy f_Y, f_Z . Wtedy złożenie $f_Z \circ f_Y \circ f_X$ także jest przrzutem względem punktu leżącego na prostej XYZ .*

Dowód. Rozumowanie to będzie niepełne - nie obejmuje przypadku gdy prosta XYZ jest styczna do Γ .

Oznaczmy $f = f_Z \circ f_Y \circ f_X$, a przez P, P' punkty przecięcia (być może zespolone) prostej XYZ z Γ . Oczywiście f jako złożenie map rzutowych jest mapą rzutową. Dodatkowo zachodzi

$$f(P) = P' \quad f(P') = P$$

więc f spełnia założenia twierdzenia 3.2, czyli jest inwolucją. Oczywiście punkt względem którego przrzutem jest f leży na prostej $PP' = XYZ$, co kończy dowód. \square



Prawdopodobnie odpowiedni argument powołujący się na ciągłość może uzupełnić to rozumowanie. Oto drugi

Dowód. Niech $f = f_Z \circ f_Y \circ f_X$. Wybierzmy dowolny punkt $A \in \Gamma$. Oznaczmy odpowiednio przez B, C, A', B', C' drugie punkty przecięcia prostych $AX, BY, CZ, A'X, B'Y$ z Γ . Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $ABCA'B'C'$ punkty $X, Y, AC' \cap A'C$ są współliniowe, więc Z leży na prostej AC' . W takim razie $f(A) = A'$ i $f(A') = A$ dla dowolnego A , czyli f jest involucją na Γ .

Jeśli P, P' to punkty przecięcia prostej XYZ z Γ ($P = P'$ gdy prosta ta jest styczna), to zachodzi $f(P) = P'$, więc punkt względem którego f jest przrzutem leży na prostej $PP' = XYZ$, co kończy dowód. \square

Lemat 3.3. *Inwolucja f przyporządkowuje każdej prostej z pęku P prostą do niej prostopadłą. Wtedy punktami stałymi f są proste $P\zeta$ i $P\bar{\zeta}$.*

Dowód. Bez strat ogólności $P = (0, 0)$. Zrzutujemy involucję f na prostą $x = 1$. Wtedy pary punktów

$$((1, \infty), (1, 0)) \quad ((1, 1), (1, -1))$$

są parami involucji pokrywającej się z inwersją o środku w $(1, 0)$ i potędze -1 . Punktami stałymi tej inwersji są punkty $(1, \pm i)$, co po powrocie na pęk P oznacza, że proste o nachyleniach $\pm i$ są punktami stałymi f , co było do pokazania. \square

Uwaga. Prosta prostopadła do prostej o kierunku a ma kierunek $-\frac{1}{a}$, więc teoretycznie powyższy fakt odpowiada temu, że rozwiązaniami równania $x = -\frac{1}{x}$ są liczby $\pm i$. Jednak nie jest to pełnoprawny dowód, ponieważ wymagałby on uogólnienia euklidesowskiej prostopadłości na liczby zespolone, co wydaje się być paradoksalne i nieintuicyjne. Z powyższych rozważań wynika między innymi, że prosta o równaniu $y = ix$ jest prostopadła do samej siebie.

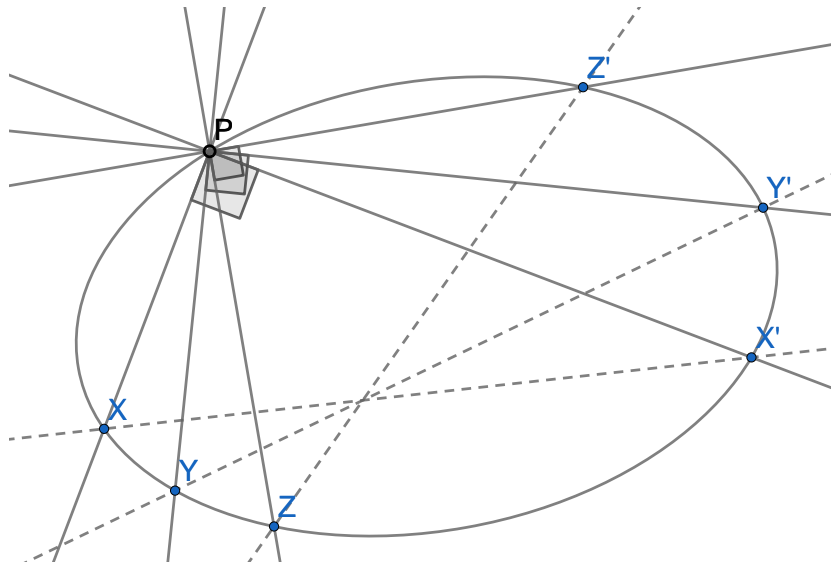
Natychmiastowym wnioskiem jest

Twierdzenie 3.7. *Inwolucja na prostej nieskończoności, której punktami stałymi są punkty kołowe $\zeta, \bar{\zeta}$ przyporządkowuje każdemu kierunkowi kierunek prostopadły.*

Poniższa seria zadań prezentuje kilka technik opierających się na faktach z tego działu.

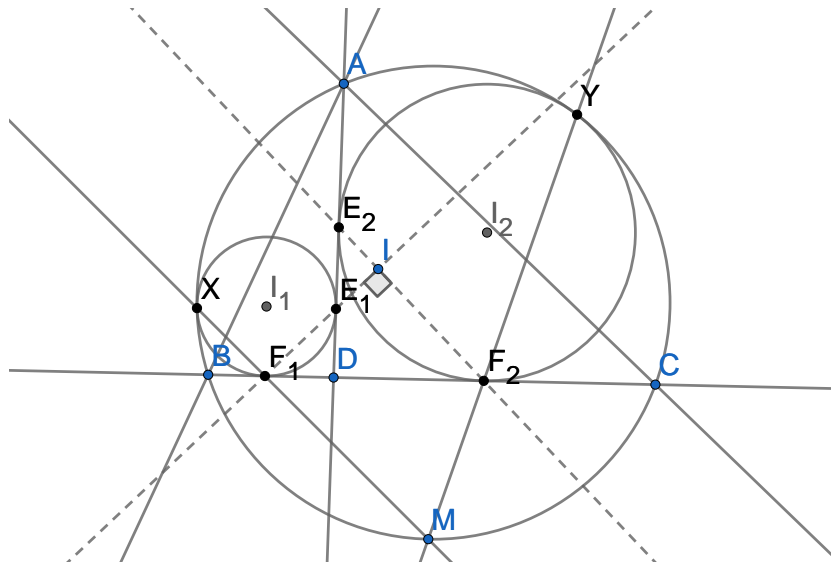
Zadanie 3.1. Dana jest stożkowa Γ oraz punkt P na niej. Punkty $X, X' \in \Gamma$ spełniają $XP \perp X'P$. Udowodnić, że proste XX' dla różnych punktów X przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Oczywiście przekształcenie przyporządkowujące każdej prostej PX z pęku P prostą prostopadłą jest involucją. Po zrzutowaniu jej na Γ (możemy to zrobić na podstawie twierdzenia 1.5), otrzymujemy, że przekształcenie $\Gamma(X) \mapsto \Gamma(X')$ jest involucją, co w połączeniu z twierdzeniem 3.5 kończy dowód. \square



Zadanie 3.2. Dany jest trójkąt ABC z punktem D na prostej BC , a także dwa okręgi ω_1 i ω_2 , styczne do prostej BC , AD i wewnątrz do okręgu opisanego na ABC , przy czym leżą one po tej samej stronie prostej BC co punkt A . Ich punkty styczności z okręgiem opisanym to X i Y . Udowodnić, że na prostej XY leży środek jednokładności o skali dodatniej przekształcającej okrąg wpisany w ABC na okrąg opisany na ABC .

Dowód. Najpierw udowodnimy, że proste XY mają punkt wspólny. Niech E_1, F_1 będą punktami styczności okręgu ω_1 z prostymi AD, BC i analogicznie E_2, F_2 . Niech I, I_1, I_2 to będą środki, odpowiednio, ω_1, ω_2 i okręgu wpisanego w ABC . Z lematu Sawayamy proste E_1F_1, E_2F_2 przecinają się w I , co więcej $E_1F_1 \perp DI_1$ i $E_2F_2 \perp DI_2$. To w połączeniu z faktem, że proste DI_1, DI_2 są prostopadłe, daje $IF_1 \perp IF_2$.



Niech środek łuku BC niezawierający punktu A to M . Rozważmy jednokładność

o środku w X przekształcającą okrąg ω_1 w okrąg opisany na ABC - oznaczmy go jako Γ . Jednokładność ta przenosi punkt F_1 na M (styczna w M jest równoległa do BC), więc punkty M, F_1, X są współliniowe. Analogicznie punkty M, F_2, Y są współliniowe.

Rozważmy następującą mapę

$$\Gamma(X) \mapsto M(MX) \mapsto BC(F_1) \mapsto I(IF_1) \xrightarrow{\text{obr. o } 90^\circ} I(IF_2) \mapsto BC(F_2) \mapsto M(MF_2) \mapsto \Gamma(Y)$$

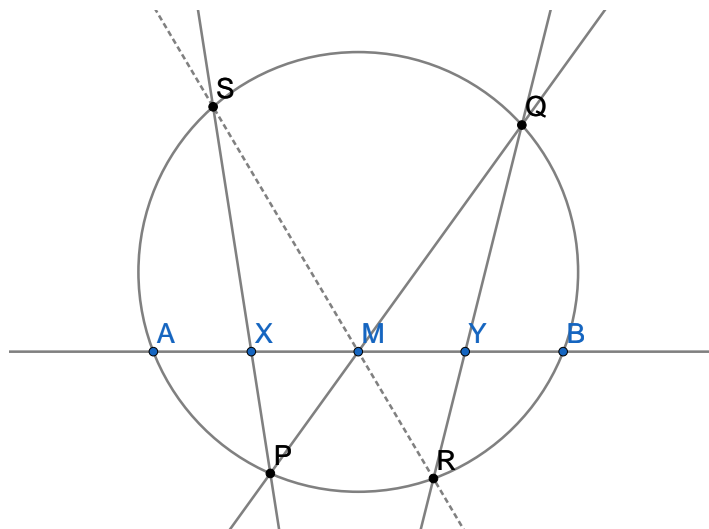
Otrzymujemy, że przekształcenie $\Gamma(X) \mapsto \Gamma(Y)$ jest rzutowe, co więcej, łatwo zauważyć, że jest także involucją, a więc na podstawie twierdzenia 3.5 wszystkie proste XY przechodzą przez ustalony punkt.

Oznaczmy środek jednokładności o skali dodatniej przekształcająca okrąg wpisany na opisany przez S . Wystarczy pokazać, że w przypadkach $X = B$ i $X = C$ proste XY przechodzą przez S . Skoro te przypadki są symetryczne to rozważymy $X = B$. Jeden z okręgów degeneruje się do punktu B , natomiast drugi jest styczny do prostych BC, BA oraz okręgu opisanego w Y (niech tym okręgiem będzie ω_1).

Z twierdzenia Monge'a środki jednokładności o skali dodatniej przekształcające: okrąg wpisany na opisany (punkt S), okrąg wpisany na ω_1 (punkt B) oraz okrąg opisany na ω_1 (punkt Y) są współliniowe, co było do pokazania. \square

W następujących dwóch problemach skorzystamy z lematu 3.2.

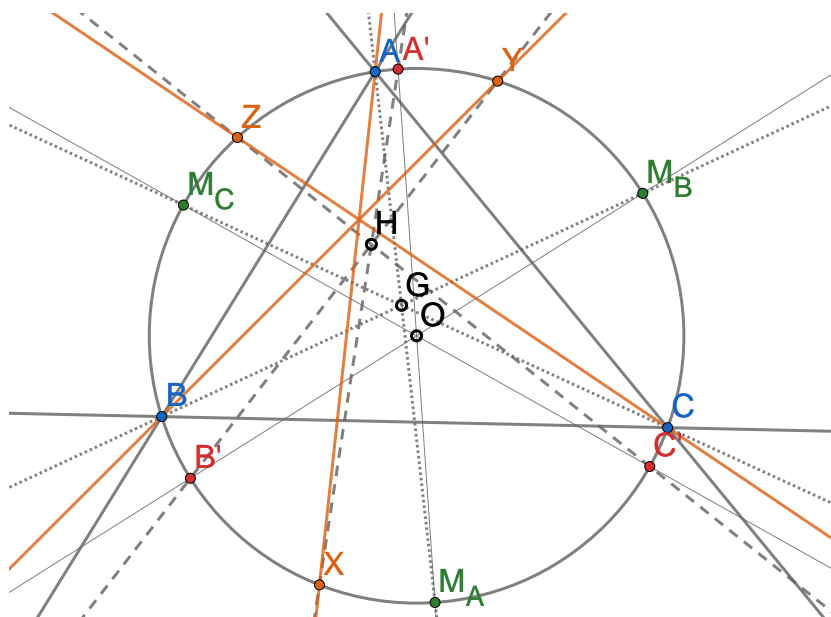
Zadanie 3.3 (Twierdzenie o motylku). Punkt M jest środkiem cięciwy AB okręgu ω . Dwie cięciwy PQ, RS przecinają się w punkcie M . Oznaczono $X = PS \cap AB$ oraz $Y = QR \cap AB$. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka XY .



Dowód. Inwolucje umożliwiają przeprowadzenie nowego dowodu twierdzenia o motylku. Niech Y' będzie takie, że M jest środkiem odcinka XY' . Środkiem involucji z lematu 3.2 dla punktów X, M, Y' będzie z symetrii środek odcinka X, Y' lub punkt w nieskończoności prostej AB - drugą z tych możliwości łatwo wykluczyć. Przerzucając punkt S względem X, M, Y' otrzymujemy kolejno punkty P, Q, R' . Na podstawie wcześniejszych obserwacji prosta SR' przechodzi przez M , więc $R = R'$ i co za tym idzie $Y = Y'$, co kończy dowód. \square

Zadanie 3.4. Dany jest trójkąt ABC i okrąg na nim opisany Ω . Środkowe poprowadzone z punktów A, B, C przecinają Ω po raz drugi w punktach M_A, M_B, M_C . Punkty do nich antypodyczne to kolejno A', B', C' . Proste HA', HB', HC' przecinają Ω po raz drugi w X, Y, Z odpowiednio, gdzie H to ortocentrum ABC . Udowodnić, że trójkąty ABC i XYZ są perspektywiczne.

Dowód. Teza lematu 3.2 zastosowanego do punktów G, O, H gdzie G to środek ciężkości a O to środek Ω pokazuje, że pary $(A, X), (B, Y), (C, Z)$ tworzą pary inwolucji, więc na podstawie twierdzenia 3.5 proste AX, BY, CZ są współpękowe, czyli trójkąty te mają środek perspektywy, co kończy dowód. \square



Zadanie 3.5. Niech AB będzie średnicą okręgu S , l prostą styczną do niego w punkcie A , natomiast c ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Rozważmy wszystkie takie pary punktów X i Y leżących na l po przeciwnych stronach punktu A , że $|AX| \cdot |AY| = c$. Proste BX i BY przecinają S odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że wszystkie proste PQ przechodzą przez jeden punkt.

Dowód. Oczywiście punkty X, Y są swoimi obrazami w inwersji o potęgce $-c$, tworzą więc pary inwolucji na tej prostej. Patrząc na to z perspektywy punktu B otrzymujemy, że proste BX, BY tworzą pary inwolucji, co po zrzutowaniu na okrąg S daje istnienie inwolucji przekształcającej $S(P) \mapsto S(Q)$, co na podstawie twierdzenia 3.5 kończy dowód. Dodatkowo, skoro punkty A, ∞ też są parami inwolucji na prostej l , to szukany punkt wspólny leży na prostej AB . \square

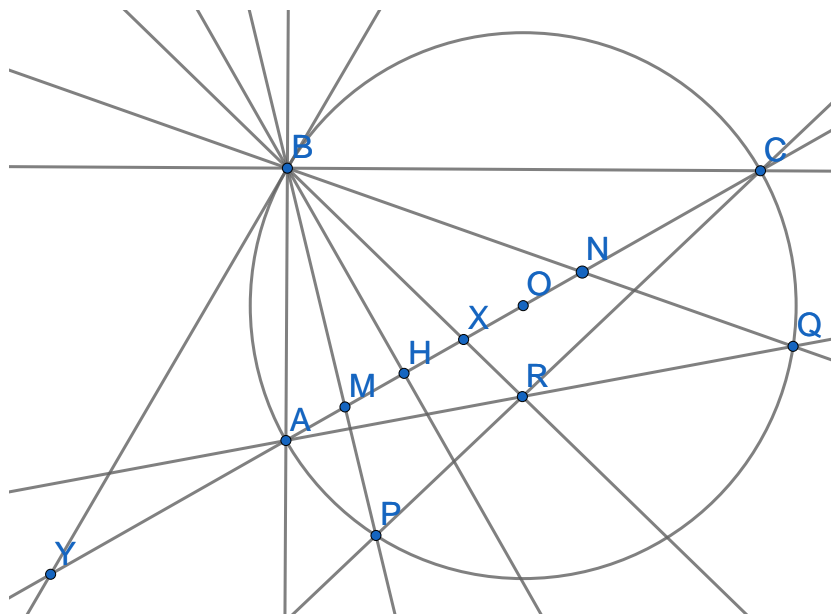
Zadanie 3.6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle ABC = 90^\circ$. Punkt H jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka B . Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AH i CH . Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina po raz drugi proste BM i BN odpowiednio w punktach P i Q . Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie R . Wykazać, że prosta BR przechodzi przez środek odcinka MN .

Dowód. Oznaczmy $X = BR \cap AC$ i niech styczna do okręgu opisanego w B przecina AC w punkcie Y . Chcemy pokazać, że punkt X jest środkiem odcinka MN .

Skoro proste AQ, PC, BR są współpękowe, to ich przecięcia z okręgiem są parami pewnej inwolucji. Rzutując tę inwolucję z punktu B na prostą AC otrzymujemy, że pary inwolucji tworzą punkty $(A, N), (C, M)$ oraz (X, Y) . Punkt H spełnia

$$\overline{HA} \cdot \overline{HC} = -\overline{HB}^2 \implies \overline{HA} \cdot \overline{HN} = \overline{HC} \cdot \overline{HM} = -\frac{1}{2}\overline{HB}^2$$

więc inwolucja pokrywa się w dwóch parach z inwersją o potędze $-|HB|^2$, co pokazuje, że są sobie równe.



Otrzymujemy $\overline{HX} \cdot \overline{HY} = -\frac{1}{2}|HB|^2 = c$. Skoro BY jest styczną, to trójkąt YBO jest prostokątny (O to środek okręgu opisanego, czyli środek odcinka AC), z czego $\overline{HY} \cdot \overline{HO} = 2c$. Środek odcinka HO - nazwijmy go X' - spełnia w takim razie $\overline{HY} \cdot \overline{HX'} = c$, więc $X = X'$.

Wystarczy teraz pokazać, że środek odcinka MN pokrywa się ze środkiem odcinka HO . Można to pokazać prosto na masach (wpisując w punkty A, C masy równe 1, a w punkt H masę równą 2 - wtedy otrzymujemy, że środek masy układu to zarówno środek MN , jak i środek OH) lub prosto przeliczyć - bez strat ogólności punkty A, H, C mają odpowiednio współrzędne $0, x, 1$. Sprowadza się to wtedy do następującej tożsamości

$$\frac{\frac{0+x}{2} + \frac{1+x}{2}}{2} = \frac{x + \frac{0+1}{2}}{2}$$

co kończy dowód. □

Inwolucje jak widać same w sobie mogą stanowić przydatny instrument, jednak szczególnego znaczenia nabierają w połączeniu z faktami zaprezentowanymi w następnym rozdziale, umożliwiającymi konstruowanie inwolucji w bardzo ogólny sposób.

Rozdział 4

Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a

Twierdzenie, o którym mowa w tym dziale stało się punktem wyjścia do napisania tej pracy¹. Ma ono szczególne znaczenie w kontekście zaprezentowanym w poprzednim rozdziale treści i stanowi mocne narzędzie znajdujące zastosowanie w wielu sytuacjach geometrycznych o charakterze olimpijskim, pozwalające na wyciąganie nieoczywistych wniosków.

4.1 Podstawowa wersja

Zacznijmy od sformułowania treści twierdzenia.

Twierdzenie 4.1 (Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a). *Dany jest czworokąt zupełny $ABCD$, stożkowa na nim opisana Γ oraz prosta p nieprzechodząca przez żaden z jego wierzchołków. Niech $X_1 = AB \cap p$, $X_2 = CD \cap p$ i analogicznie $Y_1 = BC \cap p$, $Y_2 = DA \cap p$ oraz $Z_1 = AC \cap p$, $Z_2 = BD \cap p$. Dodatkowo niech $\Gamma \cap p = \{W_1, W_2\}$. Wtedy (W_1, W_2) , (X_1, X_2) , (Y_1, Y_2) , (Z_1, Z_2) tworzą pary involucji na prostej p .*

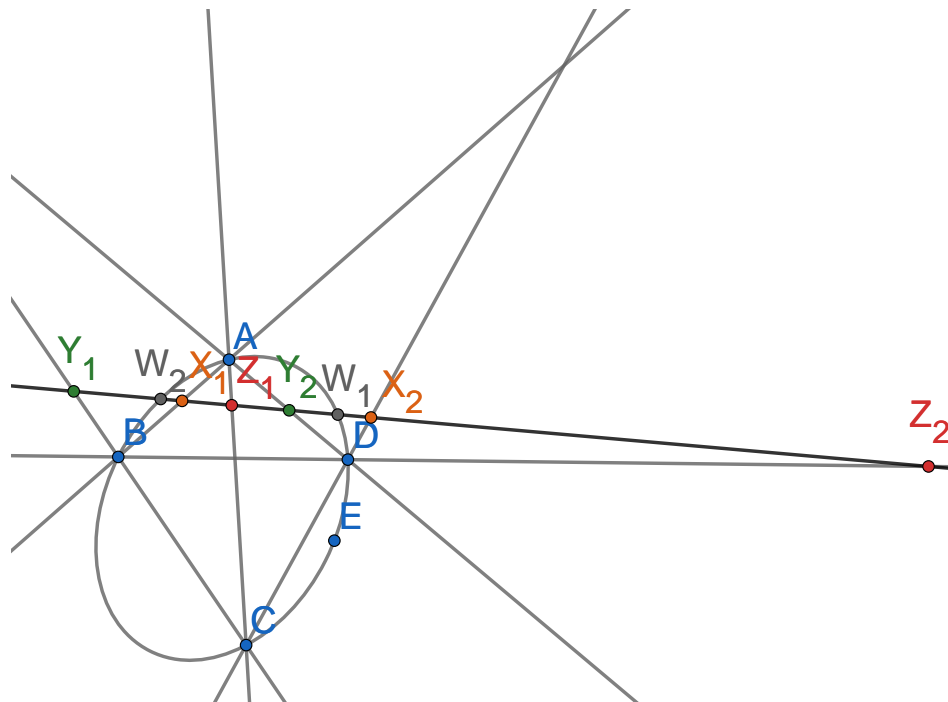
Przedstawię kilka dowodów.

Dowód. Niech f będzie involucją spełniającą $f(W_1) = W_2$ i $f(X_1) = X_2$ - taka istnieje na podstawie twierdzenia 3.1. Zachodzi wtedy

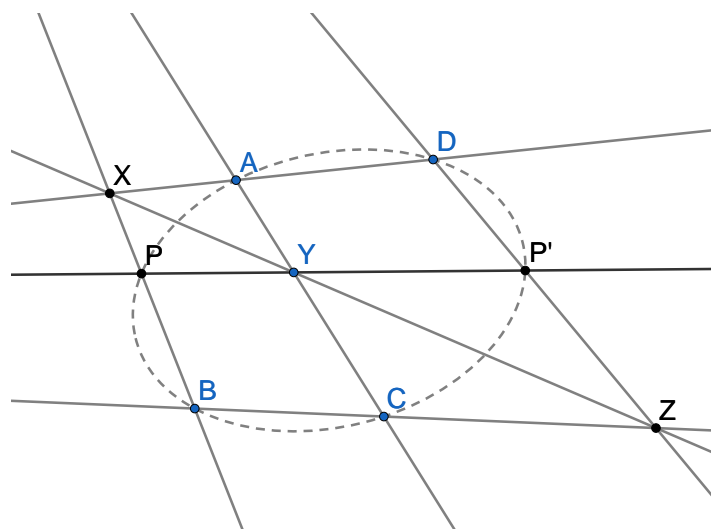
$$\begin{aligned}(W_1, W_2; X_1, Y_1)_p &\stackrel{B}{=} (W_1, W_2; A, C)_\Gamma \stackrel{D}{=} (W_1, W_2; Y_2, X_2)_p \\ &= (f(W_1), f(W_2); f(Y_2), f(X_2))_p \\ &= (W_2, W_1; f(Y_2), X_1)_p \\ &= (W_1, W_2; X_1, f(Y_2))_p\end{aligned}$$

więc $f(Y_2) = Y_1$ i analogicznie $f(Z_2) = Z_1$ co kończy dowód. \square

¹Autor, w czasie gdy jego wiedza geometryczna ograniczała się do faktu o sumie kątów w trójkącie, podczas obozu w Bielsku-Białej został w ramach meczu matematycznego zobligowany do nauczenia się rozwiązania bazującego na tym twierdzeniu. Wrażenie absolutnego niezrozumienia jego treści w połączeniu z dumą frazy „dualne involucyjne twierdzenie Desargues'a” były jednym z powodów powstania tego skryptu.



Dowód. Udowodnimy, że przekształcenie biorące dowolny punkt P na prostej p i mapujące go na drugie przecięcie stożkowej przechodzącej przez punkty A, B, C, D, P z prostą p jest rzutowe. Wybierzmy punkt $P \in p$ i niech P' będzie tym drugim przecięciem. Oznaczmy $X = PB \cap AD, Y = AC \cap p$ i $Z = BC \cap XY$. Dodatkowo niech P'' będzie punktem przecięcia prostych DZ i p . Wtedy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala dla sześciokąta $PBCADP''$ i prostej XYZ otrzymujemy, że punkty te leżą na jednej stożkowej, co oznacza, że $P' = P''$. Udało się więc skonstruować za pomocą prostych drugi punkt przecięcia prostej p ze stożkową przez punkty A, B, C, D, P .



Następujące złożenie map rzutowych

$$p(P) \xrightarrow{B} AD(X) \xrightarrow{Y} BC(Z) \xrightarrow{D} p(P')$$

pokazuje, że przekształcenie opisane na początku dowodu istotnie jest rzutowe. Dodatkowo w oczywisty sposób jest ono także involucją.

Stosując powyższy wniosek dla punktów W_1, X_1, Y_1, Z_1 na prostej l i czworokąta $ABCD$ dostajemy tezę twierdzenia (suma prostych $AB \cup CD$ jest granicznym przypadkiem stożkowej przechodzącej przez punkty A, B, C, D dla $P = X_1$). \square

Ostatni z dowodów cechuje się szczególną elegancją².

Dowód. Udowodnimy najpierw część twierdzenia bez krzywej stożkowej Γ (w tej postaci twierdzenie to można spotkać pod nazwą involucyjnego twierdzenia Pappusa).

Niech f będzie involucją spełniającą $f(X_1) = X_2$ i $f(Y_1) = Y_2$. Oznaczmy $Z' = f(Z_1)$. Wystarczy teraz pokazać, że proste X_2C, Y_2A i $Z'B$ są współpękowe. Niech α_1, α_2 będą punktami stałymi involucji f . Rozważmy przekształcenie rzutowe przenoszące punkty α_1, α_2 na $\zeta, \bar{\zeta}$. Funkcja f jest wtedy involucją na prostej w nieskończoności, której punktami stałymi są punkty okręgowe, więc na podstawie twierdzenia 3.7 przyporządkowuje ona każdemu kierunkowi kierunek prostopadły.

Oznacza to, że po przekształceniu prosta CX_2 jest prostopadła do ABX_1 , prosta AY_2 jest prostopadła do prostej BCY_1 oraz prosta BZ' jest prostopadła do prostej ACZ_1 , więc proste CX_2, AY_2, BZ' są współpękowe w punkcie D - ortocentrum trójkąta ABC .

Dokładając stożkową Γ widzimy, że na podstawie twierdzenia 1.11 przechodzi ona na hiperbolę prostokątną, więc jej punkty przecięcia z prostą w nieskończoności odpowiadają prostopadłym kierunkom i także są parami involucji f . \square

Zdegenerowane wersje involucyjnego twierdzenia Desargues'a także są prawdziwe.

Twierdzenie 4.2. *Dany jest trójkąt ABC , stożkowa na nim opisana Γ i prosta p nieprzechodząca przez żaden z jego wierzchołków. Proste AB, AC, BC i styczna do Γ w A przecinają p odpowiednio w X_1, X_2, Y_1, Y_2 . Dodatkowo $\Gamma \cap p = \{W_1, W_2\}$. Wtedy $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (W_1, W_2)$ tworzą pary involucji na prostej p .*

Twierdzenie 4.3. *Dane są punkty A, B , stożkowa przez nie przechodząca Ω i prosta p nieprzechodząca przez punkty A, B . Prosta AB przecina p w X , a styczne do Γ w A i B przecinają tę prostą w punktach Y_1, Y_2 . Dodatkowo $\Gamma \cap p = \{W_1, W_2\}$. Wtedy $(X, X), (Y_1, Y_2), (W_1, W_2)$ tworzą pary involucji na prostej p .*

Oto przykładowe zastosowania tego twierdzenia.

Zadanie 4.1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz prosta l . Oznaczono $X = AC \cup l, X' = BD \cup l, Y = AB \cap l, Y' = CD \cap l, Z = AD \cap l, Z' = BC \cap l$. Punkty X, Y, Z, Z', Y', X' leżą w tej kolejności na prostej l . Udowodnić, że okręgi o średnicach XX', YY', ZZ' mają wspólną oś potęgową.

Dowód. Na podstawie involucyjnego twierdzenia Desargues'a punkty $(X, X'), (Y, Y'), (Z, Z')$ są parami pewnej involucji na prostej l (kolejność punktów gwarantuje, że nie

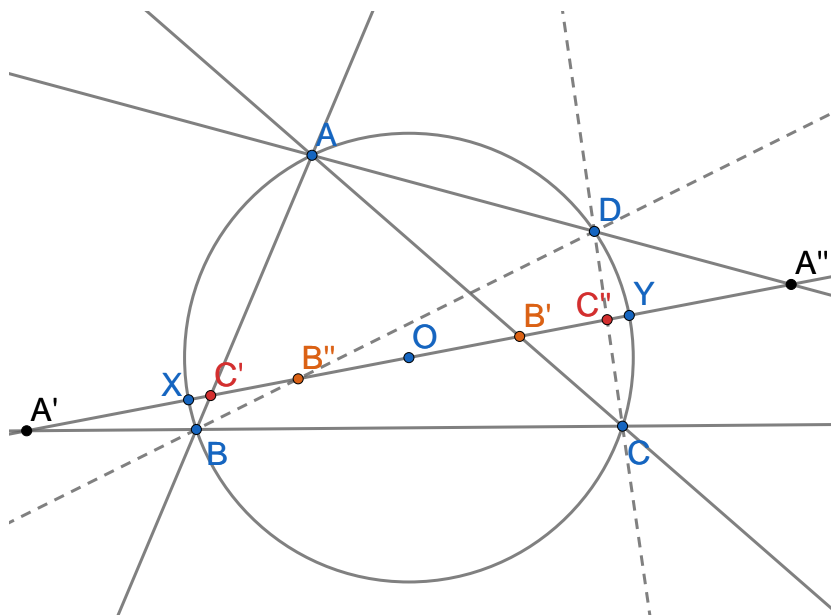
²Zdaniem autora jest to jedno z najpiękniejszych zastosowań liczb zespolonych w geometrii

jest to symetria). Z twierdzenia 3.3 wiemy, że istnieje punkt $T \in p$ spełniający

$$\overline{TX} \cdot \overline{TX'} = \overline{TY} \cdot \overline{TY'} = \overline{TZ} \cdot \overline{TZ'}$$

więc ma on równą potęgę względem trzech okręgów z zadania, co w połączeniu ze współliniowością ich środków implikuje tezę. \square

Zadanie 4.2. Dany jest trójkąt ABC z okręgiem opisanym ω o środku w punkcie O . Poprowadzono prostą l przez O , która przecina proste BC , AC , AB w punktach odpowiednio A' , B' , C' . Odbicia punktów A' , B' , C' względem O to A'' , B'' , C'' . Pokazać, że proste AA'' , BB'' , CC'' przecinają się na okręgu ω .



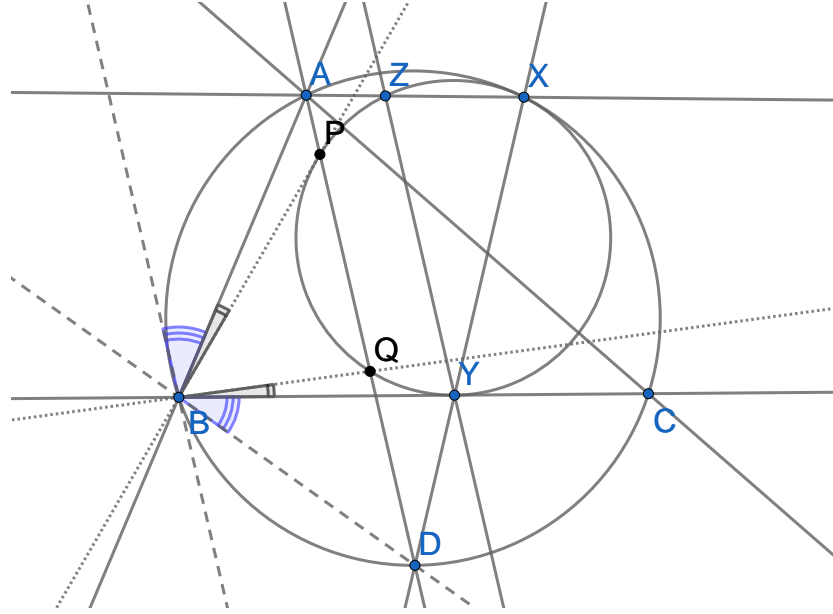
Dowód. Oznaczmy drugi punkt przecięcia ω z prostą AA'' jako D , a przecięcia tego okręgu z prostą l jako X, Y . Z inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a otrzymujemy, że pary (X, Y) , (A', A'') , $(B', BD \cap l)$, $(C', CD \cap l)$ są parami pewnej inwolucji. Pokrywa się ona w dwóch punktach z symetrią względem punktu O , więc jest jej równa. Otrzymujemy $BD \cap l = B''$, $CD \cap l = C''$, co było do pokazania. \square

Zadanie 4.3. Dany jest trójkąt ABC i okrąg ω styczny do prostej BC i okręgu opisanego na ABC , przy czym punkt styczności z nim leży po tej samej stronie prostej BC co A . Dwusieczna kąta $\angle BAC$ przecina ω w punktach P i Q . Udowodnij, że $\sphericalangle CBP = \sphericalangle QBA$.

Dowód. Oznaczmy punkt styczności ω z okręgiem opisanym jako X , a z prostą BC jako Y . Dodatkowo niech D będzie przecięciem dwusiecznej wewnętrznej kąta $\angle BAC$ z okręgiem opisanym. Rozważając jednokładność o środku w X przekształcającą ω na okrąg opisany, otrzymujemy, że punkty X, Y, D są współliniowe.

Niech Z będzie drugim punktem przecięcia prostej XA z ω . Ta sama jednokładność co wcześniej przekształca prostą ZY na AD , co oznacza, że są one równoległe. Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworokąta $YYXZ$, stożkowej na nim opisanej ω

i prostej AD pokazuje, że punkty pary (P, Q) , przecięcie stycznej w Y , czyli prostej BC z AD wraz z A , a także $YZ \cap AD = \infty_{AD}$ wraz z D tworzą pary inwolucji.



Po zrzutowaniu tej inwolucji na pęk B otrzymujemy, że proste (BP, BQ) , (BA, BC) , $(B\infty_{AD}, BD)$ tworzą pary inwolucji. Zauważmy, że inwolucja ta pokrywa się w dwóch punktach z symetrią względem dwusiecznej kąta $\angle ABC$ (proste $B\infty_{AD}, BD$ są izogonalnie sprzężone w kącie $\angle ABC$, podobnie jak proste BA, BC), więc także proste BP, BQ są izogonalnie sprzężone w $\angle ABC$, co kończy dowód. \square

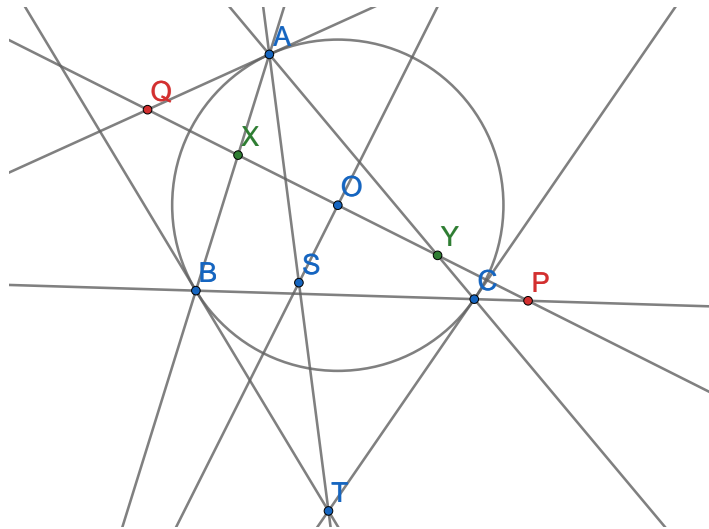
Zadanie 4.4. Dany jest trójkąt ABC i okrąg na nim opisany ω o środku w punkcie O . Styczne do ω w B i C przecinają się w T . Punkt S jest środkiem odcinka AT , a prosta prostopadła do OS przechodząca przez O przecina bok BC w P , a styczną do ω w A w punkcie Q . Udowodnić, że $|OP| = |OQ|$.

Dowód. Oznaczmy przecięcia prostej PQ z prostymi AB, AC przez X, Y , a z ω przez X', Y' . Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworokąta $AABC$, stożkowej ω i prostej PQ pokazuje, że pary (X', Y') , (P, Q) , (X, Y) tworzą pary inwolucji. Jeśli teza zachodzi, to widzimy, że inwolucja ta pokrywa się z symetrią względem punktu O . Jeśli pokażemy, że O jest środkiem odcinka XY , to istotnie będzie tą symetrią z czego wprost wyniknie teza.

Rozważmy złożenie jednokładność o skali $2 \cos \angle BAC$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta $\angle BAC$. Znanym jest wzór $AH = 2R \cos \angle BAC$, gdzie H to ortocentrum ABC , więc obrazem punktu O w tym przekształceniu jest H . Udowodnimy, że obrazem punktu S jest punkt M - środek odcinka BC .

Skoro proste AT, AM są izogonalnie sprzężone (AT to symediana), to wystarczy pokazać

$$\frac{AM}{AS} = 2 \cos \angle BAC \iff \frac{AM}{AT} = \cos \angle BAC$$



Oznaczmy kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A, B, C przez α, β, γ odpowiednio. Dodatkowo niech $\angle BAT = x$. Oczywiście także $\angle MAC = x$. Z twierdzenia sinusów w trójkątach AMC i ATB otrzymujemy

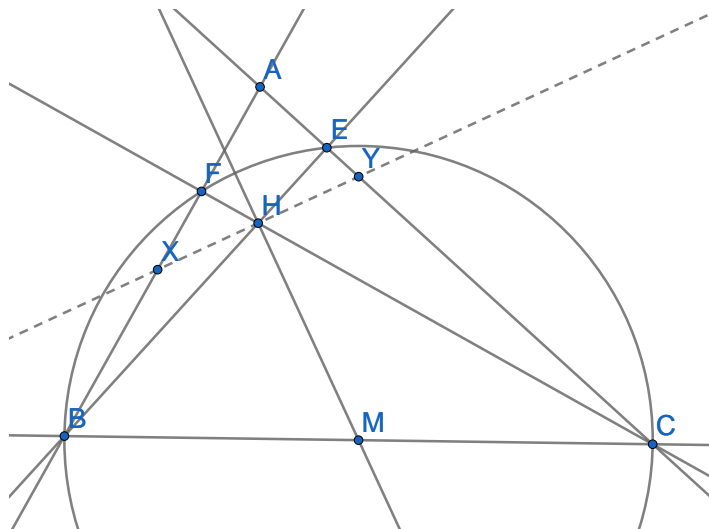
$$\frac{AM}{CM} = \frac{\sin \gamma}{\sin x} \quad \text{oraz} \quad \frac{AT}{BT} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin x}$$

Po podzieleniu tych równości stronami

$$\frac{AM}{AT} = \frac{CM \cdot \sin \gamma}{BT \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{CM}{TB}$$

Wystarczy więc pokazać, że $\frac{CM}{TB} = \cos \alpha$, ale to definicja cosinusa w trójkącie prostokątnym BMT .

Nowe sformułowanie zadania po przekształceniu wygląda następująco:



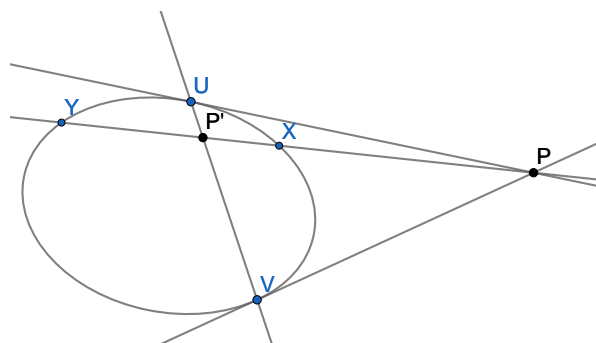
Dany jest trójkąt ABC , ortocentrum H i środek odcinka BC - M . Prosta prostopadła

do MH przechodząca przez H przecina boki AB, AC trójkąta w punktach P, Q . Chcemy pokazać, że H jest środkiem odcinka PQ .

Rozważmy okrąg o średnicy BC , nazwijmy go Γ . Oczywiście przechodzi on przez spodki wysokości z wierzchołków B i C , niech będą to E i F . Punkt H jest środkiem cięciwy będącej fragmentem prostej PQ okręgu Γ , więc z twierdzenia o motylku dla cięciw BE i CF punkt H jest środkiem odcinka PQ , co było do pokazania. \square

Zdegenerowany przypadek daje natychmiastowy dowód twierdzenia 1.15.

Zadanie 4.5. Dana jest stożkowa Γ , punkt P , jego biegunowa p oraz prosta l przechodząca przez P . Oznaczmy przez X, Y przecięcia l z Γ , i dodatkowo $P' = l \cap p$. Udowodnić, że $(P, P'; X, Y) = -1$.



Dowód. Oznaczmy punkty przecięcia Γ z p jako U, V . Są to oczywiście punkty styczności prostych stycznych do Γ poprowadzonych z P . Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworokąta $UUVV$, stożkowej Γ oraz prostej l pokazuje, że pary $(P, P'), (P', P'), (X, Y)$ są parami inwolucji na l . Skoro P, P' , to punkty stałe otrzymujemy, że otrzymana inwolucja jest sprzężeniem harmonicznym względem odcinka PP' , więc $(P, P'; X, Y) = -1$, co kończy dowód. \square

4.2 Postać dualna

W wielu zadaniach olimpijskich przydatniejsza jest dualna wersja tego twierdzenia.

Twierdzenie 4.4 (Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a). *Dany jest czworobok $abcd$ i stożkowa w niego wpisana Γ . Niech A, B to przecięcia prostych a, c z prostą d , C, D to przecięcia prostych a, c z prostą b oraz $E = b \cap d, F = a \cap c$. Dany jest punkt P nie należący do żadnego z boków czworoboku, a PX, PY to styczne do Γ . Wtedy $(PA, PC), (PB, PD), (PE, PF), (PX, PY)$ tworzą pary inwolucji pęku P .*

Dowód. Biorąc obraz dualny względem Γ otrzymujemy treść inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a. \square

Innymi słowy, proste poprowadzone z punktu P do *naprzeciwległych* wierzchołków czworoboku i styczne tworzą pary inwolucji pęku P .

Prawdziwe są także zdegenerowane wersje:

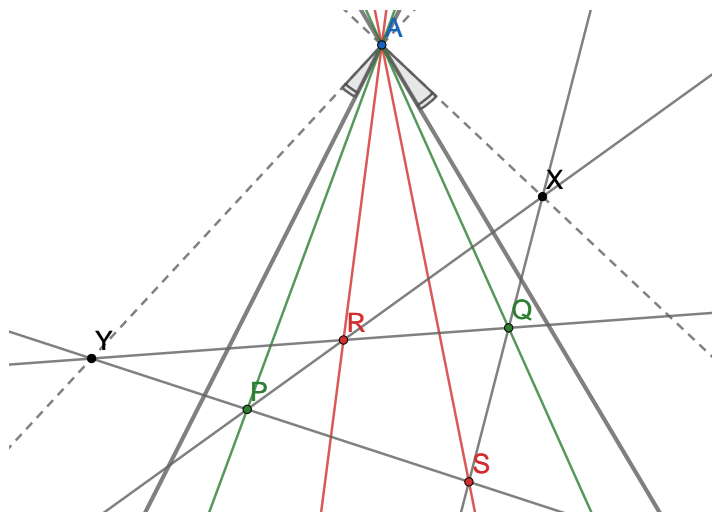
Twierdzenie 4.5. Dany jest trójkąt ABC , stożkowa w niego wpisana Γ , styczna do boku BC w S i punkt P nienależący do żadnego z boków. Wtedy pary (PB, PC) , (PA, PS) oraz styczne z punktu P do Γ tworzą pary inwolucji.

Twierdzenie 4.6. Dane są dwa punkty A, B oraz stożkowa przez nie przechodząca Γ . Styczne do Γ z punktów A i B przecinają się w X . Punkt P leży poza prostą AB . Wtedy (PA, PB) , (PX, PX) oraz styczne z P do Γ są parami inwolucji.

Sformułujemy najpierw dwa natychmiastowe (i niezwykle przydatne) lematy.

Lemat 4.1. Punkty P, Q oraz R, S są izogonalnie sprzężone w pewnym kącie $\sphericalangle A$. Wtedy punkty $X = PR \cap QS$ oraz $Y = PS \cap QR$ także są izogonalnie sprzężone.

Dowód. Na podstawie dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a pary prostych (AP, AQ) , (AR, AS) , (AX, AY) są parami pewnej inwolucji pęku A . Inwolucja ta pokrywa się w dwóch punktach z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle A$, więc proste AX, AY także są izogonalnie sprzężone w tym kącie, co było do pokazania. \square



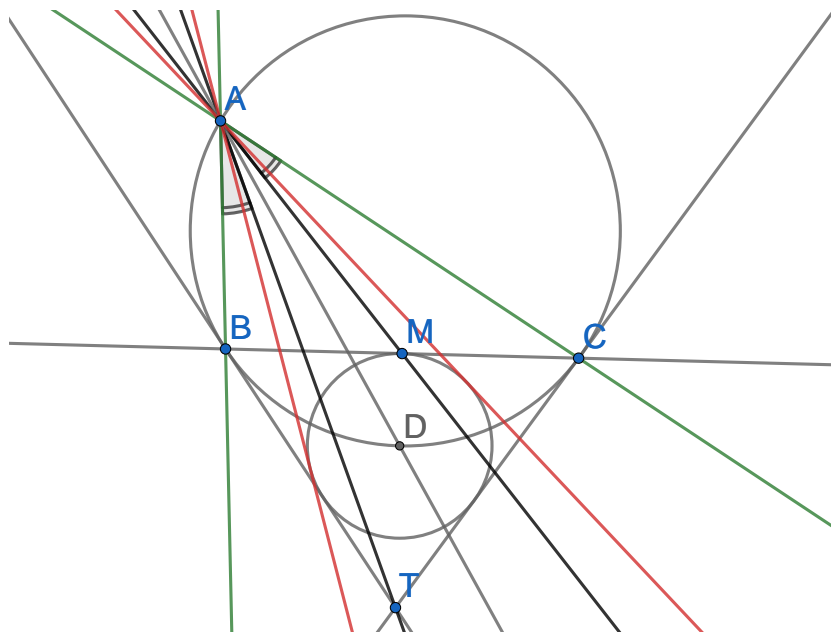
Lemat 4.2. Dany jest trójkąt ABC i dwie pary punktów P, Q oraz R, S , takie, że proste AP, AQ i AR, AS są izotomicznie sprzężone w tym trójkącie. Niech $X = PR \cap QS$, $Y = PS \cap QR$. Wtedy także proste AX, AY są izotomicznie sprzężone w ABC .

Dowód. Na podstawie dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a pary prostych (AP, AQ) , (AR, AS) , (AX, AY) są parami pewnej inwolucji. Rzutując tę inwolucję na prostą BC otrzymujemy, że odpowiednio (P', Q') , (R', S') , (X', Y') są parami inwolucji na prostej BC . Pokrywa się ona w dwóch punktach z symetrią względem środka odcinka BC , więc także punkty X', Y' są w niej swoimi obrazami. Oznacza to, że proste AX', AY' są izotomicznie sprzężone w ABC , co kończy dowód. \square

Uwaga. Będziemy także korzystać z rozszerzenia tych lematów: styczne poprowadzone z punktu A do dowolnej stożkowej wpisanej także są izogonalnie\izotomicznie sprzężone.

Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a umożliwia przeprowadzenie niezwykle specyficznego dowodu twierdzenia o symedianie.

Zadanie 4.6 (Twierdzenie o symedianie). Dany jest trójkąt ABC i jego okrąg opisany ω . Niech M to środek odcinka BC . Styczne do ω w punktach B i C przecinają się w punkcie T . Udowodnić, że $\sphericalangle BAT = \sphericalangle MAC$.



Dowód. Niech D będzie środkiem łuku BC okręgu ω niezawierające punktu A . Udowodnimy najpierw, że okrąg wpisany Ω w trójkąt BTC ma środek w punkcie D .

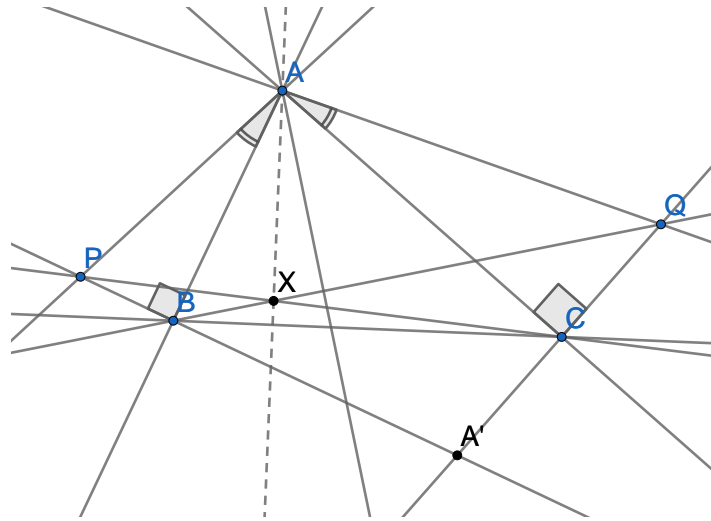
Niech $\angle BAC = \alpha$. Oczywiście $\angle TBC = \alpha$, a skoro D jest środkiem łuku, to $\angle DBC = \frac{1}{2}\alpha$, więc D leży na dwusiecznej kąta TBC i analogicznie na dwusiecznej kąta TCB , więc jest środkiem okręgu Ω .

Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla $BMCT$, okręgu Ω i punktu A pokazuje, że pary (PB, PC) , (PM, PT) oraz styczne z A do Ω tworzą pary inwolucji. Pokrywa się ona w dwóch punktach z symetrią względem prostej AD , więc także proste PM, PT są swoimi obrazami w tej symetrii, co kończy dowód. \square

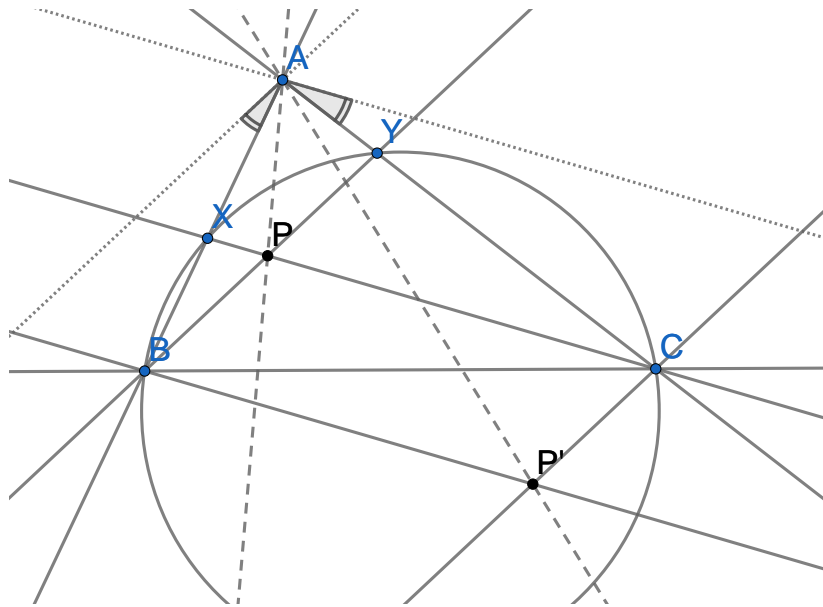
Przejdźmy do zadań prezentujących możliwe techniki związane z tym twierdzeniem.

Zadanie 4.7. Dany jest trójkąt ABC i takie dwa punkty P i Q , że $\angle ABP = \angle ACQ = 90^\circ$ oraz $\angle PAB = \angle CAQ$ przy czym wnętrza trójkątów ABP i ACQ nie mają punktów wspólnych z trójkątem ABC . Udowodnić, że proste PC i BQ przecinają się na wysokości opuszczonej z wierzchołka A na BC .

Dowód. Niech $X = PC \cap BQ$ i $A' = PB \cap CQ$. Pary P, Q oraz B, C są izogonalnie sprzężone w kącie BAC , więc na podstawie lematu 4.1 proste AA' i AX są izogonalnie sprzężone. Jednak A' to punkt antypodyczny do A , więc prosta AX jest wysokością w ABC , co było do pokazania. \square

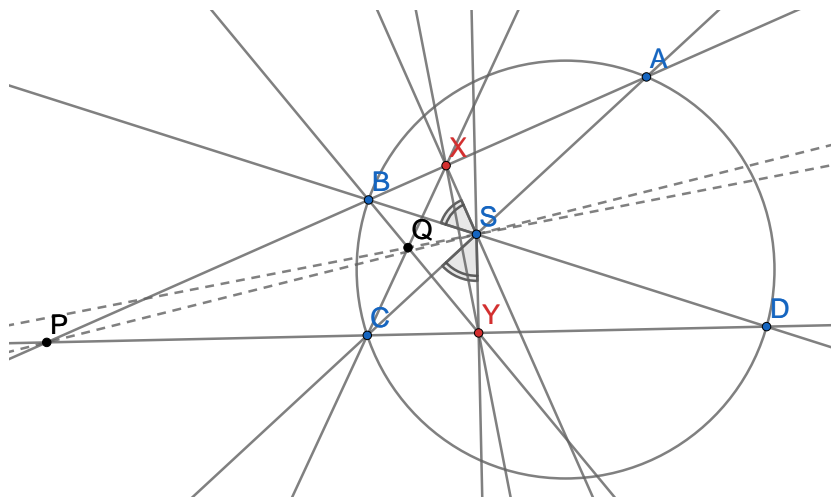


Zadanie 4.8. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg przechodzący przez wierzchołki B, C przecina proste AB, AC w punktach odpowiednio X i Y . Niech punkt P będzie punktem przecięcia prostych BY i CX , a P' obrazem punktu P w symetrii środkowej względem środka odcinka BC . Udowodnić, że $\angle BAP = \angle P'AC$.



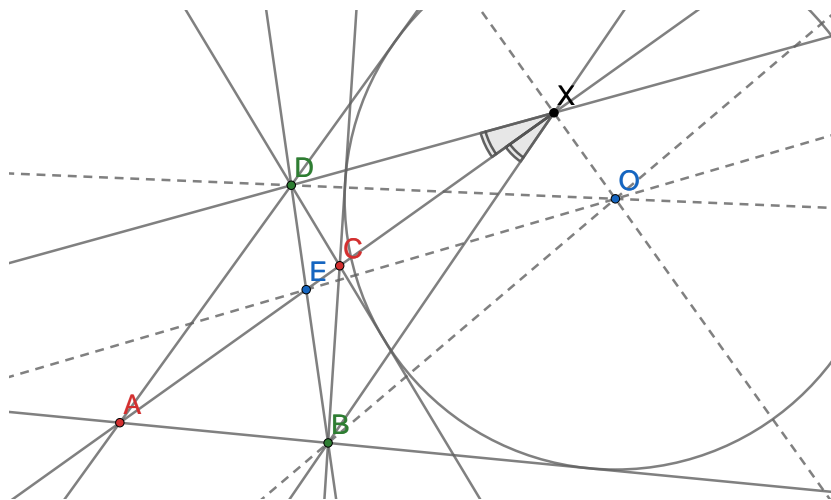
Dowód. Chcemy udowodnić, że proste AP, AP' są izogonalnie sprzężone w kącie BAC . Rozważmy czworokąt $BPCP'$. Na podstawie lematu 4.1 wystarczy udowodnić, że izogonalnie sprzężone są punkty $BP \cap CP'$ i $BP' \cap CP$ - są to punkty w nieskończoności prostych odpowiednio BP i CP . Po poprowadzeniu prostych do nich równoległych przechodzących przez A widzimy, że trzeba pokazać równość $\angle ABY = \angle XCA$, która zachodzi na podstawie cykliczności punktów $BCYX$. \square

Zadanie 4.9. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$, a jego punktem przecięcia przekątnych jest S . X i Y to rzuty S na, odpowiednio, proste AB i CD . Punkt Q jest przecięciem prostych XC oraz YB . Udowodnić, że $SQ \perp XY$.



Dowód. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AB i CD . Trójkąty ASB i CSD są podobne, a SX i SY to wysokości w nich, z czego mamy $\sphericalangle XSB = \sphericalangle CSY$. Z lematu 4.1 dla czworokąta $BXYC$ w kącie $XS Y$ otrzymujemy, że proste SQ i SP są w nim izogonalnie sprzężone, ale punkt P jest antypodyczny do S w trójkącie $XS Y$, więc prosta SQ jest w nim wysokością, co kończy dowód. \square

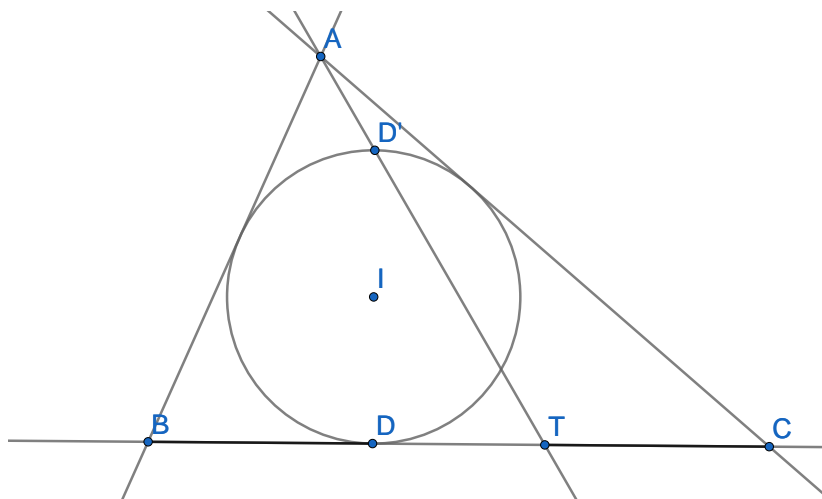
Zadanie 4.10. Okrąg o środku w O jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS , DS odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że E jest środkiem odcinka PQ .



Dowód. Oznaczmy punkt przecięcia prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez O z AC jako X . Teza sprowadza się do udowodnienia, że $O(B, D; E, X) = -1$. Niech $X' = OX \cap BD$ i rzutujemy dwustosunek na prostą BD , a następnie na pęk w X . Teza jest równoważna $X(B, D; E, X') = -1$, ale skoro $EX \perp XX'$, to na podstawie lematu 1.1 wystarczy pokazać, że prosta XX' jest dwusieczną kąta $\angle BXD$. Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku złożonego z prostych AB, BC, CD, DA , stożkowej w niego wpisanej (okręgu o środku w O) i punktu X otrzymujemy, że pary $(XB, XD), (XA, XC) = (XE, XE)$ oraz (zespolone) styczne z X do okręgu tworzą pary pewnej inwolucji. Jednak inwolucja ta pokrywa się w dwóch punktach z symetrią względem prostej XX' (w oczywisty sposób prosta XE przechodzi na siebie w tej symetrii, dodatkowo, skoro prosta XX' przechodzi przez środek okręgu O , to styczne, nawet zespolone, poprowadzone z X będą symetryczne względem prostej XX'), więc otrzymujemy, że także proste XB, XD są swoimi obrazami w tej symetrii, co było do pokazania. \square

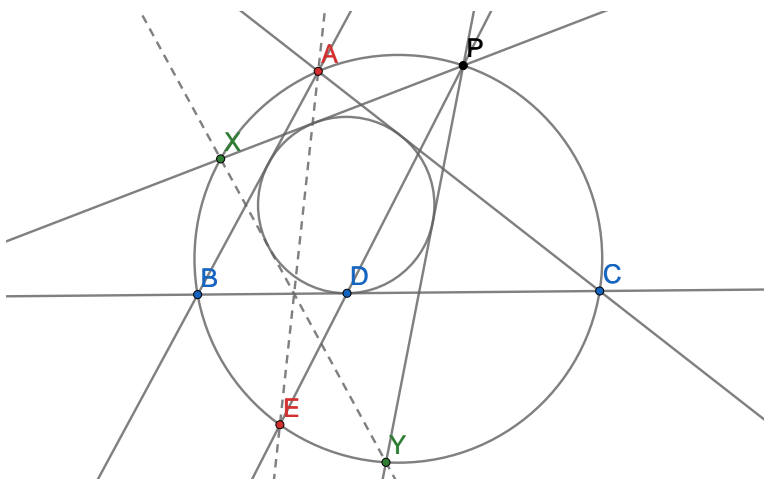
Teza następnego zadania jest dość znanym faktem.

Zadanie 4.11. Okrąg ω o środku w I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D . Punkt D' jest odbiciem D względem I . Prosta AD' przecina BC w T . Udowodnić, że $\overline{BD} = \overline{TC}$.



Dowód. Oznaczmy przez p styczną do okręgu wpisanego w D' . Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ABDC$, okręgu w niego wpisanego i punktu D' otrzymujemy, że $(p, p), (D'B, D'C), (D'A), (D'D)$ są parami inwolucji. Po rzutowaniu na prostą BC otrzymujemy, że pary tworzą punkty (B, C) i (D, T) , a punkt w nieskończoności prostej BC jest punktem stałym. Widzimy, że inwolucja ta pokrywa się w dwóch punktach z symetrią względem środka odcinka BC , więc także punkty D, T są swoimi obrazami w niej, co kończy dowód. Dodatkowo, proste przeliczenie na odcinkach stycznych pokazuje, że punkt T jest punktem styczności okręgu dopisanego do prostej BC . \square

Zadanie 4.12. Dany jest trójkąt ABC , okrąg w niego wpisany ω i okrąg na nim opisany Ω . Z punktu P na Ω poprowadzono styczne do ω , które ponownie przecinają Ω w X, Y . Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej PD z Ω , gdzie D to punkt styczności ω z prostą BC . Udowodnić, że proste AE, XY przecinają się na BC .



Dowód. Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ABDC$, okręgu w niego wpisanego i punktu P otrzymujemy, że proste $(PA, PD), (PB, PC)$ oraz PX, PY tworzą pary inwolucji pęku P . Po zrzutowaniu jej na okrąg Ω otrzymujemy, że pary $(A, E), (B, C), (X, Y)$ tworzą pary inwolucji, więc na podstawie twierdzenia 3.5 proste przez nie wyznaczone przecinają się w jednym punkcie.

□

Zadanie 4.13. Dany jest trójkąt ABC . Niech T będzie punktem styczności okręgu opisanego na ABC i okręgu A -dowpisanego wewnątrz (tzn. stycznego do prostych AB i BC oraz stycznego wewnątrz do okręgu opisanego). Niech styczne z T do okręgu wpisanego w ABC tną okrąg opisany w punktach X i Y . Udowodnić, że prosta XY jest równoległa do prostej BC .

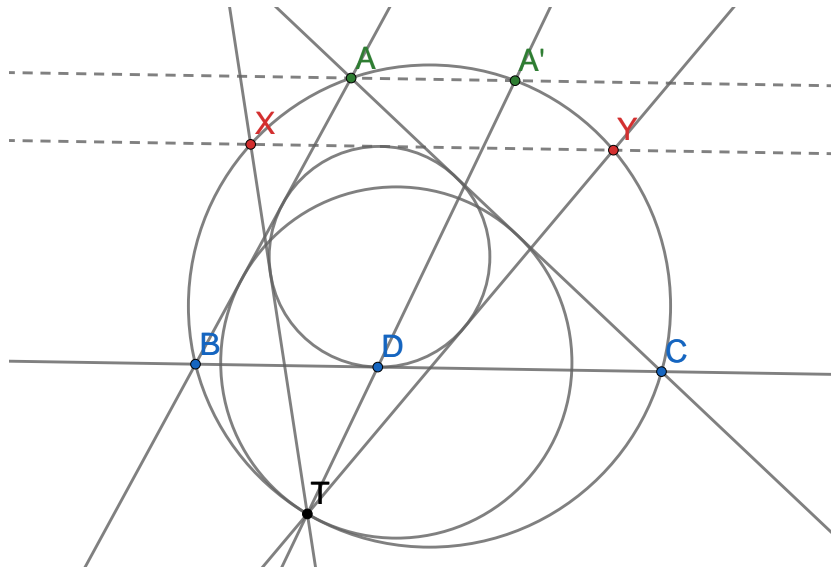
Dowód. Przed przejściem do zasadniczego dowodu będziemy potrzebowali dwóch lematów.

Lemat. Jeśli D' to punkt styczności okręgu A -dowpisanego, to zachodzi $\sphericalangle BAT = \sphericalangle D'AC$.

Wynika to wprost z zastosowania inwersji o środku w punkcie A i potędze $AB \cdot AC$ połączonej z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC . Punkty T, D' są swoimi obrazami w niej.

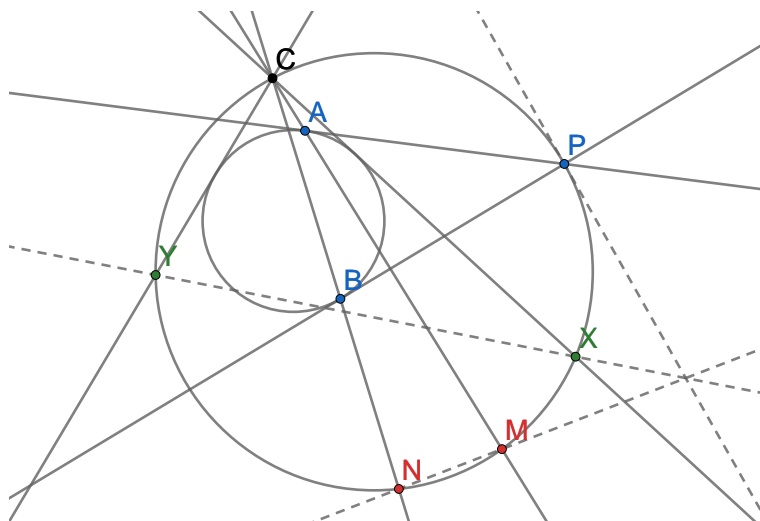
Lemat. Niech A' to punkt leżący na okręgu opisanym na trójkącie ABC , taki, że prosta AA' jest równoległa do BC . Wtedy punkty T, D, A' są współliniowe.

Wystarczy zauważyć, że w symetrii względem symetralnej odcinka BC punkt A' przechodzi na A , D' na D (na podstawie zadania 4.11), a punkt T na przecięcia prostej AD' z okręgiem opisanym (na podstawie wcześniejszego lematu).



Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ABDC$, okręgu w niego wpisanego i punktu T pokazuje, że pary prostych (TA, TD) , (TB, TC) , (TX, TY) są parami pewnej inwolucji, która po zrzutowaniu na okrąg opisany odpowiada istnieniu inwolucji przekształcającej pary (A, A') , (B, C) , (X, Y) . Na podstawie twierdzenia 3.5 otrzymujemy, że proste AA' , BC , XY są współpękowe, ale AA' jest równoległa do BC , więc XY także, co kończy dowód. \square

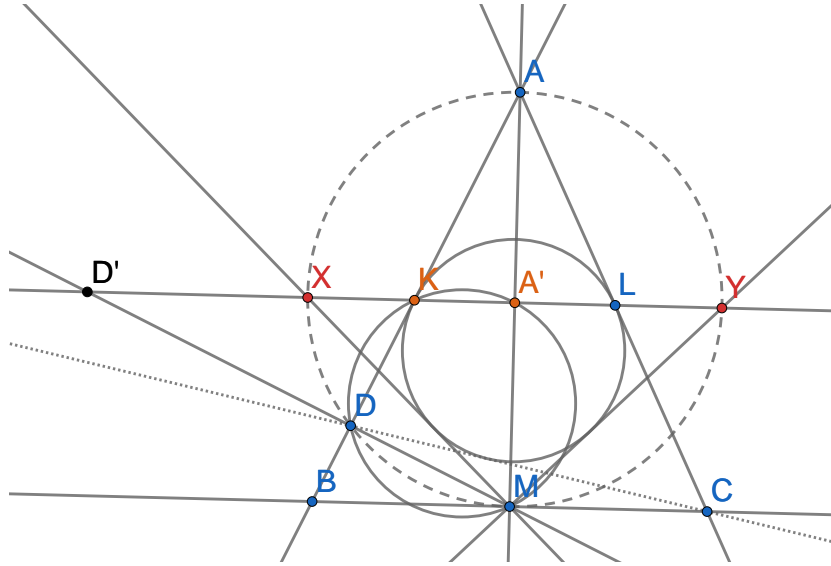
Zadanie 4.14. Dane są dwa okręgi rozłączne wewnętrznie ω i Γ . Na ω wybrano dwa punkty, A i B , takie, że styczne do ω przez te punkty tną się na Γ w punkcie P . Na Γ wybrano punkt C . Oznaczmy $CA \cap \Gamma = \{C, M\}$, $CB \cap \Gamma = \{C, N\}$. Niech styczne do ω poprowadzone z C tną Γ w punktach X i Y różnych od C . Udowodnić, że punkt przecięcia prostych XY oraz NM znajduje się na prostej stycznej do Γ w P .



Dowód. Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku zdege-

nerowanego składającego się z stycznych do ω w punktach A, B , okręgu ω i punktu C otrzymujemy, że istnieje inwolucja pęku C przekształcająca pary $(CA, CB), (CP, CP), (CX, CY)$, co po zrzutowaniu na Ω pokazuje, że pary $(M, N), (P, P), (X, Y)$ tworzą pary inwolucji na Ω , więc proste NM, XY przecinają się na prostej stycznej do Ω w P , co było do pokazania. \square

Zadanie 4.15. Dany jest trójkąt ABC , gdzie $AB = AC$ oraz środek boku BC - M . D to rzut M na bok AB . W trójkąt CDA wpisano okrąg ω , styczny do AB w K a do AC w L . Styczne z punktu M do ω przecinają prostą KL w punktach X i Y . Udowodnić, że czworokąt $MDXY$ jest cykliczny.



Dowód. Oznaczmy $A' = AM \cap XY, D' = DM \cap XY$ i niech N będzie punktem styczności ω z CD . Udowodnimy, że punkty MNK są współliniowe. Zachodzi to na podstawie twierdzenia Menelaosa dla trójkąta DBC :

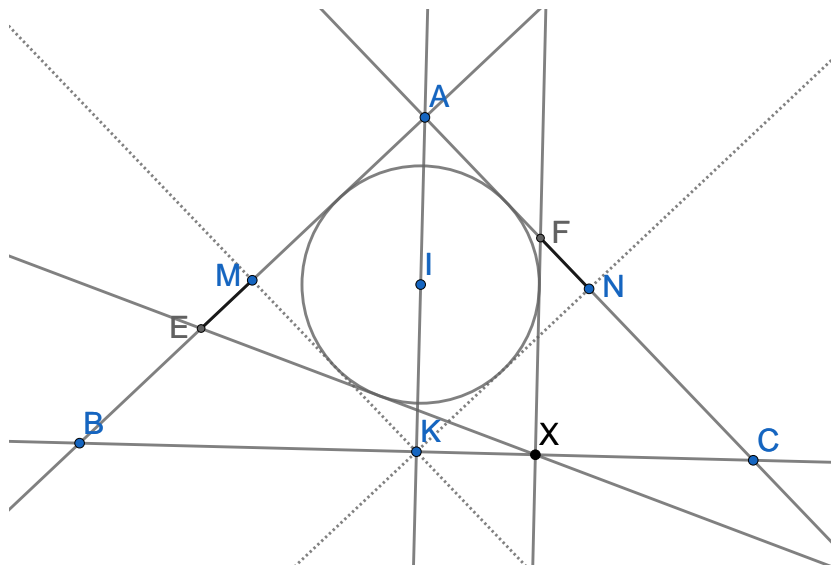
$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{DK}}{\overline{KB}} = 1 \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} \cdot -\frac{\overline{ND}}{\overline{CN}} = -1$$

Z dualnego inwolucyjnego twierdzenie Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ADNC$, okręgu ω i punktu M otrzymujemy, że pary prostych $(MA, MN), (MD, MC), (MX, MY)$ tworzą pary inwolucji, co po zrzutowaniu na prostą XY pokazuje, że pary $(A', K), (D', \infty_{XY}), (X, Y)$ są parami inwolucji. Skoro D' jest obrazem punktu w nieskończoności, to na podstawie twierdzenia 3.3 spełnia

$$\overline{D'X} \cdot \overline{D'Y} = \overline{D'A'} \cdot \overline{D'K}$$

co oznacza, że prosta DM jest osią potęgową okręgów opisanych na trójkątach MXY i $MA'K$, ale skoro $\sphericalangle MA'K = 90^\circ$, to punkt D leży na drugim z tych okręgów. Jest więc drugim punktem przecięcia tych okręgów, w szczególności leży na okręgu opisany na trójkącie MXY , co kończy dowód. \square

Zadanie 4.16. Dany jest równoramienny trójkąt ABC o podstawie BC oraz punkt I - środek wysokości poprowadzonej z A . Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie I i stycznym do prostych AB i AC . Styczne do ω poprowadzone z dowolnie wybranego punktu X na odcinku BC przecinają odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Udowodnić, że $|AE| = |FC|$.



Dowód. Oznaczmy przez M, N środki odcinków odpowiednio AB, AC . Niech f będzie przekształceniem pęku X , które każdej prostej XP w tym pęku przyporządkowuje prostą XP' , taką, że $P \in AB, P' \in AC$, ponadto $|MP| = |NP'|$ i punktu P, P' znajdują się po przeciwnych stronach prostej MN . Łatwo przekonać się, że f zachowuje dwustosunek, więc jest przekształceniem rzutowym. Zauważmy, że

$$f(BC) = XA \text{ i } f(XA) = BC$$

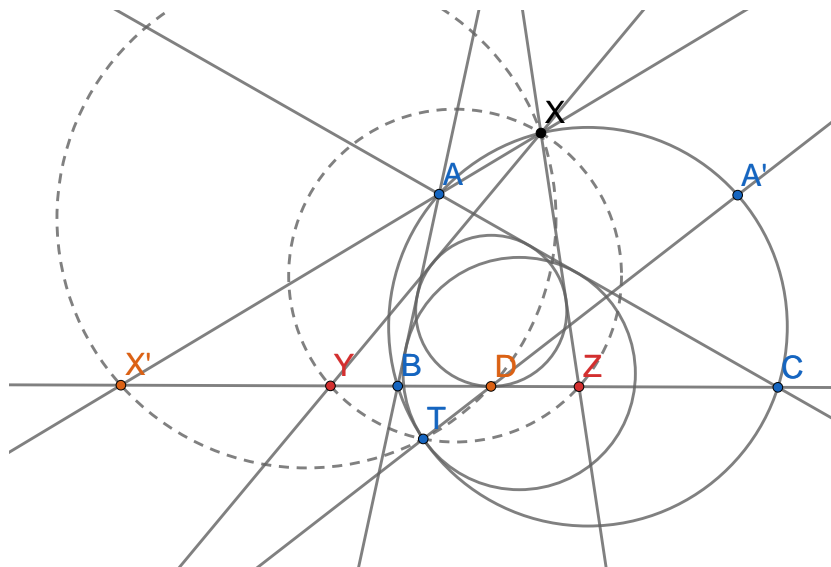
więc na podstawie twierdzenia 3.2 otrzymujemy, że f jest inwolucją pęku X , w szczególności skoro $f(AM) = AN$ to proste (AM, AN) są parą tej inwolucji.

Niech K będzie środkiem odcinka BC . Z symetrii czworokąt $AMKN$ jest rombem, a okrąg ω jest w niego wpisany. Na podstawie dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla tego czworoboku i punktu X otrzymujemy, że pary inwolucji tworzą proste $(XM, XN), (XA, XK), (XP, XQ)$. Łatwo spostrzec, że otrzymana inwolucja pokrywa się w dwóch punktach z f , co oznacza, że także proste XP, XQ są parą tej inwolucji i z definicji f otrzymujemy tezę zadania. \square

Zadanie 4.17. Dany jest trójkąt ABC z okręgiem wpisanym ω . Z punktu X na okręgu opisanym na trójkącie ABC poprowadzone styczne do ω , które przecinają BC w punktach Y, Z . Niech T będzie punktem styczności okręgu opisanego i A -dowpisanego wewnętrznie. Udowodnić, że punkty X, Y, Z, T leżą na jednym okręgu.

Dowód. Niech $X' = XA \cap BC$ i D będzie punktem styczności ω z BC . Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ABDC$, okręgu ω

i punktu X pokazuje, że proste $(XY, XZ), (XA, XD), (XB, XC)$ tworzą pary inwolucji, co po rzutowaniu na prostą BC daje pary $(Y, Z), (X', D), (B, C)$ pewnej inwolucji na prostej BC . Z twierdzenia 3.3 wiemy, że istnieje na BC punkt O spełniający



$$\overline{OY} \cdot \overline{OZ} = \overline{OX'} \cdot \overline{OD} = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$$

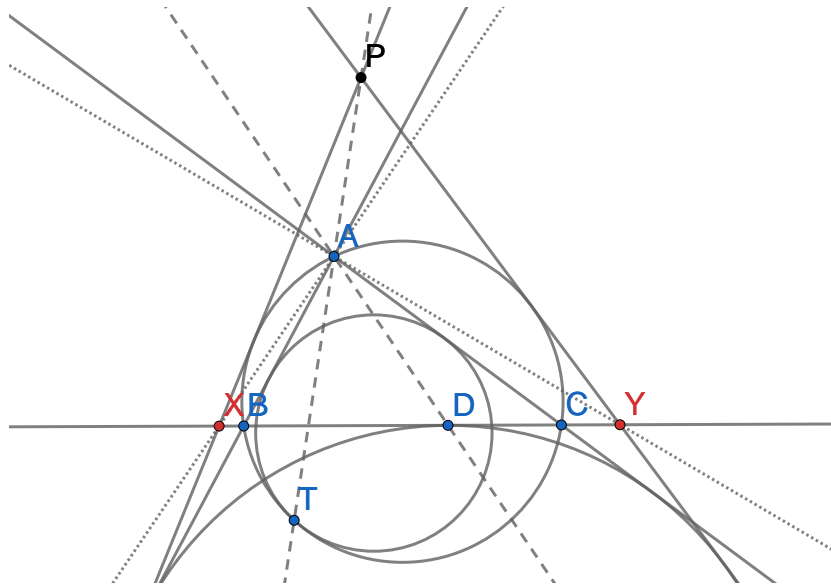
więc okręgi opisane na trójkątach $XYZ, XX'D, XBC$ mają wspólną oś potęgową, w szczególności przecinają się w drugim punkcie. Wystarczy w takim razie pokazać, że punkty $XX'DT$ są współokręgowe - wyniknie z tego, że tym drugim punktem wspólnym jest T .

Na podstawie lematu udowodnionego w zadaniu 4.13 zachodzi $\sphericalangle A'TC = \sphericalangle BTA$ z czego łatwo otrzymać $\sphericalangle X'XT = \sphericalangle X'DT$, co jest równoważne żądanej cykliczności. \square

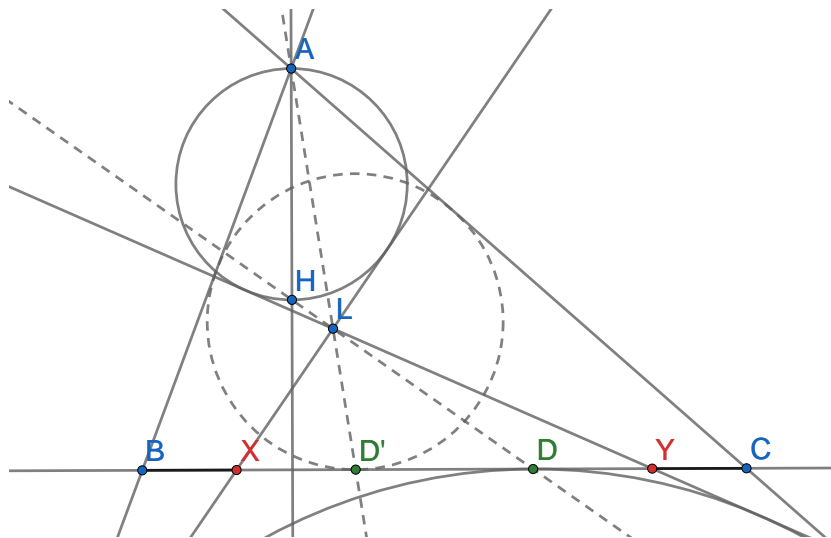
Zadanie 4.18. Dany jest trójkąt ABC . Wspólne styczne zewnętrzne do okręgów opisanego na ABC oraz A -dopisanego przecinają prostą BC w punktach X i Y . Udowodnić, że $\sphericalangle XAB = \sphericalangle CAY$.

Dowód. Oznaczmy przecięcie wspólnych stycznych przez P , a punkt styczności okręgu dopisanego do prostej BC jako D . Na podstawie dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $PXDY$, okręgu dopisanego (oznacmy go przez ω) i punktu A otrzymujemy, że $(AB, AC), (AP, AD), (AX, AY)$ tworzą pary inwolucji.

Chcemy pokazać, że inwolucja pokrywa się z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$, wystarczy więc pokazać, że proste AD, AP są izogonalnie sprzężone w tym kącie. Z zadania 4.13 wiemy, że prostą izogonalną do AD jest AT , gdzie T jest punktem styczności okręgu opisanego i dopisanego. Celem jest udowodnienie, że punkty P, A, T są współliniowe. Jednakże z twierdzenia Monge'a dla okręgów: dopisanego, dopisanego i opisanego środki dodatnich jednokładności je na siebie przekształcające są współliniowe, a są to dokładnie punkty P, A, T , co kończy dowód. \square



Zadanie 4.19. ³ Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Wspólne styczne wewnętrzne do okręgu o średnicy AH , gdzie H - ortocentrum ABC , oraz okręgu A -dopisanego przecinają prostą BC w punktach X i Y . Udowodnić, że $|BX| = |YC|$.



Dowód. Oznaczmy przez L punkt przecięcia stycznych, a przez D punkt styczności okręgu dopisanego z BC . Dodatkowo niech ω to okrąg wpisany, Ω dopisany, a Γ - okrąg o średnicy AH . Jednokładność o środku w L przekształcająca okrąg Ω na Γ przenosi punkt H na D , w szczególności punkty H, L, D są współliniowe. Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworoboku $ABDC$, okręgu Ω i punktu L pokazuje po rzutowaniu na prostą BC , że punkty $(X, Y), (B, C), (AL \cap BC, D)$ są parami pewnej inwolucji. Chcemy udowodnić, że inwolucja ta to symetria względem środka odcinka

³To jest zadanie, które autor miał na myśli we wstępie do tego rozdziału.

BC . Wystarczy więc wykazać, że $AL \cap BC$ jest punktem styczności BC z ω (punkty styczności okręgu wpisanego i dopisanego są symetryczne względem tego środka).

Jednokładność o skali ujemnej przekształcająca Γ na ω (niech jej środek do S) przekształca A na punkt styczności ω z BC - oznaczmy ten punkt przez D' . Oczywiście punkty A, S, D' są współliniowe. Wystarczy w takim razie wykazać, że punkt S leży na prostej AL . Jednak z twierdzenia Monge'a środek jednokładności o skali dodatniej przekształcającej ω na Ω (punkt A), środek jednokładności o skali ujemnej przekształcającej Γ na Ω (punkt L) i środek jednokładności o skali ujemnej przekształcającej ω na Γ (punkt S) są współliniowe, co kończy dowód. \square

Zadanie 4.20. Dany jest czworokąt $ABCD$ i punkty P, Q, R, S leżące odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA . Punkt przecięcia PR z QS to O . Udowodnić, że jeżeli w czworokąty $APOS, BPOQ, CQOR, DSOP$ można wpisać okręgi, to proste PQ, AC, RS przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Oznaczmy okręgi wpisane dane w zadaniu kolejno przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Udowodnimy na początek, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Niech T_ω oznacza długość stycznej z punktu T do okręgu ω . Chcemy udowodnić, że

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA| \iff P_{\omega_1} + P_{\omega_2} + R_{\omega_3} + R_{\omega_4} = Q_{\omega_2} + Q_{\omega_3} + S_{\omega_4} + S_{\omega_1}$$

co po zapisaniu $P_{\omega_1} + P_{\omega_2} = O_{\omega_1} + O_{\omega_2}$ i analogicznie dla pozostałych punktów jest równoważne

$$O_{\omega_1} + O_{\omega_2} + O_{\omega_3} + O_{\omega_4} = O_{\omega_2} + O_{\omega_3} + O_{\omega_4} + O_{\omega_1}$$

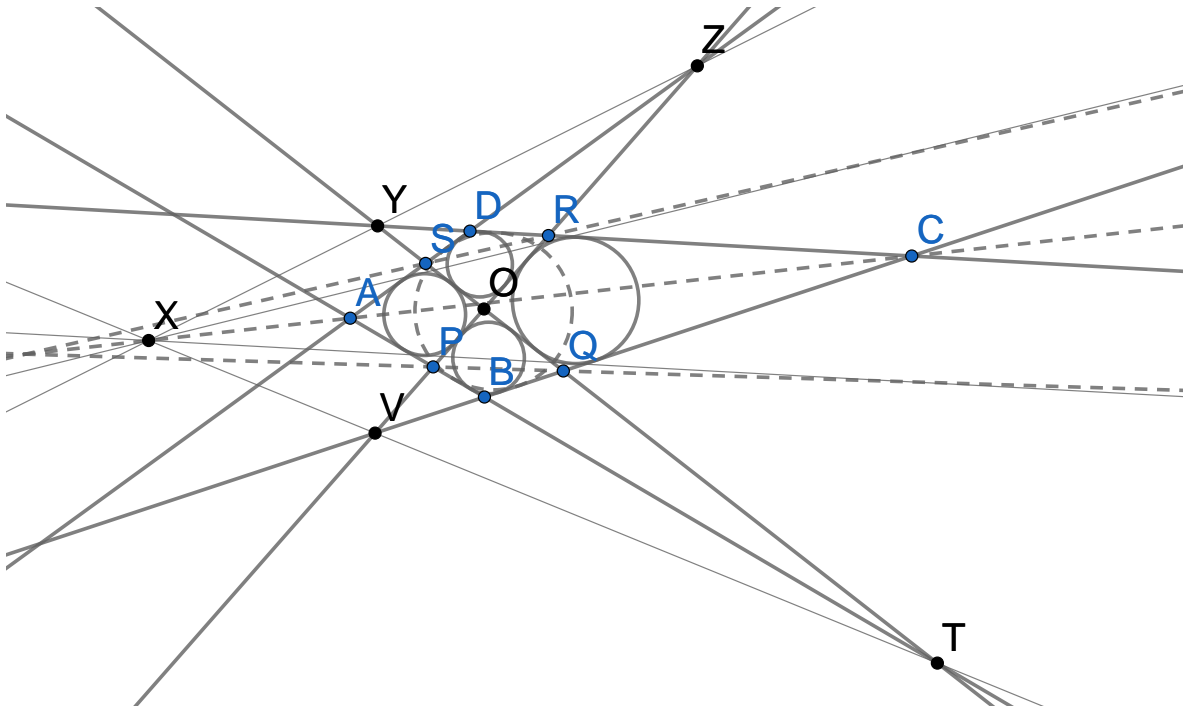
czyli istotnie w $ABCD$ da się wpisać okrąg - oznaczmy go przez ω .

Niech X będzie punktem przecięcia stycznych zewnętrznych do ω_1 i ω_3 . Wtedy na podstawie twierdzenia Monge'a dla okręgów ω_1, ω_3 i ω środki jednokładności o skalach dodatnich przekształcające je na siebie nawzajem, czyli punkty A, C, X są współliniowe.

Oznaczmy przez f inwolucję pęku X , która przekształca prostą XO na XAC oraz wspólne styczne zewnętrzne ω_1 i ω_3 na siebie. Dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworoboku $APOS$, okręgu ω_1 i punktu X pokazuje, że istnieje inwolucja, której parami są $(XO, XA), (XP, XS)$ oraz styczne. Skoro pokrywa się ona w dwóch punktach z f otrzymujemy, że są one sobie równe, co oznacza, że (AP, AS) tworzy parę tej inwolucji. Analogicznie dla czworoboku $CRQO$ i okręgu ω_3 otrzymujemy, że parą tej inwolucji są także proste (XQ, XR) .

Teraz z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku $SRPQ$ i punktu X otrzymujemy, że pary pewnej inwolucji tworzą proste $(XP, XS), (XQ, XR)$, a także prosta XO z prostą przechodzącą przez punkt przecięcia prostych PQ i RS . Jednakże ta inwolucja także pokrywa się w dwóch punktach z f , a wiemy, że obrazem prostej XO w niej jest prosta ACX , z czego wynika, że punkt przecięcia prostych PQ i RS leży na prostej AC , co było do pokazania. \square

Warto także zapoznać się z drugim dowodem, nie korzystającym z obserwacji, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



Dowód. Oznaczmy przez X punkt przecięcia wspólnych stycznych zewnętrznych ω_1 i ω_3 . Dodatkowo zdefiniujmy $T = AB \cap QS$, $V = BC \cap PR$, $Y = CD \cap QS$, $Z = AD \cap PR$. Z twierdzenia Monge'a dla okręgów odpowiednio $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ i $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ otrzymujemy, że trójki punktów T, V, X oraz Y, Z, X są współliniowe.

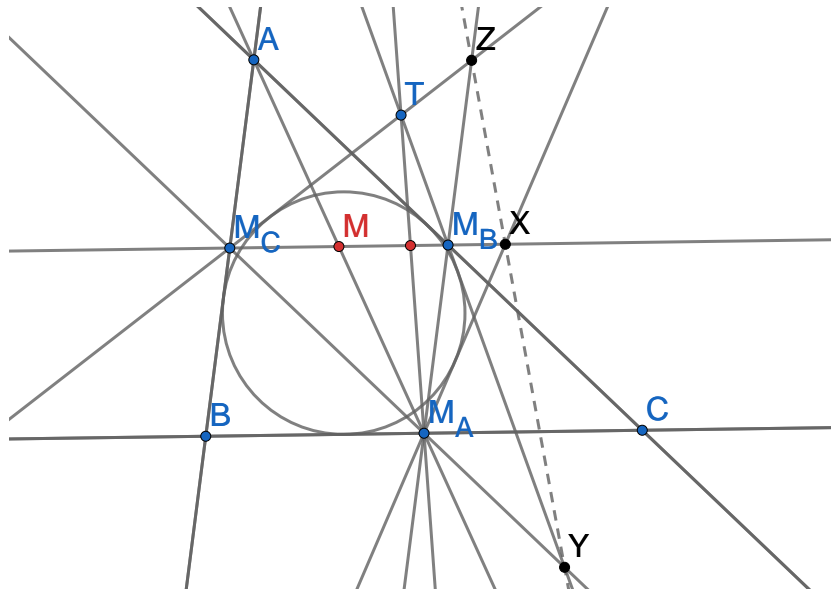
Niech f będzie involucją pęku X , w której pary tworzą styczne do ω_1 i ω_3 oraz proste XVT i XYZ . Z dualnego involucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku $APOS$, okręgu ω_1 i punktu X otrzymujemy, że proste (XP, XS) , (XO, XA) także tworzą pary f . Analogicznie dla czworoboku $CROQ$ i okręgu ω_3 otrzymujemy, że proste (XQ, XR) , (XO, XC) także są parami f , w szczególności $XA = XC$, czyli X leży na prostej AC .

Niech $N = PQ \cap RS$. Dualne involucyjne twierdzenie Desargues'a dla czworoboku $PQSR$ i punktu X pokazuje, że parą f są także proste (XO, XN) , z czego otrzymujemy $XN = AC$, co kończy dowód. \square

Zadanie 4.21. W trójkącie ABC , M_A, M_B, M_C to środki odpowiednio odcinków BC, CA, AB , a ω to okrąg wpisany. Proste styczna z M_A do ω różna od BC przecina prostą $M_B M_C$ w punkcie X . Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe, gdzie Y, Z definiujemy analogicznie.

Dowód. Niech punkt przecięcia prostych $M_C Z, M_B Y$ to T . Z dualnego involucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku złożonego z prostych $AB, AC, M_C Z, M_B Y$, okręgu w niego wpisanego ω i punktu M_A otrzymujemy, po zrzutowaniu na prostą $M_B M_C = l$, że punkty (M_B, M_C) , $(AM_A \cap l, TM_A \cap l)$, (X, ∞_l) to pary pewnej involucji f . Oczywiście $AM_A \cap l$ to M - środek odcinka $M_B M_C$. Otrzymujemy

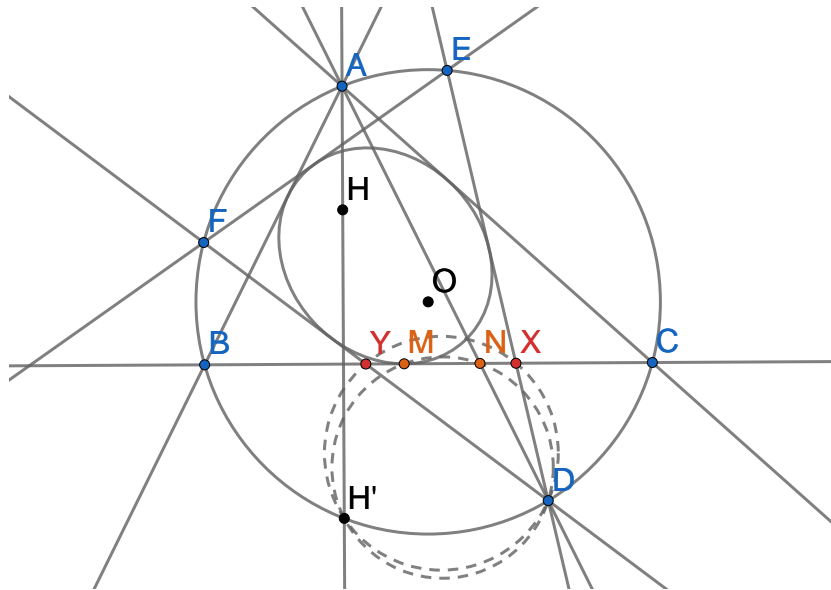
$$-1 = (M_B, M_C; M, \infty_l) \stackrel{f}{=} (M_C, M_B; TM_A \cap l, X)$$



Oznaczmy $X' = YZ \cap l$. Z twierdzenia 1.4 dla czworokąta $M_A M_B T M_C$ otrzymujemy $(M_C, M_B; T M_A \cap l, X') = -1$, z czego wynika $X' = X$, co kończy dowód. \square

Uwaga. Warto zauważyć, że w tym dowodzie korzystaliśmy jedynie z tego, że prosta $M_B M_C = l$ jest równoległa do BC , pokazany został zatem znacznie ogólniejszy fakt.

Zadanie 4.22. Dane są dwa trójkąty ostrokątne ABC i DEF wpisane w okrąg Ω o wspólnym ortocentrum H , takie, że sześciokąt $AFBDCE$ jest wypukły. Proste DE i DF przecinają BC odpowiednio w X i Y . Udowodnić, że odbicie symetryczne H względem prostej BC , X, Y i D są współokrągowe.



Dowód. Niech O będzie środkiem okręgu Ω , a H' oznacza odbicie punktu H względem

BC . Oznaczmy przez \mathcal{E} zbiór punktów X spełniających $|OX| + |HX| = R$. Zbiór ten jest elipsą o ogniskach w O i H oraz wpisaną w trójkąty ABC i DEF . Nietrudno pokazać, że H' leży na Ω , ponadto $M = OH' \cap BC$ jest punktem styczności \mathcal{E} z BC .

Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku zdegenerowanego $ABMC$, elipsy \mathcal{E} w niego wpisanej oraz punktu D otrzymujemy po zrzutowaniu na prostą BC , że punkty $(B, C), (X, Y), (AD \cap BC, M)$ tworzą pary inwolucji. Na podstawie twierdzenia 3.3 istnieje punkt Q na prostej BC spełniający

$$\overline{QB} \cdot \overline{QC} = \overline{QX} \cdot \overline{QY} = \overline{QN} \cdot \overline{QM}$$

gdzie $N = AD \cap BC$, więc okręgi opisane na okręgach DBC, DXY, DNM mają wspólną oś potęgową, w szczególności mają drugi punkt wspólny. Wystarczy więc pokazać, że okrąg opisany na trójkącie DMN przechodzi przez H' . Proste przeliczenie na kątach pokazuje jednak, że $\sphericalangle BMH' = \sphericalangle ADH'$, co kończy dowód. \square

Rozdział 5

O sprzężeniu harmonicznym i czworokącie zupełnym

W tym rozdziale umieszczone są wszelkie wyniki dotyczące własności *sprzężenia harmonicznego* punktu względem czworokąta zupełnego (w szczególności jego istnienia), a także kilka interesujących spostrzeżeń wynikających z badania pewnych szczególnych konfiguracji. Prezentowane są one w tym miejscu ze względu na charakter dowodów (korzystają one z większości materiału zawartego w tej pracy), a także konwencji, która nie pozwalała w odpowiedni sposób omówić ich wcześniej.

5.1 Sprzężenie harmoniczne punktu względem czworokąta zupełnego

Zacznijmy od twierdzenia:

Twierdzenie 5.1. *Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech X będzie punktem przecięcia prostych AC i BD , Y prostych AB i CD , a Z prostych BC i DA . Punkt P jest dowolnym punktem różnym od X, Y, Z . Prosta x pęku X spełnia $(AC, BD; XP, x) = -1$. Analogicznie definiujemy proste y i z . Wtedy x, y, z są współpękowe.*

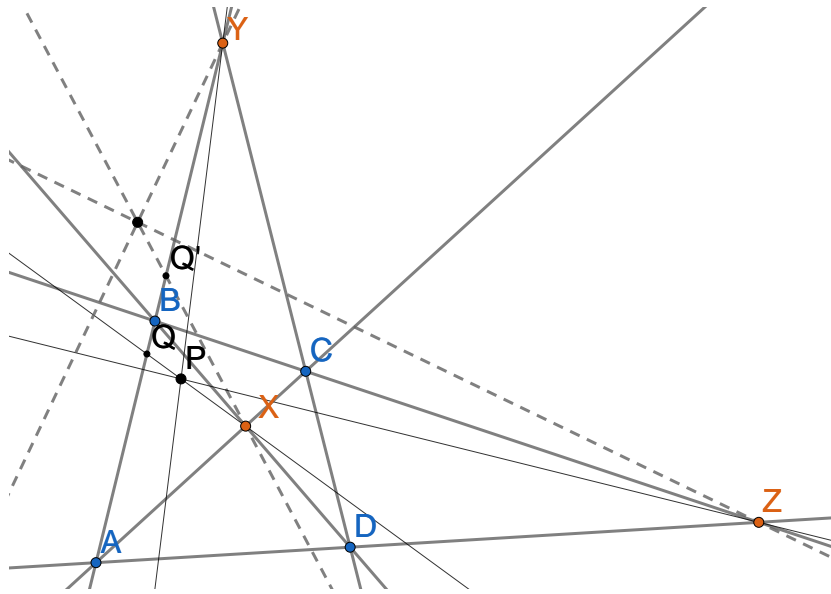
Dowód. Gdy punkt P leży na jednej z boków to teza jest oczywista. Jeśli bokiem tym jest AB , to punkt \bar{P} leży na nim i spełnia $(A, B; P, \bar{P}) = -1$ i z definicji leży na wszystkich prostych z tezy. Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Ustalmy prostą p przechodzącą przez X i ruszajmy po niej punktem P . W wyniku tego ustalona jest także prosta x . Następujące mapy są rzutowe:

$$p(P) \mapsto Y(YP) \mapsto Y(y) \mapsto x(x \cap y)$$

oraz

$$p(P) \mapsto Z(ZP) \mapsto Z(z) \mapsto x(x \cap z)$$

gdzie rzutowość drugich przekształceń wynika z rzutowości operacji brania sprzężenia harmonicznego do prostej w pęku względem ustalonych dwóch prostych (w tym przypadku są to odpowiednie boki czworokąta). Skoro przekształcenie $x(x \cap y) \mapsto x(x \cap z)$



jest rzutowe, to by udowodnić, że jest identycznością wystarczy pokazać to w trzech punktach.

Niech p przecina AB w Q . Prosta y jest w tym przypadku bok AB , więc $x \cap y = Q'$, gdzie Q' spełnia $(A, B; Q, Q') = -1$. Z definicji prosta z spełnia $(ZA, ZB; ZQ, z) = -1$, co po zrzutowaniu na AB implikuje $z \cap AB = z \cap x = Q'$, więc w tym przypadku teza została udowodniona. Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla pozostałych punktów przecięcia prostej p z bokami czworokąta kończy dowód. \square

Umożliwia ono zdefiniowanie pojęcia z tematu tej części.

Definicja 5.1. Punkt wspólny prostych w tezie twierdzenia 5.1 nazywamy *sprzężeniem harmonicznym* punktu P względem czworokąta $ABCD$ i oznaczamy \overline{P} .

Okazuje się, że powyższy koncept dobrze wiąże się z involucyjnym twierdzeniem Desargues'a. Przyjrzyjmy się kilku własnościom.

Twierdzenie 5.2. *Sprzężenie harmoniczne jest dobrze zdefiniowane dla każdego punktu poza punktami przekątniowymi czworokąta. Co więcej, operacja przyporządkowująca punktowi X punkt \overline{X} jest bijekcją punktów płaszczyzny rzutowej bez przekątnych czworokąta.*

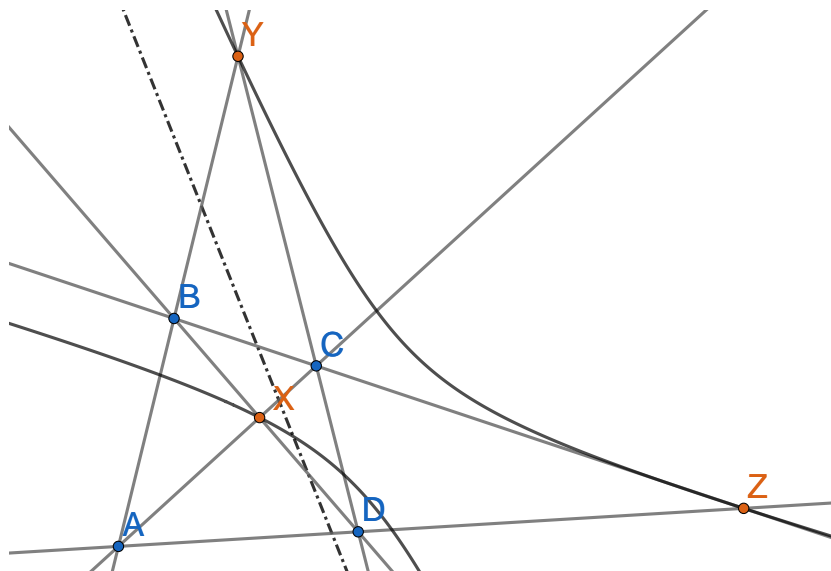
Dowód. Pierwsza część wynika wprost z dowodu twierdzenia 5.1. By przekonać się o prawdziwości drugiej, wystarczy zauważyć, że $\overline{P} = \overline{Q}$ oraz $P \neq Q$ tylko wtedy, gdy P, Q leżą na jednej przekątnej czworokąta zupełnego. \square

Twierdzenie 5.3. *Jedynymi punktami stałymi przekształcenia $\overline{(\)}$ są wierzchołki czworokąta.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 5.1 i nie wprost załóżmy, że dla pewnego P różnego od A, B, C, D zachodzi $P = \overline{P}$. wtedy $(AC, BD; XP, X\overline{P}) = -1$, z czego wynika, że P leży na jednej z prostych AC, BD . Analogiczny argument dla

punktów przekątniowych Y i Z pokazuje, że P należy do trzech boków czworokąta, a to zachodzi jedynie gdy jest jednym z jego wierzchołków i sprzeczność kończy dowód. \square

Twierdzenie 5.4. *Obrazem prostej k nieprzechodzącej przez żaden z punktów przekątniowych w sprzężeniu harmonicznym jest stożkowa przez nie przechodząca.*



Dowód. Wybierzmy cztery punkty P_1, P_2, P_3, P_4 na prostej k , przy czym punkty P_1, P_2, P_3 leżą odpowiednio *blisko* prostych XY, YZ, ZX . Oczywiście skoro branie prostej harmonicznie sprzężonej w pęku względem danej pary zachowuje dwustosunek (odpowiada to po zrzutowaniu braniu sprzężenia względem ustalonego odcinka na prostej), to zachodzi

$$X(\overline{P_1}, \overline{P_2}; \overline{P_3}, \overline{P_4}) = X(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4)_k$$

i analogicznie dla punktów Y i Z , a skoro punkty $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$ nie są współliniowe (na podstawie ciągłości i założenia o nich się *blisko* odpowiednio punktów Z, X, Y , które nie są współliniowe), to obrazem krzywej na pewno nie jest prosta, więc na podstawie twierdzenia 1.10 punkty $X, Y, Z, P_1, P_2, P_3, P_4$ leżą na jednej stożkowej, co kończy dowód. \square

Szczególnie ciekawy jest przypadek gdy prosta k jest prostą w nieskończoności. Okazuje się wtedy, że punkty X, Y, Z wraz ze środkami odcinków AB, BC, CD, DA, AC, BD leżą na jednej stożkowej.

Patrząc na powyższy fakt, od razu nasuwa się podobieństwo z twierdzeniem 1.10, dotyczącym obrazu prostej w izogonalnym sprzężeniu, czy jego analogiem związanym z izotomicznym sprzężeniem. Podobieństwo to okazuje się nieprzypadkowe.

Rozważmy trójkąt ABC i niech I, I_A, I_B, I_C będą środkami okręgów wpisanych i dopisanych znajdujących się naprzeciw odpowiednich wierzchołków. Wybierzmy dowolny punkt P na płaszczyźnie różny od A, B, C . Zastanówmy się co jest jego harmonicznym sprzężeniem względem czworokąta $II_A I_B I_C$.

Skoro $A = II_A \cap I_B I_C$ oraz $II_A \perp I_B I_C$, to na podstawie lematu 1.1 prostą harmoniczną sprzężoną do AP będzie jej obraz w symetrii względem II_A . Rozumując analogicznie dla pozostałych wierzchołków trójkąta otrzymujemy, że sprzężenie harmoniczne P względem II_A, I_B, I_C pokrywa się ze sprzężeniem izogonalnym w trójkącie ABC .

Ponadto, skoro każde dwa czworokąty są sobie rzutowo równoważne, to wnioskiem z powyższych rozważań jest

Obserwacja 5.1. Istnienie harmonicznego sprzężenia jest równoważne istnieniu izogonalnego sprzężenia.

Obrazem prostej w nieskończoności w przekształceniu $(\bar{\quad})$ w powyższej konfiguracji okazuje się być okrąg opisany na trójkącie ABC lub (inaczej) okrąg Eulera trójkąta $I_A I_B I_C$.

W przypadku izotomicznego sprzężenia możemy wyciągnąć analogiczny wniosek. W trójkącie ABC niech A', B', C' będą odbiciami odpowiednich wierzchołków względem środków naprzeciwległych boków. Dodatkowo niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC .

Rozważmy harmoniczne sprzężenie punktu X względem czworokąta $A'B'C'G$, którego punktami wierzchołkowymi są wierzchołki wyjściowego trójkąta. Równość

$$(B'C', A'G; AX, A\bar{X}) = -1$$

po rzutowaniu na prostą BC pokazuje, że punkty przecięcia $AX, A\bar{X}$ z tą prostą są symetryczne względem środka odcinka BC . Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla pozostałych wierzchołków pokazuje, że sprzężenie harmoniczne punktu w czworokącie $A'B'C'G$ jest izotomicznym sprzężeniem w trójkącie ABC . Wnioskiem jest

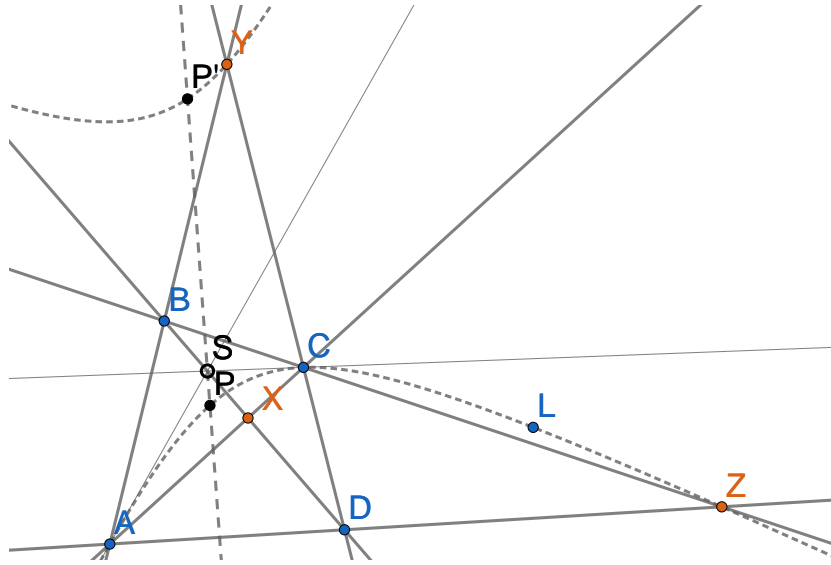
Obserwacja 5.2. Istnienie harmonicznego sprzężenia jest równoważne istnieniu izotomicznego sprzężenia.

Widzimy zatem, że harmoniczne sprzężenie jest swego rodzaju uogólnieniem, zawierającym w sobie zarówno pojęcie izogonalnej jak i izotomicznej relacji między punktami.

To nie koniec ciekawych własności. Oznaczmy przez $\bar{\mathcal{F}}$ obraz figury \mathcal{F} w sprzężeniu harmonicznym (to znaczy, zbiór punktów harmonicznie sprzężonych do punktów figury \mathcal{F}).

Twierdzenie 5.5. Niech Γ będzie stożkową przechodzącą przez punkty A, C, Y, Z czworokąta zupełnego. Wtedy $\bar{\Gamma} = \Gamma$.

Dowód. Wybierzmy punkt P na Γ i niech P' na tej stożkowej spełnia $Y(A, C; P, P') = -1$. Łatwo widać, że przekształcenie $\Gamma(P) \mapsto \Gamma(P')$ jest inwolucją (gdyż je to przekształcenie $Y(YP) \mapsto Y(YP')$ rzutowane na Γ). Co więcej, punkty A, C są punktami stałymi tej inwolucji, więc inwolucja ta pokrywa się z przerzutem przez S , gdzie S jest przecięciem stycznych do Γ w A i C . Analogicznie inwolucja skonstruowana dla punktu Z pokazuje, że są one jednakowe. Z definicji tych przekształceń otrzymujemy jednak, że $P' = \bar{P}$ co kończy dowód. \square



Uwaga. Powyższy wniosek jest szczególnie ciekawy w kontekście konstrukcji, która została wykorzystana do pokazania równoważności między harmonicznym a izogonalnym sprzężeniem. Wystarczy przyjąć za Γ okrąg opisany na punktach B, C, I_B, I_C .

W kontekście inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a niezwykle istotna jest poniższa własność.

Twierdzenie 5.6. *Para punktów harmonicznie sprzężonych względem czworokąta jest punktami stałymi inwolucji indukowanej przez ten czworokąt na prostej przez nie wyznaczonej.*

Dowód. wybierzmy P i niech $p = P\bar{P}$. Punkty P, \bar{P} spełniają

$$(P, \bar{P}; p \cap AC, p \cap BD) = -1$$

$$(P, \bar{P}; p \cap AB, p \cap CD) = -1$$

$$(P, \bar{P}; p \cap BC, p \cap DA) = -1$$

z czego otrzymujemy, że inwolucja indukowana na p przez czworokąt $ABCD$ pokrywa się ze sprzężeniem harmonicznym względem odcinka $P\bar{P}$, co było do pokazania. \square

Warto w związku z powyższym bliżej przyjrzeć się punktom stałym inwolucji. Z twierdzenia 3.3 wiemy, że dla każdej prostej istnieją punkty stałe (być może zespolone) inwolucji indukowanej przez czworokąt. Dodatkowo zachodzi

Twierdzenie 5.7. *Dla każdego pęku istnieje dokładnie jedna prosta do niego należąca, na której środek pęku jest punktem stałym inwolucji indukowanej przez czworokąt.*

Dowód. Punkt na prostej jest punktem stałym inwolucji indukowanej przez czworokąt wtedy i tylko wtedy gdy przechodząca przez wierzchołki czworokąta i ten punkt stożkowa jest styczna do prostej. Jednakże istnieje tylko jedna styczna do stożkowej w danym punkcie, co kończy dowód. \square

Wnioskiem z powyższego jest fakt, że każdy punkt jest punktem stałym inwolucji zadawanej przez czworokąt dla dokładnie jednej prostej przez niego przechodzącej, co więcej, na podstawie twierdzenia 5.6 jest to prosta przechodząca przez jego harmoniczne sprzężenie względem tego czworokąta.

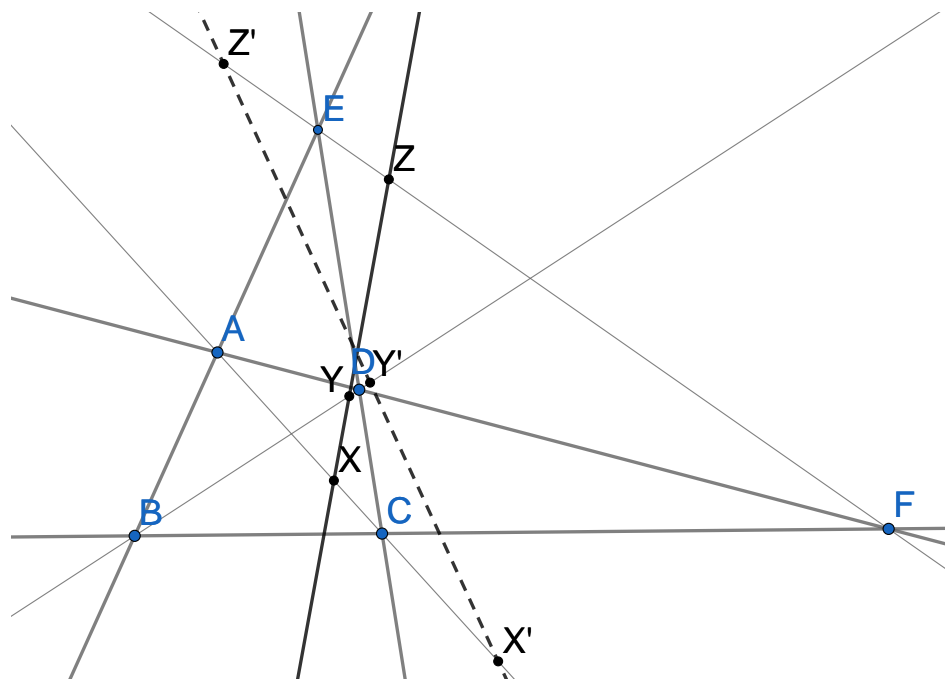
Obserwacje te, w połączeniu z wcześniej wspomnianym faktem mówiącym o tym, że dla każdej prostej istnieją punkty stałe inwolucji zadanej na niej przez czworokąt prowadzi do ciekawego wniosku:

Twierdzenie 5.8. *Proste wyznaczone przez punkty i ich sprzężenia harmoniczne tworzą wszystkie proste na płaszczyźnie rzutowej, z wyjątkiem tych należących do pęków o środkach w punktach przekątniowych i wierzchołkach czworokąta.*

Postać dualna sprzężenia harmonicznego

Zacznijmy od samego twierdzenia

Twierdzenie 5.9. *Dany jest czworobok składający się z prostych AB, BC, CD, DA , przy czym proste AB, CD przecinają się w E , a proste BC, DA w F . Prosta p różna od przekątnych tego czworoboku przecina je, kolejno AC, BD, EF , w punktach X, Y, Z . Niech X' spełnia $(A, C; X, X') = -1$ i analogicznie definiujemy Y', Z' . Wtedy punkty X', Y', Z' są współliniowe.*



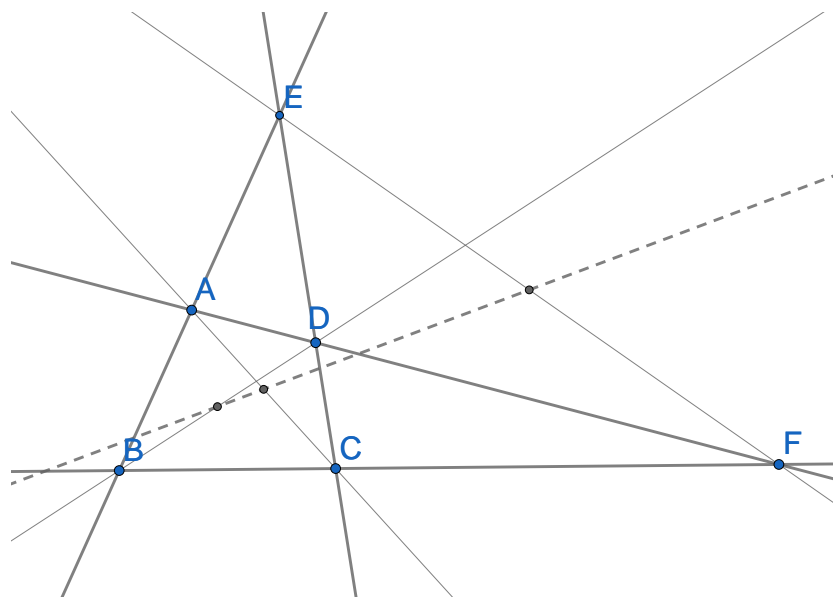
Dowód. Jest to dualny fakt do twierdzenia 5.1. □

Powyższe twierdzenie pozwala zdefiniować:

Definicja 5.2. Prosta z twierdzenia 5.9 nazywamy prostą harmonicznie sprzężoną do p względem czworoboku i oznaczamy \bar{p} .

Jednym z ciekawszych natychmiastowych wniosków jest

Twierdzenie 5.10 (Prosta Gaussa-Newtona). *Środki przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej, zwanej prostą Gaussa-Newtona.*



Dowód. Jest to wniosek z twierdzenia 5.9, gdzie za prostą p przyjmujemy prostą w nieskończoności. \square

Koncept sprzężenia harmonicznego względem czworokąta i czworoboku zupełnego płynnie łączy ze sobą takie fakty jak istnienie prostej Gaussa-Newtona i izogonalnego czy izotomicznego sprzężenia, pokazując jednocześnie, że są to rzeczy wzajemnie sobie równoważne.

Oczywiście harmoniczne sprzężenie prostej będzie miało analogiczne, dualne, własności co sprzężenie harmoniczne punktu.

Twierdzenie 5.11. *Sprzężenie harmoniczne jest dobrze zdefiniowane dla każdej prostej poza przekątnymi czworoboku. Co więcej, operacja przyporządkowująca prostej x prostą \bar{x} jest bijekcją prostych płaszczyzny rzutowej bez pęków w punktach przekątniowych.*

Twierdzenie 5.12. *Jedynymi prostymi stałymi przekształcenia $\bar{(\)}$ są boki czworoboku.*

Twierdzenie 5.13. *Obrazem pęku o środku nienależącym do żadnej z przekątnych jest zbiór stycznych do stożkowej stycznej do przekątnych czworoboku.*

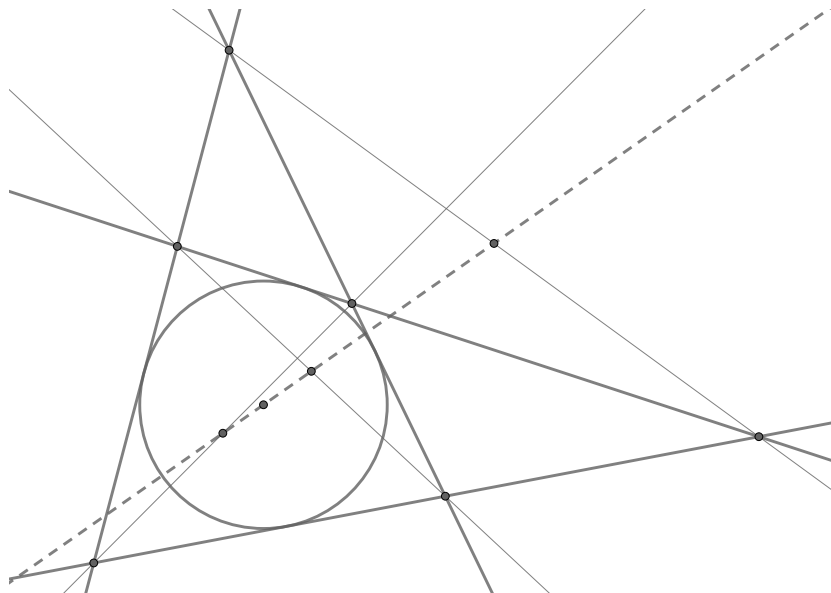
Twierdzenie 5.14. *Prosta i jej harmoniczne sprzężenie są punktami stałymi involucji pęku o środku w punkcie ich przecięcia indukowanej przez czworobok.*

Twierdzenie 5.15. *Punkty wyznaczone przez przecięcia prostych i ich harmonicznych sprzężeń tworzą całą płaszczyznę rzutową z wyjątkiem przekątnych i boków czworoboku.*

5.2 Czworokąt i czworobok zupełny

Impulsem do rozważań przedstawionych w tej części było następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.16. *Gdy w czworobok zupełny można wpisać okrąg, wtedy jego środek leży na prostej Gaussa-Newtona tego czworoboku.*



Autor czuł wewnętrzny sprzeciw wobec dowodów tego twierdzenia jakie poznał. Te najbardziej znane opierają się na liczeniu pól [8]. Jest to o tyle dziwne, że twierdzenie ma dość rzutowy charakter, a przyjęta technika dowodowa jest do niego w pierwszym odczuciu nieprzystająca. W trakcie pisania tego skryptu okazało się, iż metody w nim uzyskane umożliwiają udowodnienie tego twierdzenia w niezależny - i znacznie ogólniejszy - sposób.

Po pierwsze warto zauważyć, że elipsę wpisaną w czworobok możemy przeprowadzić przekształceniem afinicznym na okrąg wpisany w czworobok zachowując zarówno założenia jak i tezę, skąd pojawia się pomysł na uogólnienie:

Twierdzenie 5.17. *Zbiór środków stożkowych stycznych do boków czworoboku tworzy jego prostą Gaussa-Newtona lub jest jednym punktem.*

Co więcej, traktując środek stożkowej jako biegun prostej w nieskończoności możemy za pomocą przekształcenia rzutowego tezę uogólnić jeszcze bardziej:

Twierdzenie 5.18. *Zbiór biegunów ustalonej prostej względem stożkowych stycznych do boków czworoboku tworzy prostą lub jest jednym punktem.*

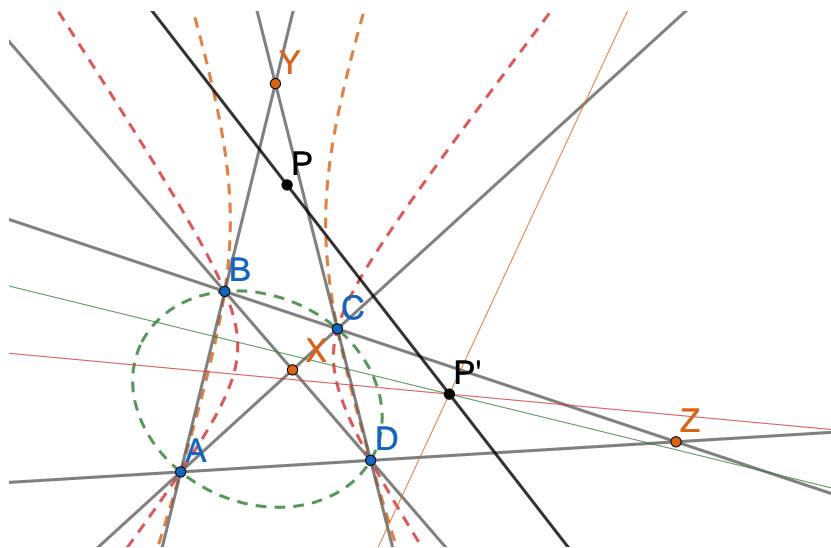
Owo *lub* wynika z możliwości zdegenerowanego przypadku gdy ustalona prosta jest jednocześnie przekątną czworoboku. Wtedy niezależnie od stożkowej w niego wpisanej biegunem będzie naprzeciwległy punkt wierzchołkowy. Dodatkowo odrzucamy także zdegenerowany przypadek kiedy ustalona prosta jest jednocześnie bokiem czworoboku.

W celu dowodu powyższego twierdzenia posłużymy się jego równoważnym, dualnym sformułowaniem:

Twierdzenie 5.19. *Biegunowe ustalonego punktu różnego od wierzchołków czworokąta względem stożkowych na nim opisanych tworzą pęk lub są jedną prostą.*

Dowód. Przypadek gdy punkt z założeń jest punktem wierzchołkowym jest oczywisty. Gdy nim nie jest, udowodnimy, że bieguny ustalonego punktu (nazwijmy go P) tworzą pęk - gdzieżby indziej - w jego sprzężeniu harmonicznym \bar{P} względem czworokąta.

Wyberzmy dowolną stożkową Γ opisaną na czworokącie z tezy. Z inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla prostej $k = P\bar{P}$, tego czworokąta i stożkowej Γ otrzymujemy, że punkty $\Gamma \cap k = \{W_1, W_2\}$ są parami inwolucji indukowanej na prostej k przez czworokąt. Jednakże z twierdzenia 5.6 wiemy, że punkty $P\bar{P}$ są punktami stałymi tej inwolucji, zachodzi takim razie $(W_1, W_2; P, \bar{P}) = -1$, czyli na podstawie własności biegunowych (twierdzenie 1.15) otrzymujemy, że biegunowa punktu P względem Γ przechodzi przez \bar{P} , co ze względu na dowolność Γ kończy tę część dowodu.

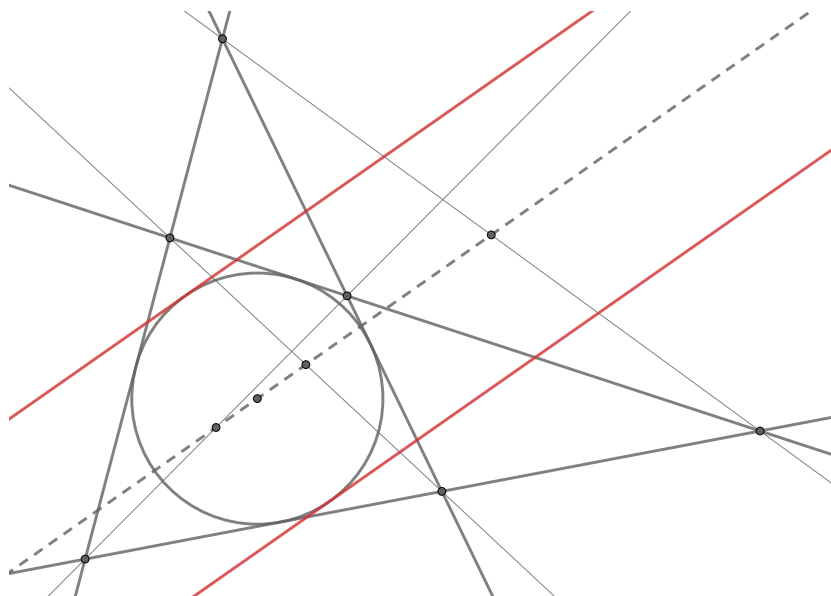


Przeprowadzenie rozumowania w drugą stronę przebiega następująco: wyberzmy dowolną prostą k z pęku w \bar{P} . Niech wierzchołki czworokąta to A, B, C, D . Możemy założyć, że prosta PA nie jest bokiem czworokąta (w przeciwnym wypadku wystarczy wybrać zamiast A inny wierzchołek) istnieje wtedy taki punkt A' na prostej PA spełniający $(A, A'; P, k \cap PA) = -1$. Wtedy k jest biegunową punktu P względem stożkowej opisanej na punktach A, B, C, D, A' , co było do pokazania. \square

Oczywiście wcześniej sformułowane twierdzenia na podstawie wspomnianej równoważności także są prawdziwe. Taki dowód, zarówno ze względu na ogólność tezy, ale także sposób rozumowania wydaje się znacznie bardziej satysfakcjonujący. Ujęcie tego w powyższy sposób nadaje temu twierdzeniu znacznie szerszy kontekst, w dużo większym stopniu wyjaśnia *dłaczego* zachodzi, w odróżnieniu od - zdaniem autora tej pracy nieintuicyjnego - rozwiązania polegającym na przeliczaniu pól, którego nie da się uogólnić wprost do postaci zaprezentowanej w tej części.

Warto zauważyć, że z powyższego faktu można niezależnie sformułować twierdzenie o istnieniu prostej Gaussa-Newtona - wystarczy potraktować przekątne czworoboku jako zdegenerowane elipsy styczne do wszystkich jego boków - ich środki to właśnie środki przekątnych występujące w twierdzeniu.

Dowód twierdzenia 5.16 można na podstawie powyższego przeprowadzić następująco:



Dowód. Oznaczmy przez k prostą Gaussa-Newtona czworoboku, a przez l_∞ prostą w nieskończoności. Dodatkowo niech X będzie punktem w nieskończoności prostej k . Na podstawie dualnego involucyjnego twierdzenia Desargues'a dla czworoboku, okręgu w niego wpisanego i punktu X styczne do okręgu wpisanego równoległe do k są parą involucji, której prostymi stałymi z twierdzenia 5.6 są proste k i l_∞ (z wcześniejszych obserwacji wynika, że są one swoimi harmonicznymi sprzężeniami), więc styczne te są równoodległe od k , w szczególności k przechodzi przez środek okręgu, co było do pokazania. \square

Taki dowód wydaje się mieć znacznie więcej sensu niż te oparte na liczeniu pól.

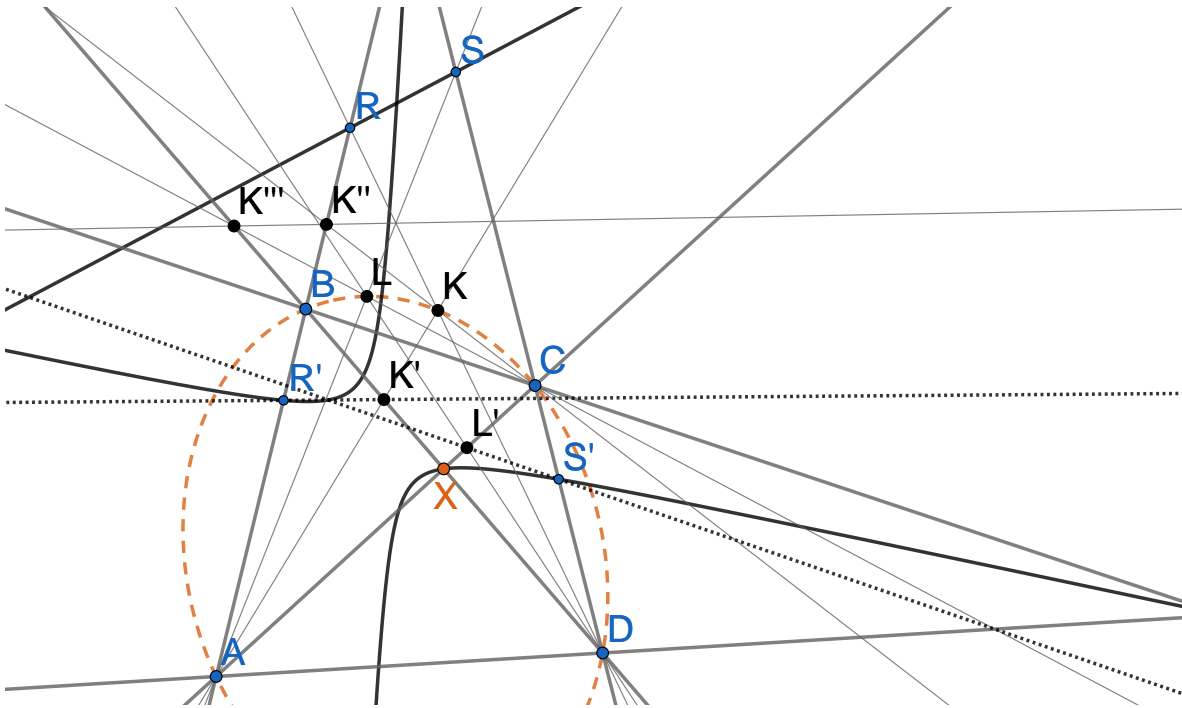
W dalszej części zajmiemy się zagadnieniem analogicznym. Twierdzenie 5.19 mówi nam o tym, co tworzą biegunowe ustalonego punktu względem stożkowych opisanych na danym czworokącie. Następne twierdzenie mówi o tym, co w przypadku gdy ustalonym obiektem jest prosta (warto zwrócić uwagę na fakt, że *nie jest* to zagadnienie dualne).

Twierdzenie 5.20. *Zbiór biegunów ustalonej prostej względem stożkowych opisanych na danym czworokącie tworzy krzywą stożkową lub jest jednym punktem lub jest prostą.*

Dowód. Zauważmy, że w przypadku gdy ustaloną prostą jest jedna z przekątnych czworokąta, to niezależnie od wyboru stożkowej jej biegunem jest przeciwległy do tej prostej punkt przekątniowy. Sytuacja ta odpowiada więc drugiej części twierdzenia.

Udowodnimy, że w przypadku gdy ustaloną jest prosta przechodząca przez punkt przekątniowy czworokąta (różna od przekątnej), to zachodzi trzecia z możliwości. Niech X będzie punktem wierzchołkowym leżącym na tej prostej (oznacmy ją p). Wybierzmy

stożkową Γ opisaną na tym czworokącie i niech P będzie biegunem prostej p . Z prawa wzajemności biegunowych otrzymujemy, że skoro X leży na biegunowej punktu P , to P leży na biegunowej punktu X względem Γ , ale to prosta przechodząca przez dwa pozostałe punkty przekątniowe, a więc niezależna od wyboru Γ . Pokazaliśmy w takim razie, że wszystkie punkty P leżą na jednej prostej. W drugą stronę: wybierzmy dowolny punkt P na przekątnej niezawierającej punktu X . Na początek założmy, że P nie jest punktem przekątniowym. Wtedy istnieje wierzchołek czworokąta A , taki, że prosta PA nie jest jego bokiem. Wybierzmy na prostej PA punkt A' taki, że $(A, A'; P, AP \cap p) = -1$ i niech Γ będzie stożkową przechodzącą przez punkty A, B, C, D, A' . Wtedy z twierdzenia 1.15 biegunowa punktu P przechodzi przez $AP \cap p$, ale jako, że P leży na przekątnej, to przechodzi także przez X , więc p jest biegunową P względem Γ , co kończy dowód tej części. Pozostaje wskazać stożkowe, dla których biegunową p są punkty przekątniowe. Są to przypadki szczególne - stożkową zdegenerowaną dla której biegunową prostej p jest punkt przekątniowy różny od X jest krzywa będąca sumą dwóch boków czworokąta, do których dany punkt przekątniowy należy.



Przejdźmy do głównego przypadku, gdy prosta p jest w położeniu ogólnym. Oznaczmy wierzchołki czworokąta przez A, B, C, D i przyjmijmy $R = AB \cap p$, a R' niech będzie punktem harmonicznie sprzężonym do R względem odcinka AB . Ponadto $S = CD \cap p$ i S' analogicznie do R' , a K jest dowolnym punktem na prostej DR . Rozważmy następujące złożenie map rzutowych:

$$DR(K) \xrightarrow{A} BD(K') \rightarrow R'(R'K')$$

gdzie K' jest przecięciem prostej AK z BD . Prosta $R'K'$ jest biegunową punktu R względem stożkowej Γ opisananej na czworokącie $ABCD$ i przechodzącej przez K (wynika

to z definicji punktu R' w połączeniu z twierdzeniem 1.16 dla czworokąta $ADKB$).

Niech L będzie przecięciem Γ z prostą AS . Udowodnimy, że przekształcenie $DR(K)$ na $AS(L)$ jest rzutowe. Następujące przekształcenia są rzutowe:

$$DR(K) \xrightarrow{C} AB(K'') \xrightarrow{AS \cap DR} BD(K''') \xrightarrow{C} AS(L'')$$

Gdzie K'', K''', L'' są odpowiednio dla tych map zdefiniowane. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala dla sześciokąta $AL''CKDB$ i konstrukcji punktu L'' otrzymujemy, że na sześciokącie tym można opisać krzywą stożkową, w szczególności $L = L''$, czyli istotnie mapa $DR(K) \rightarrow AS(L)$ jest rzutowa. W takim wypadku rzutowe jest także

$$DR(K) \rightarrow AS(L) \xrightarrow{D} AC(L') \rightarrow S'(S'L')$$

Analogicznie jak wcześniej prosta $S'L'$ jest biegunową punktu S względem Γ . Oczywiście z prawa wzajemności biegunowych punkt wspólny prostych $R'K'$ i $S'L'$ jest biegunem prostej p . Skoro przekształcenie $R'(R'K') \rightarrow S'(S'L')$ jest rzutowe, to jeśli udowodnimy, że przekształcenie to nie jest perspektywiczne, to na podstawie twierdzenia Steinera otrzymamy tezę. Jednakże proste $R'K'$ i $S'L'$ są biegunowymi różnych punktów R i S względem jednej stożkowej, więc nie są sobie równe, co kończy dowód. \square

Uwaga. Okazuje się, że stożkowa otrzymana w trzeciej części powyższego dowodu jest jednocześnie obrazem prostej k w sprzężeniu harmonicznym względem tego czworokąta. Rzeczywiście, biegunem prostej k względem stożkowych zdegenerowanych będących sumą dwóch naprzeciwległych boków w czworokącie jest odpowiadający punkt przekątniowy, dodatkowo stożkowa otrzymana w tezie przechodzi przez punkty R' i S' , będące sprzężeniami harmonicznymi punktów R i S względem czworokąta. Pokrywa się więc ona w pięciu punktach ze stożkową otrzymaną w twierdzeniu 5.4, co dowodzi tego faktu.

Jako natychmiastowy wniosek z tego twierdzenia, gdy za ustaloną prostą weźmiemy prostą w nieskończoności, otrzymujemy następujący rezultat (tezę tę można znaleźć także w [9], jednakże znalezione tam dowody są oparte głównie na obliczeniach).

Obserwacja 5.3. Zbiór środków stożkowych opisanych na czworokącie tworzy krzywą stożkową lub jest jednym punktem w przypadku gdy czworokąt ma środek symetrii.

Warto także przyjrzeć się dualnej wersji:

Twierdzenie 5.21. *Dany jest punkt P oraz czworobok. Wtedy biegunowe punktu P względem stożkowych wpisanych w czworobok tworzą zbiór stycznych do stożkowej lub pęk lub są jedną prostą.*

Bibliografia

- [1] *Olimpiada Matematyczna*, <https://om.mimuw.edu.pl/problems/>
- [2] *IMO Shortlist*, <https://www.imo-official.org/>
- [3] *Baltic Way Problems*, <http://www.math.olympiadid.ut.ee/eng/html/?id=bw>
- [4] *EGMO Problems*, <https://www.egmo.org/>
- [5] Dominik Burek, *Dwustosunek i biegunowe*, <https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/dwustosunek.pdf>
- [6] Marcei Stark, *Geometria analityczna, Tom 26*, <http://matwbn-old.icm.edu.pl/kstresc.php?tom=26&wyd=10&jez=pl>
- [7] Wikipedia, *Möbius transformation*, https://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_transformation
- [8] Stanislav Chobanov, Stanislav Dimitrov, Lyuben Lichev, *555 Geometry Problems*
- [9] Maud A. Minthorn, *The Nine Point Conic*