

Okręgi i biegunowe wokół stożkowych

Stanisław Majchrzak

Streszczenie

W prezentowanej pracy poruszymy zagadnienie cięciw krzywych stożkowych przechodzących przez ich ognisko. Zaprezentowane są w niej trzy twierdzenia dotyczące okręgów przechodzących przez ognisko, które konstruowane są z wykorzystaniem takiej cięciwy. W dalszej części pracy przedstawione są konfiguracje z wykorzystaniem biegunowych. Jako zastosowanie pokażemy kilka własności okręgu wpisanego.

1 Preliminaria

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcia krzywych stożkowych oraz pokażemy ich podstawowe własności. Przedstawimy podejście syntetyczne z pominięciem analitycznego. Na koniec wykażemy, że własności biegunowych względem okręgu można przenieść również na krzywe stożkowe.

1.1 Krzywe stożkowe

Krzywe stożkowe, inaczej krzywe stopnia drugiego, rozpoznawane są jako przekroje stożka. Należą do nich *elipsa*, *hiperbola* i *parabola*. Choć najczęściej można się spotkać z ich analitycznym przedstawieniem, to posiadają one mnóstwo geometrycznych własności.

Definicja 1.1.1. *Elipsą nazwiemy zbiór punktów, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów, zwanych ogniskami, jest stała.*

Łatwo zauważyć, że elipsa posiada dwie osie symetrii. Jedna z nich jest prostą przechodzącą przez ogniska elipsy, a druga symetralną odcinka łączącego te ogniska. Sumę odległości od ognisk elipsy punktów na elipsie będziemy nazywać stałą elipsy. Oczywiście wartość ta dla punktów znajdujących się wewnątrz elipsy będzie mniejsza od jej stałej, a dla punktów poza elipsą będzie odpowiednio większa.

Definicja 1.1.2. *Hiperbolą nazwiemy zbiór punktów, których wartość bezwzględna z różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów, zwanych ogniskami, jest stała.*

Hiperbola składa się z dwóch gałęzi. Podobnie jak elipsa posiada dwie osie symetrii. Jedną jest prosta przechodząca przez jej ogniska, a druga symetralną odcinka łączącego te ogniska. Stałą hiperboli będziemy nazywać wartość bezwzględną z różnicy odległości od ognisk punktów na hiperboli.

Definicja 1.1.3. *Parabola to zbiór punktów równoodległych od ustalonego punktu i prostej. Dany punkt nazywamy ogniskiem paraboli, a prostą kierownicą paraboli.*

Prostą prostopadłą do kierownicy paraboli przechodzącą przez jej ognisko będziemy nazywać osią paraboli. Jest to oczywiście jej oś symetrii. Punkt wspólny tej prostej z parabolą nazywamy wierzchołkiem paraboli.

Charakterystyczną dla stożkowych własnością jest ich własność optyczna. Dla konkretnych stożkowych wygląda ona następująco:

Fakt 1.1.1 (Własność optyczna elipsy). *Przypuśćmy, że prosta k jest styczna do elipsy w punkcie P . Wówczas prosta k jest dwusieczną zewnętrzną kąta $\angle F_1PF_2$, gdzie punkty F_1, F_2 to ogniska elipsy.*

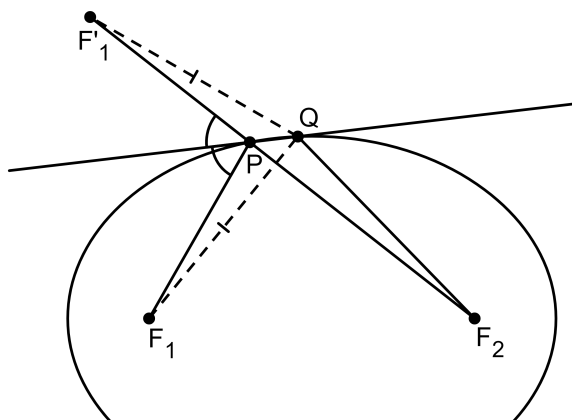
Dowód. Przypuśćmy, że dwusieczna zewnętrzna kąta $\angle F_1PF_2$ przecina elipsę w różnym od P punkcie Q . Niech F'_1 będzie odbiciem punktu F_1 względem tej dwusiecznej. Wtedy punkty F_2, P, F'_1 są współliniowe oraz zachodzi $PF_1 = PF'_1$, $QF_1 = QF'_1$. Zatem

$$F_2F'_1 = F_2P + PF'_1 = F_2P + PF_1 = F_2Q + QF_1 = F_2Q + QF'_1$$

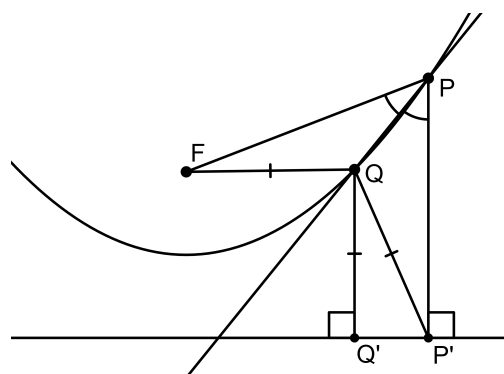
gdzie trzecia równość wynika z definicji elipsy. Otrzymaliśmy sprzeczność z nierównością trójkąta. \square

W analogiczny sposób można pokazać własność optyczną hiperboli:

Fakt 1.1.2 (Własność optyczna hiperboli). *Przypuśćmy, że prosta k jest styczna do hiperboli w punkcie P . Wówczas prosta k jest dwusieczną kąta $\angle F_1PF_2$, gdzie punkty F_1, F_2 to ogniska hiperboli.*



Rysunek 1



Rysunek 2

Fakt 1.1.3 (Własność optyczna paraboli). *Przypuśćmy, że prosta k jest styczna do paraboli w punkcie P . Niech P' będzie rzutem prostokątnym punktu P na kierownicę, a F niech będzie ogniskiem. Wówczas prosta k jest dwusieczną kąta FPP' .*

Dowód. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta $\angle FPP'$ przecina parabolę w punkcie Q różnym od P , i niech Q' będzie rzutem Q na kierownicę. Ponieważ trójkąt FPP' jest równoramienny to dwusieczna $\angle FPP'$ jest jego osią symetrii, więc $QF = QP'$. Ale z własności paraboli $QF = QQ'$, zatem $QQ' = QP'$. Jest to niemożliwe ponieważ Q' jest jedynym najmniej oddalonym punktem od Q leżącym na kierownicy. \square

Ogniska stożkowych posiadają rozmaite własności. Do najważniejszych zaliczyć można ich izogonalność.

Fakt 1.1.4 (Własność izogonalności ognisk). *Jeśli z punktu P leżącego poza stożkową Γ o ogniskach w punktach F_1, F_2 poprowadzimy styczne do Γ , to $\angle XPF_1 = \angle F_2PY$, gdzie X i Y to odpowiednie punkty styczności.*

Dowód. Niech F'_1 i F'_2 to odbicia punktów F_1 i F_2 względem prostych PX i PY odpowiednio. Wówczas z własności optycznej punkty F_1, Y, F'_2 są współliniowe oraz punkty F_2, X, F'_1 są współliniowe. Zatem $F_2F'_1 = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F'_2F_1$, więc trójkąty $PF_1F'_2$ i PF'_1F_2 są przystające z cechy bbb. Stąd $\angle F_1PF'_2 = \angle F_2PF'_1$, co prosto implikuje tezę. \square

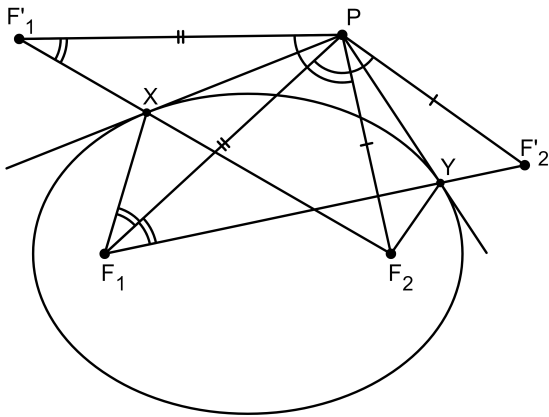
Odpowiednikiem powyższego faktu dla paraboli jest następujący:

Fakt 1.1.5. *Niech P' to rzut punktu P leżącego poza parabolą na jej kierownicę. Z punktu P prowadzimy do paraboli styczne w punktach X i Y . Wówczas $\angle XPF = \angle P'PY$, gdzie F to ognisko paraboli.*

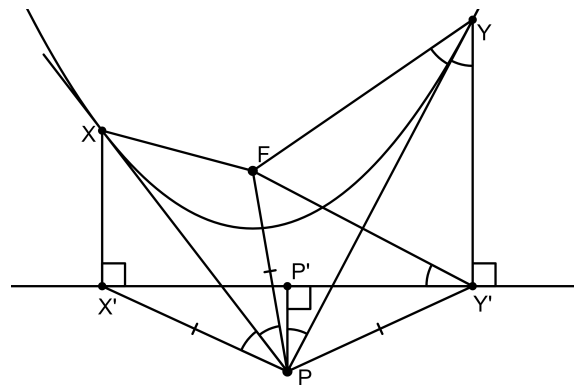
Dowód. Niech X' i Y' to rzuty odpowiednio X i Y na kierownicę. Ponieważ trójkąty FXX' oraz FYY' są równoramienne, a proste PX i PY są ich osiami symetrii z własności optycznej, to X' i Y' są również odbiciami punktu F względem prostych PX i PY . Stąd $PF = PX = PY$, więc P to środek okręgu opisanego na $FXX'Y'$. Zatem

$$\angle XPF = \frac{1}{2}\angle X'PF = \angle FY'X' = 90^\circ - \angle YY'F = \frac{1}{2}\angle FYY' = \angle PYY' = \angle P'PY$$

gdzie ostatnia równość wynika z równoległości prostych PP' i YY' . \square



Rysunek 3



Rysunek 4

Bezpośrednio z powyższych dowodów wynika następująca własność

Fakt 1.1.6. *Niech styczne do stożkowej Γ w punktach X i Y przecinają się w punkcie P . Wówczas prosta FP jest dwusieczną kąta $\angle XFY$, gdzie punkt F jest ogniskiem Γ .*

Dowód. Jeśli Γ jest elipsą lub hiperbolą to przy oznaczeniach z faktu 1.1.4 mamy:

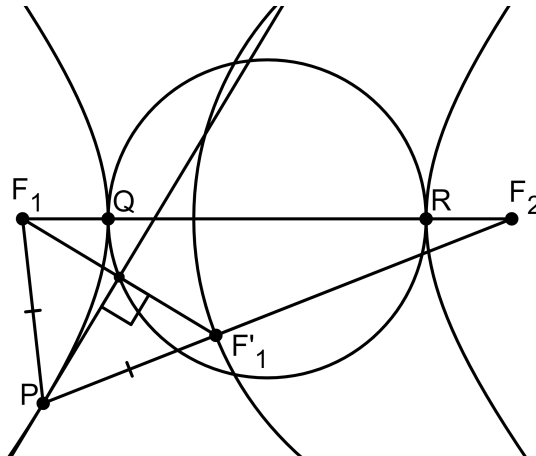
$$\angle PF_1X = \angle PF_1'F_2 = \angle PF_1F_2' = \angle PF_1Y$$

Jeśli z kolei Γ to parabola to przy oznaczeniach faktu 1.1.5 możemy zauważyć, że $\angle XPF = \angle PYF$ i analogicznie $\angle PXF = \angle FPY$, zatem trójkąty XPF i PYF są podobne z cechy kąt, więc $\angle XFP = \angle PFY$. \square

Wniosek. W przypadku, kiedy punkty X, F, Y są współliniowe to $FP \perp XY$.

Fakt 1.1.7. *Miejszem geometrycznym rzutów ogniska stożkowej Γ , która jest elipsą lub hiperbolą, na jej styczne jest okręgiem, którego średnicą jest cięciwa Γ zawierająca się w prostej przechodzącej przez ogniska.*

Dowód. Oznaczmy ogniska Γ przez F_1 i F_2 . Niech k będzie dowolną styczną do Γ w punkcie P . Przez F_1' oznaczmy odbicie punktu F_1 względem k . Z własności optycznej leży on na prostej F_2P . Stąd $PF_1 = PF_1'$, więc odcinek F_2F_1' będzie równy $F_2P + F_1P$ lub $|F_2P - F_1P|$ odpowiednio dla elipsy lub hiperboli. Zatem odcinek F_2F_1' ma długość równą stałej Γ . Zatem wszystkie takie punkty F_1' leżą na okręgu o środku w punkcie F_2 . Rozważając jednokładność o środku w punkcie F_1 i skali $\frac{1}{2}$ otrzymujemy, że rzuty punktu F_1 na styczne do Γ leżą na okręgu, którego środkiem jest środek odcinka F_1F_2 . Niech teraz prosta F_1F_2 przecina Γ w punktach Q i R . Ponieważ styczne w tych punktach są prostopadłe do prostej F_1F_2 to punkty te są rzutami ognisk na te styczne, więc QR jest średnicą rozważanego okręgu. \square



Rysunek 5

Zauważmy, że okrąg ten jest wspólny dla obu ognisk. Poniżej prezentujemy analogiczny fakt zachodzący dla paraboli.

Fakt 1.1.8. *Miejszem geometrycznym rzutów ogniska paraboli na jej styczne jest prosta styczna do tej paraboli w jej wierzchołku.*

Dowód. Jak wcześniej zauważyliśmy, odbicia ogniska paraboli względem jej stycznych leżą na kierownicy. Jednokładność o środku w ognisku paraboli i skali $\frac{1}{2}$ kończy dowód. \square

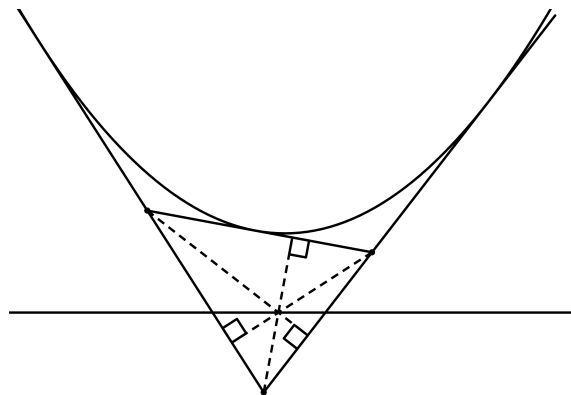
Dodatkowe własności paraboli

Fakt 1.1.9. *Ognisko paraboli leży na okręgu opisanym na trójkącie opisanym na tej paraboli.*

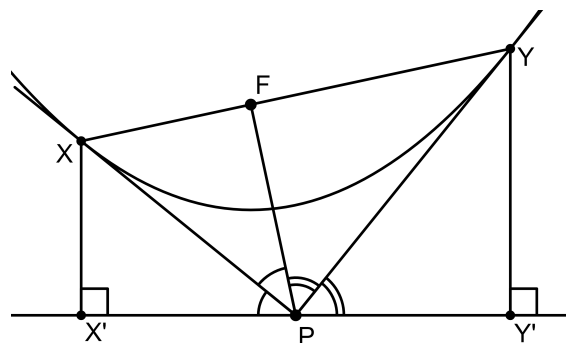
Dowód. Z faktu 1.1.8 wynika, że rzuty ogniska paraboli na boki tego trójkąta leżą na jednej prostej. Twierdzenie o prostej Simsona kończy dowód. \square

Fakt 1.1.10. *Ortocentrum trójkąta opisanego na paraboli leży na jej kierownicy.*

Dowód. Z twierdzenia o prostej Steinera oraz faktu 1.1.9 ortocentrum tego trójkąta leży na prostej przechodzącej przez odbicia ogniska paraboli względem jego boków. Wcześniej zauważyliśmy, że ta prosta jest kierownicą. \square



Rysunek 6



Rysunek 7

Fakt 1.1.11. *Styczne do paraboli poprowadzone z punktu leżącego na kierownicy są prostopadłe.*

Dowód. Niech F będzie ogniskiem paraboli, P punktem leżącym na kierownicy, a X, Y to punkty styczności stycznych poprowadzonych z punktu P . Oznaczmy przez X', Y' rzuty punktów odpowiednio X, Y na kierownicę. Wtedy czworokąty $XFPX'$ i $YFPY'$ są deltoidami, więc $\angle XPY = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle X'PF + \angle FPY') = 90^\circ$. \square

1.2 Biegunowe

Biegunowa punktu względem okręgu to prosta przechodząca przez jego obraz inwersyjny w tym okręgu, prostopadła do prostej łączącej go ze środkiem okręgu. Biegunowe są potężnym narzędziem w rozwiązywaniu zadań olimpijskich. Zwróćmy uwagę na ich dwie własności:

1. **Twierdzenie La Hire.** *Jeśli punkt A leży na biegunowej punktu B , to punkt B leży na biegunowej punktu A .*
2. Jeśli prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg w punktach A i B , a biegunową punktu P względem tego okręgu w punkcie Q , to $(A, B; P, Q) = -1$

Szczególnie ważne jest Twierdzenie La Hire. Pozwala ono zamieniać współliniowość punktów na współpękowość prostych, i na odwrót. W ten sposób każdej konfiguracji możemy przypisać jej dualny odpowiednik. Tzn. jeśli prawdziwe jest pewne twierdzenie to zamieniając w nim punkty na proste, proste na punkty oraz relację współliniowości na współpękowość i odwrotnie, uzyskamy również twierdzenie prawdziwe.

Okazuje się, że własności biegunowych można "przenieść" również na krzywe stożkowe. W tym celu rozważmy stożkową i punkt P . Weźmy dowolne przekształcenie rzutowe przekształcające daną stożkową na okrąg. Niech P' będzie obrazem punktu P w tym przekształceniu. Oznaczmy przez p' biegunową punktu P' względem powstałego okręgu. Niech p będzie obrazem p' w przekształceniu odwrotnym. Wówczas p możemy skonstruować w następujący sposób:

Niech dwie proste przechodzące przez P przecinają daną stożkową w punktach A, B, C, D . Oznaczmy przez Q punkt przecięcia stycznych do tej stożkowej w punktach A i B , a przez R punkt przecięcia stycznych w C i D . Wtedy p pokrywa się z QR .

Zauważmy, że konstrukcja ta zastosowana dla punktu P' daje nam oczywiście prostą p' . Stąd ponieważ przekształcenia rzutowe zachowują przecięcia oraz styczności prostych i stożkowych to prosta p nie zależy od wyboru przekształcenia rzutowego. Zachowują się również wspomniane wyżej własności, gdyż przekształcenia rzutowe zachowują dwustosunek. Prostą p będziemy nazywać biegunową punktu P , a punkt P biegunem prostej p . W szczególności jeśli punkt P jest środkiem elipsy lub hiperboli to p będzie prostą w nieskończoności.

Na koniec tego rozdziału schrakteryzujemy biegunową ogniska paraboli względem niej samej.

Fakt 1.2.1. *Biegunową ogniska paraboli jest jej kierownica.*

Dowód. Przy oznaczeniach faktu 1.1.9 mamy, że $\angle XFP = \angle PFY = 90^\circ$, więc punkty X, F, Y są współliniowe. Znaczy to, że biegunowa punktu leżącego na kierownicy przechodzi przez ognisko paraboli. Twierdzenie La Hire kończy dowód. \square

2 Własności prostych przechodzących przez ognisko

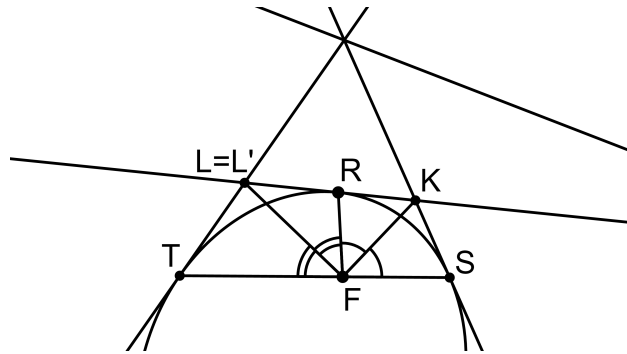
2.1 Lemat wstępny

W dalszej części wiodącą rolę odgrywać będzie następujący lemat:

Lemat 2.1.1. *Punkt F jest ogniskiem stożkowej Γ . Proste k, l są styczne do Γ i przecinają się na biegunowej F względem Γ . Punkty K, L leżą na prostych k, l odpowiednio. Wówczas $\angle KFL = 90^\circ \iff$ prosta KL jest styczna do Γ .*

Dowód. (\Leftarrow)

Niech prosta KL będzie styczna do Γ w punkcie R . Ponadto niech S, T będą punktami styczności prostych odpowiednio k, l z tą stożkową. Wówczas prosta FK jest dwusieczną $\angle SFR$ oraz prosta FL jest dwusieczną $\angle TFR$. Stąd ponieważ punkty S, F, T są współliniowe z twierdzenia La Hire, to proste KF i LF muszą być prostopadłe.



Rysunek 8

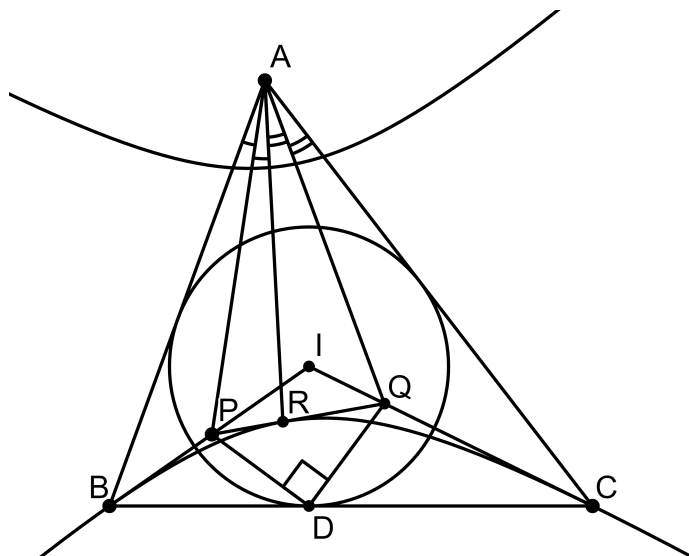
(\Rightarrow)

Niech L' będzie przecięciem prostej l i stycznej do Γ poprowadzonej z punktu K . Z powyższego dowodu wiemy, że $\angle KFL' = 90^\circ$, zatem $L = L'$. \square

Lemat 2.1.1 choć jest prostą konsekwencją faktu 1.1.6 to znajduje zastosowanie w zadaniach olimpijskich

Przykład 2.1.1 (Serbia MO 2018). *Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Na odcinkach BI, CI wybrano takie punkty P i Q , że $2\angle PAQ = \angle BAC$. Niech D to punkt styczności okręgu wpisanego w ABC z bokiem BC . Pokazać, że $\angle PDQ = 90^\circ$.*

Dowód. Rozważmy hiperbolę Γ o ogniskach w A, D oraz stałej $|AB - BD| = |AC - CD|$. Proste BI oraz CI są styczne do Γ w punktach B i C odpowiednio. Ponieważ $D \in BC$ to I leży na biegunowej punktu D względem Γ , zatem wystarczy pokazać, że prosta PQ jest styczna do Γ . Z punktu P poprowadźmy styczną (różną od BI) do Γ w punkcie R , która przetnie prostą CI w Q' . Pokażemy, że $Q = Q'$. Z faktu 1.1.6 mamy, że $\angle BAP = \angle PAR$ oraz $\angle RAQ' = \angle Q'AC$, stąd $2\angle PAQ' = \angle BAC$, więc $Q = Q'$.



Rysunek 9

□

2.2 O okręgu przechodzącym przez ognisko

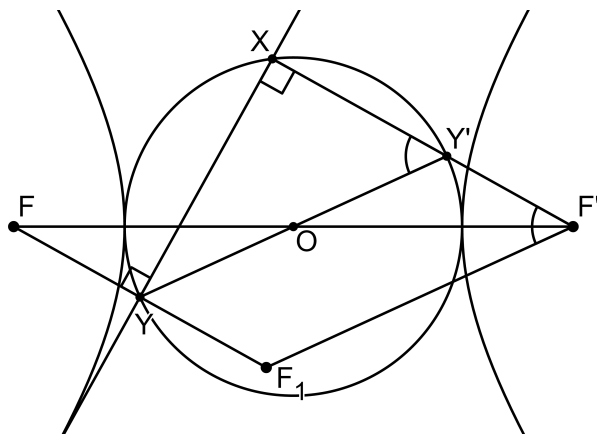
Dla nas lemat 2.1.1 będzie punktem wyjścia do sformułowania pewnego twierdzenia.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech ST będzie cięciwą stożkowej Γ , przechodzącą przez jej ognisko F . Styczna do Γ w punkcie R przecina styczne do Γ w S i T w punktach K i L . Okrąg opisany na trójkącie KFL przecina prostą ST po raz drugi w W . Wówczas prosta RW przechodzi przez drugie ognisko Γ .*

Dowód powyższego twierdzenia poprzedzimy następującym lematem

Lemat 2.2.1. *Stożkowa Γ jest elipsą lub hiperbolą. Niech punkty F, F' będą jej ogniskami, a punkt O jej środkiem. Oznaczmy przez X, Y rzuty punktów odpowiednio F', F na dowolną styczną do Γ , a F_1 niech będzie odbiciem punktu F względem tej stycznej. Wówczas $2\angle XF'F_1 = \angle XOY$.*

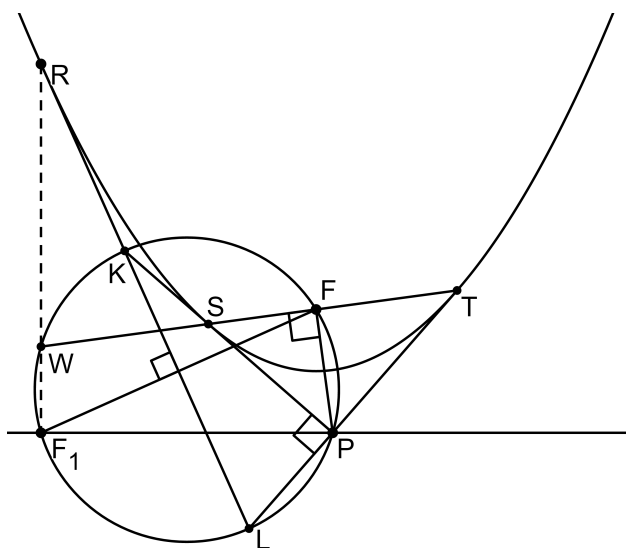
Dowód. Z faktu 1.1.7 punkty X i Y leżą na pewnym okręgu o środku w O . Niech Y' będzie punktem antypodycznym do Y w tym okręgu. Wtedy punkty Y' i F' leżą na prostej prostopadłej do prostej XY przechodzącej przez X , więc punkty X, Y', F' są współliniowe oraz $YF_1 \parallel XF'$. Ponieważ punkt O jest środkiem odcinka FF' to z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie $FF'F_1$ mamy, że $YO \parallel F'F_1$. Stąd czworokąt $YY'F'F_1$ jest równoległobokiem, zatem $\angle XF'F_1 = \angle XY'Y$, co jest równoważne tezie.



Rysunek 10

□

Dowód twierdzenia. Przypuśćmy najpierw, że Γ jest parabolą. Teza twierdzenia mówi wówczas, że prosta RW jest prostopadła do kierownicy. Niech styczne w S i T przecinają się w punkcie P . Z twierdzenia La Hire punkt P leży na biegunowej punktu F względem Γ , czyli na kierownicy. Zatem $\angle SPT = 90^\circ$. Z własności paraboli punkty F, P, L, W, K leżą na jednym okręgu ω . Ponadto z lematu 2.1.1 $\angle KFL = 90^\circ$, więc KL jest średnicą ω . Zatem punkt F_1 będący odbiciem punktu F względem KL leży na ω oraz z własności paraboli leży na kierownicy. Ponieważ $RF_1 \perp F_1P$ wystarczy pokazać, że $WF_1 \perp F_1P$, czyli że PW jest średnicą ω . Z własności stożkowej mamy, że $\angle PFS = \angle PFT$, więc $PF \perp ST$, co kończy dowód w tym przypadku.

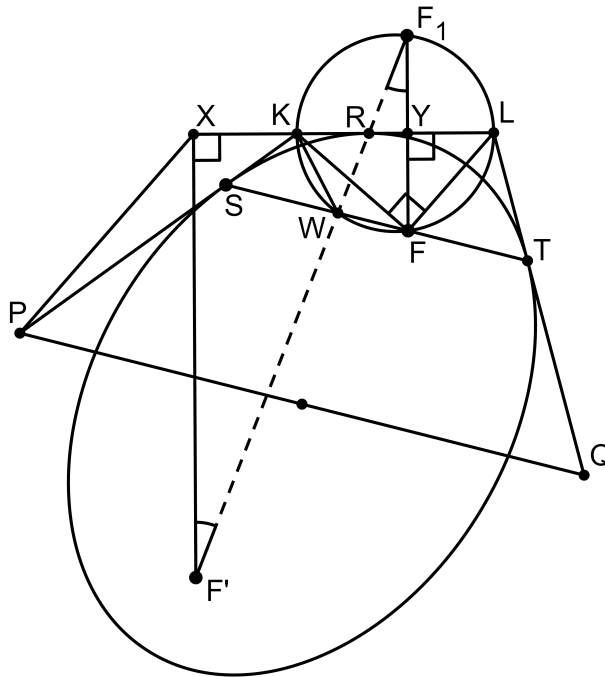


Rysunek 11

Założmy teraz, że Γ nie jest parabolą. Oznaczmy przez F' jej drugie ognisko, a przez O jej środek. Niech Ω będzie okręgiem o środku w O , o którym mowa w fakcie 1.1.7. Niech X, Y będą rzutami punktów F' i F odpowiednio na prostą KL . Z faktu 1.1.7 leżą one na Ω . Ponadto niech F_1 będzie odbiciem punktu F względem prostej KL . Z lematu 2.1.1 $\angle KFL = 90^\circ$, więc F_1 leży na okręgu opisanym na KFL jako odbicie względem średnicy. Trzeba pokazać, że punkty F_1, W, F' są współliniowe. Z własności prostych ξ istnieje taka średnica PQ okręgu Ω , że $PQ \parallel ST$ oraz $P \in SK, Q \in TL$. Ponadto zachodzi $PX \parallel FL$, $\triangle FKL \sim \triangle YPQ$. Zatem $\angle LFT = \angle XPQ$ oraz $\angle FKL = \angle YPQ$. Stąd

$$\angle WF_1F = \angle WKL - \angle FKL = \angle LFT - \angle FKL = \angle XPQ - \angle YPQ = \angle XPY$$

Z lematu 2.2.1 $\angle XPY = \angle XF'F_1$, co dowodzi współliniowości punktów F_1, W, F' , ponieważ $FF_1 \parallel F'X$.



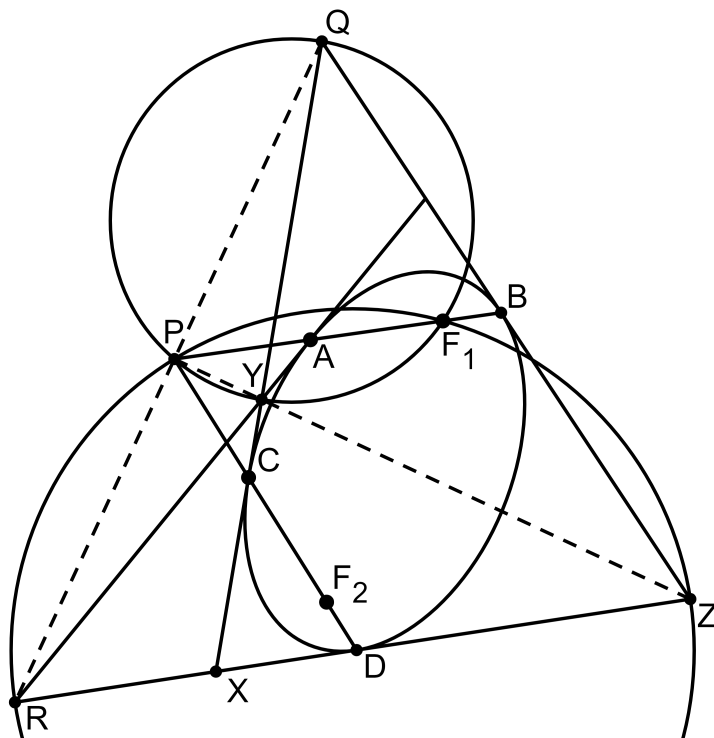
Rysunek 12

□

Poniżej prezentujemy dwa zastosowania powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.2.2. *Cięciwa AB krzywej stożkowej Γ przechodzi przez jej ognisko F_1 , a cięciwa CD tej krzywej przechodzi przez jej drugie ognisko F_2 . Proste c i d styczne do Γ w C i D przecinają się w punkcie X . Styczne do Γ w A i B przecinają odpowiednio proste c i d w punktach Y i Z . Wówczas punkty X, Y, Z, F_1 leżą na okręgu.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że proste AB i CD nie są równoległe. Możemy wtedy przedłużyć prostą XY do przecięcia z prostą BZ w punkcie Q oraz prostą XZ do przecięcia z prostą AY w punkcie R . Z twierdzenia 2.2.1 prosta CF_2 przecina prostą AB w takim punkcie P , że czworokąt PQF_1Y jest cykliczny. Z kolei prosta DF_2 przecina AB w takim punkcie P' , że czworokąt $P'RZF_1$ jest cykliczny. Ale prosta CF_2 i DF_2 to ta sama prosta CD , więc $P = P'$. Z twierdzenia Brianchona punkt P jest również punktem przecięcia prostych YZ i QR . Z powyższych rozważań wynika, że punkt F_1 jest punktem Miquela czworokąta $XYPR$, co dowodzi współokręgowości punktów X, Y, Z, F_1 .



Rysunek 13

Niech teraz $AB \parallel CD$. Wtedy punkty Q i R są punktami w nieskończoności. Ale z lematu 2.1.1 $\angle YF_1Q = \angle ZF_1R = 90^\circ$, więc punkty Y i Z są rzutami prostokątnymi punktu F_1 na proste XY i XZ . □

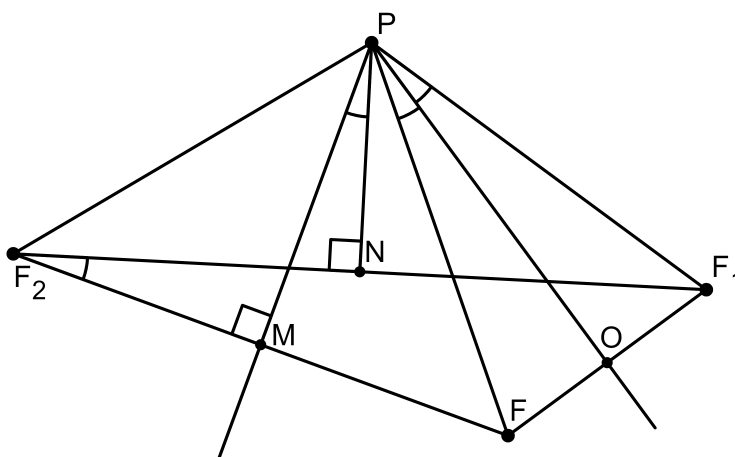
Twierdzenie 2.2.3. Czworokąt $K_1K_2L_2L_1$ jest opisany na stożkowej Γ , przy czym proste K_1K_2 oraz L_1L_2 przecinają się na biegunowej ogniska F tej krzywej i są styczne do Γ w punktach S i T . Wówczas oś potęgowa okręgów opisanych na trójkątach K_1FL_1 i K_2FL_2 jest osią symetrii $\Gamma \iff F'P \perp ST$, gdzie $P = K_1L_1 \cap K_2L_2$, a F' to drugie ognisko Γ .

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystamy następujący lemat:

Lemat 2.2.2. Dany jest punkt F i kąt o wierzchołku w punkcie P . Niech F_1 i F_2 będą odbiciami punktu F względem ramion zadanego kąta. Wówczas symetralna F_1F_2 jest prostą izogonalną do PF w zadanym kącie.

Dowód. Z symetrii mamy, że $PF = PF_1 = PF_2$, więc punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie FF_1F_2 , w szczególności leży na symetralnej odcinka F_1F_2 . Niech punkty M, N, O będą środkami odcinków FF_2, F_2F_1, F_1F odpowiednio. Wtedy ponieważ $PN \perp F_1F_2$ i $PM \perp FF_2$ to czworokąt $PNMF_2$ jest cykliczny, więc

$$\angle MPN = \angle FF_2F_1 = \frac{1}{2}\angle FPF_1 = \angle FPO$$



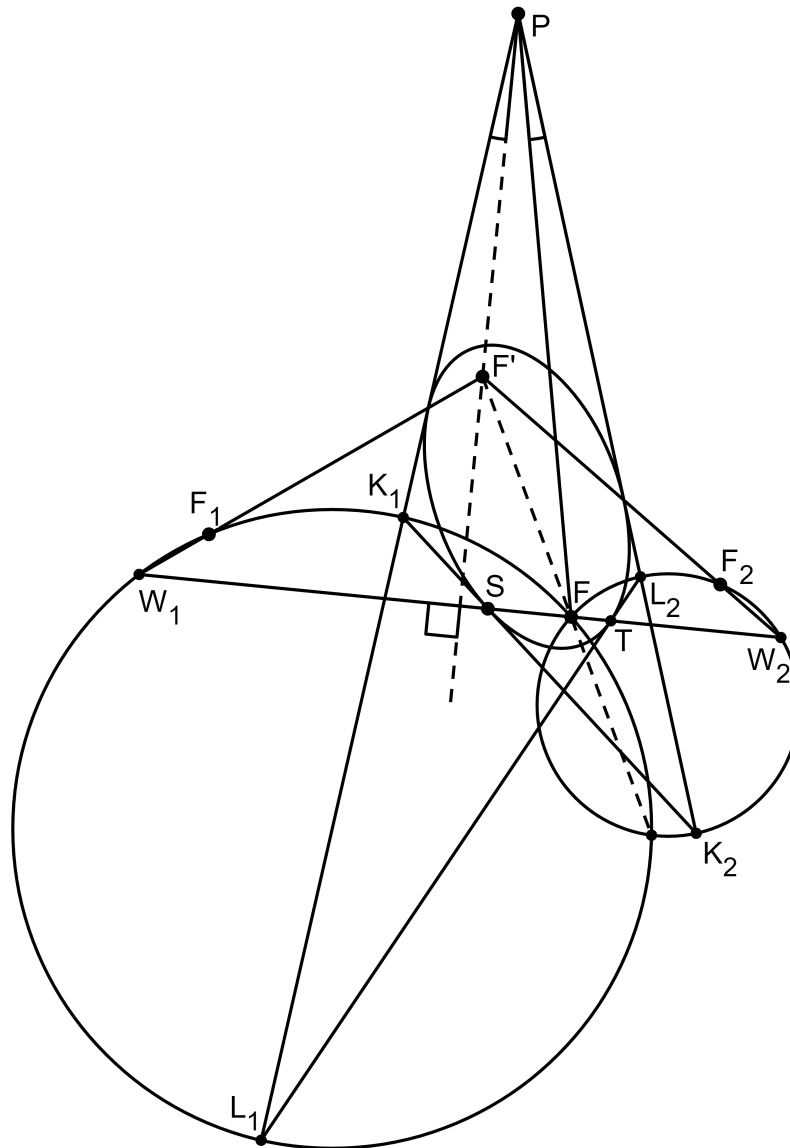
Rysunek 14

□

Dowód twierdzenia. Załóżmy najpierw, że Γ jest parabolą. Teza przyjmuje wtedy następującą postać: oś potęgowa okręgów opisanych na trójkątach K_1FL_1 i K_2FL_2 jest osią symetrii Γ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta ST jest równoległa do kierownicy - jest to oczywiste.

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy Γ nie jest parabolą. Niech okręgi opisane na trójkątach K_1FL_1 oraz K_2FL_2 przecinają prostą ST po raz drugi w punktach W_1 i W_2 . Z dowodu twierdzenia 2.2.1 wiemy, że proste $F'W_1$ i $F'W_2$ przecinają te okręgi po raz drugi w punktach F_1 i F_2 , które są odbiciami punktu F względem prostych K_1L_1 i K_2L_2 . Wtedy z potęgi punktu

F' leży on na osi potęgowej wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $W_1F_1F_2W_2$ jest cykliczny. Ale z własności elipsy oraz hiperboli $F'F_1 = F'F_2$, zatem czworokąt $W_1F_1F_2W_2$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest trapezem równoramiennym, czyli kiedy symetralna odcinka F_1F_2 pokrywa się z symetralną odcinka W_1W_2 . Jednak z lematu 2.2.2 oraz twierdzenia o izogonalności ognisk wiemy, że symetralna odcinka F_1F_2 to prosta $F'P$, więc musi ona być prostopadła W_1W_2 . \square



Rysunek 15

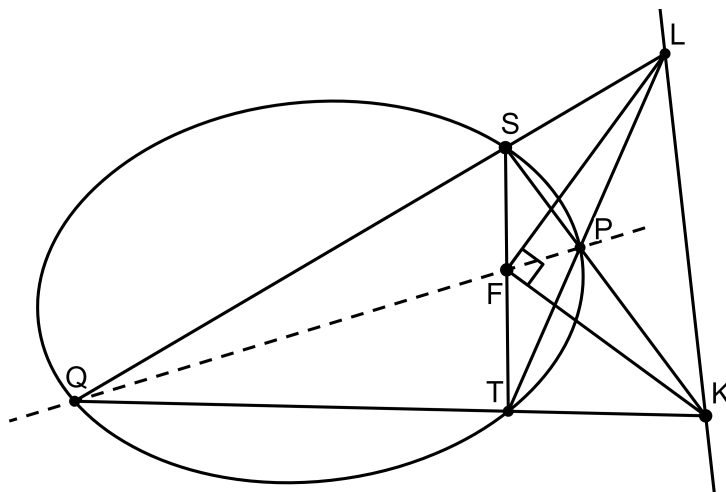
2.3 "Biegunowe" własności ogniska na prostej

Przyporządkowanie każdemu punktowi jego biegunowej oraz każdej prostej jej biegunu pozwala na sformułowanie dualnej wersji lematu 2.1.1:

Lemat 2.3.1 (Dualny do 2.1.1). *Niech ST będzie cięciwą stożkowej Γ , przechodzącą przez jej ognisko F . Punkty K i L leżą na biegunowej punktu F względem Γ . Wówczas $\angle KFL = 90^\circ \iff$ proste SK i TL przecinają się na Γ .*

Uzyskana w ten sposób konfiguracja posiada następującą własność

Lemat 2.3.2. *Niech ST będzie cięciwą krzywej stożkowej Γ przechodzącą przez jej ognisko F . Punkty K i L leżą na biegunowej punktu F względem Γ w taki sposób, że $\angle KFL = 90^\circ$. Proste SK i TL przecinają się w punkcie P , a proste SL i TK przecinają się w punkcie Q . Wówczas punkty P, Q, F są współliniowe.*



Rysunek 16

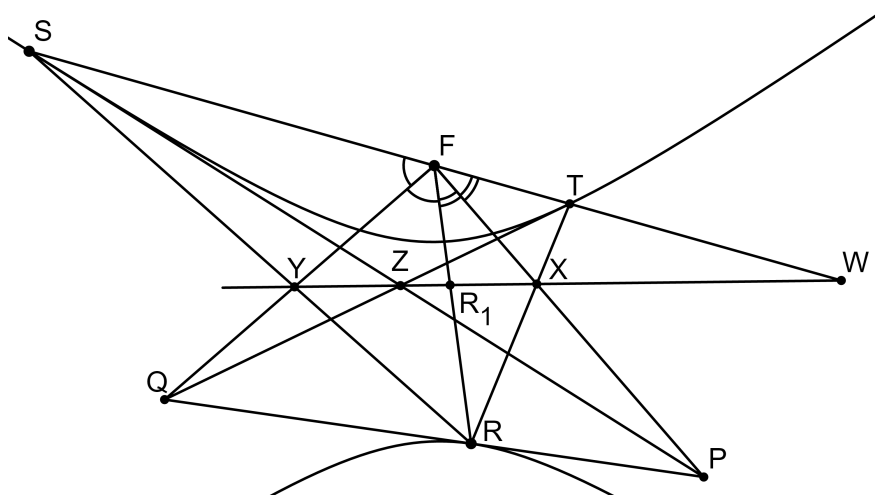
Dowód. Z lematu 2.3.1 punkty P i Q leżą na Γ , dany więc mamy czworokąt zupełny $SPTQ$ wpisany w stożkową Γ . Zatem punkt L leży na biegunowej punktu K . Z drugiej strony K leży na biegunowej F , więc z twierdzenia La Hire punkt F leży na biegunowej K . Stąd FL to biegunowa punktu K względem Γ . Analogicznie FK to biegunowa punktu L względem Γ . Ponieważ te proste mogą przeciąć się tylko w punkcie przekątnym czworokąta zupełnego $SPTQ$, to F leży na przekątnej PQ . \square

Okazuje się, że lemat 2.1.1 można wykorzystać w konstrukcji biegunowej ogniska względem stożkowej.

Twierdzenie 2.3.1. *Punkt F jest ogniskiem stożkowej Γ , a ST cięciwą Γ przechodzącą przez F . Styczne do Γ w S i T przecinają dowolną trzecią styczną do Γ w punktach P i Q . Wtedy prosta Pappusa punktów S, P, F, Q, T, R jest biegunową punktu F względem Γ .*

Dowód. Niech $Z = SP \cap TQ$, $X = RT \cap FP$, $Y = RS \cap FQ$, $W = ST \cap XY$. Ponieważ Z leży na biegunowej punktu F względem Γ , wystarczy pokazać, że $(S, T; F, W) = -1$. Z własności stożkowej $\angle SFQ = \angle QFR$, $\angle RFP = \angle PFT$ oraz $\angle QFP = 90^\circ$, zatem $F(S, R; Q, P) = -1$. Niech $R_1 = FR \cap XY$. Wtedy

$$-1 = F(S, R; Q, P) = (W, R_1; Y, X) = (W, F; S, T)$$



Rysunek 17

□

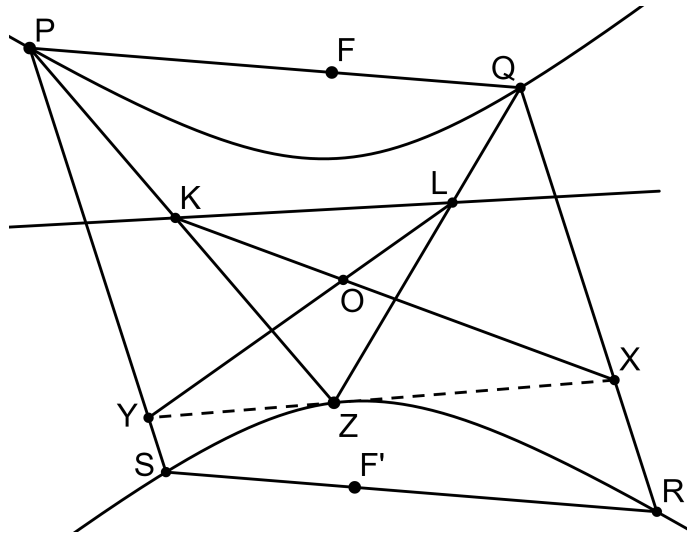
W powyższym twierdzeniu łatwo wywnioskować z twierdzenia La Hire, że X to biegun FQ , a Y to biegun FP , więc X leży na biegunowej Y . Własność tą można w bardzo prosty sposób uogólnić.

Lemat 2.3.3. *Proste k, l przechodzą przez ognisko F stożkowej Γ . Niech punkty K, L będą biegunami prostych k, l względem Γ odpowiednio. Wówczas $\angle KFL$ jest równy kątowi między prostymi k i l .*

Dowód. Niech $\alpha = \angle(k, l)$. Z własności stożkowych mamy $FK \perp k$ i $FL \perp l$. Stąd $\angle KFL = 180^\circ - \alpha$. □

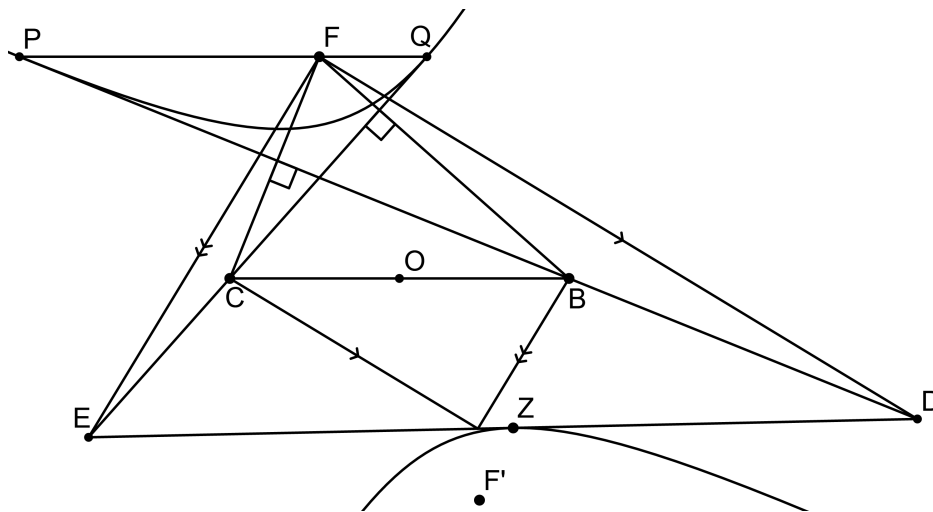
Na podsumowanie tego rozdziału rozwiążemy zadanie używając biegunowych oraz lematu 2.1.1.

Przykład 2.3.1. *Równoległobok $PQRS$ jest wpisany w stożkową Γ , której ogniskiem jest punkt F , przy czym $F \in PQ$. Niech O będzie środkiem Γ , a Z dowolnym punktem tej stożkowej. Proste PZ i QZ przecinają biegunową punktu F względem Γ w K i L . Proste KO i LO przecinają QR i PS w punktach X, Y odpowiednio. Wówczas punkty X, Y, Z są współliniowe.*



Rysunek 18

Dowód. Przyporządkujmy każdemu punktowi jego biegunową, a każdej prostej jej biegun. Oznaczmy przez Ω okrąg o środku w O , o którym mowa w fakcie 1.1.7. Zauważmy, że styczne do Γ w P i Q przecinają Ω w takich punktach, że dwa z nich są średnicą Ω . Niech to będą B i C , gdzie BP i CQ są styczne do Γ . Ponieważ O jest także środkiem symetrii równoległoboku $PQRS$, to CR i BS również są styczne do Γ , więc B to biegun PS , a C to biegun QR . Dalej niech proste BP i CQ przecinają styczną do Γ w Z w punktach D i E . Wtedy DF jest biegunową punktu K , a EF jest biegunową punktu L . Z lematu 2.1.1 dostajemy, że $\angle DFE = 90^\circ$. Zauważmy teraz, że biegunami prostych KO i LO są punkty w nieskończoności prostych DF i EF , zatem biegunową punktu X jest prosta k równoległa do DF przechodząca przez C , a biegunową Y jest prosta l przechodząca przez B równoległa do EF .



Rysunek 19

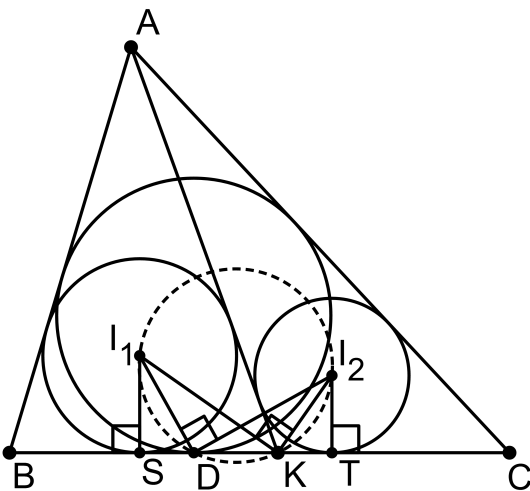
Po tak przeprowadzonej transformacji "biegun-biegunowa" trzeba pokazać, że proste k , l i DE są współpękowe. Jest to proste przeliczenie na kątach, które pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

2.4 Okręgi wpisane i dopisane

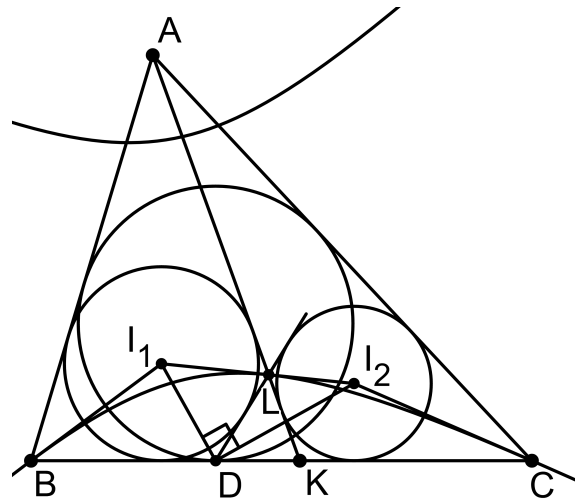
W tym podrozdziale wykorzystamy twierdzenie 2.2.1 w określonej konfiguracji dotyczącej okręgów wpisanych i dopisanych do trójkąta.

Przykład 2.4.1. Na boku BC trójkąta ABC leży punkt K . Wówczas wspólna styczna wewnętrzna okręgów wpisanych w trójkąty ABK i ACK , różna od AK , przechodzi przez punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC .

Dowód. Niech I_1, I_2 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABK i ACK odpowiednio, a S i T punktami styczności tych okręgów z prostą BC . Wtedy $KT = \frac{1}{2}(AK + KC - AC)$ oraz $SD = \frac{1}{2}(AB + BC - AC - BK - AB + AK) = \frac{1}{2}(AK + KC - AC) = KT$. Ponieważ $\angle I_1KS + \angle I_2KT = 90^\circ$ oraz $I_1S \perp BC$ i $I_2T \perp BC$ to $\Delta I_1SK \sim \Delta KTI_2$. Stąd $\frac{I_1S}{SK} = \frac{KT}{I_2T}$, więc $\frac{I_1S}{DT} = \frac{SD}{I_2T}$, czyli $\Delta I_1SD \sim \Delta DTI_2$. Zatem $\angle I_1DS + \angle I_2DT = 90^\circ$, więc $\angle I_1DI_2 = \angle I_1KI_2 = 90^\circ$, czyli czworokąt I_1DKI_2 jest cykliczny. Rozważmy teraz hiperbolę Γ jak w przykładzie 2.1.1. Proste BI_1 i CI_2 są styczne do Γ w punktach B i C , zatem z lematu 2.1.1 prosta I_1I_2 jest również styczna do Γ . Z twierdzenia 2.2.1 dostajemy, że punkt $L = AK \cap I_1I_2$ jest punktem styczności, więc z własności stożkowej proste DI_1 oraz DI_2 są dwusiecznymi kątów $\angle BDL$ i $\angle CDL$ odpowiednio.



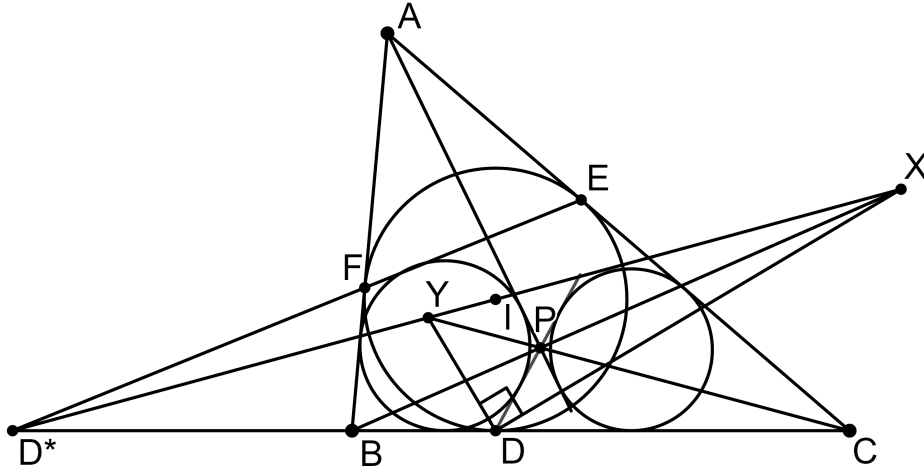
Rysunek 20



Rysunek 21

\square

Przykład 2.4.2. Okrąg o środku w I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do prostych BC, CA, AB w punktach D, E, F odpowiednio. Prosta EF przecina prostą BC w punkcie D^* . Na prostej D^*I wybieramy takie punkty X, Y , że $\angle XDY = 90^\circ$. Proste BX i CY przecinają się w punkcie P . Wówczas czworokąty $ABDP$ i $APDC$ posiadają okręgi wpisane bądź dopisane.



Rysunek 22

Dowód. Podobnie jak poprzednio rozważmy hiperbolę Γ o ogniskach A, D oraz stałej $|AB - BD| = |AC - CD|$. Ponieważ proste BI i CI są styczne do Γ oraz $D \in BC$ to I leży na biegunowej D względem Γ . Zauważmy również, że $(B, C; D, D^*) = -1$. Oznacza to, że prosta D^*I jest biegunową D względem Γ . Zatem z lematu 2.3.1 punkt P leży na Γ . Zachodzą wówczas równości $AB - BD = AP - PD$ oraz $AC - CD = AP - PD$ lub $AB - BD = DP - PA$ oraz $AC - CD = DP - PA$. W obydwu przypadkach dostajemy równości $AB + PD = AP + BD$ i $AC + PD = AP + CD$ lub $AB + PA = BD + DP$ i $AC + PA = CD + DP$, które są równoważne tezie. \square

Przykład 2.4.1 posiada bardzo dużo pokrewnych konfiguracji. Dla definicji punktu K tak jak wyżej możemy rozważyć następujące okręgi:

Przykład 2.4.3. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów A -dopisanych do trójkątów ABK i ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu A -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.4. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów K -dopisanych do trójkątów ABK i ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu A -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.5. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów B -dopisanego do trójkąta ABK i C -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z prostą BC .

Można rozważać również konfiguracje w których punkt K leży poza odcinkiem BC . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że znajduje się on na półprostej BC . Wtedy treść przykładu 2.4.1 przekształci się na jedną z następujących:

Przykład 2.4.6. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów B -dopisanego do trójkąta ABK i K -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.7. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów K -dopisanego do trójkąta ABK i C -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu A -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.8. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów wpisanego w trójkąt ABK i A -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.9. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów A -dopisanego do trójkąta ABK i wpisanego w trójkąt ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu A -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.10. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów wpisanego w trójkąt ABK i C -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu B -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.11. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów A -dopisanego do trójkąta ABK i K -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu C -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.12. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów B -dopisanego do trójkąta ABK i wpisanego w trójkąt ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu B -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Przykład 2.4.13. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów K -dopisanego do trójkąta ABK i A -dopisanego do trójkąta ACK przechodzi przez punkt styczności okręgu C -dopisanego do trójkąta ABC z prostą BC .

Dowody powyższych przykładów są analogiczne do dowodu 2.4.1.

Literatura

- [1] A. V. Akopyan: *Geometry of Conics*, AMS 2007
- [2] D. Burek: *Dwustosunek i Biegunowe*, 2012
- [3] S. Majchrzak: *Od trójkątów do krzywych stożkowych, czyli o prostej innej niż wszystkie*, Tarnów 2020