Od trójkątów do krzywych stożkowych,

czyli o prostej innej niż wszystkie

Stanisław Majchrzak

Opiekun pracy:
mgr Dominik Burek

Tarnów 2020

Wstęp

Praca ta jest wynikiem kilkumiesięcznych badań nad pewną konfiguracją geometryczną oraz konfiguracjami z nią pokrewnymi. W pierwszym rozdziale zdefiniujemy proste ξ w trójkącie, a także udowodnimy ich własności. Sprawdzimy, jakie warunki muszą być spełnione, aby pojawiające się w konfiguracji trójkąty były podobne. Rozpatrzymy też zagadnienie w kilku szczególnych przypadkach. Na koniec pokażemy związek zdefiniowanych prostych z krzywymi stożkowymi.

Stanisław Majchrzak

Spis treści

Wstęp 1
1. Wstępna konstrukcja 3
2. Konstrukcja z podobieństwem 7
3. Szczególne konfiguracje 12
4. Kilka uogólnień 19
Problemy otwarte 27
Bibliografia 27

1. Wstępna konstrukcja

Większość prezentowanych w tej pracy własności jest dowodzonych dla trójkąta ostrokątnego, mimo iż zachodzą dla dowolnego trójkąta nieprostokątnego. Czytelnik przekona się z łatwością, że dowód w przypadku trójkąta rozwartokątnego jest analogiczny.

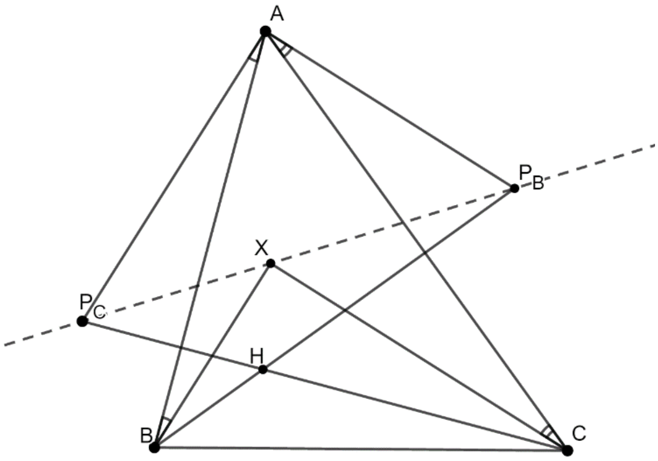
Oznaczenie1 - przez ω_{PQ} będziemy oznaczać okrąg o średnicy PQ.

Oznaczenie2 - przez H będziemy oznaczać ortocentrum ΔABC.

Zaczniemy od rozpatrzenia pewnej konfiguracji.

Lemat 1.1

Dany jest nieprostokątny trójkąt ABC. Na prostych CH i BH wybieramy odpowiednio takie punkty P_C, P_B, że $\measuredangle P_C A P_B = 90°$. Przez punkty B i C prowadzimy proste równoległe do AP_C i AP_B, które przecinają się w punkcie X. Wówczas punkty P_C, X, P_B leżą na jednej prostej.



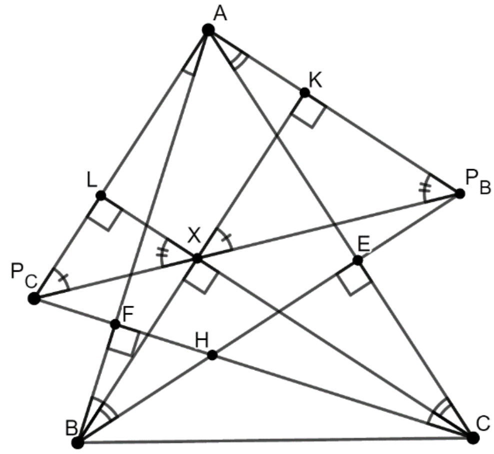
rys. 1

Dowód

Oznaczmy przecięcia prostych BX, CX z AP_B, AP_C jako K, L odpowiednio. Ponadto niech E, F będą spodkami wysokości z B i C. Ponieważ $BX \parallel AP_C, CX \parallel AP_B$ to $\measuredangle P_C A P_B = \measuredangle BXC = 90°$, więc B, F, X, E, C leżą na okręgu ω_{BC}. Zatem $\measuredangle P_B AC = \measuredangle ACX = \measuredangle EBX$ oraz $\measuredangle P_C AB = \measuredangle ABX = \measuredangle FCX$. Co więcej $BX \perp AP_B$ i $CX \perp AP_C$. Mamy zatem $\Delta KBP_B \sim \Delta LCA$ oraz $\Delta LCP_C \sim \Delta KBA$ z cechy kk. Zauważmy jeszcze, że czworokąt $LXKA$ jest prostokątem. Ostatecznie

$\frac{KX}{KP_B} = \frac{AL}{KP_B} = \frac{CL}{KB} = \frac{LP_C}{AK} = \frac{LP_C}{LX}$,

czyli $\Delta P_C LX \sim \Delta XKP_B$ z cechy bkb. Więc



rys. 2

$$\measuredangle LXP_C + \measuredangle LXK + \measuredangle KXP_B = 90° - \measuredangle LP_C X + 90° + \measuredangle LP_C X = 180°$$

co oczywiście kończy dowód.

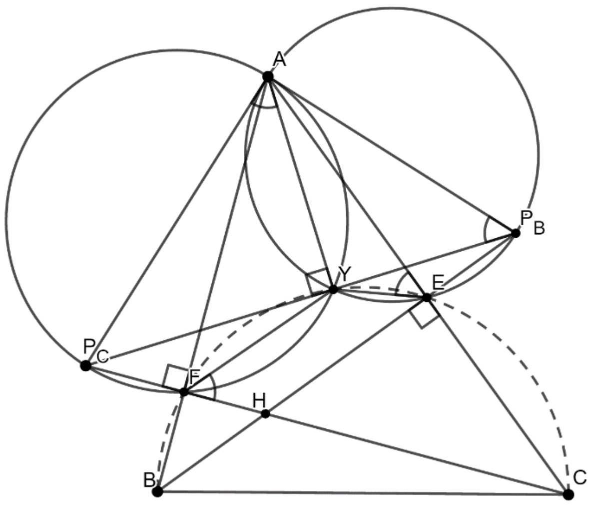
Pokażemy jeszcze drugi dowód, który z punktu widzenia tej pracy będzie miał większe znaczenie. Wymaga on jednak, aby najpierw udowodnić

Lemat 1.2

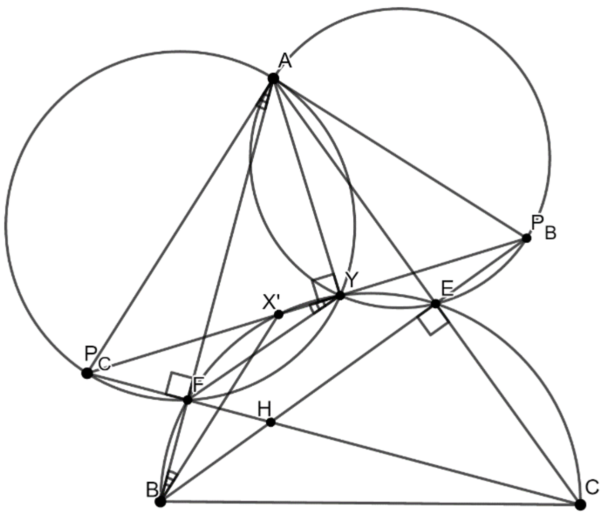
Przy oznaczeniach z *Lematu 1.1* niech Y będzie rzutem A na prostą $P_C P_B$. Wówczas $\measuredangle BYC = 90°$.

Dowód

Niech E i F będą spodkami wysokości z punktów odpowiednio B i C w trójkącie ABC. Wówczas z oczywistych kątów prostych czworokąty $P_C AYF$ i $P_B AYE$ są cykliczne oraz $\Delta AP_B Y \sim \Delta P_C AY$. Zatem $\measuredangle AEY = \measuredangle AP_B Y = \measuredangle YAP_C = \measuredangle YFC$, co oznacza, że punkt Y leży na okręgu opisanym na trójkącie ECF, którego średnicą jest BC, co kończy dowód lematu.



rys. 3



rys. 4

Wracając do *Lematu 1.1* niech X' będzie drugim obok Y przecięciem ω_{BC} z prostą $P_C P_B$. Wykazanie, że $BX' \parallel AP_C$ oznaczałoby $X' = X$, co zakończyłoby dowód. Zauważmy, że

$$\measuredangle P_C AB = \measuredangle P_C AF = \measuredangle P_C YF = \measuredangle X'YF = \measuredangle X'BF = \measuredangle X'BA$$

co kończy dowód.

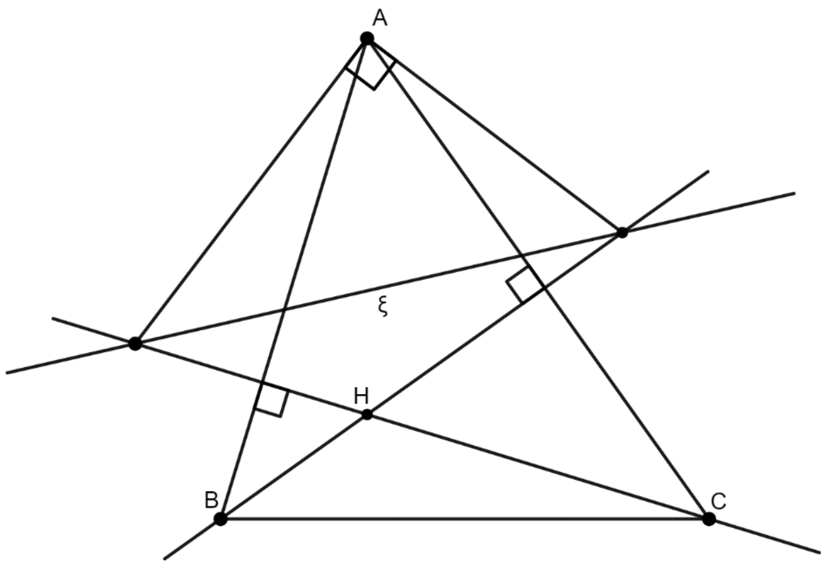
Pokazaliśmy zatem, że każda prosta wyznaczana przez punkty P_C, P_B znajdujących się odpowiednio na prostych CH, BH (w ΔABC) i spełniających $\measuredangle P_C AP_B = 90°$ przecina okrąg ω_{BC} w dwóch punktach, którym możemy przyporządkować udowodnione wcześniej własności.

Odwracając dowód *Lematu 1.2* można łatwo udowodnić twierdzenie odwrotne, mianowicie jeśli przez punkt Y leżący na ω_{BC} poprowadzimy prostą prostopadłą do AY, która przetnie proste CH i BH w punktach P_C i P_B to $\measuredangle P_C AP_B = 90°$. Pozwala to przyjąć pewne definicje.

Definicja 1.
Dany jest ΔABC. Prostą ξ ΔABC nazwiemy prostą, dla której zachodzi

$$\measuredangle (CH \cap \xi)A(BH \cap \xi) = 90°$$

(pierwszy podany wierzchołek trójkąta oznacza wierzchołek kąta prostego).



rys. 5

Definicja 2.
Niech k będzie prostą ξ ΔABC. Przez $X(k)$ będziemy oznaczać punkt na k spełniający własność punktu X z *Lematu 1.1*, a przez $Y(k)$ będziemy oznaczać punkt na k spełniający własność punktu Y z *Lematu 1.2*.

Rozpatrzmy następującą konfigurację. Niech proste AP_C i AP_B przecinają proste BH i CH w punktach P_B'' oraz P_C''. Wówczas z *Lematu 1.1* prosta $P_B''P_C''$ przecina ω_{BC} w sposób analogiczny do prostej P_CP_B. Niech tymi punktami będą X'', Y''. Warto przyjrzeć się bliżej zależności między punktami X, Y oraz X'', Y''.

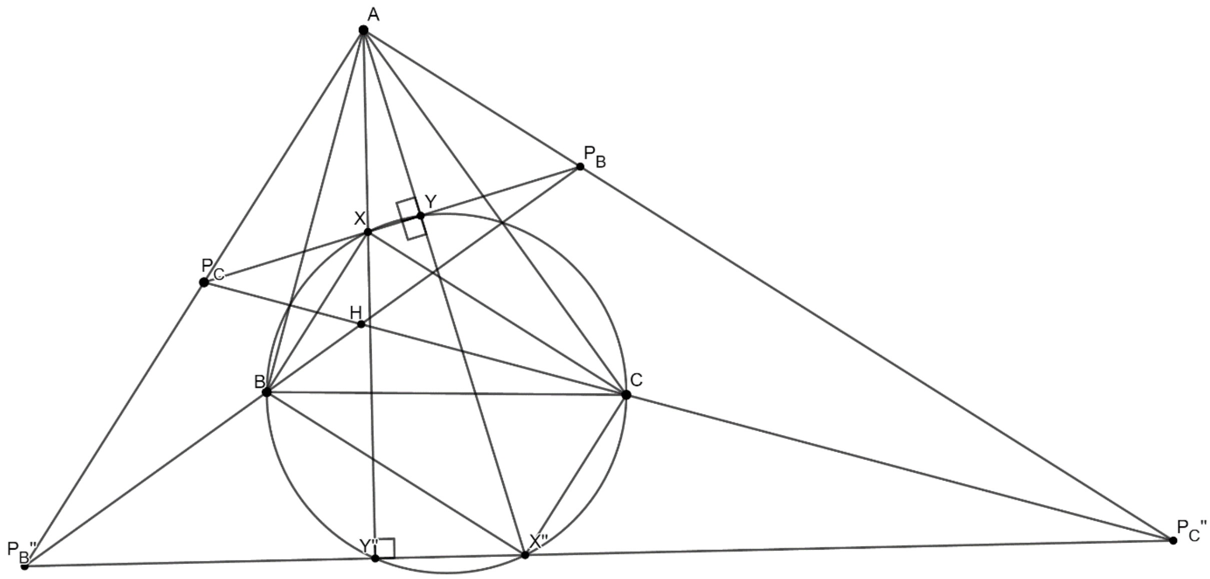
Lemat 1.3

Dla danej konfiguracji następujące warunki są równoważne:

(1) Punkty A, P_C, P_B'' są współliniowe
(2) Czworokąt $BXCX''$ to prostokąt
(3) Punkty A, X, Y'' są współliniowe
(4) Punkty A, Y, X'' są współliniowe

Dowód

Równoważność pierwszych dwóch wynika z odpowiednich równoległości z *Lematu 1.1*. Warunki *(3)* i *(4)* są równoważne temu, że XX'' to średnica okręgu ω_{BC}, co jest równoważne *(2)*.



rys. 6

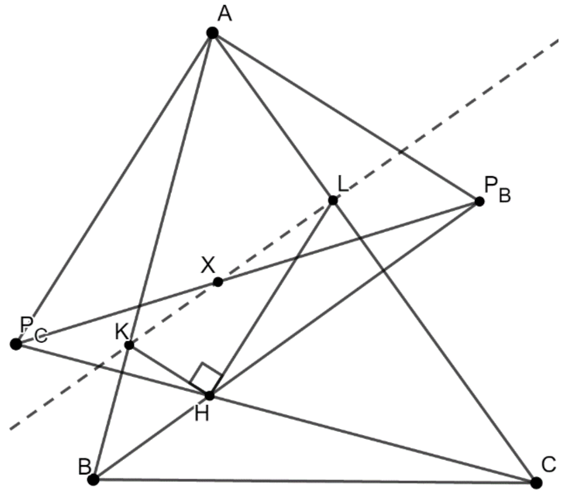
Na koniec tego rozdziału pokażemy zastosowanie wykazanych własności, rozwiązując pewne zadanie, które zaprowadzi nas do dalszych wniosków.

Zadanie 1

Rozważmy jeszcze raz konfigurację z *Lematu 1.1*. Na prostych AB i AC wybieramy takie punkty K, L, że $HK \parallel AP_B$ oraz $HL \parallel AP_C$. Wykazać, że punkty K, X, L są współliniowe.

Rozwiązanie

Z założenia o odpowiednich równoległościach wiemy, że $\measuredangle(HK, HL) = \measuredangle(AP_B, AP_C) = 90°$. Zauważmy, że ponieważ $CH \perp AB$ oraz $BH \perp AC$, to punkt A jest ortocentrum ΔHBC. Oznacza to, że prosta KL jest prostą ξ ΔHBC. Korzystając drugi raz z tego, że $HK \parallel AP_B$ i $HL \parallel AP_C$ oraz *Lematu 1.1* dostajemy $X(KL) = X(P_BP_C)$, co kończy dowód.



rys. 7

Wniosek

Dla dowolnego punktu A, leżącego w jednej z półpłaszczyzn wyznaczanych przez prostą BC, bierzemy taką prostą ξ ΔABC, która przecina półprostą $\overrightarrow{CH}$ w takim punkcie P_C, że wszystkie proste AP_C są do siebie równoległe. Wtedy wszystkie te proste ξ mają wspólny punkt $X(\xi)$.

2. Konstrukcja z podobieństwem

Ciekawym zagadnieniem jest rozpatrzenie takich prostych ξ ΔABC, która przecina proste CH, BH w takich punktach P_C, P_B, że trójkąty P_CAP_B są podobne. Zaczniemy od udowodnienia spostrzeżenia, które opisuje

Lemat 2.1

Dana jest prosta BC. Dla każdego punktu A, leżącego w jednej z półpłaszczyzn wyznaczanych przez prostą BC, na półprostych $\overrightarrow{CH}$ wybieramy takie punkty P_C, że prosta ξ dla odpowiedniego trójkąta ABC, przechodząca przez ten punkt, tworzy z prostą AP_C ustalony kąt ostry. Wówczas wszystkie takie proste ξ są współpękowe.

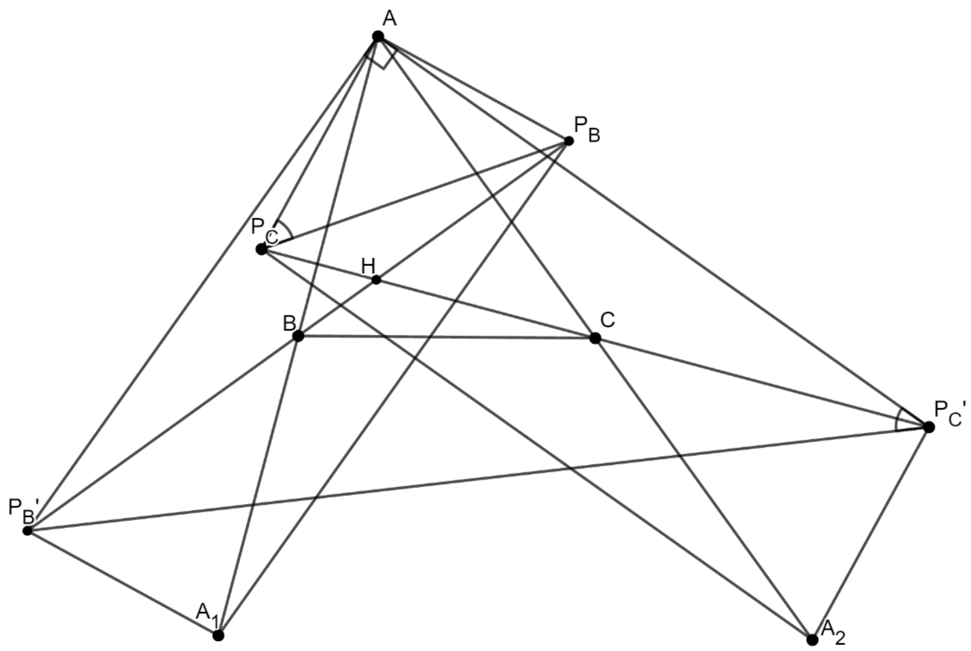
Dowód

Spójrzmy na *rys 3* . Łatwo zauważyć przenosząc kąty, że $\measuredangle YBC = \measuredangle AP_BP_C$. Z *Lematu 1.2* $\measuredangle BYC = \measuredangle P_CAP_B = 90°$, wnioskujemy zatem, że trójkąty P_CAP_B, CYB są podobne i przeciwnie zorientowane z cechy kk. Zatem kąt jaki tworzy prosta ξ ΔABC z prostą AP_C zależy wyłącznie od położenia punktu $Y(\xi)$ na ω_{BC}, tzn $\measuredangle(AP_C, \xi) = \measuredangle Y(\xi)CB$. Ponieważ na ω_{BC} można wybrać tylko jeden punkt leżący w tej samej półpłaszczyźnie co punkt A wyznaczanej przez prostą BC, spełniający ten warunek kątowy, to jest on punktem $Y(\xi)$ dla wszystkich rozważanych prostych, co kończy dowód.

W powyższym lemacie nie trzeba się ograniczać do jednej półpłaszczyzny wyznaczanej przez prostą BC. Podobnie założenie o wyborze punktu P_C na zorientowanej półprostej nie jest konieczne. Wówczas wszystkie rozważane proste ξ przechodziłyby przez wybrany tak jak wyżej punkt Y lub przez punkt Y', który jest odbiciem symetrycznym punktu Y względem prostej BC. W oczywisty sposób Y' leży na ω_{BC}, a równość $BY = BY'$ zachowuje założenie o kącie wpisanym. Oznacza to, że prosta ξ punktu Y' w ΔABC przetnie proste CH, BH w takich punktach S, T, że trójkąty $P_C AP_B$ i SAT są podobne i przeciwnie zorientowane. Okazuje się, że ma ona dodatkową własność

Lemat 2.2

Dany jest ΔABC. Dowolna prosta ξ tego trójkąta przecina proste CH, BH w punktach P_C, P_B. Niech P_C', P_B' będą odbiciami tych punktów względem punktów C, B odpowiednio. Wówczas prosta $P_C'P_B'$ jest prostą ξ ΔABC oraz trójkąty $P_C AP_B$ i $P_C' AP_B'$ są podobne i przeciwnie zorientowane.



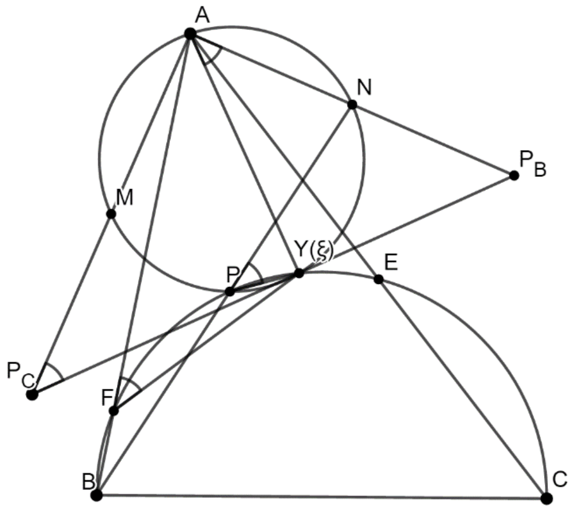
rys. 8

Dowód

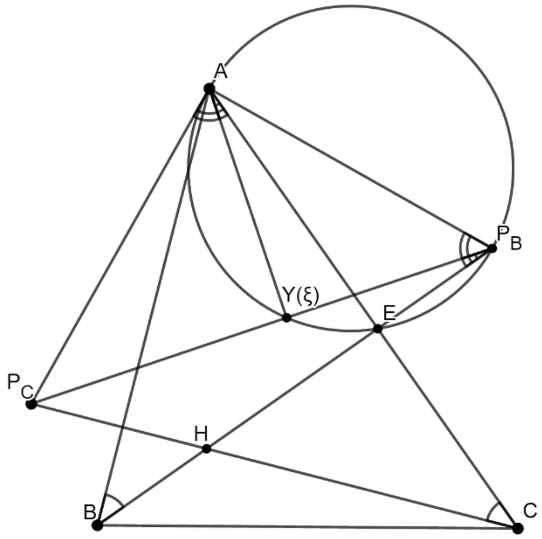
Niech A_1, A_2 będą odbiciami punktu A względem odpowiednio punktów B i C. Wtedy czworokąty $AP_B A_1 P_B'$ oraz $AP_C A_2 P_C'$ są równoległobokami. Teza jest równoważna temu, że $\measuredangle P_C' AP_B' = 90°$. Ponieważ $AP_B' \parallel P_B A_1$ i $AP_C' \parallel P_C A_2$ to $\measuredangle P_C' AP_B' = \measuredangle(P_B A_1, P_C A_2)$, więc pokażemy, że $P_B A_1 \perp P_C A_2$. Rozważmy jednokładność o środku w A i skali $\frac{1}{2}$. Przeprowadza ona punkty A_1, A_2 na B, C oraz P_C, P_B na M, N - środki odcinków odpowiednio AP_C i AP_B. Wystarczy pokazać, że $BN \perp CM$. Niech Ω będzie okręgiem dziewięciu punktów $\Delta P_C AP_B$. W oczywisty sposób leżą na nim punkty $M, A, N, Y(\xi)$. Niech P będzie drugim obok $Y(\xi)$ punktem przecięcia Ω i ω_{BC}. Pokażemy, że P jest punktem przecięcia prostych BN i CM. Zauważmy, że

$$\measuredangle NPY(\xi) = \measuredangle Y(\xi)AP_B = \measuredangle AP_C Y(\xi) = \measuredangle AFY(\xi) = 180° - \measuredangle Y(\xi)FB = 180° - \measuredangle Y(\xi)PB$$

co daje współliniowość punktów N, P, B. Analogicznie pokazujemy, że M, P, C są współliniowe.



rys. 9



rys. 10

Zanim wykażemy podobieństwo pokażemy

Lemat 2.3

Dany jest ΔABC. Dowolna prosta ξ tego trójkąta przecina proste CH, BH w punktach P_C, P_B. Wówczas $AB \cdot AC = CP_C \cdot BP_B$.

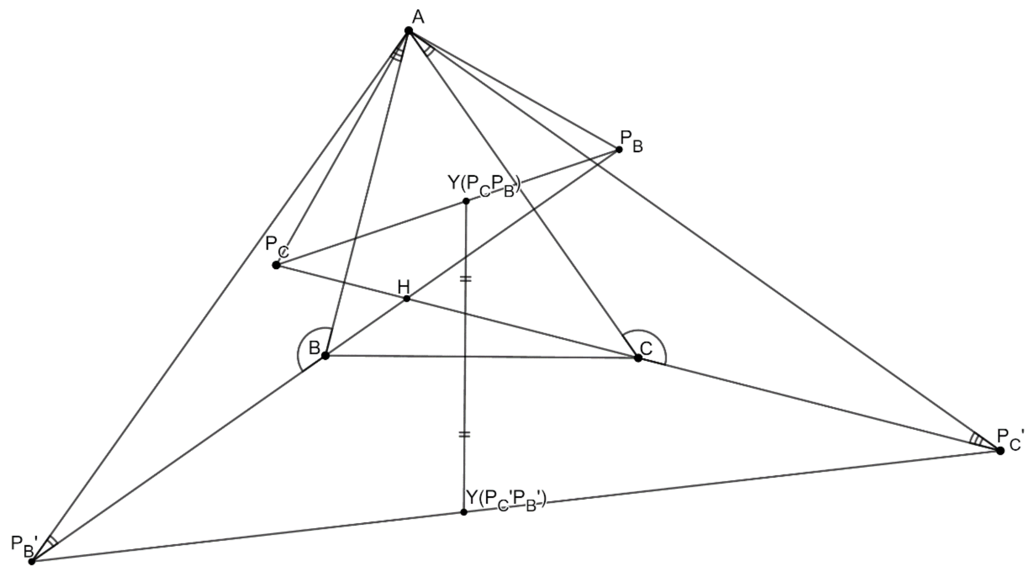
Dowód

Zauważmy, że $\sphericalangle ACP_C = \sphericalangle ABP_B = 90° - \sphericalangle BAC$. Ponieważ teza jest równoważna temu, że $\frac{AB}{BP_B} = \frac{CP_C}{AC}$ pokażemy, że $\Delta ACP_C \sim \Delta P_BBA$. Niech E będzie spodkiem wysokości z punktu B w ΔABC. Z *Lematu 1.2* wiemy, że czworokąt $AY(\xi)EP_B$ jest cykliczny, zatem $\sphericalangle Y(\xi)AE = \sphericalangle Y(\xi)P_BE$, a ponieważ $\Delta P_BAY(\xi) \sim \Delta AP_CY(\xi)$ to $\sphericalangle P_CAY(\xi) = \sphericalangle AP_BY(\xi)$, co daje $\sphericalangle P_CAC = \sphericalangle AP_BB$, czyli tezę.

Z podobieństwa pokazanego w *Lemacie 2.3* wiemy, że $\frac{AP_C}{AP_B} = \frac{AC}{BP_B}$, zatem zostaje pokazać, że $\frac{AP_C'}{AP_B'} = \frac{AC}{BP_B}$. Ponieważ $\sphericalangle P_CAP_B = \sphericalangle P_B'AP_C' = 90°$, to

$$\sphericalangle P_B'AP_C = P_C'AP_B \quad \text{i} \quad \sphericalangle P_B'AB + \sphericalangle CAP_C' = 90° - \sphericalangle BAC.$$

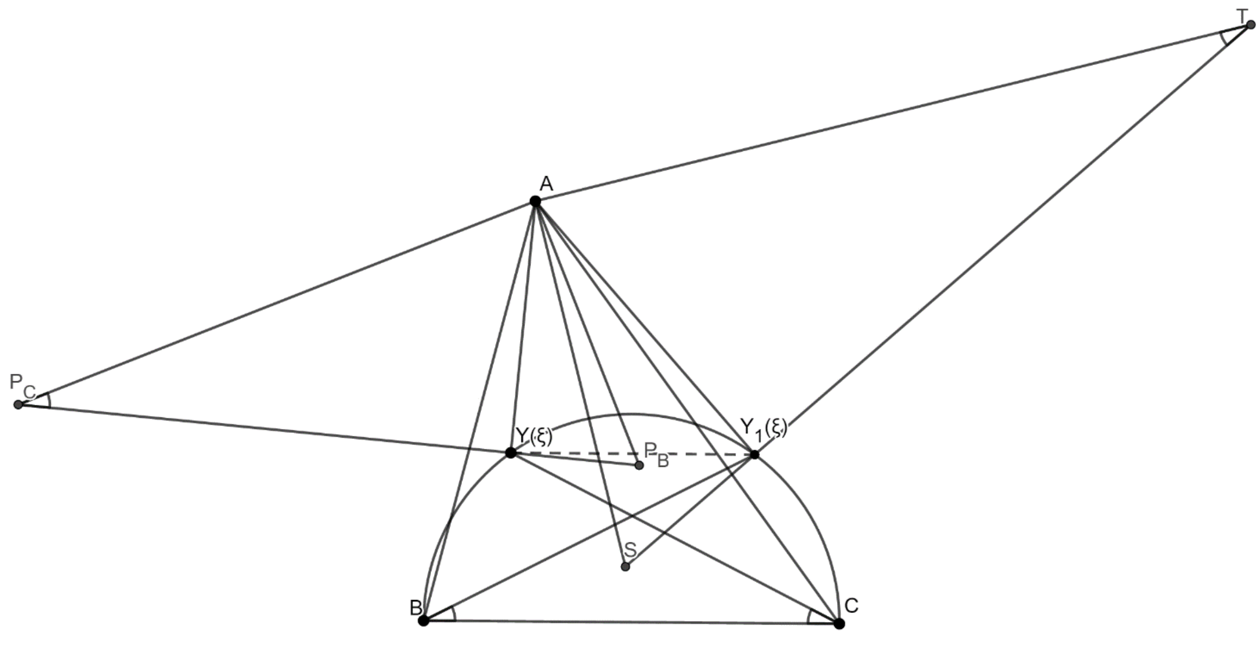
Zauważmy, że $\sphericalangle P_B'BA = \sphericalangle P_C'CA = 90° + \sphericalangle BAC$, więc z sumy kątów w $\Delta P_B'BA$ i $\Delta P_C'CA$ mamy $\sphericalangle BP_B'A = \sphericalangle CAP_C'$ i $\sphericalangle P_B'AB = \sphericalangle CP_C'A$, zatem $\Delta P_B'BA \sim \Delta ACP_C'$. Z tego podobieństwa dostajemy $\frac{AP_C'}{AP_B'} = \frac{AC}{P_B'B} = \frac{AC}{BP_B}$, co kończy dowód.



rys. 11

W powyższej konfiguracji warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną rzecz. Ponieważ trójkąty P_CAP_B i $P_C{}'AP_B{}'$ są przeciwnie zorientowane, to proste P_CP_B oraz $P_C{}'P_B{}'$ tworzą odpowiednio z prostymi AP_C i $AP_C{}'$ ten sam kąt ostry. Patrząc na komentarz pod *Lematem 2.1* dochodzimy do wniosku, że punkty $Y(P_CP_B)$ oraz $Y(P_C{}'P_B{}')$ są symetryczne względem prostej BC.

Okazuje się, że istnieje jeszcze jedna prosta ξ ΔABC, która przetnie proste CH, BH w takich punktach S, T odpowiednio, że trójkąty P_CAP_B i TAS są podobne i przeciwnie zorientowane.



rys. 12

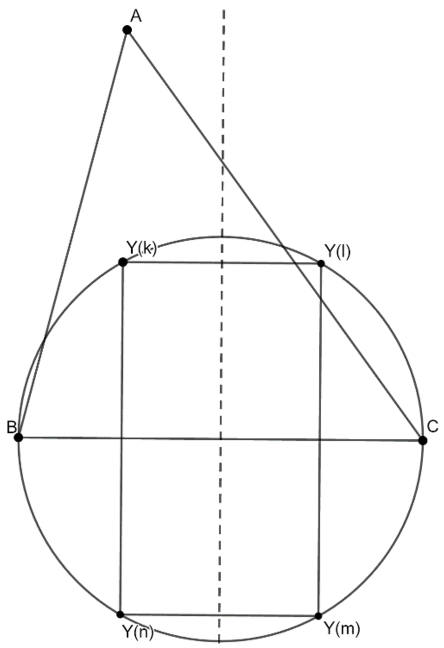
Oznaczmy $Y(\xi) = Y(P_CP_B)$ oraz punkt $Y_1(\xi)$ taki, że proste $Y(\xi)Y_1(\xi)$ i BC są równoległe. Niech S, T będą przecięciami prostej prostopadłej do $AY_1(\xi)$ przez punkt $Y_1(\xi)$ Z *Lematu 2.1* wiemy, że $\measuredangle Y(\xi)CB = \measuredangle P_BP_CA$ oraz $\measuredangle Y_1(\xi)BC = \measuredangle STA$. Z drugiej strony, ponieważ $BC \parallel Y(\xi)Y_1(\xi)$, to $\widehat{BY(\xi)} = \widehat{CY_1(\xi)}$, czyli $\measuredangle Y(\xi)CB = \measuredangle Y_1(\xi)BC$, co daje $\measuredangle P_BP_CA = \measuredangle STA$. Prosta ST jest oczywiście prostą ξ ΔABC, więc $\measuredangle SAT = 90°$, zatem $\Delta P_CAP_B \sim \Delta TAS$.

Teraz dla prostej ξ ΔABC możemy skonstruować taką inną prostą ξ tego trójkąta, że trójkąty powstałe z punktu A oraz przecięć tych prostych z dwiema prostymi BH, CH będą podobne spiralnie. Dla punktu $Y(\xi)$ wystarczy wybrać taki punkt Y' na ω_{BC}, że prosta ξ ΔABC, przechodząca przez punkt Y', utworzy przecinając wysokości trójkąta trójkąt podobny i przeciwnie zorientowany do wyznaczanego przez wyjściową prostą ξ ΔABC. Taki punkt umiemy wybrać na dwa sposoby. Następnie postępujemy analogicznie dla punktu Y'. W rezultacie otrzymamy trójkąt podobny spiralnie z wyjściowym.

Ostatecznie otrzymaliśmy pewną własność, którą możemy opisać

Lemat 2.4

Rozważmy takie proste ξ ΔABC, które przecinają proste CH i BH w takich punktach P_C, P_B odpowiednio, że trójkąty AP_CP_B są podobne i oznaczmy je kolejno k, l, m, n. Wtedy czworokąt $Y(k)Y(l)Y(m)Y(n)$ jest prostokątem.



rys. 13

Dowód

Z poprzednich spostrzeżeń wiemy o istnieniu co najmniej czterech takich prostych (lub dwóch jeśli jedna prosta przechodzi przez środek łuku $\widehat{BC}$). Łatwo zauważyć, że nie może być ich więcej, ponieważ istnieją tylko dwa takie punkty Y na ω_{BC}, że kąt wpisany na łuku $\widehat{BY}$ jest ustalony. Wybór tych punktów jest symetryczny względem symetralnej BC, zatem istnieją dokładnie cztery takie punkty (lub dwa jeśli są to środki łuków $\widehat{BC}$), a prostych jest tyle samo ile tych punktów. Ostatecznie rozważany czworokąt jest cykliczny oraz ma dwie osie symetrii, którymi są BC oraz symetralna odcinka BC, co oznacza, że $Y(k)Y(l)Y(m)Y(n)$ to prostokąt.

Wniosek

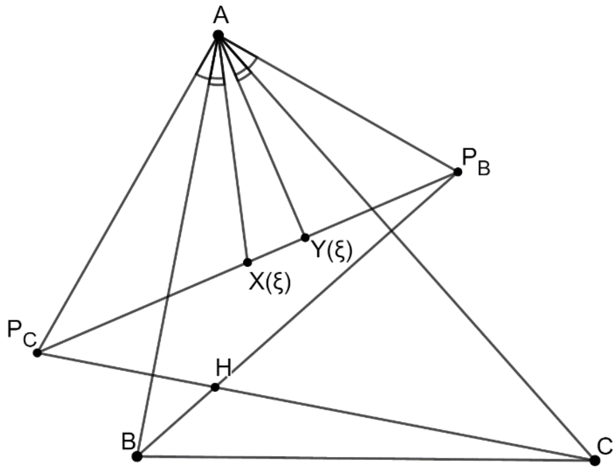
Jeśli proste k, l są prostymi ξ ΔABC oraz przecinają proste CH, BH w takich punktach S, T i U, V odpowiednio, że trójkąty AST i AUV są podobne spiralnie, to punkty $Y(k), Y(l)$ są symetryczne względem środka odcinka BC.

3. Szczególne konfiguracje

W tej części zajmiemy się pewnymi konfiguracjami geometrycznymi, w których pojawiają się proste ξ trójkątów lub mają one pewną własność.

Konfiguracja 1

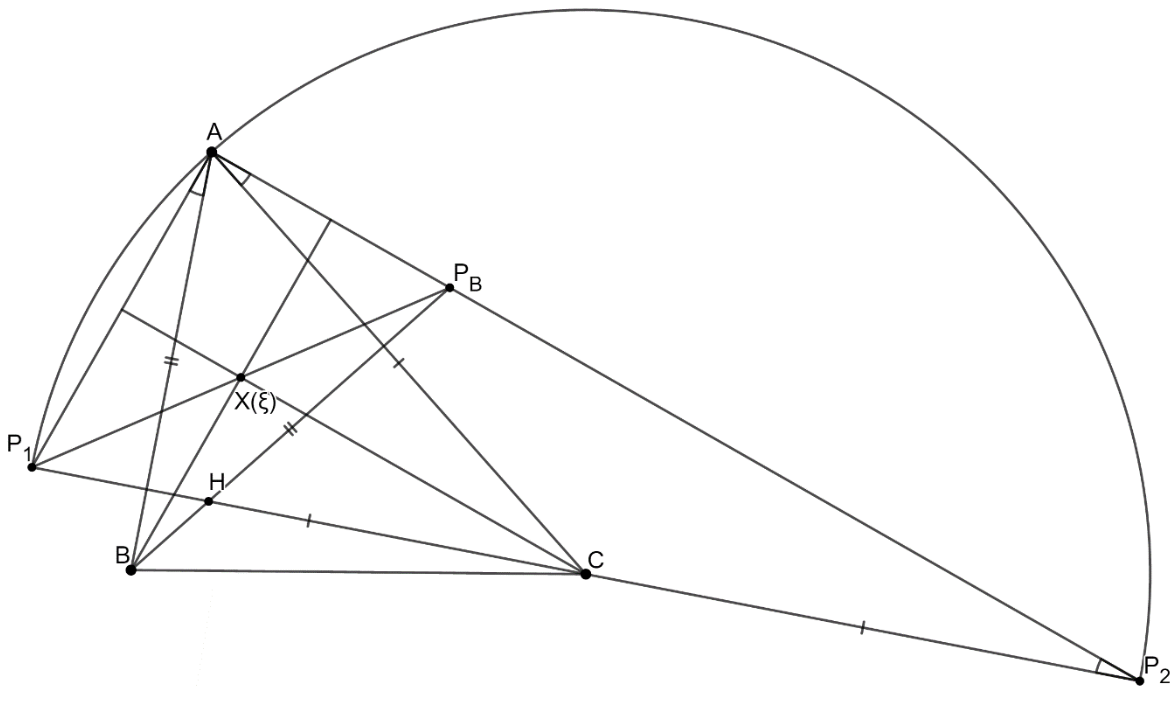
Prosta ξ ΔABC przecina proste CH, BH w takich punktach P_C, P_B, że P_C, P_B są sprzężone izogonalnie w kącie $\measuredangle BAC$. Wówczas punkty $X(\xi), Y(\xi)$ są sprzężone izogonalnie w kącie $\measuredangle BAC$.



rys. 14

Dowód

Pokażemy, że $X(\xi), Y(\xi)$ są izogonalnie sprzężone w $\measuredangle P_CAP_B$. Ponieważ prosta $AY(\xi)$ jest wysokością w ΔP_CAP_B opuszczoną z kąta prostego, trzeba pokazać, że $X(\xi)$ jest środkiem P_CP_B, czyli środkiem okręgu opisanego na ΔP_CAP_B, bo środek okręgu opisanego na trójkącie jest sprzężony izogonalnie z ortocentrum tego trójkąta. Wiemy, że $\measuredangle P_CAB = \measuredangle CAP_B$, czyli $\measuredangle P_CAB = 45° - \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Oznaczmy przez P_1, P_2 punkty przecięcia okręgu o środku w C i promieniu CA z prostą CH. $\measuredangle P_1AP_2 = 90°$, a z twierdzenia o kącie środkowym $\measuredangle AP_2P_1 = \frac{1}{2}\measuredangle ACP_1 = 45° - \frac{1}{2}\measuredangle BAC = \measuredangle P_1AB$ (ostatnia równość wynika z $P_1C \perp AB$). Zatem $P_1 = P_C$ oraz punkt P_B leży na prostej AP_2. Przez analogię wnioskujemy, że $BP_B = BA$. Ponieważ A, P_B, P_2 są współliniowe, to $CX(\xi) \parallel AP_2$, więc z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie $CX(\xi)$ połowi AP_C, ale $CP_C = CA$, zatem $CX(\xi)$ jest symetralną AP_C. Analogicznie $BX(\xi)$ jest symetralną AP_B. Ostatecznie $X(\xi)$ jest faktycznie środkiem okręgu opisanego na ΔP_CAP_B, co kończy dowód.



rys. 15

Konfiguracja 2

Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano po zewnętrznych stronach kwadraty $ABRS$ i $ACTU$. Wówczas prosta RT jest prostą ξ ΔABC, której punkt $X(\xi)$ pokrywa się ze środkiem odcinka RT.

Dowód

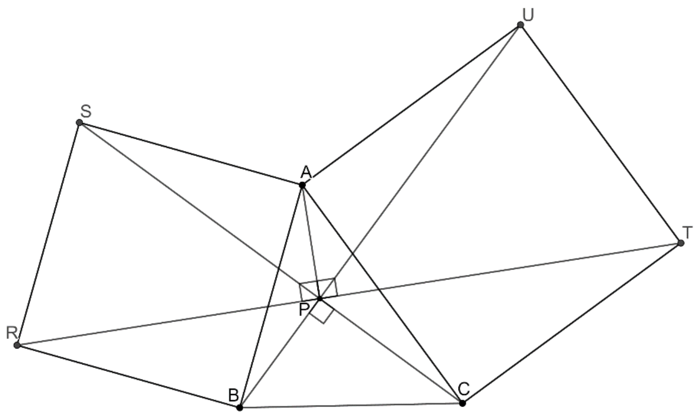
Aby pokazać pierwszą część wystarczy udowodnić, że rzut A na prostą RT leży na ω_{BC}. Pokazanie drugiej części jest równoważne pokazaniu, że środek odcinka RT leży na ω_{BC} i na ogół nie jest rzutem A na RT (chyba, że $X(RT) = Y(RT)$).

Lemat 3.1

Proste RT, BU, CS są współpękowe.

Dowód

Rozważmy obrót o $90°$ o środku w punkcie A. Wówczas punkt S przejdzie na B, a C na U, zatem odcinek CS przejdzie na odcinek BU, więc $BU \perp CS$. Niech P będzie punktem przecięcia prostych BU, CS. Pokazaliśmy, że P leży na okręgu ω_{CU} opisanym na $ACTU$ oraz okręgu ω_{BS} opisanym na $ABRS$. Wiemy, że średnicą pierwszego z tych okręgów jest również AT, a drugiego AR. Ostatecznie $\measuredangle APR = \measuredangle APT = 90°$, czyli P leży na RT.



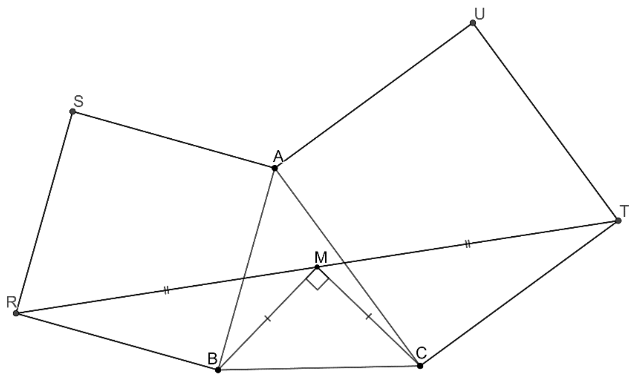
rys. 16

Lemat 3.2

Niech M będzie środkiem odcinka RT. Wówczas trójkąt BMC jest prostokątny równoramienny.

Dowód

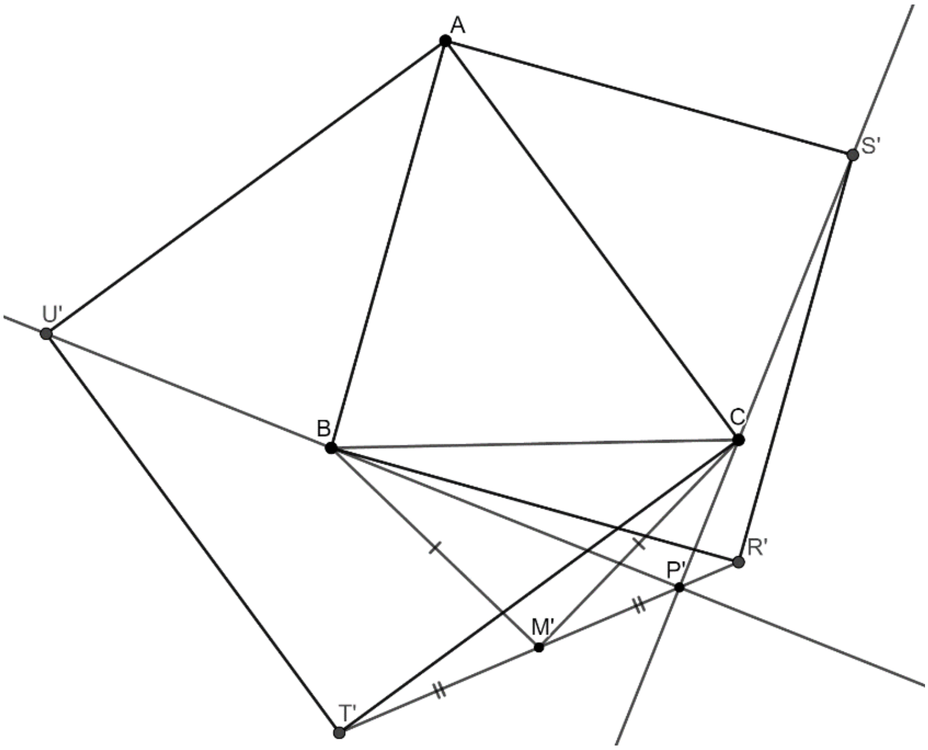
Z twierdzenia o trzech obrotach dla sześciokąta $RBACTM$, teza.



rys. 17

Punkt P z *Lematu 3.1* jest rzutem A na RT i leży na ω_{BC}, tak jak punkt M z *Lematu 3.2*, który nie zależy od położenia punktu P, co chcieliśmy udowodnić. Zauważmy jeszcze, że punkt $X(RT)$ jest środkiem łuku $\widehat{BC}$ okręgu ω_{BC} oraz z *Lematu 1.3* prosta $AY(RT)$ przecina ten okrąg w drugim środku łuku $\widehat{BC}$ zatem $X(RT) = Y(RT) \Leftrightarrow AB = AC$.

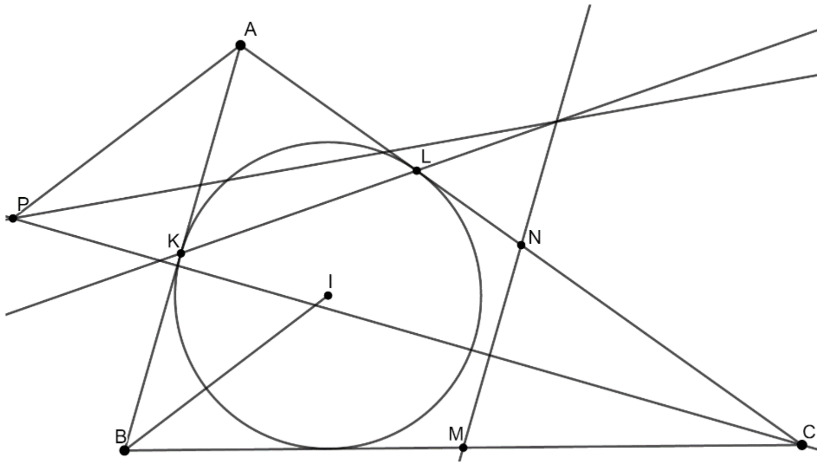
Analogiczny dowód można przeprowadzić, kiedy oba kwadraty zbudowane są po wewnętrznych stronach. Środek odcinka $R'T'$ będzie wtedy drugim obok M środkiem łuku $\widehat{BC}$ okręgu ω_{BC}. Spostrzegliśmy wcześniej, że z *Lematu 1.3* prosta AP przecina ten okrąg w odbiciu punktu M względem środka BC, czyli w drugim środku łuku. Teraz wiemy, że drugim środkiem łuku jest M', więc punkty $A, Y(RT), X(R'T')$ są współliniowe. Ponownie z *Lematu 1.3* jeśli oznaczymy przez Q_1 przecięcie RT z wysokością ΔABC z punktu C oraz Q_2 przecięcie $R'T'$ z wysokością ΔABC z punktu B, to punkty A, Q_1, Q_2 są współliniowe.



rys. 18

Zadanie 2

W ΔABC prosta CP jest wysokością, przy czym prosta AP jest równoległa do dwusiecznej kąta $\measuredangle ABC$. Niech K, L będą punktami styczności okręgu wpisanego w ΔABC z bokami AB, AC odpowiednio. Oznaczmy przez M, N środki BC, CA. Pokazać, że KL, MN oraz prosta ξ ΔABC przechodząca przez punkt P są współpękowe.



Rozwiązanie

rys. 19

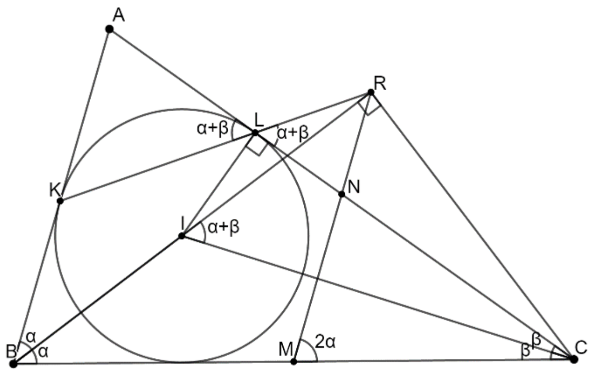
Sprawdzimy, że te proste przecinają się na ω_{BC}. Gdyby tak było, to proste KL i MN przecinałyby ten okrąg w tym samym punkcie co dwusieczna kąta $\measuredangle ABC$, co wynika z *Lematu 1.1*.

Lemat 3.3

Dwusieczna kąta $\measuredangle ABC$ przecina prostą KL w punkcie R. Wówczas $\measuredangle BRC = 90°$.

Dowód

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w ΔABC. Ponieważ $\measuredangle ILC = 90°$ teza lematu jest równoważna pokazaniu, że czworokąt $CILR$ jest cykliczny. Oznaczmy $\frac{1}{2}\measuredangle ABC = \alpha$ oraz $\frac{1}{2}\measuredangle ACB = \beta$. Wtedy $\measuredangle CIR = \alpha + \beta$. Zauważmy, że $\measuredangle RLC = \measuredangle ALK = 90° - \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$, gdzie pierwsza równość to kąty wierzchołkowe, a druga wynika z tego, że $AK = AL$, o czym mówi nam najmocniejsze twierdzenie planimetrii. Z równości kątów dostaliśmy cykliczność $CILR$, czyli tezę lematu.



rys. 20

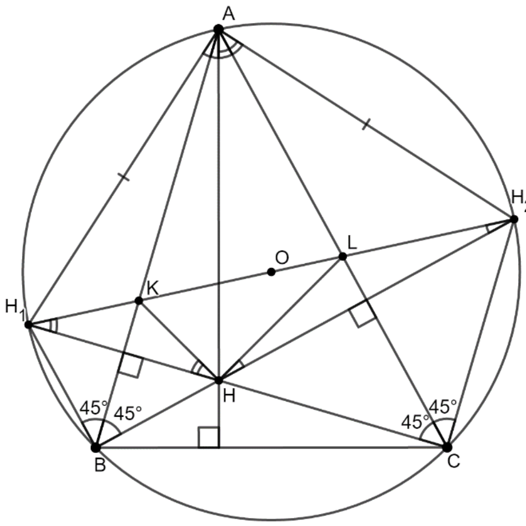
Z *Lematu 3.3* wnioskujemy, że M jest środkiem okręgu opisanego na ΔBRC (trójkąt jest prostokątny, a M to środek przeciwprostokątnej), zatem przy oznaczeniach z *Lematu 3.3* $\measuredangle RMC = 2\alpha = \measuredangle ABC$, czyli AB i RM są równoległe. Z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie N leży na RM, co kończy rozwiązanie.

Konfiguracja 3

W ΔABC $\measuredangle BAC = 45°$. Niech H_1, H_2 oznaczają odbicia ortocentrum H tego trójkąta względem prostych AB, AC odpowiednio. Wówczas prosta H_1H_2 jest prostą ξ ΔABC, przy czym $Y(H_1H_2)$ jest środkiem okręgu opisanego na ΔABC. Ponadto H_1H_2 jest również prostą ξ ΔHBC.

Dowód

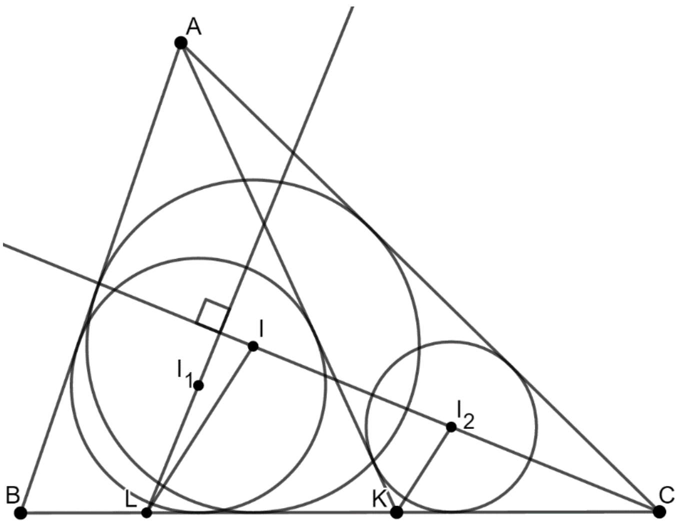
$\measuredangle H_1AB = \measuredangle BAH = 90° - \measuredangle ABC = \measuredangle H_1CB$, zatem H_1 leży na okręgu opisanym na ΔABC. Analogicznie H_2 również. Zauważmy, że $\measuredangle BAH + \measuredangle HAC = 45°$ oraz z symetrii $\measuredangle H_1AB = \measuredangle BAH$ i $\measuredangle CAH_2 = \measuredangle HAC$, więc $\measuredangle H_1AB + \measuredangle CAH_2 = 45°$, zatem $\measuredangle H_1AH_2 = 90°$, czyli H_1H_2 jest średnicą okręgu opisanego na ΔABC. W szczególności środek okręgu opisanego leży na tej prostej. Ponownie z symetrii $AH_1 = AH = AH_2$, więc rzut A na odcinek H_1H_2 jest jego środkiem, czyli środkiem okręgu opisanego na ΔABC. Niech K, L będą punktami przecięcia prostej H_1H_2 z AB, AC odpowiednio. Pokazanie, że H_1H_2 jest prostą ξ ΔHBC jest równoważne pokazaniu, że $\measuredangle KHL = 90°$. Łatwo zauważyć, że $\measuredangle BHC = 135°$. Pokażemy, że $\measuredangle KHH_1 + \measuredangle LHH_2 = 45°$. Korzystając z symetrii i przenosząc kąty po okręgu mamy $\measuredangle KHH_1 + \measuredangle LHH_2 = \measuredangle KH_1H + \measuredangle LH_2H = \measuredangle CAH + \measuredangle BAH = 45°$, co kończy dowód.



rys. 21

Zadanie 3

Niech K będzie punktem na boku BC ΔABC. Oznaczmy przez I, I_1, I_2 środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ABK, AKC odpowiednio. Prosta przechodząca przez I równoległa do I_2K przecięła odcinek BC w punkcie L. Pokazać, że prosta I_1L jest prostopadła do dwusiecznej kąta $\measuredangle ACB$.



rys. 22

Rozwiązanie

Lemat 3.4

W ΔABC punkt X jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt do boku AB. Wówczas $AX = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

Dowód

Oznaczmy pozostałe punkty styczności z bokami AC, BC jako Y, Z. Z najmocniejszego twierdzenia planimetrii wiemy, że $AX = AY, BX = BZ, CY = CZ$. Zatem

$$AB + AC - BC = AX + BX + AY + CY - BZ - CZ = 2AX$$

Lemat 3.5

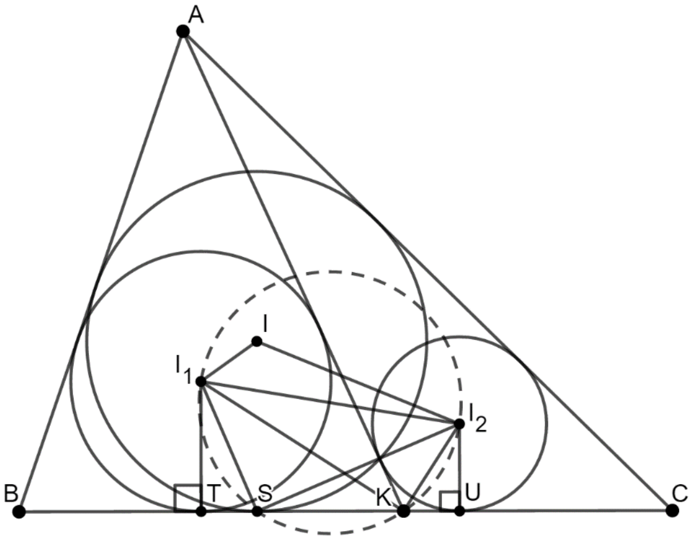
Oznaczmy przez S, T, U punkty styczności okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ABK, AKC z prostą BC. Wówczas $KU = ST$.

Dowód

Korzystając z *Lematu 3.4* dostajemy

$$KU = \frac{1}{2}(CK + AK - CA)$$

$$ST = BS - BT = \frac{1}{2}(BC + AB - CA - BK - AB + AK) = \frac{1}{2}(CK + AK - CA)$$



rys. 23

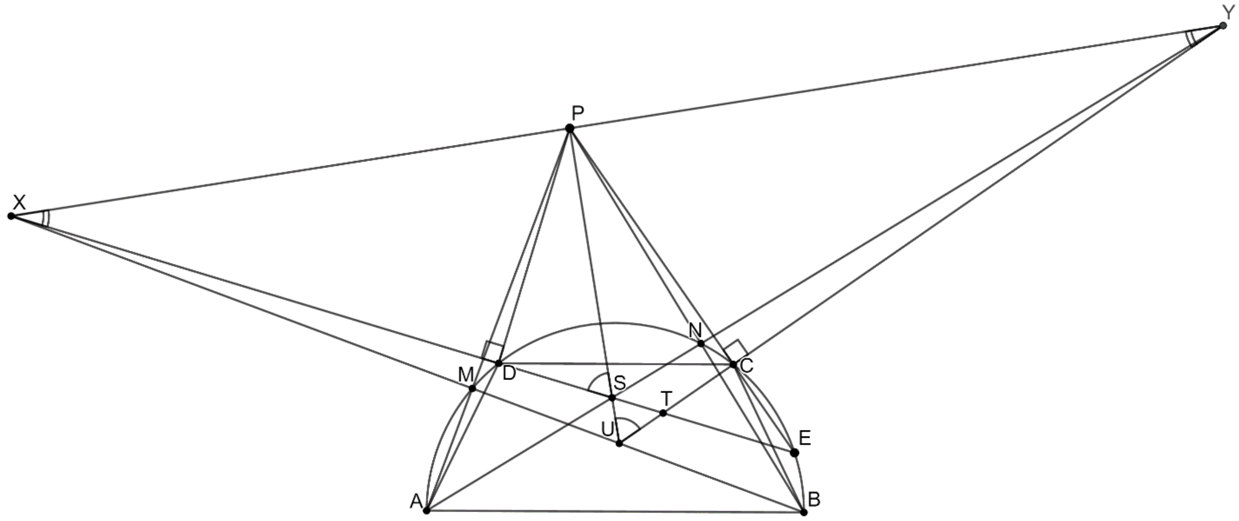
Zauważmy teraz, że I_1, I_2 leżą na dwusiecznych kątów przyległych $\measuredangle AKB$ i $\measuredangle AKC$, więc $\measuredangle I_1KB = \frac{1}{2}\measuredangle AKB = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle AKC = 90° - \measuredangle I_2KC$ oraz $\measuredangle I_1KI_2 = 90°$.
Ponieważ $\measuredangle I_1TK = \measuredangle I_2UK = 90°$, to z cechy kk mamy podobieństwo trójkątów $\Delta I_1TK \sim \Delta KUI_2$, zatem $\frac{I_1T}{TK} = \frac{KU}{I_2U}$. Z *Lematu 3.5* $KU = ST$ i $TK = ST + SK = SU$. Wstawiając w uzyskany iloraz dostajemy $\frac{I_1T}{SU} = \frac{ST}{I_2U} \Leftrightarrow \frac{I_1T}{ST} = \frac{SU}{I_2U}$, więc $\Delta I_1TS \sim \Delta SUI_2$. Stąd $\measuredangle I_2SU = \measuredangle TI_1S = 90° - \measuredangle I_1ST$. Zatem $\measuredangle I_1SI_2 = 90° = \measuredangle I_1KI_2$, czyli czworokąt I_1I_2KS jest wpisany w okrąg $\omega_{I_1I_2}$. Oznacza to, że prosta BC jest prostą ξ ΔII_1I_2, w której $S = Y(BC), K = X(BC)$. Ponieważ L leży na BC oraz $IL \parallel I_2K$ to prosta I_1L zawiera wysokość trójkąta II_1I_2, co oczywiście kończy rozwiązanie.

Zadanie 4

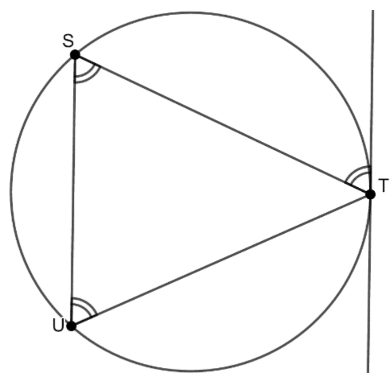
Trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, jest wpisany w okrąg ω o średnicy AB. Punkt P leży poza ω. Prosta k prostopadła do PD przechodzi przez punkt D i przecina ω po raz drugi w punkcie E. Załóżmy ponadto, że punkty P, C, E są współliniowe. Niech proste AP, BP przecinają ω po raz drugi w punktach M, N odpowiednio. Prosta k przecina proste AN, BM w S, X. Prosta l prostopadła do PC przechodzi przez C i przecina proste k, BM, AN w T, U, Y. Pokazać, że symetralna odcinka XY jest styczna do okręgu opisanego na ΔSTU.

Rozwiązanie

Z *Lematu 1.2* wiemy, że prosta k jest prostą ξ ΔPAB, gdzie $D = Y(k)$. Zatem $E = X(k)$. Z drugiej strony prosta l również jest prostą ξ ΔPAB, gdzie $C = Y(l)$. Zauważmy, że proste BM, AN zawierają wysokości trójkąta PAB, przy czym prosta k przecina je w X, S, a prosta l w U, Y. Zatem z *Lematu 1.3*, ponieważ P, C, E są współliniowe, to X, P, Y oraz P, S, U również. Ponadto, ponieważ $CD \parallel AB$, to trójkąty PXS i PYU są podobne przeciwnie zorientowane. Stąd $\sphericalangle TSU = \sphericalangle PSX = \sphericalangle PUY$ oraz $\sphericalangle PXS = \sphericalangle PYU$, zatem trójkąty XTY i STU są równoramienne, co oznacza, że punkt T leży na symetralnej XY oraz jest środkiem jednego z łuków $\widehat{ST}$ okręgu opisanego na ΔSTU. Co więcej $\sphericalangle XPS = 90°$ z definicji prostej ξ, więc prosta PS jest równoległa do symetralnej XY. Łatwo sprawdzić, że prosta równoległa do boku trójkąta, przechodząca przez środek łuku okręgu opisanego na tym trójkącie, wyznaczonego przez ten bok, jest styczna do tego okręgu, co kończy rozwiązanie.



rys. 24



rys. 25

4. Kilka uogólnień

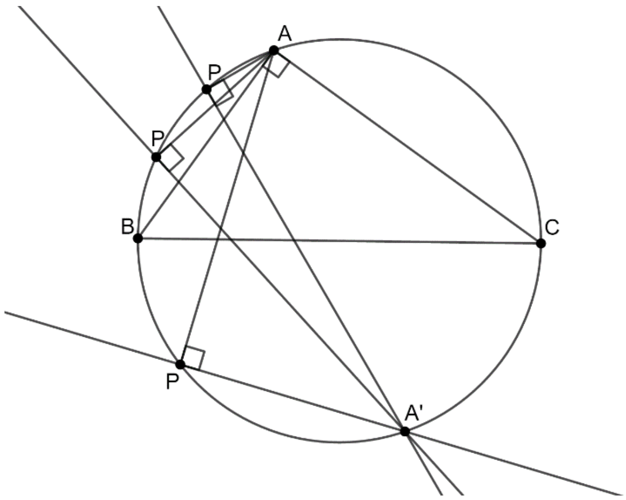
Przyjęta do tej pory definicja prostej ξ w trójkącie obowiązywała dla trójkątów nieprostokątnych. Sprawdzenie, że przyjęta definicja prostej ξ ΔABC, gdzie ΔABC jest prostokątny, ale $\measuredangle BAC \neq 90°$ zachowuje dowiedzione własności prostej ξ nie jest niczym trudnym (każdy dowód przebiega analogicznie). Definicja ta jednak traci sens, kiedy $\measuredangle BAC$ jest prosty (wówczas byłaby to każda prosta płaszczyzny!). We wprowadzeniu tej definicji korzystne będzie spojrzenie na problem tak, jak na *Lemat 1.2*. Udowodnijmy zatem

Lemat 4.1

W ΔABC $\measuredangle BAC = 90°$. Przez punkt $P \neq A$ na okręgu opisanym na tym trójkącie przechodzi prosta k i jest prostopadła do AP. Wówczas wszystkie uzyskane proste k mają punkt wspólny.

Dowód

Oznaczmy przez A' punkt antypodyczny do A. Ponieważ $AP \perp k$, to prosta k przetnie po raz drugi okrąg w punkcie A' lub będzie do niego styczna jeśli $P = A'$, zatem wszystkie proste k mają punkt wspólny A'.



rys. 26

Definicja 3

W ΔABC $\measuredangle BAC = 90°$. Prostą ξ ΔABC nazwiemy prostą, która przechodzi przez punkt A' antypodyczny do A.

Zauważmy, że jeśli $\measuredangle BAC$ jest prosty, to środek odcinka BC jest środkiem okręgu opisanego na ΔABC, więc punkt A' jest odbiciem punktu A względem tego środka. Wynika z tego, że czworokąt $ABA'C$ to prostokąt, zatem ma parami równoległe boki. Oznacza to, że punkt A' spełnia tezę *Lematu 1.1*, więc dla tak przyjętej prostej ξ ΔABC *Definicja 2* jest poprawna.

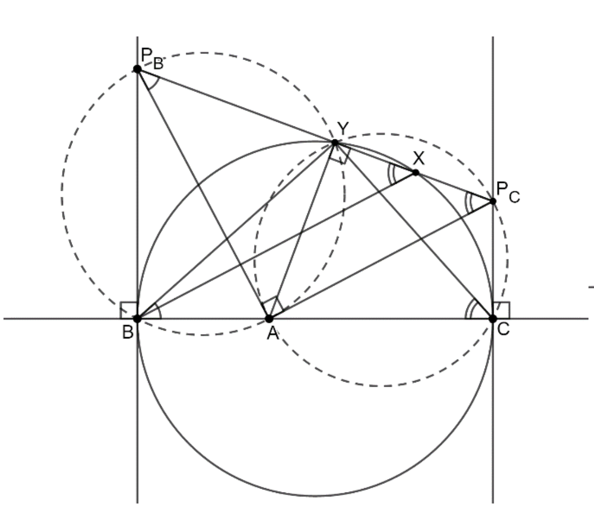
Przekonamy się, że przyjęte definicje są poprawne również dla trójkątów zdegenerowanych do prostych.

Lemat 4.2

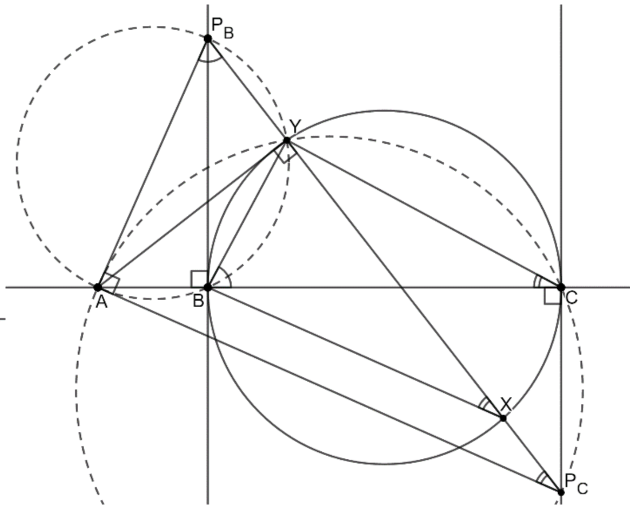
Na prostej dane są trzy punkty A, B, C. Na prostych prostopadłych do prostej BC w punktach B i C wybrano takie punkty P_B, P_C, że $\sphericalangle P_B A P_C$ jest prosty. Wówczas rzut A na $P_B P_C$ leży na okręgu ω_{BC}. Ponadto jeśli przez X oznaczymy drugie przecięcie prostej $P_B P_C$ z ω_{BC} to $AP_C \parallel BX$ i $AP_B \parallel CX$.

Dowód

Oznaczmy przez Y rzut A na $P_B P_C$. Ponieważ $\sphericalangle P_B BA = \sphericalangle AYP_B = \sphericalangle ACP_C = 90°$, to czworokąty $AYP_B B, AYP_C C$ są cykliczne. Zatem $\sphericalangle YBC + \sphericalangle YCB = \sphericalangle AP_B Y + \sphericalangle AP_C Y = 90°$, więc Y leży na ω_{BC}. Teraz ponieważ $\sphericalangle YP_C A = \sphericalangle YCA = \sphericalangle BXP_B$ $AP_C \parallel BX$, co daje również $P_B \parallel CX$, co kończy dowód (*rys. 27*, *rys. 28* dla przypadków kiedy punkt A jest wewnątrz lub na zewnątrz odcinka BC).



rys. 27



rys. 28

Zastanówmy się jeszcze, jak skonstruować prostą ξ ΔABC przechodzącą przez dowolny punkt P. W myśl *Lematu 1.2* oznaczmy przez Y_1, Y_2 punkty przecięcia okręgów ω_{AP} i ω_{BC}. Wtedy

$$\sphericalangle AY_1P = \sphericalangle AY_2P = 90°,$$

więc z *Lematu 1.2* proste PY_1 oraz PY_2 są prostymi ξ ΔABC. Ponieważ dwa okręgi przecinają się w maksymalnie dwóch punktach, to przez punkt P możemy poprowadzić co najwyżej dwie takie proste. Wiemy też jednak, że dwa okręgi mogą mieć jeden punkt wspólny (są styczne) lub mogą się nie przecinać. Oznacza to, że dla pewnych punktów P możemy poprowadzić dwie proste ξ przez niego przechodzące, dla innych jedną, a dla ostatnich taka prosta nie będzie istnieć. Zdefiniujmy więc dla jakich punktów nie można takiej prostej wyznaczyć, a dla jakich można.

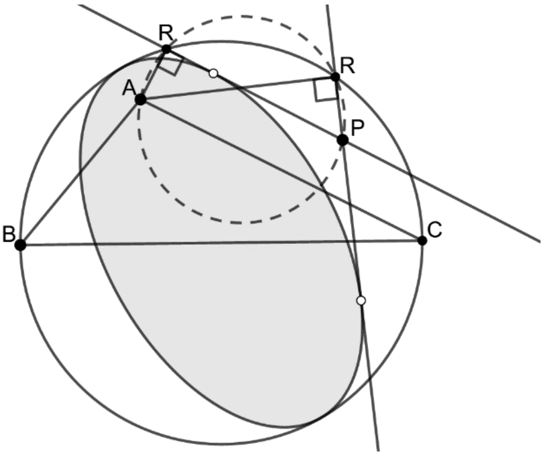
Lemat 4.3

W trójkącie rozwartokątnym ABC kąt przy wierzchołku A jest rozwarty. Wówczas miejscem geometrycznym punktów P, dla których okręgi ω_{AP} i ω_{BC} są rozłączne, jest wnętrze elipsy, której jednym z ognisk jest punkt A.

Dowód

Rozważmy elipsę ε, której jednym z ognisk jest punkt A, a okręgiem wielkim jest ω_{BC} (taka elipsa istnieje, ponieważ punkt A leży wewnątrz okręgu ω_{BC}, co wynika z tego, że $\sphericalangle BAC$ jest rozwarty).

Wiemy, że miejscem geometrycznym rzutów prostokątnych ogniska elipsy na jej styczne jest okrąg wielki tej elipsy. Innymi słowy, jeśli przez R oznaczymy punkt wspólny okręgów ω_{AP} i ω_{BC}, dla pewnego punktu P, to prosta PR będzie styczna do ε. Zatem okręgi te będą rozłączne kiedy z punktu P nie będziemy mogli poprowadzić stycznych do ε, czyli kiedy P znajduje się w jej wnętrzu.



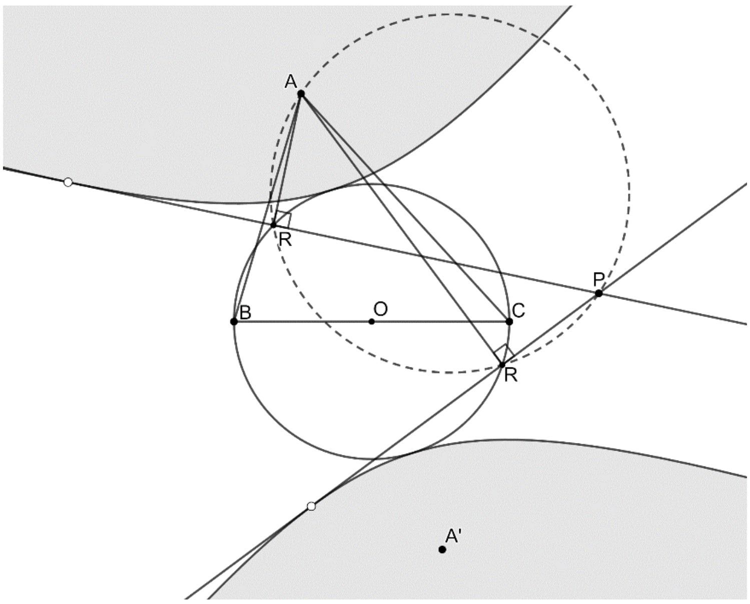
rys. 29

Lemat 4.4

W ΔABC kąt przy wierzchołku A jest ostry. Wówczas miejscem geometrycznym punktów P, dla których okręgi ω_{AP} i ω_{BC} są rozłączne, jest wnętrze hiperboli, której jednym z ognisk jest punkt A.

Dowód

Niech A' będzie odbiciem symetrycznym punktu A względem środka odcinka BC. Rozważmy hiperbolę η o ogniskach A, A' i stałej BC. Wtedy O, środek odcinka BC, jest środkiem tej hiperboli. Wiemy, że miejscem geometrycznym rzutów prostokątnych ogniska tej hiperboli na jej styczne jest okrąg o środku w O i promieniu $\frac{1}{2}BC$, czyli ω_{BC}. Znaczy to, że jeśli R będzie punktem wspólnym okręgów ω_{AP} i ω_{BC}, dla pewnego punktu P, to prosta PR będzie styczna do η. Więc okręgi te będą rozłączne jeśli punktu P nie będziemy mogli poprowadzić stycznych do η, czyli jeśli P znajduje się w jej wnętrzu.



rys. 30

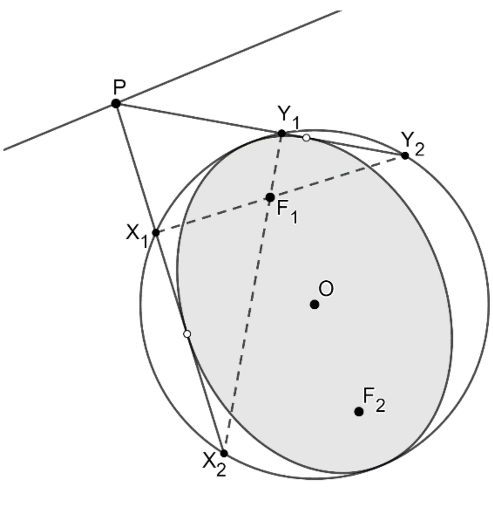
Wniosek
Zauważmy, że $Y(\xi)$ dla prostej $\xi\ \Delta ABC$ zawsze leży na ω_{BC} i jest rzutem punktu A, czyli ogniska rozważanych stożkowych, na tą prostą. Oznacza to, że każda prosta $\xi\ \Delta ABC$ jest styczna do tej stożkowej.

Tym samym sprowadziliśmy nasz problem do rozpatrywania wyłącznie punktu i okręgu, ponieważ styczność prostej do odpowiedniej stożkowej nie zależy od wyboru średnicy danego okręgu. Bezpośrednio z udowodnionych własności wynikają następujące obserwacje

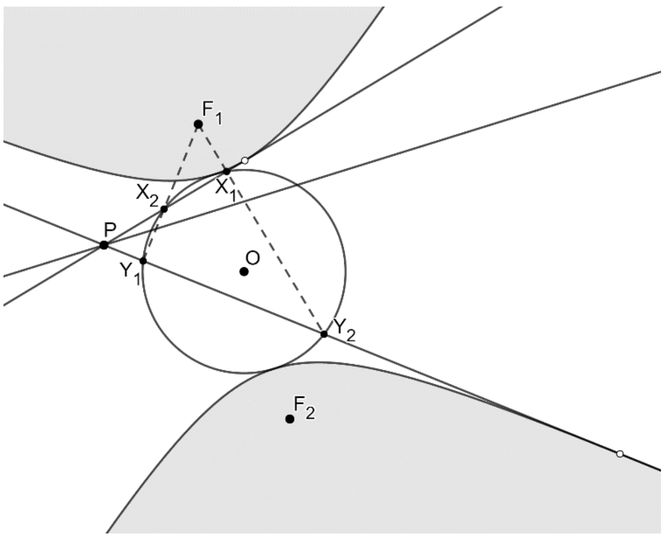
(1) Jeśli prosta k jest prostą $\xi\ \Delta ABC$, to jest też prostą $\xi\ \Delta A'BC$, gdzie A' jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka BC, ponieważ elipsa i hiperbola mają dwa ogniska symetryczne względem ich środka symetrii. Ponadto punkt $X(k)$ dla trójkąta ABC jest punktem $Y(k)$ dla trójkąta $A'BC$ oraz punkt $Y(k)$ dla trójkąta ABC jest punktem $X(k)$ dla trójkąta $A'BC$.
(2) Jeśli prosta k jest prostą $\xi\ \Delta ABC$, to jest też prostą $\xi\ \Delta AST$, gdzie odcinek ST jest dowolną średnicą okręgu ω_{BC}.
(3) Dana jest prosta $\xi\ \Delta ABC$. Miejscem geometrycznym punktów P, takich, że dana prosta jest prostą $\xi\ \Delta PBC$ jest $AY(\xi) \cup l$, gdzie l jest prostą równoległą do $AY(\xi)$ przechodzącą przez punkt $X(\xi)$. Zaiste, ponieważ rzut punktu P na daną prostą musi leżeć na ω_{BC} jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, więc będą to proste prostopadłe do danej, przechodzące przez jej punkty przecięcia z ω_{BC}.

Równoważne obserwacji *(3)* jest następujące twierdzenie: *Prosta k przecina okrąg o środku w O w punktach X, Y. Wówczas miejscem geometrycznym ognisk krzywych stożkowych, których środkiem symetrii jest punkt O stycznych do prostej k i danego okręgu jest suma $m \cup n$, gdzie m, n są prostymi prostopadłymi do k przechodzącymi przez punkty X, Y.*

Lemat 4.5
Dana jest krzywa stożkowa o ogniskach F_1, F_2 i stałej $2a$. Oznaczmy O jako środek tej krzywej. Niech Ω będzie okręgiem o środku O i promieniu a. Z punktu P na prostej f, biegunowej punktu F_1 względem Ω, poprowadzono do tej krzywej styczne, które przecięły Ω w punktach X_1, X_2, Y_1, Y_2 odpowiednio. Wówczas F_1 jest punktem przekątnym czworokąta zupełnego $X_1X_2Y_1Y_2$.



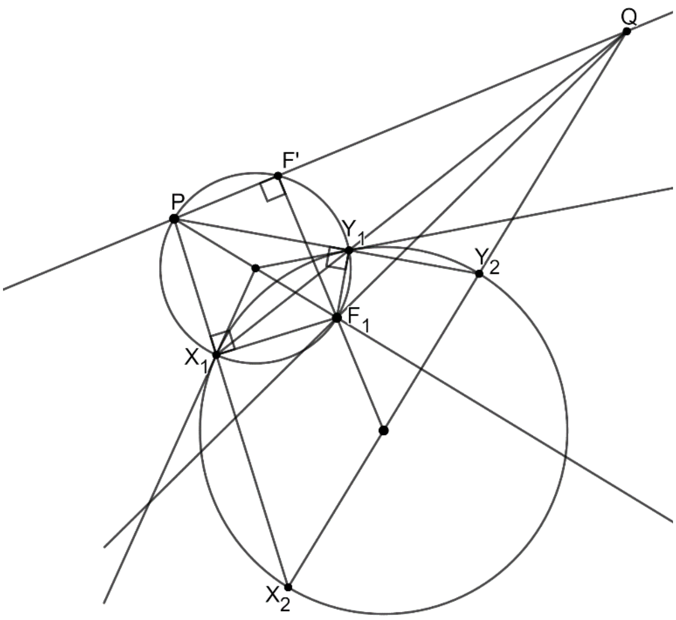
rys. 31



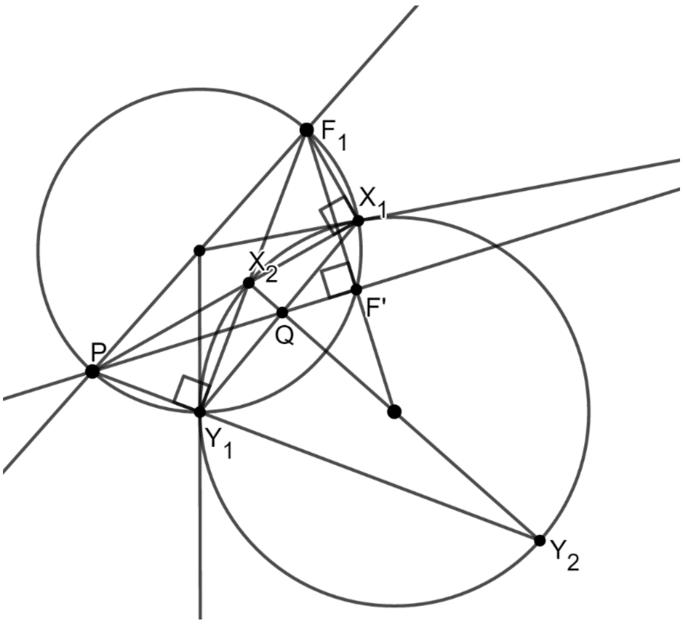
rys. 32

Dowód

Wykorzystamy fakt, że rzuty prostokątne punktu F_1 na styczne leżą na Ω. Dobieramy oznaczenia tak, żeby punkty X_1, Y_1 były tymi rzutami, czyli leżały na $\omega_{F_1 P}$. Zauważmy, że prosta, która zawiera średnicę Ω przechodząca przez F_1 jest prostopadła do f. Oznaczmy punkt przecięcia tych prostych jako F'. Zatem punkt F' leży na okręgu $\omega_{F_1 P}$. Przeinwertujmy okrąg $\omega_{F_1 P}$ względem Ω. $\omega_{F_1 P}$ nie przechodzi przez środek Ω, więc przejdzie w inny okrąg. Zauważmy, że obrazem F_1 w tej inwersji jest F', a obrazami X_1, Y_1 są one same. Zatem obrazem $\omega_{F_1 P}$ jest on sam. Ponieważ $\Omega \neq \omega_{F_1 P}$, to okręgi te muszą być ortogonalne. Wnioskujemy stąd, że styczne do Ω w punktach X_1, Y_1 przecinają się w środku $\omega_{F_1 P}$, czyli środku odcinka $F_1 P$. Niech Q będzie przecięciem prostych $X_1 Y_1$ i $X_2 Y_2$. Z prawa wzajemności biegunowych mamy, że prosta $F_1 P$ jest biegunową Q oraz F_1 leży na biegunowej P, które przecinają się w punkcie przekątnym czworokąta zupełnego $X_1 X_2 Y_1 Y_2$, co kończy dowód.



rys. 33



rys. 34

Lemat 4.5 i *Lemat 1.3* pokazują, że miejscem geometrycznym przecięć prostych P_BP_C i $P_B''P_C''$ z *Lematu 1.3* jest prosta biegunowa punktu A względem ω_{BC} (implikację odwrotną do *Lematu 4.5* widać na rysunku *Lematu 1.3*, ponieważ proste te mogą przecięć się tylko na tej biegunowej). Zauważmy też punkty X_2, Y_2 są rzutami punktu F_2 na styczne z punktu P i są symetryczne względem punktu O. Wynika z tego, że biegunowa punktu A względem ω_{BC} jest również miejscem geometrycznym przecięć prostych k, l z wniosku pod *Lematem 2.4*, dla punktu A' (symetrycznego z A względem środka BC). Warto zauważyć, że w obu przypadkach nie zależy ono od wyboru średnicy ω_{BC}.

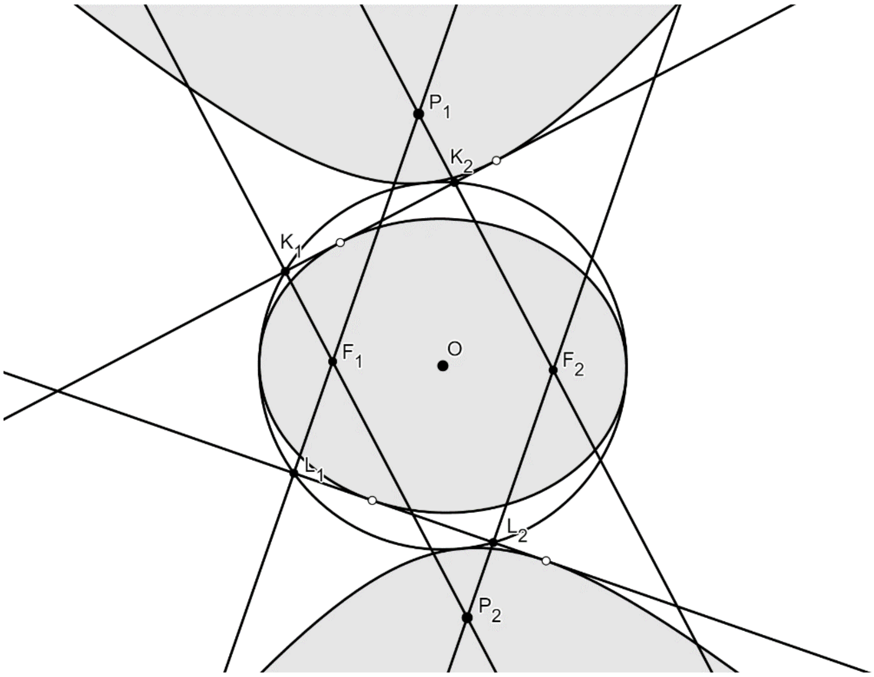
Z pomocą poczynionych i udowodnionych obserwacji można udowodnić

Lemat 4.6

Punkty P_1, P_2 są ogniskami krzywej stożkowej Ψ, której środkiem symetrii jest O. Niech Ω będzie okręgiem o środku w O stycznym do Ψ. Oznaczmy przez k, l dowolne dwie styczne do Ψ. Wówczas istnieje co najwyżej jedna niezdegenerowana krzywa stożkowa o środku w O styczna do k, l, Ω.

Dowód

Oznaczmy punkty przecięcia prostych k, l z Ω K_1, K_2, L_1, L_2 odpowiednio. Z obserwacji *(3)* wiemy, że interesujące nas ogniska krzywych stożkowych stycznych do danej prostej leżą na prostych prostopadłych do k przechodzących przez punkty K_1, K_2 oraz prostopadłe do l przechodzące przez punkty L_1, L_2. Oznaczmy zbiór przecięć tych czterech prostych $\{P_1, P_2, F_1, F_2\}$. Łatwo widzieć, że jednokładność o skali -1 i środku O przeprowadza prostą prostopadłą do k przez K_1 na tą przechodzącą przez K_2 i analogicznie dla prostej l. Zatem O jest środkiem symetrii czworokąta $P_1F_1P_2F_2$, co znaczy, że krzywa stożkowa o ogniskach F_1, F_2 i stałej równej średnicy Ω jest jedyną, spełniającą nasz warunek. Na koniec zauważmy, że jeśli punkt $P = k \cap l$ znajduje się na biegunowej ogniska Ψ względem Ω, to z *Lematu 4.5* $\{F_1, F_2\} \subset \{K_1, K_2, L_1, L_2\}$, a wtedy tak wybrana stożkowa jest zdegenerowana.



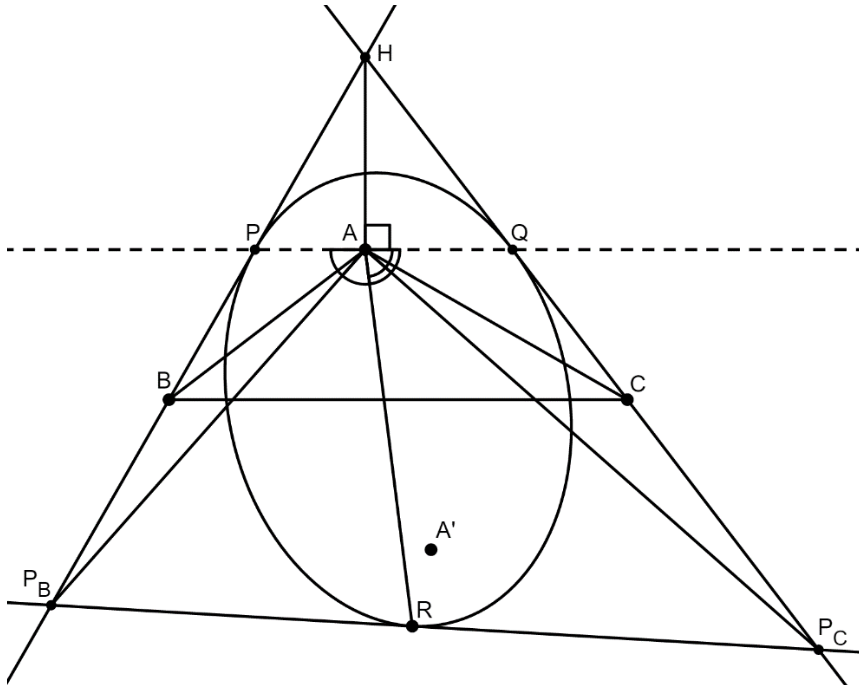
rys. 35

Lemat 4.7

Dany jest ΔABC oraz krzywa stożkowa o ogniskach A, A' i stałej równej długości odcinka BC, gdzie A' jest symetryczny z A względem środka BC. Proste BH, CH są styczne do danej stożkowej w punktach P, Q odpowiednio. Wówczas prosta PQ jest równoległa do prostej BC.

Dowód

Weźmy dowolną prostą ξ ΔABC, która przetnie proste BH, CH standardowo w punktach P_B, P_C. Ponadto niech R będzie punktem styczności rozważanej prostej ξ ze stożkową. Mamy zatem, że punkt P_B leży na dwusiecznej kąta $\measuredangle PAR$ oraz punkt P_C leży na dwusiecznej kąta $\measuredangle QAR$. Wiemy ponadto, że $\measuredangle P_B A P_C = 90°$. Więc dwusieczne $\measuredangle QAR$ i $\measuredangle PAR$ są prostopadłe, co znaczy, że punkty P, A, Q są współliniowe. Dodatkowo punkt H leży na dwusiecznej kąta $\measuredangle PAQ$. Ostatecznie $AH \perp PQ$ i oczywiście $AH \perp BC$ co daje tezę.



rys. 36

Okazuje się, że wykazaną powyżej współliniowość punktów P, A, Q można uogólnić. W tym celu udowodnimy

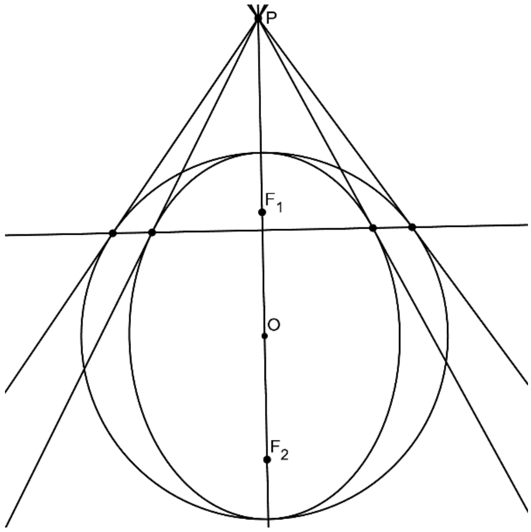
Lemat 4.8

Dana jest krzywa stożkowa Ψ o ogniskach F_1, F_2 i stałej $2a$. Oznaczmy przez O środek tej stożkowej. Wówczas biegunowa punktu P leżącego na prostej F_1F_2 względem tej krzywej stożkowej jest jego biegunową względem okręgu Ω o środku O i promieniu a.

Dowód

Zauważmy, że wierzchołki danej krzywej stożkowej, czyli jej punkty styczności z Ω, leżą na prostej F_1F_2. Oznaczmy przez S, T punkty przecięcia prostej przechodzącej przez P z Ψ. Wiemy, że na biegunowej punktu P leżą wszystkie jego sprzężenia harmoniczne z tak uzyskanymi odcinkami ST. W szczególności, tak jak już zauważyliśmy, prosta F_1F_2 przecina Ψ i Ω w tych samych punktach, więc obie biegunowe punktu P względem Ψ i Ω będą przechodzić przez punkt sprzężony harmonicznie do

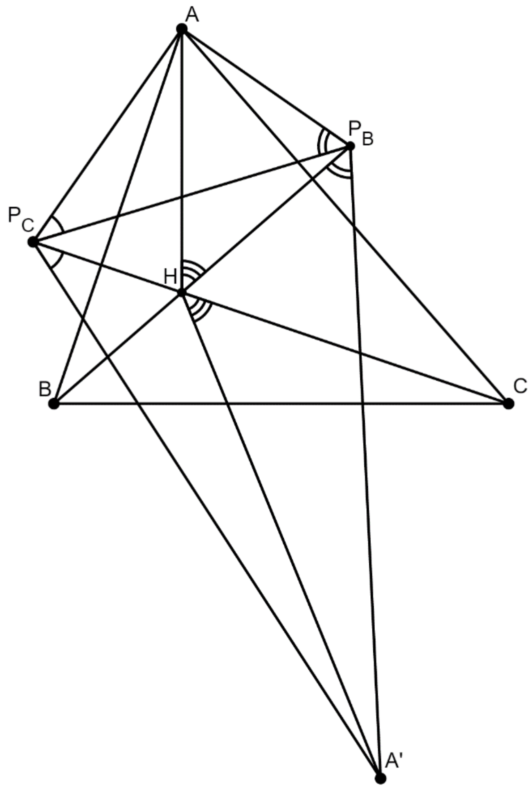
P w odcinku wyznaczanym przez wierzchołki Ψ. Ponadto, ponieważ P leży na osi symetrii Ψ, to jego biegunowa będzie prostopadła do niej, więc biegunowe punktu P względem Ψ i Ω mają wspólny punkt i kierunek, co oczywiście kończy dowód.



rys. 37

Patrząc teraz na *Lemat 4.7* widać, że ortocentrum H leży na biegunowej A względem ω_{BC}, więc leży na biegunowej A względem danej stożkowej, co z prawa wzajemności biegunowych daje współliniowość P, A, Q.

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę na to, że ponieważ proste BH, CH i prosta ξ ΔABC są styczne do odpowiedniej krzywej stożkowej, to z twierdzenia o izogonalności ognisk punkty A i A' są sprzężone izogonalnie w $\Delta P_B H P_C$.



rys. 38

Problemy otwarte

(1) Niech Z będzie przecięciem prostych $P_B P_C$ i $P_B{}' P_C{}'$ z *Lematu 2.2* oraz A' punktem symetrycznym z A względem środka odcinka BC. Wówczas proste ZA' oraz BC są równoległe.

(2) Niech k, l będą prostymi ξ ΔABC, takimi, że proste $Y(k)Y(l)$ i BC są równoległe. Oznaczmy P jako punkt przecięcia prostych k i l oraz A' symetryczny z A względem środka odcinka BC. Wówczas proste BC i PA' są prostopadłe.

(3) Niech A' będzie odbiciem punktu A względem środka odcinka BC w ΔABC. Proste k, l są wysokościami opuszczonymi z punktów B i C w trójkątach ABC i $A'BC$ odpowiednio. Dowolna prosta ξ ΔABC przecina k, l w P, Q odpowiednio. Wówczas kąty $\measuredangle PAQ$ i $\measuredangle PA'Q$ są równe lub sumują się do $180°$. Ponadto ich miara nie zależy od wyboru prostej ξ.

Bibliografia

1. A. V. Akopyan, *Geometry of Conics*

2. A. V. Akopyan, *Geometry in Figures*

3. D. Burek, *Dwustosunek i biegunowe*

4. A. Neugebauer, *Matematyka Olimpijska: Planimetria*

5. W. Pompe, *Wokół obrotów: przewodnik po geometrii elementarnej*