Pewne uogólnienia teorii Fouriera

Jakub Zieliński
Opiekun naukowy: dr Robert Skiba

1 Wprowadzenie

Szeregi Fouriera są narzędziem mającym wiele zastosowań w matematyce teoretycznej i fizyce, szczególnie przydatnym przy poszukiwaniu okresowych rozwiązań równań różniczkowych (czytelnikom niezaznajomionym z dziełem Jeana Baptiste Fouriera polecamy wspaniały, intuicyjny i wizualny materiał [1]). Jednak problematyczne okazuje się uogólnianie tych szeregów dla funkcji zespolonych przede wszystkim z powodu ich częstej rozbieżności. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie czytelnikowi idei i koncepcji leżących u podstaw prezentowanej teorii oraz wyjaśnienie, jakie wnioski można z niej wysnuć m.in. w dziedzinie równań różniczkowych.

W literaturze matematycznej można spotkać dwa rodzaje szeregów Fouriera ([1]).

- Jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 2π-okresowa, to szereg Fouriera tejże funkcji wyraża się następującym wzorem:
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{1}$$
gdzie
$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad \text{oraz} \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$
- Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest 2π-okresowa, to szereg Fouriera tejże funkcji wyraża się następującym wzorem:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}, \tag{2}$$
gdzie
$$c_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-ikz}dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Okazuje się, że szereg trygonometryczny postaci (1) jest na ogół zbieżny dla wszystkich liczb rzeczywistych. Z kolei zbieżność szeregu postaci (2) jest bardzo problematyczna. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikz}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ky}e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ky}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik(t-x)}dt.\end{aligned}$$

Wówczas warunkiem koniecznym zbieżności powyższego szeregu jest to, aby zachodziła następująca granica:

$$e^{-ky}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik(t-x)}dt \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0. \tag{3}$$

[1] W niniejszej pracy będziemy zakładali, że wszystkie rozważane funkcje są kawałkami ciągłe. Wspomniane założenie będzie implikowało, że stosowne całki będą istnieć oraz będą skończone.

Okazuje się, że powyższy warunek na ogół zachodzi tylko wtedy, gdy $y = 0$. Innymi słowy, szereg zespolony jest zbieżny tylko na osi rzeczywistej. Poniższy przykład pokazuje ten niespodziewany fenomen.

Przykład 1.1. *Niech $f\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(z) = z$. Powyższą funkcję można przedłużyć na $\mathbb{C}$ w taki sposób, aby $f(z+2\pi) = f(z)$. Wówczas*

$$\left|e^{-ky}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik(t-x)}dt\right| = \frac{2\pi e^{-ky}}{|k|} \quad \text{dla } k \neq 0.$$

Zatem:

(1) *jeśli $z = x+iy$ oraz $y > 0$, to*

$$\frac{2\pi e^{-ky}}{|k|} \xrightarrow[k\to-\infty]{} \infty;$$

(2) *jeśli $z = x+iy$ oraz $y < 0$, to*

$$\frac{2\pi e^{-ky}}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Z powyższych rachunków wynika, że szereg

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ky}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik(t-x)}dt$$

nie jest zbieżny dla $y \neq 0$. Stąd wnioskujemy, że jeśli chcemy rozwijać funkcje $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (lub ogólniej, funkcje postaci $f\colon K\to\mathbb{C}$, gdzie $K = \mathbb{R}\times\Lambda$ oraz $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$) w szeregi typu Fouriera, to musimy zmienić podejście do tego zagadnienia. W tym celu zmodyfikujemy metodę rozwijania funkcji f w szeregi trygonometryczne. A dokładniej, w niniejszej pracy uogólnimy klasyczną teorię szeregów Fouriera funkcji 2π-okresowych $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ na przypadek funkcji $f\colon K\to\mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{C}$ jest ciałem liczb zespolonych, zaś zbiór K ma postać $K = \mathbb{R}\times\Lambda$, gdzie Λ jest pewnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Ponadto będziemy zakładać, że funkcja F spełnia warunek $F(x+2\pi,\lambda) = F(x,\lambda)$ dla $x\in\mathbb{R}$ oraz $\lambda\in\Lambda$. Powyższe podejście ma kilka zalet:

1) w sposób naturalny uogólnia klasyczną teorię szeregów Fouriera (bo jeśli $\Lambda = \emptyset$, to $K = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$),
2) jeśli $\Lambda = \mathbb{R}$, to K możemy utożsamiać z ciałem liczb zespolonych i dzięki temu nasza rozważania mogą obejmować funkcje analityczne $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ z teorii funkcji zespolonych,
3) zbiór Λ może być dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, a więc nasze rozważania mogą być zastosowane do teorii równań różniczkowych zwyczajnych z tzw. parametrem $\lambda\in\Lambda$; w szczególności mogą być zastosowane w teorii kontynuacji oraz bifurkacji.

2 Uogólnienie szeregów Fouriera

Na początku naszych rozważań uściślimy pojęcie funkcji okresowej. Niech $K = \mathbb{R}\times\Lambda$, gdzie $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$. Mówimy, że funkcja ciągła $f\colon K\to\mathbb{C}$ jest 2π-okresowa, jeśli $f(x+2\pi,\lambda) = f(x,\lambda)$ dla dowolnych $x\in\mathbb{R}$ oraz $\lambda\in\Lambda$. Punkty $(x,\lambda)\in\mathbb{R}\times\Lambda$ będziemy oznaczać symbolem $z = (x,\lambda)$.

Uwaga 2.1. *Czasami okresowość będziemy zastępować założeniem, że funkcja f jest określona na zbiorze $K = [-\pi,\pi]\times\Lambda$. Jest jasne, że powyższą funkcję f można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f}$ o okresie 2π i określonej na zbiorze $\widetilde{K} = \mathbb{R}\times\Lambda$.*

Definicja 2.2. *Załóżmy, że funkcja $f\colon K\to\mathbb{C}$ jest 2π-okresowa. Szeregiem Fouriera funkcji $f(x,\lambda)$ nazywamy szereg postaci:*

$$s(x,\lambda) := \frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda)\cos(kx) + b_k(\lambda)\sin(kx), \tag{4}$$

gdzie

$$a_k(\lambda) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\cos(kt)dt \qquad \text{oraz} \qquad b_k(\lambda) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\sin(kt)dt. \tag{5}$$

Uwaga 2.3. *Odnotujmy, że całki występujące po prawej stronie w (5) oblicza się jak całkę funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. Innymi słowy, jest to całka krzywoliniowa. Metody liczenia takich całek można znaleźć w wielu klasycznych podręcznikach z analizy matematycznej.*

Definicja 2.4. *Mówimy, że funkcja $f\colon K \to \mathbb{C}$ o okresie 2π jest rozwijalna w szereg Fouriera w punkcie $(x, \lambda) \in K$, jeśli jej szereg Fouriera określony wzorem (4) jest zbieżny do wartości $f(x, \lambda)$. Mówimy, że funkcja f jest rozwijalna w szereg Fouriera, jeśli jest rozwijalna w każdym jej punkcie z dziedziny K.*

Podamy teraz kilka przykładów.

Przykład 2.5. *Niech $f\colon [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(x, \lambda) = x + \lambda i$. Wówczas współczynniki $a_k(\lambda)$ oraz $b_k(y)$ wyrażają się następująco:*

$$
\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(\pi+\lambda i)^2}{2} - \frac{(-\pi+\lambda i)^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi}(2\pi\lambda i) = 2\lambda i,\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(t+\lambda i)\sin(kt)}{k} - \int \frac{\sin(kt)}{k}dt\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(t+\lambda i)\cos(kt)}{k} - \int \frac{\cos kt}{k}dt\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k 2\pi}{k}\right) = \frac{2(-1)^k}{k}.
\end{aligned}
$$

Wówczas szereg funkcji $f(x, \lambda)$ wygląda następująco:

$$
s(x,\lambda) = \lambda i + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx.
$$

Przykład 2.6. *Niech $f\colon [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(x, \lambda) = (x + \lambda i)^2$. Współczynniki $a_k(\lambda)$ i $b_k(\lambda)$ wyrażają się wzorami:*

$$
\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^2 dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{3}(t+\lambda i)^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} - 2\lambda^2,\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^2\cos(kt)dt = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2(t+\lambda i)\sin(kt)dt\\
&= \frac{2(t+\lambda i)\cos(kt)}{k^2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 4\frac{(-1)^k}{k^2},\\
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^2\sin(kt)dt = \frac{1}{k\pi}(t+\lambda i)^2\cos(kt)\Big|_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{4\lambda i(-1)^{k+1}}{k}.
\end{aligned}
$$

Wówczas szereg Fouriera funkcji $f(x, \lambda)$ wygląda następująco:

$$
s(x,\lambda) = \frac{\pi^2}{3} - \lambda^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx) + \frac{\lambda i(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right).
$$

Uwaga 2.7. *Zauważmy, że gdy $\lambda = 0$, to szeregi Fouriera funkcji $f(x, \lambda) = x + \lambda i$ oraz $f(x, \lambda) = (x + \lambda i)^2$ pokrywają się, odpowiednio, z klasycznymi szeregami Fouriera funkcji $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x$ lub $f(x) = x^2$, co dobitnie ilustruje, że definicja 2.2 stanowi naturalne uogólnienie klasycznej definicji szeregu Fouriera dla funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych.*

Ponadto definicja 2.2 ma jeszcze jedną istotną zaletę. Mianowicie, jeśli chcemy wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f\colon K \to \mathbb{C}$, to nie musimy jej rozbijać na część rzeczywistą i urojoną, tzn. przedstawiać w następującej postaci: $f(x, \lambda) = f_1(x, \lambda) + if_2(x, \lambda)$, gdzie $f_1, f_2\colon K \to \mathbb{R}$. Wynika to z faktu, że w definicji 2.2 wykorzystujemy całkę krzywoliniową oraz jej liczne własności. Oczywiście należy w tym miejscu nadmienić, że jeśli funkcję $f\colon K \to \mathbb{C}$ rozbijemy na część rzeczywistą oraz urojoną, to wówczas każdą z tych funkcji można rozwinąć w szereg Fouriera, używając klasycznej całki Riemanna. Jednakże takie podejście ma jedną dużą wadę. Bardzo często część rzeczywista oraz urojona funkcji $f\colon K \to \mathbb{C}$ mają bardzo skomplikowaną postać i wówczas liczenie całek takich funkcji prowadzi do skomplikowanych rachunków. Przykładem może być funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określona wzorem $f(z) = z^n = f_1(z) + if_2(z)$, gdzie n jest dostatecznie dużą liczbą. W tym przypadku funkcje $f_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mają skomplikowane wzory, zaś sama funkcja $f(z) = z^n$ wyraża się bardzo prostym wzorem.

Przykład 2.8. *Niech $f\colon [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(x,\lambda) = (x+\lambda i)^3$. Współczynniki $a_k(\lambda)$ i $b_k(\lambda)$ wyrażają się wzorami:*

$$\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+yi)^3 dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{4}(t+\lambda i)^4\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi^2\lambda i - 2\lambda^3 i,\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^3 \cos kt dt\\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{(t+\lambda i)^3 \sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3(t+\lambda i)^2 \sin kt}{k}dt\\
&= -\frac{3}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^2 \sin kt dt\\
&= \frac{3}{\pi k}\,\frac{(t+\lambda i)^2 \cos kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2(t+\lambda i)\cos kt}{k}dt\\
&= \frac{(-1)^k 12\lambda i}{k^2} - \frac{6}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)\cos kt dt\\
&= \frac{(-1)^k 12\lambda i}{k^2} - \frac{6}{\pi k^2}\,\frac{(t+\lambda i)\sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{6}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kt}{k}dt\\
&= \frac{(-1)^k 12\lambda i}{k^2}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^3 \sin kt dt\\
&= -\frac{1}{\pi}\,\frac{(t+\lambda i)^3 \cos kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3(t+\lambda i)^2 \cos kt}{k}dt\\
&= (-1)^k\frac{6\lambda^2 - 2\pi^2}{k} + \frac{3}{\pi k}\,\frac{(t+\lambda i)^2 \sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2(t+\lambda i)\sin kt}{k}dt\\
&= (-1)^k\frac{6\lambda^2 - 2\pi^2}{k} - \frac{6}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)\sin kt dt\\
&= (-1)^k\frac{6\lambda^2 - 2\pi^2}{k} + \frac{6}{\pi k^2}\,\frac{(t+\lambda i)\cos kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{6}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kt}{k}dt\\
&= (-1)^k\frac{6\lambda^2 - 2\pi^2}{k} + (-1)^k\frac{12}{k^3}.
\end{aligned}$$

Wówczas szereg Fouriera funkcji $f(x,\lambda)$ wygląda następująco:

$$s(x,\lambda) = \pi^2\lambda i - \lambda^3 i + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k 12\lambda i}{k^2}\right)\cos kx + (-1)^k\left(\frac{6\lambda^2 - 2\pi^2}{k} + \frac{12}{k^3}\right)\sin kx.$$

Przykład 2.9. *Niech $f\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(x,\lambda)=(x+\lambda i)^4$. Współczynniki $a_k(\lambda)$ i $b_k(\lambda)$ wyrażają się wzorami:*

$$\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^4dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{5}(t+i\lambda)^5\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}-4\pi^2\lambda^2+2\lambda^4,\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^4\cos kt dt\\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{(t+\lambda i)^4\sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4(t+\lambda i)^3\sin kt}{k}dt\\
&= -\frac{4}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^3\sin kt dt = (-1)^k\left(\frac{8\pi^2-24\lambda^2}{\pi k^2}-\frac{12}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\lambda i)^4\sin kt dt\\
&= -\frac{1}{\pi}\,\frac{(t+\lambda i)^4\cos kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4(t+\lambda i)^3\cos kt}{k}dt\\
&= -(-1)^k\left(\frac{8\pi^2\lambda i-8\lambda^3 i}{k}+\frac{48\lambda i}{k^3}\right).
\end{aligned}$$

Wówczas szereg Fouriera funkcji $f(z)$ wygląda następująco:

$$s(x,\lambda)=\frac{2\pi^5}{5}-4\pi^2\lambda^2+2\lambda^4+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{8\pi^2-24\lambda^2}{\pi k^2}-\frac{12}{k^3}\right)\cos kx-(-1)^k\left(\frac{8\pi^2\lambda i-8\lambda^3 i}{k}+\frac{48\lambda i}{k^3}\right)\sin kx.$$

Przykład 2.10. *Niech $f\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(z)=e^{x+\lambda i}$. Wówczas współczynniki $a_k(y)$ oraz $b_k(y)$ wyrażają się wzorami:*

$$\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{t+\lambda i}dt = e^{\lambda i}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi},\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{t+\lambda i}\cos kt dt = (-1)^k e^{\lambda i}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)},\\
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{t+\lambda i}\sin kt dt = (-1)^{k+1}k e^{\lambda i}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}.
\end{aligned}$$

Wówczas szereg Fouriera funkcji $f(z)$ wygląda następująco:

$$s(x,\lambda)=\frac{e^{\lambda i}(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\cos kx-k\sin kx)}{1+k^2}\right).$$

Uwaga 2.11. *Przykład 2.10 jest jedynie szeregiem będącym rozwinięciem funkcji $f(x)=e^x$ pomnożonym przez e^{iy}. Zatem, podobnie jak w przykładzie 3, gdy $y=0$ szereg naturalnie zamienia się w rozwinięcie funkcji $f(x)=e^x$, $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.*

Przykład 2.12. *Niech $f\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ będzie określone wzorem: $f(x,\lambda)=\arcsin(\cos(x+\lambda i))$. Wówczas współczynniki $a_k(\lambda)$ oraz $b_k(\lambda)$ wyrażają się wzorami:*

$$\begin{aligned}
a_0(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\cos(t+\lambda i))dt = 2\arcsin(\cosh\lambda),\\
a_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\cos(t+\lambda i))\cos kt dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin kt\arcsin(\cos(t+\lambda i))}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kt\sin(t+\lambda i)}{k\sqrt{1-\cos^2(t+\lambda i)}}dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kt}{k}dt\right)=0
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
b_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\cos(t+\lambda i))\sin ktdt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(kt)\arcsin(\cos(t+\lambda i))}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kt\sin(t+\lambda i)}{k\sqrt{1-\cos^2(t+\lambda i)}}dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{k}\arcsin(\cos(t+\lambda i))\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kt}{k}dt\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi k}\arcsin(\cos(t+\lambda i))\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi k}(\arcsin(\cos(\pi+\lambda i)) - \arcsin(\cos(-\pi+\lambda i))).
\end{aligned}$$

Przykład 2.13. *Dana jest funkcja $f\colon[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ określonej wzorem: $f(x,\lambda)=e^{\lambda+ix}$. Z faktu jednoznaczności w przedstawieniu jako szereg Fouriera możemy wywnioskować, że skoro*

$$e^{\lambda+ix} = (\cos x + i\sin x)e^{\lambda},$$

to $a_1(\lambda)=e^{\lambda}, b_1(y)=ie^{\lambda}$, a wszystkie pozostałe współczynniki są zerowe.

Uwaga 2.14. *Równie dobrze można wykonać wszystkie rachunki by przekonać się, że współczynniki tak właśnie się zachowują.*

Uwaga 2.15. *Przykład 2.13 przedstawia szereg funkcji równej $e^{i\overline{z}}$, zatem funkcji nieanalitycznej. Możemy stąd wnioskować, że istnieją funkcję nieanalityczne, które posiadają przedstawienie w postaci szeregu Fouriera, a także, że niektóre nietrywialne funkcje mają skończony szereg Fouriera.*

3 Kryteria zbieżności

Po zaprezentowaniu samej idei stojącej za naszą teorią, przechodzimy do tematyki kryteriów zbieżności szeregów Fouriera by pokazać, że są one równie naturalnymi uogólnieniami jak i same szeregi. Przejawia się to choćby ich prawdziwością w przypadku, gdy $K=\mathbb{R}$. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 3.1. *Dla dowolnej funkcji $f\colon[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ciągłej na przedziale $[-\pi,\pi]$ przy stałym λ zachodzi:*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\cos ktdt = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\sin ktdt = 0 \tag{6}$$

Dowód. W dowodzie funkcję f rozdzielimy na $\mathrm{Re}(f)+i\mathrm{Im}(f)$. Z ciągłości f wynika, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje taka $\delta>0$, że

$$|\mathrm{Re}(f(t+\lambda)-f(s+\lambda))|<\varepsilon$$

dla wszystkich $|t-s|<\delta$, gdzie $t,s\in\mathbb{R}$. Jest to równoznaczne z tym, że dla danych liczb rzeczywistych

$$-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_m = \pi$$

zachodzi rówość:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(f(t,\lambda)\cos kt)dt &= \sum_{n=1}^{m}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\mathrm{Re}(f(t,\lambda)\cos kt)dt \\
&= \sum_{n=1}^{m}\left(\int_{x_{n-1}}^{x_n}\cos ktdt + \int_{x_{n-1}}^{x_n}\cos(kt)\mathrm{Re}(f(t,\lambda)-f(x_n,\lambda))dt\right)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(f(t,\lambda)\cos kt)dt\right| &\le \sum_{n=1}^{m}|f(x_n,\lambda)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos ktdt\right| + 2\pi\varepsilon \\
&\le 2\frac{Mm}{k} + 2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

gdzie $M = \max\{\mathrm{Re}(f(t,\lambda)) \mid t \in [-\pi,\pi]\}$. Z tego już jasno wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f(t,\lambda)) \cos ktdt = 0.$$

Dowód dla części urojonej funkcji f odbywa się dokładnie tak samo, jedynie z zamianą $\mathrm{Re}(f)$ na $\mathrm{Im}(f)$. Zatem otrzymujemy, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda) \cos ktdt = 0.$$

Natomiast rozważania z sinusem są dużo prostsze. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f(t,\lambda) \sin kt)dt\right| &\leq \sum_{n=1}^{m} |f(x_n)| \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin ktdt\right| + 2\pi\varepsilon \\ &\leq 2\frac{Mm}{k} + 2\pi\varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f(t,\lambda) \sin kt)dt = 0. \tag{7}$$

Postępując analogicznie z $\mathrm{Im}(f)$, wnioskujemy, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f(t,\lambda) \sin kt)dt = 0. \tag{8}$$

Tym samym z (7) oraz (8) wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda) \sin ktdt = 0.$$

To kończy dowód lematu. □

Zauważmy, że powyższy lemat mówi nam, że współczynniki szeregu Fouriera zbiegają do zera przy k dążącym do nieskończoności, co stanowi warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego (w tym przypadku szeregu Fouriera).

Lemat 3.2. *Jeżeli*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) \cos kx + b_k(\lambda) \sin kx$$

jest szeregiem Fouriera funkcji $f\colon [-\pi,\pi] \times \Lambda \to \mathbb{C}$ całkowalnej na każdym przedziale $[-\pi,\pi] \times \{\lambda\}$, to dla każdego $\lambda \in \Lambda$ zachodzi warunek:

$$\lim_{k\to\infty} a_k(\lambda) = \lim_{k\to\infty} b_k(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas dla funkcji f istnieje funkcja $g \in C([-\pi,\pi] \times \Lambda, \mathbb{C})$ taka, że:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,\lambda) - g(x,\lambda)| dx < \varepsilon. \tag{10}$$

Powyższy fakt można znaleźć w książce [2]. Zauważmy teraz, że z lematu 3.1 wynikają następujące równości:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x,\lambda) \cos kxdx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x,\lambda) \sin kxdx = 0 \tag{11}$$

Zatem możemy stwierdzić, że:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\lambda) \cos kxdx\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,\lambda) - g(x,\lambda)| dx + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(x,\lambda) \cos kxdx\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

oraz

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\lambda) \sin kxdx\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,\lambda) - g(x,\lambda)| dx + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(x,\lambda) \sin kxdx\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

dla k dostatecznie dużych. Tym samym udowodniliśmy (9). □

Lemat 3.3. *Sumę częściową szeregu Fouriera w punkcie x przy ustalonym λ możemy wyrazić następująco:*

$$s_n(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t,\lambda)+f(x-t,\lambda))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{12}$$

Dowód. Najpierw zapiszemy sumę częściową za pomocą całki Dirichleta:

$$\begin{aligned}
s_n(x,\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\cos ktdt + \frac{\sin kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\sin ktdt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\right)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos k(t-x))\right)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,\lambda)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt
\end{aligned}$$

Teraz wystarczy tylko odpowiednio przekształcić funkcję pod całką:

$$\begin{aligned}
s_n(x,\lambda) &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi f(t,\lambda)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt + \int_{-\pi}^{0} f(t,\lambda)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi f(t,\lambda)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt + \int_0^\pi f(-t,\lambda)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(t,\lambda)+f(-t,\lambda))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t,\lambda)+f(x-t,\lambda))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t,\lambda)+f(x-t,\lambda))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt
\end{aligned}$$

Przy czym przedostatnia równość zachodzi na mocy okresowości funkcji. □

Twierdzenie 3.4 (Kryterium Diniego–Lipschitza zbieżności szeregów Fouriera)**.** *Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}\times\Lambda\to\mathbb{C}$ jest funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną na $[-\pi,\pi]\times\{\lambda\}$ dla każdego $\lambda\in\Lambda$. Jeżeli istnieją stałe dodatnie L,δ oraz $0<\alpha\leq 1$ takie, że*

$$|f(x_0+c,\lambda_0)-f(x_0,\lambda_0)| \leq L|c|^\alpha \;\; dla \;\; |c|<\delta,$$

to szereg Fouriera jest zbieżny w punkcie (x_0,λ_0) do $f(x_0,\lambda_0)$.

Dowód. Musimy udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0,\lambda_0) = f(x_0,\lambda_0).$$

Stosując lemat 3.3 do funkcji $f(x,\lambda)\equiv 1$, otrzymujemy

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt.$$

Zatem różnicę $s_n(x_0,\lambda_0)-f(x_0,\lambda_0)$ można wyrazić następująco:

$$s_n(x_0,\lambda_0)-f(x_0,\lambda_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t,\lambda_0)+f(x_0-t,\lambda_0)-2f(x_0,\lambda_0))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{13}$$

Przyjmijmy dalej, że

$$\phi(t,\lambda_0) := f(x_0+t,\lambda_0)+f(x_0-t,\lambda_0)-2f(x_0,\lambda_0).$$

Pokażemy, że funkcja

$$\frac{\phi(c, \lambda_0)}{c}$$

jest całkowalna na przedziale $[0, \pi]$. Istotnie, mamy

$$\int_0^\delta \left| \frac{\phi(c, \lambda_0)}{c} \right| dc \leq \int_0^\delta 2L|c|^{\alpha-1} dc < \infty$$

Zatem funkcja

$$t \mapsto \frac{|\phi(t, \lambda_0)|}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{|\phi(t, \lambda_0)|}{t} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

jest całkowalna na $[0, \pi]$. Korzystając z dowodu lematu 3.2, wnioskujemy

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0, \lambda_0) - f(x_0, \lambda_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \phi(t, \lambda_0) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 0, \tag{14}$$

co dowodzi, że

$$s_n(x_0, \lambda_0) \to f(x_0, \lambda_0).$$

□

Uwaga 3.5. *Zauważmy, że kryterium nie gwarantuje zbieżności w całej dziedzinie funkcji. Dla każdego punktu na płaszczyźnie zespolonej należy sprawdzić osobno czy dany warunek zachodzi.*

Wniosek 3.6. *Łatwo widać, że funkcje z przykładów:* 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 *i* 2.10 *spełniają kryterium Diniego-Lipschitza, a więc są rozwijalne w szereg Fouriera.*

Uwaga 3.7. *Czytelnik może sam sprawdzić, że również klasyczne kryterium Dirichleta-Jordana zbieżności szeregów Fouriera jest prawdziwe dla funkcji $f \colon K \to \mathbb{C}$.*

4 Różniczkowalność (zespolonych) szeregów Fouriera

W niniejszym rozdziale będziemy badać różniczkowe własności szeregów Fouriera funkcji $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zauważmy, że jeśli zbiór $K = \mathbb{C}$, to wówczas można mówić o analityczności funkcji f oraz pytać, czy można różniczkować szereg Fouriera "wyraz po wyrazie". Okazuje się, że przy pewnych założeniach jest to możliwe. Zaczniemy od mało znanego klasycznego twierdzenia dla szeregów Fouriera funkcji rzeczywistych $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Szkic dowodu można znaleźć w jednej z pozycji wymienionych w literaturze [5].

Twierdzenie 4.1 (Różniczkowalność szeregów)**.** *Jeśli $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz $f(-\pi) = f(\pi)$, to szereg Fouriera funkcji $f'(x)$ możemy otrzymać, różniczkując szereg Fouriera funkcji $f(x)$ wyraz po wyrazie.*

Dowód. Niech

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{15}$$

gdzie

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos(kx) dx, \ k \geqslant 0,$$
$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin(kx) dx, \ k > 0.$$

Niech

$$f'(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \tilde{a}_k \cos(kx) + \tilde{b}_k \sin(kx), \tag{16}$$

gdzie

$$\tilde{a}_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)dx,\ k \geqslant 0,$$
$$\tilde{b}_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)dx,\ k > 0.$$

Zauważmy teraz, że całkowanie przez części implikuje, że

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \left.\frac{f(x)\sin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f'(x)\sin(kx)}{k}dx = -\frac{\pi\tilde{b}_k}{k}$$

oraz

$$\pi b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \left.\frac{-f(x)\cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)\cos(kx)}{k}dx = \frac{\pi\tilde{a}_k}{k}$$

dla $k > 0$. Zatem

$$\tilde{a}_k = kb_k \text{ oraz } \tilde{b}_k = -ka_k \text{ dla } k > 0.$$

Ponadto $\tilde{a}_0 = 0$. A stąd już wynika teza twierdzenia. □

Twierdzenie 4.2 (Zależność między współczynnikami). *Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $2\pi-$okresowa względem zmiennej rzeczywistej spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna, tzn.*

$$f(z) = u(t,y) + iv(t,y)$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dy},$$
$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dt},$$

co jest równoznaczne jej holomorficzności, to wówczas między współczynnikami w jej rozwinięciu w szereg Fouriera zachodzą relacje

$$a_k(y) = \frac{i}{k}\frac{db_k(y)}{dy}, \tag{17}$$

$$b_k(y) = \omega_k(y) - \frac{i}{k}\frac{da_k(y)}{dy}, \tag{18}$$

gdzie

$$\omega_k(y) = -\frac{1}{\pi k}\ f(t+yi)\cos kt|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{(-1)^k}{\pi k}\ f(t+yi)|_{-\pi}^{\pi}.$$

Dowód. Skorzystamy z całkowania przez części,

$$\begin{aligned} a_k(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\cos kt dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left.\frac{f(t+yi)\sin kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{df(t+yi)}{dt}\sin kt dt \\ &= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(u+iv)}{dt}\sin kt dt \\ &= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(v-iu)}{dy}\sin kt dt \\ &= \frac{i}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(u+iv)}{dy}\sin kt dt \\ &= \frac{i}{\pi k}\cdot\frac{d}{dy}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\sin kt dt \\ &= \frac{i}{k}\frac{db_k(y)}{dy}. \end{aligned}$$

Analogicznie w przypadku drugiej równości,

$$\begin{aligned}
b_k(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\sin kt dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\left.\frac{f(t+yi)\cos kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{df(t+yi)}{dt}\cos kt dt \\
&= \omega_k(y) + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(u+iv)}{dt}\cos kt dt \\
&= \omega_k(y) + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(v-iu)}{dy}\cos kt dt \\
&= \omega_k(y) - \frac{i}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(u+iv)}{dy}\cos kt dt \\
&= \omega_k(y) - \frac{i}{\pi k}\cdot\frac{d}{dy}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\cos kt dt \\
&= \omega_k(y) - \frac{i}{k}\frac{da_k(y)}{dy}.
\end{aligned}$$

□

Wniosek 4.3. *Jeżeli dana jest funkcja* $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *taka, że* $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$*, to wówczas* $b_k(y)$ *jest ciągiem funkcji niebędących funkcjami stałymi. Inaczej* b_k *byłby niezależny od* y*, a ciąg* a_k *z równości* (17) *tożsamościowo równy 0.*

Należy podkreślić wagę i znaczenie równości (17) i (18), szczególnie z tego powodu, że równania Cauchy'ego-Riemanna w analizie zespolonej mają wiele nietrywialnych implikacji. Są one charakterystyczne dla funkcji holomorficznych, ale niekoniecznie wszystkich funkcji dwóch zmiennych, dlatego w szeregach Fouriera tych funkcji nie muszą one być prawdziwe.

Znając zależności między współczynnikami a_k i b_k danego szeregu, przechodzimy do zależności między współczynnikami szeregu danej funkcji a jej pochodnej.

Twierdzenie 4.4 (Zależność między szeregami)**.** *Jeśli funkcja* $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$*,* $2\pi-$*okresowa względem zmiennej rzeczywistej spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna, to wówczas między współczynnikami jej rozwinięcia w szeregu Fouriera* $(a_k(y), b_k(y))$ *a jej pochodnej* $(\tilde{a}_k(y), \tilde{b}_k(y))$ *zachodzą relacje*

$$\tilde{b}_k(y) = -ka_k(y), \tag{19}$$

$$\tilde{a}_k(y) = kb_k(y) - \frac{k}{2}\omega_k(y). \tag{20}$$

Dowód. Dzięki warunkom z równań Cauchy'ego-Riemanna (równoznacznym holomorficzności) w dowodzie będziemy mogli wykorzystać pochodne Wirtingera [6], tzn.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial}{\partial t} &= 2\frac{d}{dz} + i\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Wówczas mamy

$$\begin{aligned}
a_k(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\cos ktdt \\
&= \frac{1}{\pi}\left.\frac{f(t+yi)\sin kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f(t+yi)}{\partial t}\sin ktdt \\
&= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\frac{df(z)}{dz} + i\frac{\partial f(t+yi)}{\partial y}\right)\sin ktdt \\
&= -\frac{2}{k}\tilde{b}_k(y) - \frac{i}{k}\frac{db_k(y)}{dy}.
\end{aligned}$$

Przekształcając równość dla $\tilde{b}$, korzystając z poprzedniego twierdzenia, otrzymujemy,

$$\tilde{b}_k(y) = -\frac{ka_k(y) + i\frac{db_k(y)}{dy}}{2} = -ka_k(y).$$

Podobnie postępujemy z drugim współczynnikiem,

$$\begin{aligned}
b_k(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+yi)\sin ktdt \\
&= -\frac{1}{\pi}\left.\frac{f(t+yi)\cos kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f(t+yi)}{\partial t}\cos ktdt \\
&= \omega_k(y) + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\frac{df(z)}{dz} + i\frac{\partial f(t+yi)}{\partial y}\right)\cos ktdt \\
&= \omega_k(y) + \frac{2}{k}\tilde{a}_k(y) + \frac{i}{k}\frac{da_k(y)}{dy}.
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\tilde{a}_k(y) = \frac{kb_k(y) - i\frac{da_k(y)}{dy}}{2} - \frac{k}{2}\omega_k(y) = kb_k(y) - \frac{k}{2}\omega_k y.$$

□

Uwaga 4.5. *Jeżeli funkcja spełnia równość $f(\pi + yi) = f(-\pi + yi)$, to wówczas $\omega_k(y) = 0$, a druga równość sprowadza się do*

$$\tilde{a}_k(y) = kb_k(y).$$

Pierwsza równość jest prawdziwa niezależnie od tego, czy $\omega_k(y) = 0$, czy też nie.

Widzimy, że zależności znów są podobne do swoich rzeczywistych analogów, jedyną różnicą jest zaś ciąg ω_k. Pokażemy prawdziwość tych równań na przykładzie.

Przykład 4.6. *Weźmy funkcję $f\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ określonej wzorem $f(z) = \sin(z)$. Wówczas współczynniki w szeregu Fouriera funkcji $f(z)$ wyrażają się wzorami*

$$a_k(y) = \begin{cases}\sin(yi) & \text{dla } k = 1,\\ 0 & \text{dla } k \neq 1,\end{cases}$$

$$b_k(y) = \begin{cases}\cos(yi) & \text{dla } k = 1,\\ 0 & \text{dla } k \neq 1.\end{cases}$$

Wynika to z faktu, że

$$\sin(z) = \sin(yi)\cos(x) + \cos(yi)\sin(x).$$

Możemy zweryfikować, że takie współczynniki spełniają równania (17) *i* (18)*, bo*

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{i}{k} \cdot 0 \ \textit{dla}\ k \neq 1,\\
\sin(yi) &= \frac{i}{1}\frac{d\cos(yi)}{dy} \ \textit{dla}\ k = 1,\\
0 &= 0 - \frac{i}{k} \cdot 0 \ \textit{dla}\ k \neq 1,\\
\cos(yi) &= 0 - \frac{i}{1}\frac{d\sin(yi)}{dy} \ \textit{dla}\ k = 1.
\end{aligned}
$$

Ponadto, skoro

$$
\frac{d\sin(z)}{dz} = \cos(z) = \cos(yi)\cos(x) - \sin(yi)\sin(x),
$$

to widzimy, że współczynniki

$$
\tilde{a}_k(y) = \begin{cases} \cos(yi) & \textit{dla}\ k = 1,\\ 0 & \textit{dla}\ k \neq 1, \end{cases}
$$

$$
\tilde{b}_k(y) = \begin{cases} -\sin(yi) & \textit{dla}\ k = 1,\\ 0 & \textit{dla}\ k \neq 1 \end{cases}
$$

spełniają równania (19) *i* (20) *opisujące zależności między współczynnikami w szeregu Fouriera danej funkcji a w szeregu Fouriera jej pochodnej.*

5 Zastosowania szeregów Fouriera

W niniejszym rozdziale zaprezentujemy zastosowania szeregów Fouriera do liniowych sparametryzowanych równań różniczkowych o wartościach zespolonych. Będziemy rozpatrywali następujące równania różniczkowe:

$$
y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t, \lambda),
$$

gdzie $f \colon \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{C}$ oraz Λ jest dowolnym domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}$. Ponadto zakładamy, że

(1) dla każdego parametru $\lambda \in \Lambda$ oraz $t \in \mathbb{R}$ funkcja f spełnia warunek $f(t + 2\pi, \lambda) = f(t, \lambda)$,

(2) dla każdego $\lambda \in \Lambda$, funkcja $f(t, \lambda)$ ma postać:

$$
\frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda)\cos(kt) + b_k(\lambda)\sin(kt),
$$

(3) funkcje $a_k \colon \Lambda \to \mathbb{C}$ oraz $b_k \colon \Lambda \to \mathbb{C}$ są ciągłe.

Lemat 5.1. *Równanie różniczkowe*

$$
y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t, \lambda)
$$

posiada rozwiązanie.

Dowód. Poszukujemy rozwiązanie w postaci:

$$
y_\lambda(t) = \frac{A_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\lambda)\cos(kt) + B_k(\lambda)\sin(kt).
$$

Wyrażamy odpowiednio pochodną pierwszego i drugiego rzędu funkcji y za pomocą szeregu,

$$
\begin{aligned}
y'_\lambda(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} kB_k(\lambda)\cos(kt) - kA_k(\lambda)\sin(kt),\\
y''_\lambda(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} -k^2A_k(\lambda)\cos(kt) - k^2B_k(\lambda)\sin(kt).
\end{aligned}
$$

Podstawiając współczynniki do równania i przyrównując do prawej strony, otrzymujemy:

$$
\left\{\begin{array}{lcl} -k^2A_k(\lambda)+kB_k(\lambda)+A_k(\lambda) &=& a_k(\lambda)\\ -k^2B_k(\lambda)-kA_k(\lambda)+B_k(\lambda) &=& b_k(\lambda)\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (1-k^2)A_k(\lambda)+kB_k(\lambda) &=& a_k(\lambda)\\ -kA_k(\lambda)+(1-k^2)B_k(\lambda) &=& b_k(\lambda)\end{array}\right. ,
$$

dla $k \geqslant 1$. Jest jasne, że jeśli $k=0$, to $A_0(\lambda)=a_0(\lambda)$. Jeśli $k=1$, to z powyższego układu równań wynika, że $A_1(\lambda)=-b_1(k)$ oraz $B_1(\lambda)=a_1(\lambda)$. Rozwiązując powyższy układ równań niewiadomych $A_k(\lambda), B_k(\lambda)$ dla $k>1$, otrzymujemy rozwiązania:

$$
\begin{aligned}
A_k(\lambda) &= \frac{a_k(\lambda)(1-k^2)-kb_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2},\\
B_k(\lambda) &= \frac{b_k(\lambda)(1-k^2)+ka_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}.
\end{aligned}
$$

Wobec tego rozwiązanie $y_\lambda(t)$ ma następującą postać:

$$
y_\lambda(t) = \frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)(1-k^2)-kb_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\cos(kt) + \frac{b_k(\lambda)(1-k^2)+ka_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\sin(kt).
$$

Zauważmy, że powyższy szereg trygonometryczny jest zbieżny, ponieważ

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)(1-k^2)-kb_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\cos(kt) + \frac{b_k(\lambda)(1-k^2)+ka_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\sin(kt)\right|\\
&\leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k(\lambda)(1-k^2)-kb_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\cos(kt) + \frac{b_k(\lambda)(1-k^2)+ka_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\sin(kt)\right|\\
&\leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\frac{a_k(\lambda)(1-k^2)-kb_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\right||\cos(kt)| + \left|\frac{b_k(\lambda)(1-k^2)+ka_k(\lambda)}{(1-k^2)^2+k^2}\right||\sin(kt)|\right)\\
&\leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(\lambda)|+|b_k(\lambda)|)\frac{(k^2+k-1)}{(1-k^2)^2+k^2} \leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(\lambda)|+|b_k(\lambda)|)\frac{2}{(k-1)^2+1}\\
&\leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} 2M(\lambda)\frac{2}{(k-1)^2+1} \leqslant \left|\frac{a_0(\lambda)}{2}\right| + 4M(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4M(\lambda)}{k^2} < \infty,
\end{aligned}
$$

gdzie ostatnie oszacowania wynikają z faktu, że ciągi $a_k(\lambda)$ i $b_k(\lambda)$ są ograniczone przez stałą $M(\lambda)$, ponieważ $a_k(\lambda)$ oraz $b_k(\lambda)$ zbiegają do zera przy $k \to \infty$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$. Tym samym udowodniliśmy, że rozwiązanie $y_\lambda(t)$ jest poprawnie określone, co kończy dowód. □

Uwaga 5.2. *Odnotujmy, że lemat* 5.1 *można uogólnić na przypadek równań różniczkowych n-tego rzędu o dowolnych zespolonych współczynnikach:*

$$
\alpha_n y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f(t,\lambda),
$$

gdzie $\alpha_i \in \mathbb{C}$ dla $i=0,1,\ldots,n$. Jednakże w niniejszej pracy ograniczyliśmy się do równań różniczkowych drugiego rzędu, ponieważ one odgrywają dużą rolę we fizyce i, co więcej, zrozumienie metody dla równań drugiego rzędu pozwala łatwo stwierdzić, że zaprezentowany wynik jest również prawdziwy dla równań wyższego rzędu.

6 Otwarte problemy

Na zakończenie przedstawiamy główne i najbardziej znaczące zagadnienia powiązane z omówioną teorią, które wymagają dalszych analiz.

- Czy istnieją jeszcze jakieś kryteria zbieżności dla szeregów Fouriera funkcji zespolonych, ogólniejsze/inne niż te będące uogólnionymi wersjami kryteriów Diniego-Lipschitza i Dirichleta-Jordana?
- Jakie możliwe implikacje możemy otrzymać dzięki odpowiednikom równań Cauchy'ego-Riemanna dla współczynników szeregów, tj. równań (17) i (18)?
- Czy metoda szeregów Fouriera może być zastosowana w teorii bifurkacji zarówno zwyczajnych równań różniczkowych, jak i równań różniczkowych cząstkowych?

Literatura

[1] Grant Sanderson, But what is a Fourier series?, `https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k`, dostęp: 10.04.2021

[2] Kaczor Wiesława, Nowak Maria, Zadania z analizy matematycznej. Całkowanie, Tom 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.

[3] Andrzej Ganczar, Analiza zespolona w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2010.

[4] McQuarrie Donald A., Matematyka dla przyrodników i inżynierów, Tom 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.

[5] E.T. Whittaker, G.N. Watson, Kurs analizy wspołczesnej, Część pierwsza, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1967.

[6] Hunger Raphael, An Introduction to Complex Differentials and Complex Differentiability, Technische Universitaet Muenchen, Monachium, 2007.