O nierówności jednorodnej z permutacjami i jej Shapiro-podobnym analogu.

Gabriel Kiciński

III Liceum Ogólnokształcące
z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP,
Legionów 27, 81-405 Gdynia

Streszczenie

Udowadniam, że cykliczna nierówność $\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ zachodzi dla określonych k, zależnych od permutacji σ. Udowadniam także, że ta nierówność nie jest prawdziwa dla pewnego Shapiro-podobnego uogólnienia.

1 Wstęp

Pomysł na niniejszą pracę pochodzi z Międzynarodowego Turnieju Młodych Matematyków 2019 (the International Tournament for Young Mathematicians 2019). Należało zbadać dla naturalnych k nierówność cykliczną

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+p-1}} \tag{1}$$

otrzymując tym samym, że cykliczne przesunięcie o 1 jest w pewnym sensie optymalne.

Uzyskałem szerokie uogólnienie w dotyczące dowolnej permutacji indeksów, pokazując, że dla ustalonej permutacji σ, liczby k dla których zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{\sigma(i)}} \tag{2}$$

zależą od stopnia przesunięcia $\{1,\dots,n\}$ przez σ. Jest to opisane w Twierdzeniach 2, 3 i 4. Rozważyłem najpierw przypadek permutacji będącej przesunięciem cyklicznym, aby pokazać rozumowanie w prostszym przypadku i ułatwić lekturę dowodu ogólnego. Rozwiązanie problemu jest pełne, gdyż podałem kontrprzykłady w pozostałych przypadkach, dla nierówności (2).

Ta sama zależność nie zachodzi między k i σ dla Shapiro-podobnych nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{\sigma(i)}+x_{\sigma^2(i)}} \tag{3}$$

co omawiam w Sekcji 4. Wiadomo, że oryginalna nierówność Shapiro (nierówność (3) z $k=1$ i $\sigma=id$) zależy istotnie od n i jest przez to fundamentalnie różna od (2). Okazuje się też, że nierówność (3) nie zdaje się wykazywać zależności pomiędzy σ i k (por. Uwaga 4 pod koniec pracy).

W pracy $n \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą nieujemnych zmiennych $x_1,\dots,x_n$. Każde przesunięcie indeksów jest cykliczne, $x_{i+p} := x_{i+p \pmod n}$.

Niniejsza praca jest polskojęzyczną wersją wspólnego artykułu [1].

2 Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych i przypadek przesunięcia cyklicznego.

Twierdzenie 1 (Rearrangement inequality, [2] Theorem 368.) *Dla m niemalejących ciągów, w każdym po n nieujemnych liczb, $a_{(j,1)} \leqslant a_{(j,2)} \leqslant \ldots \leqslant a_{(j,n)}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{(j,i)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{(j,\sigma_j(i))}$$

dla każdego zbioru $\{\sigma_j\}_1^m$ permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Zdefiniujmy $a_i := \frac{x_i}{x_{i+1}}$ (zauważmy, że $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$), $b_i := a_i^{-1}$. Będę konsekwentnie korzystał z tej notacji.

Rozważmy teraz nierówność (1) z cyklicznym przesunięciem σ o $p \leqslant n$ wyrazów i przyjmijmy, że $k = \frac{u}{v}$ jest wymierna $(u, v \geqslant 0)$, $k \geqslant p - 1$. Przepiszmy:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+p-1}} \iff$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+p-2} a_j \iff$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+p-2} a_j \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{k-p+1}{n}} \iff$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\frac{1}{vn}})^{un} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+p-2} (a_j^{\frac{1}{vn}})^{vn} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{vn}}\right)^{u-vp+v}$$

Ostatania nierówność jest prawdziwa na podstawie Twierdzenia 1 dla un ciągów $(a_1^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{vn}})$: zauważmy, że lewa strona jest niezmienna gdy ciągi posortujemy rosnąco, więc rozpoznajemy lewą stronę nierówności z Twierdzenia 1.

Ponieważ lewa strona w (1) jest ciągła ze względu na k, wnioskujemy:

Twierdzenie 2 *Dla $k \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 0$, nierówność (1) zachodzi dla $k \geqslant p - 1$.* □

Analogicznie, niech $k = -\frac{u}{v}$ będzie wymierna $(u, v \geqslant 0)$, $-k \geqslant n - p + 1$. Przepiszmy:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma_p(i)}} \iff$$
$$\sum_{i=1}^{n} (b_i^{\frac{1}{vn}})^{un} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+n-p} (b_j^{\frac{1}{vn}})^{vn} \left(\prod_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{vn}}\right)^{u-vn+vp-v}$$

i w podobny sposób wnioskujemy.

Twierdzenie 3 *Dla $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$, nierówność (1) zachodzi dla $-k \geqslant n-p+1$.* □

Kontrprzykłady

Przyjmijmy teraz, że dla $k > 0$, $k < p-1$. Pokażemy, że nierówność (1) nie zachodzi w tym przypadku.

Weźmy $\epsilon > 0$ taki, że $p = k + 1 + \epsilon$. Jeśli znajdziemy n-tkę (x_i) takich, że $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} > \sqrt[\epsilon]{n} \geqslant 1$ (mamy wtedy $a_n = \frac{1}{a_1^{n-1}} < a_1$), zachodzą poniższe nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = (n-1)a_1^k + a_n^k < na_1^k = na_1^{p-1-\epsilon}$$

$$\frac{n}{a_1^\epsilon} \cdot a_1^{p-1} < a_1^{p-1} = \prod_{j=1}^{p-1} a_j < \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{i+p-2} a_j$$

Przykładem takich liczb są: $x_n := 2$, $x_{i+1} := x_n \left(\sqrt[\epsilon]{n+1}\right)^{n-i}$. Analogicznie $x_1 := 2$, $x_i := x_1 \left(\sqrt[\epsilon]{n+1}\right)^{i-1}$, dają kontrprzykład dla k spoza zakresu Twierdzenia 3.

3 Dowolna permutacja

Niech α i β będą permutacjami zbioru $\{1,\dots r\}$ dla naturalnego r. Jeśli suma r ułamków $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{x_{\alpha(i)}}{x_{\beta(i)}}$, gdzie wszystkie x_i są parami różne, może być posortowana tak, że mianownik i-tego ułamka jest równy licznikowi $(i+1)$-tego ułamka, powiemy, że ta suma jest *cyklicznie zbudowana.* To oczywiście zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha(\gamma(i+1)) = \beta(\gamma(i))$ dla pewnej permutacji γ (sortowania).

Lemat 1 *Cyklicznie zbudowana (i odpowiednio uporządkowana) suma r ułamków $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{x_{\alpha(r)}}{x_{\beta(r)}}$ zapisana jako suma r iloczynów kolejnych $a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$ w następujący sposób:*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{x_{\alpha(i)}}{x_{\beta(i)}} = \sum_{i=1}^{r} \prod_{j=\alpha(i)}^{\beta_i - 1 + \Delta_r(i)} a_j \qquad \text{gdzie} \qquad \Delta_r(i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha(i) < \beta(i) \\ r & \text{dla } \alpha(i) \geqslant \beta(i) \end{cases}$$

zawiera taką samą liczbę wystąpień każdego spośród wyrazów $a_1, \dots, a_r$.

Dowód Podczas rozpisywania sumy z P, zaczynamy pisząc $a_{\alpha(1)}$ i przechodzimy przez kolejne a_j aż do $a_{\beta(1)-1+\Delta_r(1)}$. Następny składnik zaczynamy od $a_{\alpha(2)} = a_{\beta(1)+\Delta_r(1)}$, ze względu na warunek cyklicznego zbudowania i tak kontynuujemy. Ten warunek pozwala również stwierdzić, że ostatni czynnik ostatniego składnika to $a_{\alpha(1)-1}$, co zapewnia, że wypisaliśmy każde a_j tę samą liczbę razy. $\square$

Lemat 2 *Suma $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ może być przepisana jako suma cyklicznie zbudowanych sum i pewnej liczby całkowitej.*

Dowód Opiszemy algorytm generujący taką prezentację, korzystając z rozkładu permutacji σ na cykle.

1 Gdziekolwiek dla $i \in \{1,\dots,n\}$ mamy $\sigma(i) = i$, $\frac{x_i}{x_{\sigma(i)}} = 1$, sumując po tych i, dostajemy liczbę całkowitą. Odrzućmy takie i.

2 Weźmy najmniejsze jeszcze nie odrzucone i, które leży wtedy w takim razie w nietrywialnym cyklu $\{i, \sigma(i), \ldots, \sigma^r(i)\}$, dla pewnego r. Oczywiście $\sum_{j=1}^{j=r} \frac{x_{\sigma^j(i)}}{x_{\sigma^{j+1}(i)}}$ jest cyklicznie zbudowana. Odrzućmy ten cykl.

3 Powtarzamy krok 2 aż wszystkie i zostaną odrzucone.

Algorytm zakończy się i wyprodukuje zapowiedzianą prezentację. □

Możemy przejść teraz do podania głównego rezultatu pracy.

Twierdzenie 4 *Dla ustalonej σ, nierówność* (2) *jest prawdziwa, gdy zachodzi jeden z warunków:*

1 $k \geqslant 0$, *i* $\begin{cases} k \geqslant \sigma(i) - i & \textit{dla każdego } i \leqslant \sigma(i) \\ k \geqslant n + \sigma(i) - i & \textit{dla każdego } i > \sigma(i) \end{cases}$

2 $k \leqslant 0$, *i* $\begin{cases} -k \geqslant n + i - \sigma(i) & \textit{dla każdego } i < \sigma(i) \\ -k \geqslant i - \sigma(i) & \textit{dla każdego } i \geqslant \sigma(i) \end{cases}$

Co więcej, sformułowany warunek jest konieczny.

Dowód Niech $k = \frac{u}{v}$ będzie wymierną, nieujemną liczbą, spełniającą założenia twierdzenia. Zdefiniujmy $\Delta_n(i) := \begin{cases} 0 & \text{dla } i < \sigma(i) \\ n & \text{dla } i \geqslant \sigma(i) \end{cases}$. Teraz przepiszmy nierówność (2) następująco:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}} \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{\sigma(i)-1+\Delta_n(i)} a_j \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i}^{\sigma(i)-1+\Delta_n(i)} a_j \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{k+i-\sigma(i)-\Delta_n(i)}{n}} \right) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\frac{1}{vn}})^{un} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i}^{\sigma(i)-1+\Delta_n(i)} (a_j^{\frac{1}{vn}})^{vn} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{vn}}\right)^{v(\frac{u}{v}+i-\sigma(i)-\Delta_n(i))} \right)$$

Nierówność ta zachodzi na mocy Twierdzenia 1 dla un ciągów $(a_1^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{vn}})$: zauważmy, że jej lewa strona nie zmienia się gdy powyższy ciąg uporządkujemy rosnąco i ponownie można użyć twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych. Twierdzimy, że prawa strona nierówności również ma formę odpowiednią do zastosowania Twierdzenia 1. Zauważmy, że dzięki Lematowi 2 spełnia warunki Lematu 1, więc zawiera taką samą liczbę wystąpień każdego spośród $a_i^{\frac{1}{vn}}$.

Wykorzystamy twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw (por. [3], moduł Matematyka Dyskretna 2, Wykład 1, Twierdzenie 1.3). Pomiędzy zbiorami wierzchołków: $\{1, \ldots, n\}$ oznaczającym liczbę elementów w sumie powyżej, i $\{a_1^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{vn}}\}$ będącym zbiorem wyrazów występujących w iloczynach pod sumą rysujemy krawędź pomiędzy i oraz $a_j^{\frac{1}{vn}}$ jeżeli $a_j^{\frac{1}{vn}}$ pojawia się w i-tym składniku sumy. W każdym składniku sumy jest dokładnie un czynników, a ponieważ na mocy poprzedniego Lematu 1 każdy wyraz $a_j^{\frac{1}{vn}}$ wystąpi wśród czynników pod sumą tyle samo razy, musi to również być un wystąpień. Zatem w otrzymanym grafie dwudzielnym spełniony jest warunek z twierdzenia Halla i istnieje skojarzenie $(a_{\sigma_1(1)}^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_{\sigma_1(n)}^{\frac{1}{vn}})$. Po wykreśleniu tych elementów po prawej stronie nierówności możemy powtarzać tę procedurę (ponieważ un jest naturalną wielokrotnością n), otrzymując $(a_{\sigma_2(1)}^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_{\sigma_2(n)}^{\frac{1}{vn}})$ i kolejne skojarzenia aż do $(a_{\sigma_{un}(1)}^{\frac{1}{vn}}, \ldots, a_{\sigma_{un}(n)}^{\frac{1}{vn}})$ i wyczerpania wyrazów po prawej stronie, otrzymując tym samym prezentację prawej strony w postaci pasującej do Twierdzenia 1. □

Kontrprzykłady

Załóżmy, że dla $k \geqslant 0$ istnieje $t \in \{1, 2, .., n\}$, dla którego $\Delta_n(t) + \sigma(t) - t > k$ Załóżmy, że dla $k > 0$, $k < p - 1$. Udowodnię, że nierówność (2) w tym przypadku nie zachodzi. Ustalmy taki $\epsilon > 0$, że $\Delta_n(t) + \sigma(t) - t = k + \epsilon$. Jeśli znajdziemy n liczb (x_i) takich, że $a_i = a_j > \sqrt[\epsilon]{n} \geqslant 1$ dla $i, j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{t - 1\}$ (zauważmy, że wówczas mamy $a_{t-1} = \frac{1}{a_t^{n-1}} lt; a_t.$), zachodzą następujące nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = (n-1)a_t^k + a_{t-1}^k < na_t^k = na_t^{\sigma(t)-t-\epsilon+\Delta_n(t)}$$
$$\frac{n}{a_t^\epsilon} \cdot a_t^{\sigma(t)-t+\Delta_n(t)} < a_t^{\sigma(t)-t+\Delta_n(t)} =$$
$$= \prod_{j=t}^{\sigma(t)-i+\Delta_n(t)} a_j < \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{\sigma(i)-i+\Delta_n(t)} a_j$$

Przykładem takich n liczb jest $x_{t-1} := 2$, $x_{t-1-i} := x_{t-1}\left(\sqrt[\epsilon]{n+1}\right)^i$. Podobnie, n liczb $x_1 := 2$, $x_{t+1+i} := x_{t+1}\left(\sqrt[\epsilon]{n+1}\right)^i$, stanowi kontrprzykład dla k poza zakresem Twierdzenia 3.

4 Nierówność Shapiro z wykładnikami i permutacjami

W tej części krótko omawiamy nierówność Shapiro (oraz nierówność Nesbitta), nie tylko dlatego, że zostało to zaproponowane uczestnikom konkursu wspomnianego we wstępie. Twierdzenie 4 może sugerować, że odpowiednio podobne nierówności powinny zachowywać się podobnie: nierówność (2) może zostać odczytana w ten sposób, że tłumienie przez wykłądniki po lewej stronie nierówności wpłynie na nieznaczną permutację prawej strony nierówności. Uzasadnione jest oczekiwanie, że efekt ten przeniesie się w pewnym stopniu na nierówności typu Shapiro.

$$\sum_{1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}}\right)^k \geqslant \sum_{1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)} + x_{\sigma^2(i)}} \tag{3}$$

(choćby dlatego, że użyte funkcje wymierne są tego samego stopnia). Pokażemy kiedy (3) zachodzi i zobaczymy, jak w jej przypadku nie ma współzależności między k i σ.

Przykład 1 Dla $n = 2$ prawa strona (3) jest równa 1 dla każdej z dwóch możliwych permutacji. Z lewej strony widzimy funkcję z parametrem na przedziale $[0, 1]$,

$t^k + (1-t)^k$, która osiąga minimum mniejsze od 1 dla $k > 1$, a dla $k \leqslant 1$ jest zawsze większa bądź równa 1.

Przykład 2 Dla $n = 3$ po prawej stronie mamy bgez straty ogólności dwie opcje:

1 jeśli σ jest 3-cyklem, to
- dla $k = 1$ zachodzi równość;
- dla $k > 1$ kontrprzykładem jest $x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
- dla jakiegokolwiek $k < 1$, dla odpowiednio dużego $x_1 >> 1$, i $x_2 = x_3 = 1$ mamy $\left(\frac{x_1}{2}\right)^k < \frac{x_1}{2} - 3$, czyli kontrprzykład;

2 jeśli σ jest 2-cyklem albo identycznością, wtedy prawa strona jest równa $\frac{3}{2}$, i
- dla $k = 1$ mamy nierówność Shapiro, która zachodzi dla n=3;
- dla $k > 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ jest kontrprzykładem;
- dla $k < 1$ nierówność zachodzi na mocy poniższej propozycji.

Propozycja 1 *Dla $x, y \in (0, 1]$ nierówność*

$$\left(\frac{1}{x+y}\right)^k + \left(\frac{x}{y+1}\right)^k + \left(\frac{y}{x+1}\right)^k \geqslant \frac{3}{2} \tag{4}$$

zachodzi dla każdego $k < 1$.

Zauważmy, że jedna ze zmiennych zmienna może być równa zero, aby lewa strona była oznaczona. W takim przypadku nierówność także zachodzi (bo $x^k + x^{-k} \geqslant 2$). Ta propozycja wystarczy, by zakończyć rozważania z poprzedniego przykładu, bo lewa strona (3) jest jednorodna i możemy znormalizować względem największego wyrazu spośród (x_1, x_2, x_3).

Dowód Dowód opiera się na nieco żmudnych obliczeniach, nie byliśmy w stanie znaleźć innego dowodu, ani znaczącego uproszczenia.

Rozważmy funkcję $F(x, y) := \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$ w kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Zauważmy, że F jest ograniczona z góry przez 1 na brzegu kwadratu i oczywiście większa od 1 na całej jego powierzchni. Ustalmy $k < 1$.

Jeśli $x + y \geqslant 1$ wszystkie wyrazy lewej strony (4) są mniejsze bądź równe 1 i $\left(\frac{1}{x+y}\right)^k + \left(\frac{x}{y+1}\right)^k + \left(\frac{y}{x+1}\right)^k \geqslant \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geqslant \frac{3}{2}$ na mocy nierówności Shapiro dla n=3. Zauważmy, że oba składniki w F są zawsze mniejsze niż 1.

Załóżmy nie wprost, że (x, y) jest kontrprzykładem dla (4), gdy $x + y < 1$. F jest symetryczna i gładka, oraz ściśle rosnąca wzdłuż linii $(x, x + c)$ – pochodna funkcji obciętej do tych prostych wynosi

$$\frac{-c^3 + (-2x-1)c^2 + (2x+2)c + 2(x+1)^2}{(x+c+1)^2(x+1)^2}$$

Jej licznik upraszcza się do $(x + c + 1)(2(x + 1) - c^2) - c^2 x$, co jest większe od 0, bo zarówno $|c|$ jak i x są mniejsze niż 1. Co więcej, ponieważ wzdłuż prostych $(x, c - x)$ funkcja F jest wypukła i osiąga swoje jedyne minimum w $x = \frac{c}{2}$ (tutaj pochodna wynosi

$$\frac{-(c+2)(c+1)(c-2x)}{(c-x+1)^2(x+1)^2}$$

i zmienia znak tam, gdzie wskazano), wnioskujemy jak następuje:

- na mocy twierdzenia o funkcjach uwikłanych (por. [3], moduł Analiza Matematyczna 2, Wykład 9, Twierdzenie 9.11) poziomice $F(x,y)$ w kwadracie to gładkie krzywe, symetryczne względem osi (x,x) i przecinające się w jednym punkcie (bo $F(x,x)$ osiąga każdą wartość F i jest ściśle rosnąca);
- ponieważ $f(t) = t^k + (d-t)^k$ osiąga swoje minimum w $t = \frac{d}{2}$ zatem, minimum $\left(\frac{x}{y+1}\right)^k + \left(\frac{y}{x+1}\right)^k$ na każdej poziomicy F jest osiągane na jej środku, na osi (x,x);
- co więcej, ze względu na wypukłość F wzdłuż odcinków $(x, c-x)$, poziomice przecinają te proste w co najwyżej dwóch punktach.

Powyższe pociąga za sobą, że najmniejsza wartość $\left(\frac{1}{x+y}\right)^k + \left(\frac{x}{y+1}\right)^k + \left(\frac{y}{x+1}\right)^k$ na każdej poziomicy F jest osiągana na jej środku, na osi (x,x), bo tam właśnie zarówno suma ostatnich dwóch składników osiąga minimum, jak również pierwszy składnik (stały wzdłuż prostych $x+y=c$) jest najmniejszy dla największego możliwego c, a największy parametr c spośród prostych $x+y=c$ przecinających ustaloną poziomicę F wypada dokładnie dla tej prostej, która przecina poziomicę w jedynym punkcie (x,x) (co wynika ze wszystkich trzech kropek powyżej naraz). Stąd najmniejsze możlwie wartości lewej strony (3) są osiągane gdy $x = y$, wystarczy nam rozpatrzeć funkcję $G(x) := \left(\frac{1}{2x}\right)^k + 2\left(\frac{x}{x+1}\right)^k$ dla ustalonego $k < 1$.

W tym celu zbadamy funkcję $g(x,y) = \left(\frac{1}{2x}\right)^y + 2\left(\frac{x}{x+1}\right)^y$ i pokażemy, że nie ma lokalnych minimów we wnętrzu $(0,1)\times(0,1)$ i że pozostaje powyżej $\frac{3}{2}$ na brzegu, więc i na całym kwadracie. Na brzegu $\{(x,y)|x \in \{0,1\} \vee y \in \{0,1\}\}$, mamy

- dla $y = 0$, $g \equiv 3$, wyłączając $x = 0$;
- dla $y = 1$, mamy ściśle malejącą funkcję, która kończy się w $x = 1$ wartością $\frac{3}{2}$;
- dla $x = 1$, sumę ściśle malejących funkcji, osiągających $\frac{3}{2}$ w $y = 1$;
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)$ dla każdego $y \neq 0$ jest równy nieskończoność.

Pochodne cząstkowe we wnętrzu wynoszą

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\left(-2\left(\frac{x}{x+1}\right)^y + \left(\frac{1}{2x}\right)^y (x+1)\right) y}{x(x+1)} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \left(\dfrac{1}{2x}\right)^y \ln\left(\dfrac{1}{2x}\right) + 2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \end{cases}$$

zakładając, że w którymś miejscu wynoszą one obie zero, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = 2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y - \left(\dfrac{1}{2x}\right)^y (x+1) \\ 0 = -\left(\dfrac{1}{2x}\right)^y \ln^2(x) + 2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y (\ln(x) - \ln(x+1)) \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $\ln^2(x) - (x+1)\ln(x) + (x+1)\ln(x+1) = 0$, rozwiązując równanie kwadratowe (tam, gdzie możliwe) otrzymujemy

$$\ln(x) = \frac{x+1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 4(x+1)\ln(x+1)}}{2}$$

gdzie ponieważ $x < 1$, $\ln(x)$ powinien być ujemny, ale prawa strona jest dodatnia (bo wyznacznik jest mniejszy od 1, co można łatwo policzyć), sprzeczność. Stąd $g(x, y)$ jest ograniczona z dołu przez $\frac{3}{2}$, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 1 Funkcja $g(1 - x, 1 - y)$ zdaje się być rosnąca wzdłuż prostych przechodzących przez 0, co byłoby wystarczające dla dowodu, jednak nie umiemy tego policzyć.

Uwaga 2 Podczas gdy oczywiście dowód Propozycji 1 nie może być przeniesiony na wyższe wymiary ze względu na geometryczną naturę dowodu (tzn., poziomice, będące krzywymi), zauważmy, że nie będzie ona pomocny w wyższych wymiarach – chociaż możemy znormalizować (3) względem najwyższego wyrazu, wzajemne wielkości pozostałych wyrazów będą znacząco bardziej skomplikowane i w szczególności bez symetrii, którą mieliśmy w wymiarze trzy.

Uwaga 3 (Nierówność Nesbitta z wykładnikami.) Nierówność Shapiro dla n=3, jak w Przykładzie 2 jest nazywana nierównością Nesbitta. Jej wariacja "z wagami w wykładnikach" została udowodniona w [5] (oraz [4]), mianowicie Twierdzenie 3 tamże stwierdza, że dla dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ i $k \geqslant 1$ zachodzi:

$$\left(\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k} \tag{5}$$

Można chcieć rozszerzyć to twierdzenie do $k \leqslant 1$ chociaż dla $n = 3$, korzystając z Propozycji 1 (bo minima lewej strony są osiągane na brzegu $x_1 = \ldots = x_n = 1$ gdzie (5) zachodzi). Jednakże, istnieje kontrprzykład dla $x = 1$, $y = 0.1$, $z = 0.1$, $k = 0.1$ mamy odwrotną nierówność

$$\left(\frac{x}{y+z}\right)^k + \left(\frac{y}{x+z}\right)^k + \left(\frac{z}{x+y}\right)^k < \frac{3}{2^k}$$

Przykład 3 W końcu, dla $n \geqslant 4$ jeśli prawa strona (3) nie jest równa $\frac{n}{2}$ (to znaczy jeśli σ nie jest złożeniem rozłącznych transpozycji), to

- dla $k = 1$ i $\sigma(i) = i + 1$, mamy równość;
- dla $k = 1$ i σ zawierającej jakikolwiek inny cykl, znajdziemy takie i, że $\sigma(i)$ i $\sigma^2(i)$ nie są kolejnymi liczbami mod n (i wszystkie 3 są parami różne), i uzyskamy kotrprzykład: $x_{\sigma(i)} = x_{\sigma^2(i)} = \epsilon << 1$ i kładąc wszystkie inne $x_j = 1$. Wszystkie składniki leewej strony są ograniczone przez 1 podczas gdy mamy nieograniczony wyraz $\frac{1}{2\epsilon}$ po prawej stronie;
- dla $k > 1$ mamy kontrprzykład $x_1 = \ldots = x_n = 1$;
- dla $k < 1$ biorąc takie i że $\sigma(i) \neq \sigma^2(i)$ i kładąc $x_i >> 1$ podczas gdy wszystkie inne $x_j = 1$ znowu mamy kontrprzykład jak w podpunkcie 3 przypadku 1 Przykładu 2.

Uwaga 4 Oczywiście, zachowanie (3) gdy prawa strona jest równa $\frac{n}{2}$ zależy od wymiaru. Dla $k > 1$ istnieje zawsze kontrprzykład ($x_1 = \ldots = x_n = 1$), ale dla n, dla których nierówność Shapiro nie zachodzi, nie zachodzi także (3) dla $k < 1$, odpowiednio bliskiego 1. Można się spodziewać w tym przypadku pewnych rezultatów dla $k < 1$ w zależności od stałej Drinfeld'a, jednak to wygląda na trudny problem. Podobnie, jeśli chodzi o rozwiązanie (3) dla każdego $k < 1$ dla n, dla których nierówność Shapiro zachodzi.

Podziękowanie

Chciałbym bardzo podziękować dr Andrzejowi Czarneckiemu za opiekę merytoryczną nad pracą.

Literatura

1. A. Czarnecki, G. Kiciński, *On a cyclic inequality with exponents and permutations, and its Shapiro-type analogue*, arXiv:2004.08882 [math.CO]
2. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (1952).
3. materiały dydaktyczne projektu *Opracowanie programów nauczania na odległość na kierunku studiów wyższych – Informatyka.*, http://wazniak.mimuw.edu.pl/
4. Q. Wang, *Some Nesbitt type inequalities with application for the zeta functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 7, 523-527, (2013).
5. F. Wei, S. Wu, *Generalizations and analogues of the Nesbitt's inequality*, Octogon Mathematical Magazine, 17, 215-220, (2009).