Twierdzenie Helly'ego i zbiory na płaszczyźnie

Piotr Kuc

Streszczenie

W mojej pracy udowadniam twierdzenie Helly'ego, dowodzę z jego pomocą istnienie pewnych ciekawych punktów w dowolnym zbiorze wypukłym, a także pokazuję niezwykłą analogię własności punktów na płaszczyźnie z rodzinami spójnych zbiorów spełniających określone warunki.

1 Wprowadzenie

Moja praca składa się z paru części. W pierwszej skoncentrujemy się nad samym zrozumieniem i udowodnieniem twierdzenia Helly'ego w $\mathbb{R}^d$ (przestrzeni d wymiarowej). Następnie w drugiej użyjemy naszego twierdzenia do pokazania istnienia punktu centralnego i punktu Tukey'a zbioru wypukłego. Finalnie zajmiemy się konceptem rodziny Helly'ego, czyli rodziny spójnych zbiorów na płaszczyźnie takich, że dowolne dwa zbiory w rodzinie mają niepuste przecięcie. Udowodnimy pewne geometryczne własności rodziny Helly'ego, pomiędzy dowolnymi dwoma poprowadzimy prostą[1], a ostatecznie przez trzy rodziny uda nam się poprowadzić okrąg[2].

2 Definicje i twierdzenia

W tej części pracy przybliżę czytelnikowi używane przeze mnie narzędzia i definicje. Udowodnię również dwa twierdzenia. Na początku twierdzenie Radona, a potem używając twierdzenia Radona twierdzenie Helly'ego.

2.1 Podstawowe definicje

- $\mathbb{R}^d$ - przestrzeń d wymiarowa
- Zbiór wypukły - spójny zbiór punktów $\mathbb{R}^d$ charakteryzujący się brakiem jakichkolwiek wgłębień i dziur. Innymi słowami podzbiór pewnej przestrzeni zawierający wraz z dowolnymi dwoma jego punktami odcinek je łączący. Przykładem zbioru wypukłego może być sześcian, bądź kula w $\mathbb{R}^3$. W tej pracy będziemy zajmować się skończonymi ograniczonymi zbiorami wypukłymi. Aby uniknąć problemów ze stosowaniem twierdzenia Helly'ego dla nieskończonej rodziny zbiorów wypukłych.
- $conv(Z)$ - funkcja, która przyjmuje zbiór punktów Z i zwraca zbiór wypukły w przestrzeni o minimalnym polu zawierający wszystkie punkty z Z. możemy sobie wyobrazić, jakbyśmy ciasno owijali Z papierem prezentowym

[1] prosta przecinająca każdy ze zbiorów obu rodzin.
[2] okrąg przecinający każdy ze zbiorów w trzech rodzinach.

- Hiperpłaszczyzna - tak jak płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$, pewna podprzestrzeń $d-1$ wymiarowa przestrzeni d wymiarowej
- Simplex - wersja trójkąta dla wyższych wymiarów, dla $\mathbb{R}^d$ ma $d+1$ wierzchołków.

2.2 Twierdzenia

2.2.1 Twierdzenie Radona

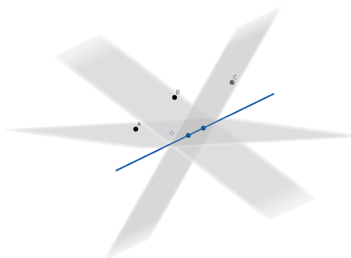
Twierdzenie Radona *Jeśli w $\mathbb{R}^d$ mamy przynajmniej $d+2$ punktów, możemy je podzielić na dwa rozłączne zbiory A, B takie, że $conv(A) \cap conv(B) \neq \phi$*

Spójrzmy na indukcje po d. W przypadku $d = 0$ w $\mathbb{R}^0$ mamy 2 punkty nachodzące na siebie. Niech A będzie pierwszym, a B będzie drugim z tych punktów. Początek indukcji jest więc oczywisty. Udowodnijmy najpierw lemat.

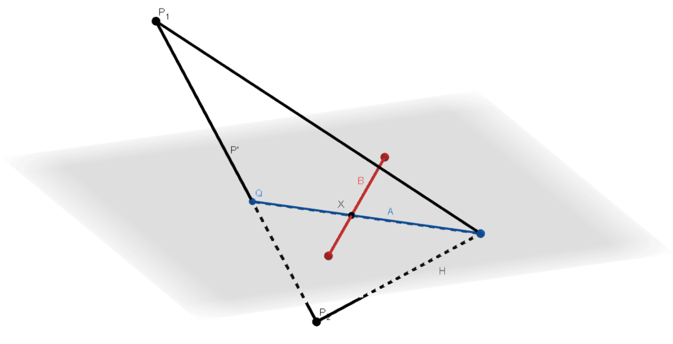
Lemat 1.

Dla dowolnych $d+2$ punktów w $\mathbb{R}^d$ istnieje hiperpłaszczyzna zawierająca d z nich taka, że dwa pozostałe punkty nie leżą po jej jednej stronie.

Naturalnie d punktów jednoznacznie definiuje $d-1$ wymiarową hiperpłaszczyznę, wybierzmy więc pewną z nich. Zakładamy, że dwa pozostałe punkty są po jednej jej stronie. Weźmy teraz pewne $d-1$ z tych d punktów i $d-2$ wymiarową hiperoś O przez nie wyznaczoną. Możemy teraz obracać naszą hiperpłaszczyzną względem hiperosi. Najpierw napotykamy punkt A (jeden z naszych pierwotnie wybranych d punktów), potem punkt B, a potem C leżące po jednej stronie naszej pierwotnej hiperpłaszczyzny. Gdy popatrzymy na hiperpłaszczyznę zawierającą B i hiperoś O okaże się, że punkty A i C nie mogą leżeć po jednej jej stronie.



Rysunek 1: Lemat w $\mathbb{R}^3$



Rysunek 2: Dowód twierdzenia w $mathbbR^3$

Skoro udowodniliśmy Lemat przejdźmy do naszego twierdzenia. Powiedzmy, że indukcyjnie dowiedliśmy twierdzenie dla $d-1$, Weźmy sobie więc taką hiperoś, która spełnia warunki Lematu nazwijmy ją H. Dwa pozostałe punkty to będą P_1, P_2. Odcinek łączący P_1 i P_2 nazwijmy P', niech P' przecina H w punkcie Q.

Teraz na mocy indukcji wiemy, że możemy podzielić punkty na $p-1$ wymiarowej hiperosi H na dwa zbiory zgodnie z treścią twierdzenia. Tych punktów jest oczywiście przynajmniej $d+1$ (d z wyboru takiej hiperosi w Lemacie 1, i punkt Q). Niech ten podział będzie na zbiór A taki, że $Q \in A$ i B. Teraz wystarczy zauważyć, że skoro $conv(A) \cap conv(B) \neq \phi$ i $Q \in P'$ to

$$conv(A) \subseteq conv(A \setminus Q \cup P')$$

Finalnie więc

$$conv(A \setminus Q \cup P') \cap conv(B) \neq \phi$$

Wszystkie punkty w tych zbiorach są oczywiście pierwotnymi $d+2$ punktami. Dla większej liczby punktów twierdzenie naturalnie wciąż jest prawdziwe.

2.2.2 Twierdzenie Helly'ego

Twierdzenie Helly'ego *Niech w $\mathbb{R}^d$ istnieje pewna rodzina zbiorów wypukłych (najlepiej ograniczonych i domkniętych, wtedy moc tej rodziny może być nieskończona). Jeżeli każde $d+1$ zbiorów z tej rodziny ma niepuste przecięcie, to wszystkie zbiory w tej rodzinie mają niepuste przecięcie.*

Przeprowadzę go dla skończonej rodziny, ponieważ udowodnienie twierdzenia dla nieskończonej jest troszeczkę trudniejsze. Będę jednakże korzystał również z twierdzenia dla nieskończonej rodziny. Sam dowód przeprowadzimy indukcją po mocy rodziny. Krok indukcyjny, gdy $|F| = d+1$ jest oczywisty (F to nasza rodzina zbiorów).

Powiedzmy więc, że twierdzenie Helly'ego zostało udowodnione dla wszystkich rodzin o mocy nie większej niż n. Weźmy więc rodzinę zbiorów wypukłych F o mocy równej $n+1$. Niech $F = \{B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}\}$, gdzie B_i to oczywiście zbiory wypukłe. Teraz niech $X_i = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{n+1}$. Czyli po prostu przecięcie wszystkich zbiorów rodziny oprócz B_i. Na mocy założenia indukcyjnego $X_i \neq \phi$.

Niech więc istnieje $n+1$ punktów takich, że $x_i \in X_i$. Takich punktów jest $n+1 \geqslant d+2$, ponieważ $n \geqslant d+1$. Możemy więc zastosować poprzednio udowodnione twierdzenie Radona. Bez straty ogólności załóżmy więc, że

$$conv(x_1, x_2, \cdots, x_k) \cap conv(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{n+1}) \neq \phi$$

Niech punkt y będzie należał do tego przecięcia. Zauważmy jednak, że dla dowolnego $i > k$, ponieważ B_i jest wypukły i każdy punkt x_j, gdzie $j \leqslant k$ należy m.in. do B_i to $y \in conv(x_1, x_2, \cdots, x_k) \subseteq B_i$. Za to jeżeli $i \leqslant k$ to analogicznie $y \in conv(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{n+1}) \subseteq B_i$. y należy więc do wszystkich zbiorów B_i, a co za tym idzie ich przecięcie jest niepuste. Indukcja spełniona dla dowolnej rodziny o mocy $n+1$.

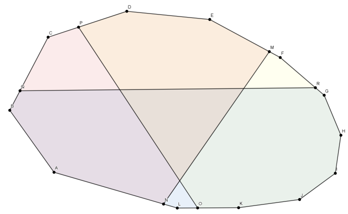
3 Ciekawe punkty w zbiorze wypukłym

W tej części pracy udowodnię istnienie dwóch punktów przy użyciu tytułowego twierdzenia Helly'ego. Pierwszy to punkt centralny zbioru wypukłego, a drugi to punkt Tukey'a. Oba w swój własny unikalny sposób zbliżają nas do wyznaczenia czegoś podobnego do środka w dowolnym ograniczonym i domkniętym zbiorze wypukłym.

3.1 Punkt centralny w zbiorze wypukłym

Spójrzmy na dowolny ograniczony domknięty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^d$. Okazuje się, że zawsze możemy wskazać w nim taki punkt, że jeśli poprowadzimy przez niego $d-1$ wymiarową hiperpłaszczyznę, czyli podzielimy nasz zbiór na dwie części, to stosunek pól większej do mniejszej nie przekracza $d:1$.

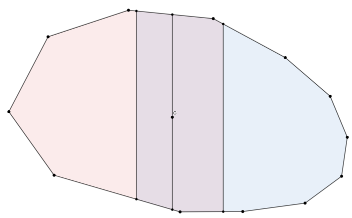
Dowód istnienia takiego punktu jest niezwykle prosty, jeśli jesteśmy wyposażeni w twierdzenie Helly'ego. Na początku dla ułatwienia załóżmy, że nasz zbiór wypukły ma pole $d+1$ Rozważmy nieskończoną rodzinę zbiorów wypukłych składającą się z części naszego zbioru wypukłego przeciętych hiperpłaszczyzną o polu dowolnie bliskim, lecz wciąż większym niż d, czyli $d+\epsilon$. Gdy weźmiemy sobie dowolne $d+1$ z tych zbiorów, tak jak na rysunku 3 w $\mathbb{R}^2$,



Rysunek 3: Przecinające się części w $\mathbb{R}^2$

zauważymy, że ponieważ łączne pole to $d+1$ a każdy zbiór usuwa z niego mniej niż 1, to te dowolne $d+1$ zbiorów mają wspólne przecięcie. Z twierdzenia Helly'ego dla nieskończonej rodziny wynika, że wszystkie te zbiory mają niepuste przecięcie.

Każdy punkt w tym przecięciu, nazwijmy go C możemy nazwać naszym punktem centralnym, ponieważ dowolna hiperpłaszczyzna przez niego przechodząca będzie leżała pomiędzy dwoma równoległymi do niej hiperpłaszczyznami dzielącymi ten zbiór, jedna w dowolnie bliskim stosunku $1:d$. Druga, zaś w stosunku dowolnie bliskim $d:1$. Hiperpłaszczyzna przechodząca przez ów punkt dzieli nasz zbiór w stosunku pól większej części do mniejszej maksymalnie $d:1$, tak jak na rysunku 4. C jest więc punktem centralnym.



Rysunek 4: Punkt centralny w $\mathbb{R}^2$

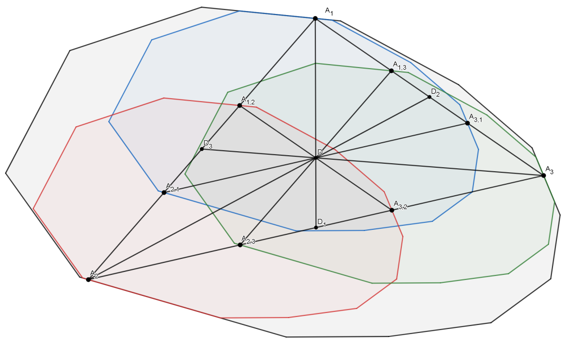
3.2 Punkt Tukey'a w zbiorze wypukłym

Jeszcze raz spójrzmy na nasz ograniczony domknięty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^d$. Podejmiemy się dowodu istnienia punktu Tukey'a. To taki punkt, że jeśli spojrzymy na dowolny odcinek przez niego przechodzący, o wierzchołkach na brzegu naszego zbioru, to stosunek w jakim nasz punkt dzieli ten odcinek jest równy maksymalnie $d:1$ (stosunek dłuższej części do krótszej).

W celu dowodu rozważmy nieskończoną rodzinę zbiorów wypukłych (domkniętych i ograniczonych) składającą się z jednokładności naszego pierwotnego zbioru wypukłego o środkach jednokładności na jego brzegu o skali $\frac{d}{d+1}$.

Gdy rozważymy dowolne $d+1$ takich zbiorów powiedzmy $B_1, B_2, \cdots, B_{d+1}$, powiedzmy o środkach jednokładności $A_1, A_2, \cdots, A_{d+1}$ i oznaczymy jako $A_{i,j}$ punkt na który przechodzi A_i w jednokładności o środku w A_j i skali $\frac{d}{d+1}$. Zauważymy, że dla każdego i simplex, czyli d wymiarowy trójkąt na wierzchołkach $A_i, A_{1,i}, A_{2,i}, \cdots, A_{d+1,i}$ jest podzbiorem B_i. Oznaczmy taki simplex jako C_i. Za to simplex na $A_1, A_2, \cdots, A_{d+1}$ oznaczmy jako C. Oczywiście C_i to jednokładność C o środku A_i i skali $\frac{d}{d+1}$. Teraz środek ciężkości $d-1$ wymiarowego simplexu $A_1, A_2, \cdots A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_{d+1}$ oznaczmy jako D_i, sam za to simplex oznaczmy jako E_i, a środek ciężkości całego simplexu C jako D.

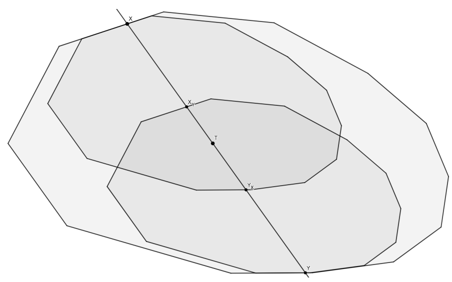
Możemy teraz zauważyć, że z definicji środka ciężkości D dzieli odcinek D_iA_i na dwie części o długościach w skali $1:d$, czyli D jest jednokładnością punktu D_i o środku A_i i skali $\frac{d}{d+1}$. D_i jest



Rysunek 5: Przecinanie się jednokładności w $\mathbb{R}^2$

środkiem ciężkości simplexu E_i, więc należy do simplexu E_i, który jest podzbiorem simplexu C, więc $D_i \in C$. Za to simplex C_i to jednokładność C o środku A_i i skali $\frac{d}{d+1}$, więc D to jednokładność D_i o środku A_i i takiej samej skali. To w połączeniu z faktem, że $D_i \in C$ znaczy, że $D \in C_i \subseteq B_i$ dla każdego i. Znaczy to, że przecięcie D należy do przecięcia tych $d+1$ zbiorów w naszej rodzinie. Możemy więc zastosować twierdzenie Helly'ego.

Istnieje więc pewien punkt T należący do przecięcia wszystkich zbiorów w tej rodzinie. Gdy teraz popatrzymy na dowolny odcinek przez niego przechodzący i przechodzący przez brzeg naszego pierwotnego zbioru w X i Y zauważymy, że T należy do B_X i B_Y, czyli jednokładności naszego zbioru o środku odpowiednio w X i Y i skali $\frac{d}{d+1}$. Leży więc pomiędzy X_Y, czyli jednokładnością punktu X o środku w Y i analogicznie zdefiniowanym Y_X, czyli punktami, które dzielą nasz odcinek na dwie części o długościach w skali $1 : d$ i $d : 1$. Skala długości, w jakiej T dzieli ten odcinek, jest więc mniejsza niż $d : 1$ (stosunek dłuższej części do krótszej) dla dowolnego odcinka przechodzącego przez T. Punkt T jest więc punktem Tukey'a naszego zbioru.



Rysunek 6: Punkt Tukey'a w $\mathbb{R}^2$

4 Rodziny Helly'ego

Ta część mojej pracy będzie poświęcona rodzinom zbiorów posiadającym własność Helly'ego na płaszczyźnie. Ten temat rozpocząłem od pewnego zadania opierającego się na twierdzeniu Helly'ego. Ciekawe zadanie ewoluowało w niezwykle interesujące uniwersum. Naszym finalnym celem będzie poprowadzenie okręgu przez trzy dowolne rodziny Helly'ego. Porzucamy tutaj wyższe wymiary i zajmujemy się płaszczyzną.

4.1 Początek Przygody

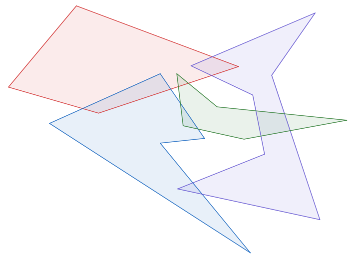
Zaczniemy sobie od zdefiniowania rodziny Helly'ego i innych potrzebnych nam zwrotów.

4.1.1 Niezbędne definicje

Własność Helly'ego - pewna rodzina zbiorów posiada własność Hell'ego jeśli dowolne dwa jej zbiory mają niepuste przecięcie.

Rodzina Helly'ego - jest to rodzina zbiorów posiadająca własność Hell'ego. W tej pracy będziemy się zajmować zbiorami na płaszczyźnie: domkniętymi i ograniczonymi, niekoniecznie za to wypukłymi.

Przecinanie rodziny przez zbiór - Gdy będziemy mówić, że pewien zbiór punktów na przykład prosta przechodzi przez rodzinę Helly'ego, będzie nam chodziło o to, że zbiór ten ma niepuste przecięcie z każdym zbiorem w tej rodzinie.



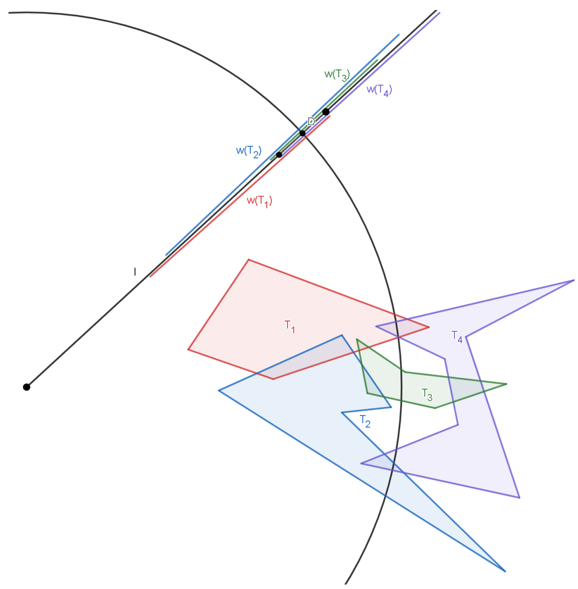
Rysunek 7: Rodzina Helly'ego

4.1.2 Pierwotne zadanie

Zadanie to zobaczyłem podczas gromadzenia materiałów o twierdzeniu Helly'ego w pdf-ie dr Arkadiusza Męcla "Wokół Twierdzenia Helly'ego". Niezwykle mi się spodobało z powodu jego ciekawego dowodu i możliwości rozszerzania i eksplorowania.

Pierwotne Zadanie *Dla dowolnej rodziny Helly'ego i dowolnego punktu X na płaszczyźnie istnieje okrąg o środku w X przechodzący przez naszą rodzinę.*

Rozważmy sobie półprostą l wychodzącą z X. Zacznijmy ją obracać wokół X. Dla każdego zbioru rodziny będziemy na tej półprostej zapisywać ślad jaki on zostawia w miarę obracania półprostej wokół X.



Rysunek 8: Rodzina Helly'ego i ślady jej zbiorów

Innymi słowy definiujemy funkcje w zamieniającą zbiór T na płaszczyźnie na odcinek $w(T)$ na półprostej o początku w X. Aby wyznaczyć dokładnie ten odcinek wystarczy znaleźć dwa punkty: punkt A z T najbliższy X i punkt B najdalszy. Nasz odcinek $w(T)$ to przedział $\langle |AX|\,;|BX|\rangle$ na półprostej l.

Zauważmy, jednak, że skoro ta rodzina ma własność Helly'ego, to dowolne dwa zbiory w niej mają niepuste przecięcie. Ślady te jako odcinki są wypukłe i również muszą mieć niepuste przecięcie. Możemy więc dla rodziny tych wszystkich śladów użyć twierdzenia Helly'ego na półprostej l, czyli w $\mathbb{R}$. Przecięcie wszystkich śladów będzie odcinkiem na l, nazwijmy go D i jeśli poprowadzimy okrąg o środku w X przechodzący przez dowolny punkt tego odcinka, będzie on przecinać wszystkie ślady, a co za tym idzie wszystkie zbiory rodziny.

Zanim pożegnamy się z tym zadaniem zdefiniujmy funkcje odległości rodziny Helly'ego M od punktu X jako $o(M, X)$. Jest to odległość środka odcinka D z zadania od X. Okrąg o środku w X i promieniu $o(M, X)$ przecina rodzinę Helly'ego M.

Zdefiniujmy sobie X_k jako punkt nieskończoności o zwrocie $k°$. Powiedzmy, że zwrot w górę to $0°$, po czym idziemy zgodnie ze wskazówkami zegara (rozróżniamy dwa punkty nieskończoności o tym samym kierunku i przeciwnym zwrocie).

Zdefiniujmy sobie także funkcje $q(M, X)$ jako okrąg o środku X i promieniu $o(M, X)$.

Za to niech $q(M, X_k)$ to prosta przechodząca przez rodzinę M o kierunku prostopadłym do zwrotu $k°$. Taka prosta oczywiście istnieje, dowód jej istnienia jest dość analogiczny: Wybierzmy dowolną prostą o kierunku $k°$ i zrzutujmy sobie zbiory z rodziny na nią. Powstaje nam rodzina odcinków z własnością Helly'ego. Wybieramy środek wspólnego przecięcia i prowadzimy przez niego prostą prostopadłą do $k°$.

4.2 Prosta łącząca dwie rodziny

Rozważmy dwie rodziny Helly'ego M i W. Poszukamy pewnych zależności między nimi, analogicznych z zależnościami między punktami.

4.2.1 Twierdzenie

Postaram się udowodnić, że można dwie rodziny połączyć prostą, która przechodzi przez wszystkie zbiory tych rodzin. Użyjemy do tego bardzo uproszczonej wersji twierdzenia Borsuka-Ulama, lecz dobrze będzie, gdy nazwa ta padnie teraz, ponieważ to twierdzenie przyda nam się w przyszłości.

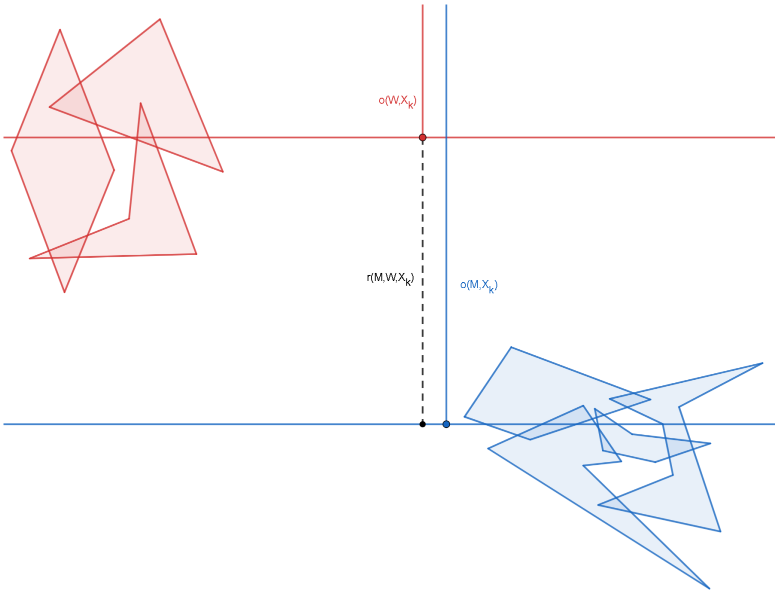
Twierdzenie Borsuka-Ulama (jednowymiarowe) *Niech S to okrąg na płaszczyźnie. Jeśli funkcja $f : S \mapsto \mathbb{R}$ jest nieparzysta, czyli $f(-x) = -f(x)$ i jest funkcją ciągłą, to istnieje takie x, że $f(x) = 0$.*

Dowód tej wersji twierdzenia jest bardzo szybki, idziemy po okręgu i notujemy na wykresie gdzie wylądowaliśmy, Zaczynamy i kończymy na wartościach o przeciwnych znakach, więc musimy kiedyś przejść przez 0 z ciągłości.

4.2.2 Funkcja

Naszym dyskiem będzie okrąg punktów nieskończoności S. Nasza funkcja będzie działać w sposób następujący: wybierzmy kierunek $k°$ skonstruujmy proste $q(M, X_k)$ i $q(W, X_k)$. Niech odległość między nimi to d funkcja $r(M, W, X_k)$ będzie wynosić d jeśli patrząc na X_k $q(M, X_k)$ jest wcześniej niż $q(W, X_k)$, a $-d$ w przeciwnym wypadku.

Oczywiście jest to funkcja nieparzysta.



Rysunek 9: Wyznaczanie $r(M, W, X_k)$

4.2.3 Ciągłość r na S

Gdybyśmy teraz spojrzeli na wykres funkcji $r(M, W, X_k)$ od k na przedziale $\langle 0°, 360°)$ zauważylibyśmy, że jest to wykres ciągły:

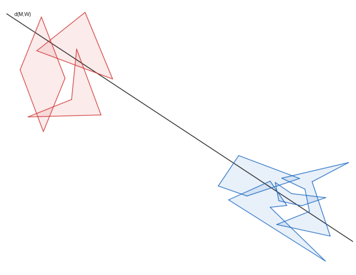
Będziemy przecinać punkt $(0, 0)$ prostymi o kierunku $k°$ - k i większym niż $k°$ - l, ale dowolnie bliskim $k°$. Weźmy sobie dowolny zbiór z M lub W powiedzmy T. Zauważmy, że zarówno początki, jak i końce rzutów T na k i l są dowolnie blisko siebie. Przez to początki i końce odcinka (D) będącego przecięciem wszyskich rzutów z jednej z rodzin na k i l są również dowolnie blisko siebie. Przez to środki przecięć rzutów jednej rodziny na k i l są dowolnie blisko siebie.

Środek przecięć drugiej rodziny również przesunął się o dowolnie mało. Przez to odległość pomiędzy tymi środkami zmieniła się o dowolnie małą wartość.

Oczywiście kolejność $q(M, X_k)$ i $q(W, X_k)$ dla dowolnie małego przesunięcia również się nie zmieniła, (chyba że $q(M, X_k) = q(W, X_k)$, ale to chcieliśmy udowodnić). Tak więc dla dowolnie małego przesunięcia $r(M, W, X_k)$ zmienia się o dowolnie małą wartość. Czyli r jest ciągła.

Możemy na r użyć więc twierdzenia Borsuka-Ulama. Istnieje więc taki kierunek, że odległość pomiędzy $q(M, X_k)$ i $q(W, X_k)$ jest równa 0. Te dwie proste są więc jedną prostą przechodzącą przez dwie rodziny Helly'ego

Zdefiniujmy zatem $d(M, W)$ jako jedną z prostych przechodzących przez rodziny M i W.



Rysunek 10: Prosta tnąca rodziny.

4.3 Okrąg przechodzący przez trzy rodziny

Po pokazaniu analogii prostej przez dwie rodziny do prostej
przez dwa punkty następnym krokiem może być okrąg opisany na trzech punktach.

Do pokazania, że istnieje okrąg przecinający każdy zbiór w trzech rodzinach Helly'ego będziemy musieli użyć, nie aż tak uproszczonego, twierdzenia Borsuka - Ulama.

4.3.1 Twierdzenie

Twierdzenie Borsuka - Ulama (dwuwymiarowe) *Ciągła funkcja nieparzysta (czyli zachodzi $f(-x) = -f(x)$) $f : S^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ posiada $x \in S^2$, taki, że $f(x) = 0$*

Przyda nam się jednak lekko zmieniona wersja twierdzenia. Weźmy tylko północną półkulę sfery razem z równikiem. Zrzutujmy wszystkie te punkty na płaszczyznę. Zmieniona wersja twierdzenia brzmi następująco:

dwuwymiarowe Twierdzenie Borsuka - Ulama (lekko zmienione) *Niech B^2 będzie kołem, za to okrąg S jego granicą. Jeśli ciągła funkcja $f : B^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ jest nieparzysta na S, to istnieje takie $x \in B^2$, że $f(x) = 0$.*

Jak zabrać się do udowodnienia tego? Weźmy najpierw okrąg S i narysujmy na wykresie $f(S)$.

Funkcja f jest ciągła, otrzymamy więc pewną krzywą zamknięta. f była nieparzysta na S, więc ta krzywa jest symetryczna względem środka układu współrzędnych. Ważne jest, że środek układu, czyli punkt $(0, 0)$ znajduje się we wnętrzu tej krzywej.

Będziemy teraz w sposób ciągły zmniejszać nasz okrąg (zaczynając z S) i patrzeć gdzie będzie on zmapowany przez f. Zakończymy zmniejszanie, gdy nasz okrąg stanie się pewnym pojedyńczym punktem powiedzmy X w B^2. Zauważmy teraz, że te mapy zmieniają się w sposób ciągły w pojedyńczy punkt będący dokładnie $f(X)$.

Zauważmy jednakże, że początkowa mapa ma w środku punkt $(0, 0)$. Końcowa, za to poprostu punkt $f(X)$, dla którego oczywiście $(0, 0)$ jest na zewnątrz. Przechodząc z początku do końca w sposób ciągły musieliśmy kiedyś przeciąć $(0, 0)$. Znaczy to, że dla pewnego punktu Y: $f(Y) = 0$, co chcieliśmy udowodnić.

4.3.2 Powrót funkcji odległości

Przypomnijmy sobie jeszcze raz pierwotne zadanie. Zdefiniowaliśmy tam $o(M, X)$ odległość punktu X od rodziny M.

Chcielibyśmy, wykazać istnienie punktu P na płaszczyźnie takiego, że dla trzech rodzin M, W i K

$$o(M, P) = o(W, P) = o(K, P)$$

Zdefiniujmy sobie nową funkcję $p : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Niech dla 3 rodzin Helly'ego i punktu X:

$$p(M, W, K, X) = \{o(M, X) - o(W, X), o(M, X) - o(K, X)\}$$

Jeśli dla pewnego punktu X: $p(M, W, K, X) = 0$, to X będzie właśnie środkiem okręgu.

Istnienie tego punktu wynikałoby z twierdzenia Borsuka - Ulama, jeśli udowodnimy parę lematów dotyczących ciągłości p.

4.3.3 Ciągłość na $\mathbb{R}^2$

Najpierw udowodnijmy, że p jest ciągła na $\mathbb{R}^2$. Wystarczy udowodnić, że o jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, p jako złożenie 4 funkcji ciągłych również będzie ciągłe.

Jak udowodnić ciągłość o? Wystarczy pokazać, że dla punktów X i Y, dowolnie blisko siebie $o(M, X) - o(M, Y)$ będzie dążyć do 0.

Zauważmy jednak, że dla każdego zbioru T w M gdy spojrzymy na jego ślad $w(T)$ w zależności od X i Y, powiedzy $w(T, X)$ i $w(T, Y)$ początek $w(T, X)$ będzie dowolnie blisko początkowi $w(T, Y)$, tak samo oczywiście końce.

Przez to również początki i końce przecięcia wszystkich śladów będą dowolnie bliskie siebie, a więc i środki tych przecięć znajdą się dowolnie blisko. Czyli faktycznie $o(M, X)$ będzie dowolnie bliskie $o(M, Y)$, co znaczy, że $o(M, X) - o(M, Y)$ dąży do 0. Czyli o jest ciągła, funkcja p jest więc również ciągła na $\mathbb{R}^2$.

4.3.4 Ciągłość po dodaniu okręgu punktów nieskończoności

Rozszerzmy R^2 o okrąg punktów nieskończoności S.

Jak rozszerzymy definicje funkcji p? Jeśli $X_k \in S$ to niech

$$p(M, W, K, X_k) = \{r(M, W, X_k), r(M, K, X_k)\}$$

W ten sposób unikniemy odejmowania od siebie dwóch nieskończoności. Zostało nam tylko udowodnić, czemu p zachowuje ciągłość po rozszerzeniu zbioru wartości.

Wystarczy pokazać, że gdy k dąży do l, $r(M, W, X_k)$ dąży do $r(M, W, X_l)$ i że dla X dążącego do X_k: $o(M, X) - o(W, X)$ dąży do $r(M, W, X_k)$

Jednakże pierwszą rzecz zrobiliśmy w części 4.2.3. Pokazaliśmy tam, że r jest ciągła na S.

Zostało nam więc to drugie. Niech więc X porusza się po pewnej prostej k, której koniec jest punktem nieskończoności X_k. Przyda nam się odrobina geometrii. Pokażemy, że dla każdego punktu A zdefiniujmy sobie $v(A, X)$ jako punkt na k taki, że $|v(A, X)X| = |AX|$. Możemy interpretować $v(A, X)$ jako ślad punktu A na k. Niech za to B to rzut A na k. Pokażemy , że gdy X dąży do X_k, to $v(A, X)$ dąży do B.

Zauważmy jednak, że kąt przy X dąży do 0. Przez to ponieważ $AXv(A, X)$ jest równoramienny $\angle Av(A, X)X$ dąży do $90°$. Rzeczywiście $v(A, X)$ dąży do B.

Ponieważ ślad każdego punkt zbioru T dąży do rzutu na k, to ślad $w(T)$ na k także dąży do rzutu siebie na k. Przecięcie tych śladów dąży do przecięcia rzutów. Tak samo z każdym zbiorem w rodzinie W. Środki przecięć śladów na k dążą do środków przecięć rzutów. Finalnie, odległość pomiędzy tymi środkami przecięć śladów, czyli $o(M, X) - o(W, X)$ dąży do odległości pomiędzy środkami przecięć rzutów, czyli $r(M, W, X_k)$. To kończy dowód spójności.

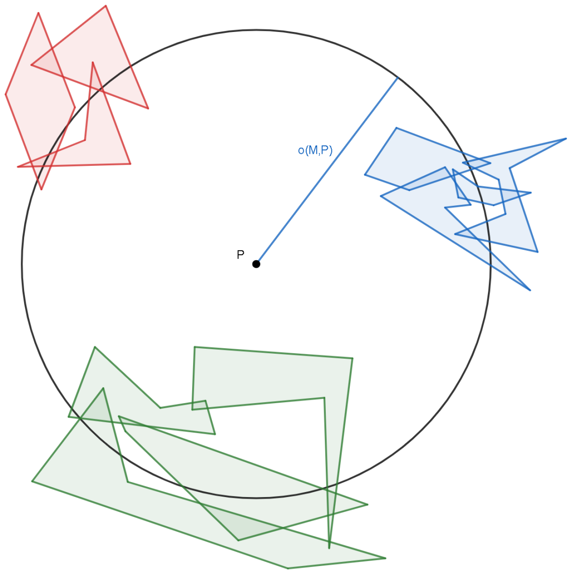
4.3.5 Rezultat

Dla trzech rodzin Helly'ego M, W, K Niech $B^2 = \mathbb{R}^2 \cup S$ Gdzie S to okrąg punktów nieskończoności. Niech $p : B^2 \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$p\,(M, W, K, X) = \begin{cases} \{o(M, X) - o(W, X), o(M, X) - o(K, X)\} & \text{jeśli } X \in \mathbb{R}^2 \\ \{r(M, W, X) - r(M, K, X)\} & \text{jeśli } X \in S \end{cases}$$

Udowodniliśmy, że p jest funkcją spójną. Jest również funkcją nieparzystą na S.

Możemy więc użyć dwuwymiarowej i lekko zmienionej wersji Twierdznia Borsuka - Ulama.



Rysunek 11: Okrąg przechodzący przez 3 rodziny Helly'ego

Według niego istnieje taki punkt $P \in B^2$ taki, że $p(M, W, K, P) = \{0, 0\}$. Pokazuje to, że dowolne trzy rodziny Helly'ego są współliniowe, bądź istnieje okrąg przechodzący przez wszystkie trzy.

4.4 Końcowe parę słów

Nasza podróż po świecie Eduarda Helly'ego dobiega końca. W pracy pokazałem wiele analogii pomiędzy rodzinami nazwanymi jego nazwiskiem, a punktami. Tak jak dla dwóch punktów istnieje okrąg o środku w jednym, przechodzący przez drugi, tak dla rodziny i punktu istnieje taki okrąg o środku w punkcie przechodzący przez rodzinę. Tak jak dwa punkty można połączyć prostą, tak istnieje prosta przecinająca dwie rodziny. I finalnie tak jak na trzech punktach można opisać okrąg, tak isntieje okrąg (bądź prosta) przecinający trzy rodziny. Nie zostawię czytelnika jednak bez problemu do zastanowienia się.

Hipoteza krzywej stożkowej *Czy przez dowolne pięć rodzin można poprowadzić krzywą stożkową, która przecina każdy ze zbiorów tych pięciu rodzin?*

5 Podziękowania

Chciałbym podziękować opiekunowi pracy Panu Pawłowi Dziubie i jego synowi Maćkowi Dziubie za dużą pomoc w sprawdzeniu błędów i pomoc merytoryczną. Dziękuję również mojej Mamie za pomoc w próbie wdrożenia w pracę zasad poprawnej polszczyzny.

6 Literatura

1. Arkadiusz Męcel, *Wokół twierdzenia Helly'ego*
   https://www.mimuw.edu.pl/ amecel/referaty/semmonhelly.pdf

2. Nabil H. Mustafa, *Lecture 2. Radon's theorem*
   https://perso.esiee.fr/ mustafan/TechnicalWritings/math-lec2.pdf

3. Wikipedia, *centerpoint*,
   https://en.wikipedia.org/wiki/Centerpoint

4. Wikipedia, *Helly Property*,
   https://en.wikipedia.org/wiki/Helly_family