O ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z zadania 12. LXX Olimpiady Matematycznej

Podziękowania

Tekst ten jest owocem mojej pracy pod kierunkiem p. prof. Wojciecha Banaszczyka, którego zaangażowanie, cenne wskazówki i krytyczne uwagi umożliwiły mi przygotowanie tej pracy w niewielkim czasie i za które bardzo serdecznie dziękuję.

Pragnę również w tym miejscu podziękować innym osobom, które wspierały mnie w mojej edukacji matematycznej – mojej rodzinie i przyjaciołom, moim nauczycielom, wśród których pragnę wymienić p. Hannę Jakubowską, p. Ewę Jarocką oraz p. Barbarę Kacperczyk, a także pracownikom akademickim, wśród których pragnę wymienić p. dr Emilię Fraszkę-Sobczyk, p. dr. Pawła Józiaka, p. dr. hab. Andrzeja Komisarskiego oraz p. dr. Marcina Kotowskiego.

Piotr Juszczyk

Wprowadzenie

W 2018 roku, w III serii zawodów pierwszego stopnia LXX OM, pojawiło się następujące zadanie[1]:

> **12**. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość
> $$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant k.$$
> Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że
> $$N^k \leqslant a_N \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^N.$$

Dla $k = 1$ ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest określony następująco:

(**D1**) Niech będzie dany ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dodatnich liczb rzeczywistych, którego wyrazy spełniają równanie rekurencyjne

(0)
$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$

W pracy przyjmuję oznaczenia:

$\log x$ – logarytm x o podstawie e

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$

Sformułujemy teraz lemat, który znacznie uprości rozumowanie w dalszej części pracy:

Lemat 1. Niech będą dane dwa ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniające warunki określone w (**D1**). Wówczas

$$a'_n = C a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Dowód. Połóżmy

$$C = \frac{a'_1}{a_1}.$$

[1] https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om70_1.pdf

a_1 i a_1' są liczbami dodatnimi. Zachodzi zatem nierówność

$$\frac{a_1'}{a_1} > 0,$$

skąd otrzymujemy, że $C > 0$.

Dla $n = 1$ spełniona jest równość

$$a_1' = Ca_1.$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi związek

$$a_k' = Ca_k$$

dla każdego $1 \leq k \leq n$.

Zachodzą wtedy następujące równości

$$a_{n+1}' = a_n' + \frac{a_1' + \cdots + a_n'}{n} = Ca_n + \frac{Ca_1 + \cdots + Ca_n}{n} = C\left(a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) = Ca_{n+1}.$$

■

Możemy zatem, bez straty ogólności, przyjąć w dalszej części pracy $a_1 = 1$.

Celem tej pracy jest udowodnienie następujących twierdzeń dotyczących ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

Twierdzenie 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi podwójna nierówność

$$e^{-2}n^{-1/2}e^{2\sqrt{n}} < a_{n+1} < e^{-3/4}n^{-1/4}e^{2\sqrt{n}}.$$

Twierdzenie 2. Szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny dla $x \in (-1; 1)$ i jego suma wyraża się wzorem

$$F(x) = \frac{x}{1-x} e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Twierdzenie 3. Wyraz ogólny ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest postaci

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oszacowania wyrazów a_n

Lemat 2.

$a)$ Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnący.

$b)$ Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest określony wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - \dfrac{n}{n+1}a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ a_1 = 1, \qquad a_2 = 2. \end{cases}$$

Dowód. $a)$ Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > a_n.$$

$b)$ Dla $n = 2$ dostajemy równości

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Wykorzystując równość (0) dla a_n oraz a_{n+1} i przekształcając równania, otrzymujemy równości

$$\begin{cases} na_{n+1} = na_n + a_1 + \cdots + a_n \\ (n+1)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} na_{n+1} - na_n = a_1 + \cdots + a_n \\ (n+1)a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n. \end{cases}$$

Po porównaniu stron w obu równaniach i przeniesieniu na drugą stronę $(n+2)a_{n+1}$, dostajemy równanie

$$(n+1)a_{n+2} = (2n+2)a_{n+1} - na_n.$$

Po podzieleniu obu stron przez $n + 1$ otrzymujemy równość

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - \frac{n}{n+1}a_n. \blacksquare$$

Przyjrzyjmy się kilku pierwszym wyrazom ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

$a_1 = 1,$

$a_2 = 2,$

$a_3 = 3\frac{1}{2},$

$a_4 = 5\frac{2}{3},$

$a_5 = 8\frac{17}{24},$

$a_6 = 12\frac{53}{60},$

$a_7 = 18\frac{367}{720},$

$a_8 = 25\frac{2\,461}{2\,520},$

$a_9 = 35\frac{30\,529}{40\,320},$

$a_{10} = 48\frac{10\,991}{25\,920}.$

Określmy teraz pomocnicze ciągi $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(c_n)_{n=1}^{\infty}$

$$(\mathbf{D2}) \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(\mathbf{D3}) \qquad c_n = b_n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$b_n > 1,$$

$$c_n > 0.$$

Dowód. Z lematu $2a)$ wiemy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnącym ciągiem liczb dodatnich.
Dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest zatem nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

z której bezpośrednio wynika, że $b_n > 1$ i $c_n > 0$. ■

Lemat 4. Wzory na n-te wyrazy ciągów $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ w postaci rekurencyjnej są następujące:

$$a) \quad \begin{cases} b_{n+1} = 2 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{b_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \\ \qquad b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1} = 2, \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} c_{n+1} = 1 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{1 + c_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \qquad c_1 = b_1 - 1 = 1. \end{cases}$$

Dowód. $a), b)$ Z lematu $2b)$ wiemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu spełniają równanie

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - \frac{n}{n+1} a_n.$$

Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczb dodatnich. Po podzieleniu obu stron przez a_{n+1} otrzymujemy równanie

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Wykorzystując teraz definicje $(\mathbf{D2})$ i $(\mathbf{D3})$, otrzymujemy równania

$$b_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b_n},$$

$$c_{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + c_n}. \ ■$$

Przyjrzyjmy się kilku początkowym wyrazom ciągów $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(c_n)_{n=1}^{\infty}$:

$b_1 = 2,$ $c_1 = 1,$

$b_2 = \frac{7}{4} = 1{,}75,$ $c_2 = \frac{3}{4} = 0{,}75,$

$b_3 = \frac{34}{21} = 1,(619047),$ $c_3 = \frac{13}{21} = 0,(619047),$

$b_4 = \frac{209}{136} \approx 1{,}5367647,$ $c_4 = \frac{73}{136} \approx 0{,}5367647,$

$b_5 = \frac{1\,546}{1\,045} \approx 1{,}4794258,$ $c_5 = \frac{501}{1\,045} \approx 0{,}4794258,$

$b_6 = \frac{13\,327}{9\,276} \approx 1{,}4367184,$ $c_6 = \frac{4\,051}{9\,276} \approx 0{,}4367184,$

$b_7 = \frac{130\,922}{93\,289} \approx 1{,}4034203,$ $c_7 = \frac{37\,633}{93\,289} \approx 0{,}4034203,$

$b_8 = \frac{1\,441\,729}{1\,047\,376} \approx 1{,}3765152,$ $c_8 = \frac{394\,353}{1\,047\,376} \approx 0{,}3765152,$

$b_9 = \frac{17\,572\,114}{12\,975\,561} \approx 1{,}3542470,$ $c_9 = \frac{4\,596\,553}{12\,975\,561} \approx 0{,}3542470,$

$b_{10} = \frac{234\,662\,231}{175\,721\,140} \approx 1{,}3354240;$ $c_{10} = \frac{58\,941\,091}{175\,721\,140} \approx 0{,}3354240.$

Lemat 5. Ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy zasadę indukcji zupełnej. Analizując wartości kilku pierwszych wyrazów ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ widzimy, że zachodzi nierówność

$$b_1 - b_2 < 0.$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$b_n - b_{n+1} < 0.$$

Stosując lemat $4a$), po prostych przekształceniach, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_{n+1} &= 2 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} - \left(2 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} = \\ &= \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n b_{n+1}} - \left(\frac{(n+2)b_{n+1} - (n+1)b_n}{(n+1)(n+2)b_n b_{n+1}}\right) = \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n b_{n+1}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)b_n}. \end{aligned}$$

Dostaliśmy zatem równość

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)b_n b_{n+1}}(b_{n+1} - b_n) - \frac{1}{(n+1)(n+2)b_n}. \tag{1}$$

Wykorzystując założenie, że $b_{n+1} - b_n < 0$ oraz lemat 3, otrzymujemy, że prawdziwa jest nierówność

$$b_{n+2} - b_{n+1} < 0.$$

Ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zatem ściśle malejący. ■

Lemat 6. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$c_{n+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{2}$$

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Wykorzystując lemat 5, otrzymujemy

$$\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} > \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}}.$$

Po prostych przekształceniach dostajemy

$$\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_n} > \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_{n+1}},$$

$$-\left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n b_{n+1}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_n}\right) > \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_{n+1}}.$$

Porównując otrzymaną nierówność z (1), po prostych przekształceniach, dostajemy nierówność

$$b_{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} < b_{n+1}.$$

Wykorzystując punkt $a)$ lematu 4 i wykonując następujące przekształcenia

$$b_{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} =$$
$$= 2 - \frac{1}{b_{n+1}}\left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)(n+2)}\right) = 2 - \frac{1}{b_{n+1}} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 2 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b_{n+1}},$$

otrzymujemy nierówność

$$b_{n+1} > 2 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b_{n+1}}.$$

Mnożąc obie strony przez b_{n+1}, a następnie dodając do obu stron nierówności $-2b_{n+1}+1$, dostajemy nierówność

$$(b_{n+1}-1)^2 > \frac{1}{n+1}.$$

Użycie lematu 3 prowadzi do nierówności

$$b_{n+1}-1 > \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Wykorzystanie określenia ciągu $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ kończy dowód nierówności (2). ■

<u>Lemat 7.</u> Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

(3) $$c_n < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n}.$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy zasadę indukcji zupełnej.

Dla $n = 1$ nierówność (3) jest prawdziwa, bowiem

$$c_1 = 1 < 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{4}.$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność (3).

Dodając w nierówności (3) do obu stron 1 i biorąc odwrotności stron otrzymanej nierówności, dostajemy zależność

$$\frac{1}{1+c_n} > \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{4n}} = \frac{n}{\frac{1}{4}+\sqrt{n}+n}.$$

Mnożąc powstałą nierówność przez $\frac{n}{n+1}$, a następnie zmieniając znak w uzyskanej nierówności, otrzymujemy związek

$$-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{1+c_n} < -\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{\frac{1}{4}+\sqrt{n}+n}.$$

Po dodaniu do obu stron 1 i wykorzystaniu lematu $4b$), dostajemy nierówność

$$c_{n+1} = 1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{1+c_n} < 1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{\frac{1}{4}+\sqrt{n}+n}.$$

Odejmując od obu stron nierówności $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, dochodzimy do nierówności

(4) $$c_{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{\frac{1}{4}+\sqrt{n}+n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ponadto, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, spełnione są zależności

$$\sqrt{n+1} < \frac{1}{2} + \sqrt{n}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n > \frac{3}{16}\sqrt{n} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\sqrt{n} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\sqrt{n}. \tag{6}$$

Grupując wyrazy po prawej stronie w nierówności (6) i wykorzystując nierówność (5), dostajemy zależność

$$\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n > \sqrt{n}\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right) + \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right) > \sqrt{n}\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right) + \sqrt{n+1}\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right).$$

Prawdziwa jest zatem nierówność

$$\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n > \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right).$$

Dzieląc obie strony przez $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ i przenosząc wszystko na lewą stronę powstałej nierówności, otrzymujemy związek

$$\left(\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - \frac{3}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{n} > 0.$$

Rozpisując iloczyn po lewej stronie, dostajemy nierówność

$$\frac{1}{4}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n+1} + n\sqrt{n+1} - \frac{1}{4}\sqrt{n} - n - n\sqrt{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n} > 0.$$

Po zredukowaniu niektórych wyrazów otrzymujemy zależność

$$\frac{1}{4}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n+1} + n\sqrt{n+1} + \frac{1}{4}\sqrt{n} - n - n\sqrt{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \sqrt{n} > 0.$$

Po przeniesieniu na prawą stronę uzyskanej nierówności wyrażenia $n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} + n\sqrt{n}$ oraz dodania do obu stron $\frac{1}{4}n$, dostajemy nierówność

$$\frac{1}{4}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n+1} + n\sqrt{n+1} + \frac{1}{4}\sqrt{n} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}n > n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} + n\sqrt{n} + \frac{1}{4}n.$$

Po pogrupowaniu wyrazów po lewej stronie, sprowadza się ona do nierówności

$$\left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n\right) > n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} + n\sqrt{n} + \frac{1}{4}n.$$

Po podzieleniu obu stron otrzymanej nierówności przez $\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n$ otrzymujemy zależność

$$\sqrt{n+1} + \frac{1}{4} > \frac{n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} + n\sqrt{n} + \frac{1}{4}n}{\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n},$$

która, po prostych przekształceniach, sprowadza się do związku

$$\sqrt{n+1} + \frac{1}{4} > 1 + n\left(1 - \frac{n}{\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n}\right).$$

Dalsze przekształcenia prowadzą do zależności

$$\frac{1}{4} > (n+1)\left(1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dzieląc obie strony przez $n+1$, otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{4(n+1)} > 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Porównanie powyższej nierówności i (4) prowadzi do podwójnej nierówności

$$c_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{\frac{1}{4} + \sqrt{n} + n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{4(n+1)}. \quad \blacksquare$$

Lemat 8. Granica ciągu $c_n\sqrt{n}$ jest równa 1.

Dowód. Z lematu 7 wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$c_n < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n}.$$

Z lematu 6 otrzymujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$c_n > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dla $n = 1$ zachodzi równość

$$c_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}.$$

Łącząc te fakty dostajemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi podwójna nierówność

(7)
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq c_n < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n}.$$

Mnożąc powstałą podwójną nierówność przez $\sqrt{n}$, otrzymujemy

$$1 \leq c_n\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

Stosując twierdzenie o trzech ciągach, dostajemy, że ciąg $c_n\sqrt{n}$ jest zbieżny do 1. ■

Lemat 9. Dla każdego $x > 0$ zachodzą nierówności

$a)$ $$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x),$$

$b)$ $$\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) < x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}.$$

Lemat 10. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$a)$ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1,$$

$b)$ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n} - \frac{3}{2},$$

$c)$ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n,$$

$d)$ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \log n,$$

$e)$ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3.$$

Dowód lematów 9 i 10 został zamieszczony na str. 24 – 28.

Dowód twierdzenia 1. Z punktów $(\mathbf{D2})$ i $(\mathbf{D3})$ wynika tożsamość

$$a_{n+1} = (1 + c_1) \cdot \ldots \cdot (1 + c_n).$$

Biorąc teraz logarytm naturalny wyrażeń po obu stronach równania, wykorzystując podstawową własność logarytmu, dostajemy

$$\log a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + c_k).$$

Korzystając z nierówności (7), otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi podwójna nierówność

(8) $$1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + c_k < 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{4k}.$$

Wykorzystując monotoniczność logarytmu naturalnego dostajemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzą zależności

$$\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \log(1 + c_k) < \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{4k}\right).$$

Korzystając z lematu 9, uzyskujemy nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}<\log(1+c_k)<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{12k\sqrt{k}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}<\sum_{k=1}^{n}\log(1+c_k)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{12k\sqrt{k}}.$$

Wynika stąd, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ prawdziwa jest podwójna nierówność

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{n}\log(1+c_k)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

Wykorzystując teraz nierówności z lematu 10, dostajemy, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi związek

$$2\sqrt{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(1+\log n)<\sum_{k=1}^{n}\log(1+c_k)<2\sqrt{n}-1-\frac{1}{4}\log n+\frac{1}{4},$$

co prowadzi do nierówności

$$2\sqrt{n}-2-\frac{1}{2}\log n<\sum_{k=1}^{n}\log(1+c_k)<2\sqrt{n}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log n.$$

Przykładając teraz funkcję e^x do tak otrzymanej podwójnej nierówności, otrzymujemy nierówność

$$e^{-2}n^{-1/2}e^{2\sqrt{n}}<a_{n+1}<e^{-3/4}n^{-1/4}e^{2\sqrt{n}}.\ \blacksquare$$

Funkcja tworząca ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

W tej części pracy zajmiemy się wyznaczeniem funkcji tworzącej dla ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Lemat 11. Szereg potęgowy

(D4)
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

ma promień zbieżności $R=1$.

Dowód. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczb dodatnich. Zachodzi zatem równość

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Z określenia ciągów $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ wynikają równości

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n=1+c_n.$$

Wykorzystanie nierówności z (7) prowadzi do zależności

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \tag{9}$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szereg $(\mathbf{D4})$ ma promień zbieżności $R = 1$. ■

Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ponadto rosnącym ciągiem liczb dodatnich, zatem szereg ten dla $x = 1$ i $x = -1$ jest rozbieżny.

$(\mathbf{D5})$ Niech $F(x)$ będzie sumą szeregu potęgowego $(\mathbf{D4})$.

$F(x)$ jest poszukiwaną funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Lemat 12. Szeregi potęgowe

$a)$ $$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n+1}x^{n+2},$$

$b)$ $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{n+2},$$

$c)$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+2}$$

mają dodatnie promienie zbieżności, odpowiednio R_a, R_b, R_c. Zachodzi równość $R_a = R_b = R_c = 1$ oraz sumy szeregów $a)$, $b)$, $c)$ są związane z $F(x)$ wzorami, odpowiednio, $2x(F(x) - a_1x)$, $x^2F(x)$ i $x\int_0^x F(t)dt.$

Dowód. $a)$ Zauważmy, że zmieniając indeks sumowania w szeregu potęgowym

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}, \tag{10}$$

otrzymujemy równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n\right) - a_1x. \tag{11}$$

Szereg (10) ma więc taki sam promień zbieżności, jak szereg $(\mathbf{D4})$. Niech R_1 oznacza promień zbieżności szeregu (10). Z lematu 11 wynika, że zachodzą równości

$$R_1 = R = 1.$$

Niech $g_1(x)$ będzie sumą szeregu potęgowego (10).

Wykorzystując $(\mathbf{D5})$, (11) oraz własności sumy szeregu potęgowego, dostajemy

(12) $$g_1(x) = F(x) - a_1 x.$$

Zachodzi także równość

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n+1}x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2xa_{n+1}x^{n+1}.$$

Z własności podstawowych działań na szeregach potęgowych wynikają równości

$$R_a = R_1 = 1.$$

Niech $h_1(x)$ oznacza sumę szeregu a).

Korzystając z równości (12), (13) oraz własności sumy szeregu potęgowego, otrzymujemy równości

(14) $$h_1(x) = 2xg(x) = 2x(F(x) - a_1 x).$$

b) Zauważmy, że zachodzi związek

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 a_n x^n.$$

Z własności podstawowych działań na szeregach wynika, że szereg b) ma taki sam promień zbieżności, jak szereg $(\mathbf{D4})$. Z lematu 11 dostajemy, że zachodzą równości

$$R_b = R = 1.$$

Niech $g_2(x)$ będzie sumą szeregu b). Skorzystanie z $(\mathbf{D5})$, (15) oraz własności sumy szeregu potęgowego prowadzi do równości

(16) $$g_2(x) = x^2 F(x).$$

c) Rozważmy szereg potęgowy

(18) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

Niech R_2 oznacza promień zbieżności tego szeregu, a $g_3(x)$ sumę tego szeregu.

Zauważmy, że zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right).$$

Z twierdzenia o całkowaniu szeregów potęgowych wynika, że zachodzi równość

$$R_2 = R = 1$$

oraz dla każdego $x \in (-1; 1)$ zachodzi równość

$$g_3(x) = \int_0^x F(t)dt. \tag{19}$$

Zachodzi także związek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}. \tag{20}$$

Niech $h_2(x)$ oznacza sumę szeregu potęgowego c). Wykorzystując (19), (20) oraz własności sumy szeregu potęgowego, otrzymujemy, że zachodzi równość

$$h_2(x) = x \int_0^x F(t)dt\,. \ \blacksquare \tag{21}$$

<u>Lemat 13.</u> Funkcja $F(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$F(x) = x(x-1)^2 \frac{dF(x)}{dx}. \tag{22}$$

Dowód. Rozwinięcie $F(x)$ w szereg potęgowy o środku w $x = 0$ jest jednoznaczne. Dla $x \in (-1; 1)$ możemy więc zapisać równości

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n.$$

Zmieniając indeks sumowania w szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$, dostajemy równość

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}.$$

Korzystając z lematu $2b$), prawą stronę możemy zapisać w postaci

$$a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2a_{n+1} x^{n+2} - \frac{n}{n+1} a_n\, x^{n+2}\right).$$

Dalsze przekształcenia prowadzą do równości

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2a_{n+1} x^{n+2} - a_n\, x^{n+2} + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+2}\right).$$

Wykorzystując lemat 12, otrzymujemy równanie

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + 2x(F(x) - a_1 x) - x^2 F(x) + x \int_0^x F(t)dt.$$

Korzystając z faktu, że $a_2 = 2a_1$, otrzymujemy równość

$$F(x) = a_1 x + 2xF(x) - x^2 F(x) + x \int_0^x F(t)dt. \tag{23}$$

Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych wynika, że $F(x)$ jest funkcją dowolnie wiele razy różniczkowalną. Stąd $\int_0^x F(t)dt$ również posiada tę własność.

Różniczkując równość (22) dwukrotnie, dostajemy równanie

$$F''(x) = 2F'(x) + 2F'(x) + 2xF''(x) - 2F(x) - 2xF'(x) - 2xF'(x) - x^2F''(x) + F(x) +$$
$$+F(x) + xF'(x).$$

Po uproszczeniach otrzymujemy równość

$$(x^2 - 2x + 1)F''(x) = (4 - 3x)F'(x).$$

Stosując podstawienie $u(x) = F'(x)$, równanie to można zapisać jako

$$(x-1)^2 u'(x) = (4 - 3x)u(x).$$

Dla $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, mnożąc obie strony przez x i przenosząc wszystko na lewą stronę, dostajemy równanie

$$x(x-1)^2 u'(x) + (3x^2 - 4x)u(x) = 0.$$

Dodając do obu stron $u(x)$, dostajemy zależność

$$u(x) = x(x-1)^2 u'(x) + (3x^2 - 4x + 1)u(x),$$

którą można sprowadzić do postaci

$$u(x) = \left(x(x-1)^2 u(x)\right)'.$$

Wracając do podstawienia $u(x) = F'(x)$, otrzymujemy

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d\left(t(t-1)^2 \frac{dF}{dt}\right)}{dt}.$$

Całkując obie strony od 0 do x, dostajemy

$$\int_0^x \frac{dF}{dt}dt = \int_0^x \frac{d\left(t(t-1)^2 \frac{dF}{dt}\right)}{dt}dt,$$

$$F(x) - F(0) = x(x-1)^2 \frac{dF}{dx}.$$

Wykorzystując fakt, że $F(0)$, jako suma szeregu potęgowego (**D4**) dla $x = 0$ jest równa 0, otrzymujemy równanie (22).

Pozostaje zatem sprawdzić, że równanie (22) jest spełnione dla $x = 0$. Zachodzą równości

$$x(x-1)^2 \frac{dF(x)}{dx}(0) = 0 = F(0). \ \blacksquare$$

Dowód twierdzenia 2. Rozwiążemy teraz równanie (22). Ograniczymy się w tym celu do przedziału otwartego $(0; 1)$. Równanie różniczkowe (22) rozwiążemy metodą rozdzielenia zmiennych. Rozkładając ułamek algebraiczny $\frac{1}{x(x-1)^2}$ na ułamki proste, otrzymujemy równość

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Dzieląc teraz obie strony (22) przez $x(x-1)^2 F(x)$, dostajemy równanie

$$\frac{1}{F(x)} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Całkując obie strony względem x, otrzymujemy

$$\log|F(x)| = \log|x| - \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C_1,$$

gdzie C_1 jest pewną stałą.

Uwzględniając to, że $x \in (0; 1)$ i na tym przedziale $F(x)$ jest dodatnie, dostajemy równość

$$\log F(x) = \log x - \log(1-x) + \frac{1}{1-x} + C_1.$$

Przykładając teraz funkcję e^x do obu stron powyższej równości, dostajemy

$$F(x) = C \frac{x}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}},$$

Wynika stąd, że dla $x > 0$ funkcja $F(x)$ pokrywa się z $C \frac{x}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$, gdzie C jest pewną dodatnią stałą. Rozwiniemy teraz funkcję $C \frac{x}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$ w szereg Maclaurina. Rozwijając funkcję $e^{\frac{1}{1-x}}$ w szereg potęgowy, stosując podstawienie $y = \frac{1}{1-x}$, otrzymujemy

$$F(x) = C \frac{x}{1-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{1-x}\right)^i = Cx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}.$$

Rozwijając kolejne potęgi $\frac{1}{1-x}$ z uogólnionego wzoru dwumianowego Newtona, dostajemy

$$F(x) = Cx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1} = Cx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(1 + \frac{i+1}{1!} x^1 + \cdots + \frac{(i+1) \cdot \ldots \cdot (i+j)}{j!} x^j + \cdots \right) =$$
$$= Cx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{j} x^j = C \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \binom{i+j}{j} x^{j+1}.$$

Z własności podstawowych działań na szeregach potęgowych wynika, że szereg potęgowy

(24) $$C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{j+1}$$

ma promień zbieżności $R_3 = 1$.

Zajmiemy się teraz uzasadnieniem potrzebnej później zmiany kolejności sumowania w szeregu (24).

Dla każdego $x \in (-1; 1)$ istnieje takie $0 < r < 1$, że $r > |x|$.

Zachodzi zatem nierówność

$$\left|\binom{i+j}{j}x^j\right| < \binom{i+j}{j}r^j.$$

$r < 1$, zachodzi więc równość

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j}{j}r^j = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{i+1}$$

oraz istnieje takie $M > 0$, że zachodzą nierówności

$$\frac{1}{1-r} < M < \infty.$$

Zatem, dla każdego $x \in (-1; 1)$ istnieje takie M, że zachodzi

$$C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{j+1}\right| = C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|x|\left|\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{j}\right| < C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}r^j < C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}M^{i+1} =$$
$$= CMe^M < \infty.$$

Uzasadnia to możliwość zmiany kolejności sumowania. W jej wyniku otrzymujemy szereg potęgowy

(25) $$C\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}\right)x^{j+1}$$

i suma tego szeregu także jest równa $C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$. Zauważmy, że szereg (25) można przedstawić w postaci $\sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n$, kładąc

$$r_n = C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+n-1}{n-1}.$$

Otrzymaliśmy więc, że szeregi (**D4**) i (25) są zbieżne dla $x \in (-1; 1)$ oraz ich sumy są równe dla $x \in (0; 1)$.

Z podstawowych faktów dotyczących szeregów potęgowych wynika, że suma szeregu (**D4**) jest równa $C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$ dla każdego $x \in (-1; 1)$.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem związku między C i a_1.

Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych wynika, że suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{26}$$

jest równa

$$\frac{d\left(C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\right)}{dx}.$$

Różniczkując funkcję $C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$, otrzymujemy równość

$$\frac{d\left(C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\right)}{dx} = C\frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Suma szeregu (26) dla $x = 0$ jest zatem równa

$$C\frac{1}{(1-0)^3}e^{\frac{1}{1-0}} = Ce.$$

Zachodzi więc równość

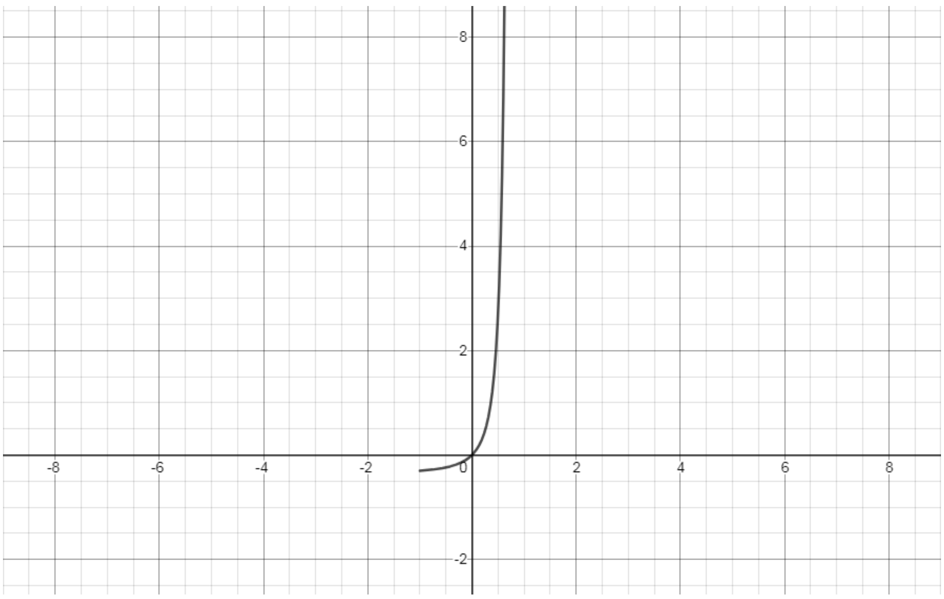
$$C = a_1 e^{-1}.$$

Stąd suma szeregu $(\mathbf{D4})$ jest równa

$$C\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = a_1 e^{-1}\frac{x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = a_1\frac{x}{1-x}e^{-1+\frac{1}{1-x}} = a_1\frac{x}{1-x}e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Wykorzystując fakt, że $a_1 = 1$, otrzymujemy, że suma szeregu $(\mathbf{D4})$ jest równa $\frac{x}{1-x}e^{\frac{x}{1-x}}$. ■

Na zakończenie tej części pracy przyjrzyjmy się wykresowi funkcji $F(x)$.



Wykres funkcji $F(x)$ ze strony internetowej demos.com/calculator

Wzór na wyraz ogólny ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

W tej części pracy zajmiemy się wyznaczeniem wzoru na a_n w postaci ogólnej, wykorzystując funkcję tworzącą wyznaczoną w poprzedniej części pracy.

W dalszej części przydatne okaże się następujące twierdzenie pomocnicze:

Lemat 14. Szereg podwójny

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1} \tag{27}$$

jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-1; 1)$.

Dowód. Dla każdego $x \in (-1; 1)$ istnieje takie $0 < r < 1$, że $r > |x|$, co pociąga za sobą

$$\left|\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1}\right| = \frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}|x|^{i+j+1} < \frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}r^{i+j+1}.$$

$r < 1$, zatem

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1}\right| < \sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j}{j}r^{i+j+1} = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{i+1} r^{i+1} = \left(\frac{r}{1-r}\right)^{i+1}$$

i istnieje takie $M > 0$, że zachodzą nierówności

$$\frac{r}{1-r} < M < \infty.$$

Mamy ostatecznie, że dla każdego $x \in (-1; 1)$ istnieje takie $M > 0$, że zachodzą nierówności

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1}\right| < \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{i+1} < \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}M^{i+1} = Me^{M} < \infty. \ \blacksquare$$

Dowód twierdzenia 3. Rozwińmy funkcję $\frac{x}{1-x}e^{\frac{x}{1-x}}$ w szereg potęgowy o środku w $x = 0$.

Rozwijając funkcję $\frac{x}{1-x}e^{\frac{x}{1-x}}$ w szereg potęgowy, stosując podstawienie $y = \frac{x}{1-x}$, otrzymujemy równości

$$F(x) = \frac{x}{1-x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^{i+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}.$$

Rozwijając kolejne potęgi $\frac{1}{1-x}$ z uogólnionego wzoru dwumianowego Newtona, dostajemy równości

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^{i+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j}{j}x^{j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1}.$$

Przypiszmy każdemu $x \in (-1{:}\,1)$ macierz trójkątną określoną następująco:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!}\binom{0+0}{0} x^{0+0+1} & \frac{1}{0!}\binom{0+1}{1} x^{0+1+1} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{1!}\binom{1+0}{0} x^{1+0+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

to jest

$$A\colon x \to \left[a_{ij}(x)\right]_{i,j=1}^{\infty}$$

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i < j \\ \dfrac{1}{(i-1)!}\dbinom{(j-1)}{(j-1)-(i-1)} x^j & \text{dla } i \geq j. \end{cases}$$

Zauważmy, że sumując najpierw wyrazy macierzy A wierszami, a następnie dodając tak otrzymane szeregi, otrzymujemy szereg (27). Z lematu 14 dostajemy, że dla każdego $x \in (-1;1)$ szereg podwójny (27) jest bezwzględnie zbieżny.

Dla $x \in (-1;1)$ możemy zatem, z twierdzenia Cauchy'ego o przestawianiu[2], zmienić kolejność sumowania wyrazów macierzy A, nie zmieniając przy tym sumy szeregu (27).

Zauważmy ponadto, że te wyrazy macierzy, które znajdują się w tej samej kolumnie i które mogą być niezerowe, zawierają x w tej samej potędze.

Zachodzą równości

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{j}x^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{i+j-j}x^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\binom{i+j}{i}x^{i+j+1} =$$
$$= \sum_{k=0+0+1}^{\infty}\sum_{\substack{i+j+1=n \\ i,j\in\mathbb{N}}}\frac{1}{i!}\binom{n-1}{i}x^n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\binom{n-1}{i}\right)x^n.$$

Pomimo tego, że sumujemy tutaj składniki „po przekątnej", jest to w rzeczywistości prostsza forma zapisu zmiany kolejności sumowania w macierzy A.

Suma szeregu potęgowego

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\binom{n-1}{i}\right)x^n$$

jest zatem równa

$$\frac{x}{1-x}e^{\frac{x}{1-x}}.$$

[2] „Podstawy analizy matematycznej" - W. Rudin, Wydawnictwo Naukowe PWN 2000, wydanie szóste, s. 149.

Pozostaje zatem jedynie sprawdzić, że wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ są określone wzorem ogólnym

(29) $$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i}.$$

W tym celu wykorzystamy zasadę indukcji zupełnej.

Dla $n = 1$ zachodzą równości

$$a_1 = 1 = \frac{1}{0!}\binom{1-1}{0}.$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że dla każdego $1 \leq k \leq n$ zachodzi równość

$$a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\binom{k-1}{i}.$$

Przeanalizujmy teraz wartość $a_1 + \cdots + a_n$

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{0} \frac{1}{i!}\binom{0}{i} + \cdots + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i} =$$

$$= \frac{1}{0!}\binom{0}{0} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{0!}\binom{n-1}{0} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{n-1}.$$

Sumując te wyrażenia kolumnami i korzystając z własności symbolu Newtona[3], dostajemy równości

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{0!}\binom{i}{0} + \cdots + \sum_{i=n-1}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\binom{i}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{k!}\binom{i}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i}{k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\binom{n-1+1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\binom{n}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k}.$$

Otrzymujemy zatem równość

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!}\binom{n}{i}.$$

Dzieląc obie strony przez n, dostajemy równości

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{(i-1)!}\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{(i-1)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i-1}.$$

---

[3] Delta nr 2 (549) 2020 s. 12.

Dodając do otrzymanego wyrażenia a_n, otrzymujemy równość

$$a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{0!}\binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i!}\binom{n-1}{i} + \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i-1}\right) + \frac{1}{n!}\binom{n-1}{n-1}.$$

Wykorzystanie podstawowych własności symbolu Newtona, prowadzi do równości

$$a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{0!}\binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\binom{n}{i} + \frac{1}{n!}\binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\binom{n}{i}.$$

Zachodzą zatem równości

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n+1-1}\frac{1}{i!}\binom{n+1-1}{i}.$$

■

Podsumowanie

Na koniec warto wspomnieć, że a_n jest związany z szeregiem hipergeometrycznym następującą, prostą do zweryfikowania z definicji symbolu ${}_pF_q$, zależnością

$$a_n = {}_1F_1(1-n, 1; -1).$$

Niektóre problemy pozostały nadal otwarte, m. in. znalezienie lepszych oszacowań na a_n, pozwalających na wyznaczenie jego asymptotyki oraz znalezienie wzorów ogólnych na kolejne wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dla $k > 1$. (por. z zadaniem 12 z wprowadzenia)

Dość prawdopodobna wydaje się następująca hipoteza

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad \text{przy } n \to \infty$$

Jej weryfikacja wymaga jednak głębszej analizy.

Dowody lematów 9 i 10

Dowód lematu 9. a) Funkcje $x - \frac{x^2}{2}$ i $\log(1+x)$ są różniczkowalne dla $x \geq 0$. Obliczając pochodne funkcji $x - \frac{x^2}{2}$ i $\log(1+x)$, dostajemy równości

$$\frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - x,$$

$$\frac{d}{dx}(\log(1+x)) = \frac{1}{1+x}.$$

Niech

$$h_1(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

dla $x \geq 0$.

Wykorzystując podstawowe własności pochodnej, dostajemy, że zachodzą równości

$$\frac{dh_1}{dx}(x) = \frac{d\left(\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right)}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(1+x)) - \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Dla każdego $x \neq 0$ mamy nierówność

$$1 - x^2 < 1.$$

Wynika z tego, że dla każdego $x > 0$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{1+x} > 1 - x,$$

$$\frac{d}{dx}(\log(1+x)) > \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Dla każdego $x > 0$ mamy zatem, że $\frac{dh_1}{dx}(x) > 0$. Korzystając z twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnej dostajemy, że $h_1(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą dla $x \geq 0$.

Obliczając $h_1(0)$, otrzymujemy równość

$$h_1(0) = \log(1+0) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = 0.$$

Wykorzystując ścisłą monotoniczność $h_1(x)$, dostajemy, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi nierówność

$$h_1(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) > \log(1+0) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = 0.$$

Przenosząc $x - \frac{x^2}{2}$ na drugą stronę nierówności, otrzymujemy żądaną nierówność.

b) Funkcje $\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)$ i $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$ są różniczkowalne dla $x \geq 0$. Obliczając pierwsze pochodne obydwu funkcji, dostajemy równości

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)}{1 + x + \frac{x^2}{4}} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}},$$

$$\frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

Niech

$$h_2(x) = \log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)$$

dla $x \geq 0$.

Z podstawowych własności pochodnych wynika, że zachodzą równości

$$\frac{dh_2}{dx}(x) = \frac{d\left(\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)\right) - \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right).$$

Dla każdego $x > 0$ spełnione są nierówności

$$1 + \frac{x^3}{8} > 1,$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} > 1.$$

Po pogrupowaniu wyrazów po lewej stronie dostajemy

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) > 1.$$

Po podzieleniu obu stron nierówności przez $1 + \frac{x}{2}$ dostajemy, że dla każdego $x > 0$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2}} < 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)\right) < \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right).$$

Mamy zatem, że $\frac{dh_2}{dx}(x) < 0$ dla $x > 0$. Wykorzystując twierdzenie o monotoniczności funkcji różniczkowalnej dostajemy, że $h(x)$ jest funkcją ściśle malejącą dla $x \geq 0$.

Obliczając $h(0)$, otrzymujemy równości

$$h(0) = \log\left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{12}\right) = 0.$$

Wykorzystując ścisłą monotoniczność $h(x)$, dostajemy, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi nierówność

$$h(x) = \log\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) < \log\left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{12}\right) = 0.$$

Dodając $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$ do obu stron nierówności, otrzymujemy żądaną nierówność.

■

Dowód lematu 10. a) Dla $n = 1$ zachodzi równość

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 2\sqrt{1} - 1.$$

Korzystając z faktu, że funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0$ jest malejąca i ciągła, dostajemy, że dla $k = 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx > \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Sumując zatem obie strony nierówności po k od 2 do n, otrzymujemy zależność

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + 2\sqrt{n-1} + \dots - 2\sqrt{1} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Dodając do obu stron 1, dostajemy nierówność

$$2\sqrt{n} - 1 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

b) Dla $n = 1$ mamy nierówność

$$2\sqrt{1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} < 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}.$$

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ jest funkcją wypukłą. Dla $n > 1$ i $k = 2, \dots, n$ otrzymujemy zatem zależność

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx < \frac{\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k}}}{2}.$$

Sumując obie strony nierówności po k od 2 do n, dostajemy nierówności

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + 2\sqrt{n-1} + \cdots - 2\sqrt{1} < \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \cdots + \frac{\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2},$$

$$2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{2\sqrt{1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Dodając do obu stron nierówności $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$, otrzymujemy nierówność

$$2\sqrt{n} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

przy czym lewa strona nierówności jest niewątpliwie większa od $2\sqrt{n} - \frac{3}{2}$.

c) Dla $n = 1$ mamy równość

$$\frac{1}{1} = 1 = 1 + \log 1 .$$

Dla $n > 1$ i $k = 2, \dots, n$, wykorzystując monotoniczność i ciągłość funkcji $\frac{1}{x}$, otrzymujemy związek

$$\log k - \log(k-1) = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx > \frac{1}{k}.$$

Sumując obie strony nierówności po k od 2 do n, dostajemy zależność

$$\log n - \log(n-1) + \cdots + \log 2 - \log 1 > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Po dodaniu jedności do obu stron nierówności i uproszczeniu lewej strony otrzymujemy żądaną nierówność.

d) Dla $k = 1, \dots, n$, korzystając z monotoniczności i ciągłości funkcji $\frac{1}{x}$, dostajemy zależność

$$\log(k+1) - \log k = \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{k}.$$

Sumując zatem obie strony nierówności po k od 1 do n, otrzymujemy nierówność

$$\log(n+1) - \log n + \cdots + \log 2 - \log 1 < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Po uproszczeniu lewej strony nierówności dostajemy związek

$$\log(n+1) < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k},$$

przy czym lewa strona jest oczywiście większa od $\log n$.

$e)$ Dla $n = 1$ mamy nierówność

$$\frac{1}{1\sqrt{1}} = 1 < 3.$$

Dla $n > 1$ i $k = 2, \dots, n$, wykorzystując monotoniczność i ciągłość funkcji $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{k\sqrt{k}} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Sumując zatem obie strony nierówności po k od 1 do n, otrzymujemy zależności

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Korzystając z faktu, że dla każdego $x > 0$ funkcja $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ przyjmuje wartości dodatnie i całka

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

ma wartość skończoną, otrzymujemy nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx < 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx < 1 + \frac{\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + 2 = 3.$$

$\blacksquare$