Odwzorowania addytywne i geometria

Franciszek Hansdorfer

28 kwietnia 2023

1 Wstęp

W niniejszej pracy badam przekształcenie płaszczyzny, które ma paradoksalne własności. Z jednej strony jest ono nieciągłe w każdym punkcie, czyli bardzo nieregularne. Z drugiej strony jest addytywne i zachowuje podstawowe własności geometryczne: prostopadłość oraz równość odległości. Wynika z tego, że przekształca ono trójkąty, prostokąty, kwadraty, okręgi na figury tego samego typu. Zatem w sensie geometrycznym jest regularne.
Bardzo dziękuję panu dr. hab. Mariuszowi Skałbie za pomysł tematu tej pracy i opiekę merytoryczną.

Spis treści

2 Elementy teorii ciał

Rozważmy zbiór
$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ten zbiór ma specjalne własności. Mianowicie:

Lemat 2.1. *K jest ciałem.*

Dowód. Ponieważ $K \subset \mathbb{R}$, więc elementy K są zwykłymi liczbami rzeczywistymi. Ponadto dodawanie i mnożenie w K to zwykłe działania arytmetyczne na liczbach. Zatem są one przemienne i łączne, oraz mają jako elementy neutralne 0 i 1.
Pozostaje sprawdzić, że K jest zamknięte ze względu na dodawanie, mnożenie i branie elementu odwrotnego.
Niech $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Mamy:
$$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$x \cdot y = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Zatem również $x + y, x \cdot y \in K$, gdyż:
$$a + c, b + d, ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}.$$

Ponadto, jeśli $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$, to:
$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in K.$$

Oczywiście również:
$$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in K$$
$$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in K$$

zatem K jest ciałem.

□

Definiujemy funkcję $\sigma : K \to K$:
$$\sigma(a + b\sqrt{2}) := a - b\sqrt{2}.$$

Lemat 2.2. *σ jest automorfizmem ciała K.*

Dowód. Niech $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$; $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, wtedy:

$$\sigma(x+y) = \sigma(a+c+(b+d)\sqrt{2}) = a+c-(b+d)\sqrt{2} = a-b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2} = \sigma(x)+\sigma(y),$$

$$\begin{aligned}\sigma(xy) &= \sigma\left((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})\right) = \sigma(ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd) = \sigma\left((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\right) \\ &= (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \sigma(x)\sigma(y)\end{aligned}$$

$$\sigma(1) = 1$$
$$\sigma(0) = 0.$$

Zatem funkcja σ jest nietrywialnym automorfizmem ciała K.

□

Zbadamy teraz ciągłość funkcji σ. W tym celu skorzystamy z definicji ciągłości funkcji Heinego:
f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x_n \in K} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Twierdzenie 2.3. *σ jest nieciągła w każdym punkcie*

Dowód. Niech $x_0 = a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$.

Przypadek 1.: $b \neq 0$
Niech $a+b\sqrt{2} = (c_0, c_1c_2c_3...)_{10}$, gdzie $c_0 \in \mathbb{Z},\ c_1, c_2, c_3, ... \in \{0, 1, ..., 9\}$, będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby $a + b\sqrt{2}$.

$$x_n := (c_0, c_1c_2...c_n)_{10}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a + b\sqrt{2} = x_0$$
$$\sigma(x_0) = a - b\sqrt{2}$$

$x_n \in \mathbb{Q}$, więc $\sigma(x_n) = x_n$.
Więc:

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma(x_n)) = a + b\sqrt{2}.$$

Zatem σ jest nieciągła w punkcie $a+b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, gdy $a+b\sqrt{2} \neq a-b\sqrt{2}$, czyli gdy $b \neq 0$.

Przypadek 2.: $b = 0$
Gdy $b = 0$, to $x_0 = a$, gdzie $a \in \mathbb{Q}$.
Niech $x_n = a + (1 - \sqrt{2})^n$.
Ponieważ $|1 - \sqrt{2}| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Korzystając z własności funkcji σ, mamy:

$$\sigma(x_n) = \sigma(a + (1 - \sqrt{2})^n) = a + (1 + \sqrt{2})^n.$$

Ponieważ $1 + \sqrt{2} > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma(x_n)) = \infty.$$

Zatem σ jest nieciągła w punkcie $a \in \mathbb{Q}$.
Ostatecznie łącząc oba rozpatrzone przypadki, dowiedliśmy, że σ jest nieciągła w każdym punkcie należącym do dziedziny.

□

3 Podstawy algebry liniowej

3.1 Definicja przestrzeni liniowej nad ciałem L

Zbiór $\mathbb{V}$ (z działaniem $+$, operacją mnożenia przez skalary z ciała L oraz elementem θ) nazywamy przestrzenią liniową nad ciałem L, gdy $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{V}}\forall_{a,b\in L}$:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

$$\alpha+\theta=\alpha$$

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{V}}\exists_{\delta\in\mathbb{V}}:\alpha+\delta=\theta$$

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$$

$$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$$

$$(ab)\alpha=a(b\alpha)$$

$$1\alpha=\alpha$$

3.2 Definicja przekształcenia liniowego $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$

Niech $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem L i niech ϕ będzie przekształceniem zbioru $\mathbb{V}$ w zbiór $\mathbb{W}$. Wtedy przekształcenie ϕ nazywamy przekształceniem liniowym, gdy $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{V}}\forall_{a\in L}$:

$$\phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha)+\phi(\beta)$$

$$\phi(a\alpha)=a\phi(\alpha)$$

$$\phi(\theta)=\theta$$

3.3 Iloczyn skalarny dla przypadku $L\subset\mathbb{R}$

Niech:

$$\alpha=(x_1,x_2,...,x_n),\text{ gdzie } x_1,x_2,...,x_n\in L$$

$$\beta=(y_1,y_2,...,y_n),\text{ gdzie } y_1,y_2,...,y_n\in L$$

Jeżeli $L\subset\mathbb{R}$, to iloczyn skalarny możemy zdefiniować w następujący sposób:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

Zatem:

$$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2},$$

oraz:

$$d(\alpha,\beta)=\|\beta-\alpha\|$$

4 Addytywna nieciągła inwolucja K^2 i jej geometryczne własności

Niech przekształcenie $F : K^2 \to K^2$ będzie określone wzorem:

$$F((x, y)) := (\sigma(x), \sigma(y)), \text{ gdzie } x, y \in K.$$

Odnotujmy przede wszystkim, że z analitycznego punktu widzenia przekształcenie F jest bardzo nieregularne. Zachodzi mianowicie:

Twierdzenie 4.1. *Przekształcenie F jest nieciągłe w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in K^2$.*

Dowód. Niech x_n będzie ciągiem elementów z K takim, że:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ale nie jest prawdą, że

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = \sigma(x_0)$$

(taki ciąg istnieje na mocy twierdzenia (2.3)).
Rozpatrzmy teraz ciąg (x_n, y_0). Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_0) = (x_0, y_0).$$

Natomiast

$$\lim_{n\to\infty} F((x_n, y_0)) = \lim_{n\to\infty} (\sigma(x_n), \sigma(y_0)).$$

Ten ciąg nie jest zbieżny do $F((x_0, y_0))$, gdyż

$$F((x_0, y_0)) = (\sigma(x_0), \sigma(y_0))$$

□

Uwaga

Można tak zmodyfikować metrykę d w K^2 aby F było ciągłe.
Dla $P, Q \in K^2$ definiujemy $\tilde{d}$ w następujący sposób:

$$\tilde{d}(P, Q) = d(P, Q) + d(F(P), F(Q)).$$

Wówczas F jest ciągłe, gdyż jest izometrią:

$$\tilde{d}(F(P), F(Q)) = d(F(P), F(Q)) + d(F(F(P)), F(F(Q))) = d(F(P), F(Q)) + d(P, Q) = \tilde{d}(P, Q).$$

Niestety metryka $\tilde{d}$ jest bardzo nieintuicyjna. Nie ma nic wspólnego ze zwykłą metryką euklidesową.

Uwaga

Przekształcenie F nie jest K-liniowe, gdyż na przykład:

$$F(\sqrt{2}(1,0)) = F((\sqrt{2},0)) = (-\sqrt{2},0).$$

Ale:

$$\sqrt{2}F((1,0)) = \sqrt{2}(1,0) = (\sqrt{2},0).$$

Twierdzenie 4.2. *F jest addytywne, to znaczy:*

$$\forall_{x_1,y_1,x_2,y_2 \in K} : F((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = F((x_1,y_1)) + F((x_2,y_2))$$

Ponadto F jest inwolucją, czyli $F \circ F = id_{K^2}$.

Dowód.

$$\begin{aligned}F((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= F((x_1+x_2,y_1+y_2)) = (\sigma(x_1+x_2),\sigma(y_1+y_2)) \\ &= (\sigma(x_1),\sigma(y_1)) + (\sigma(x_2),\sigma(y_2)) = F((x_1,y_1)) + F((x_2,y_2)).\end{aligned}$$

Zatem F jest addytywne.
Mamy również:

$$F(F((x,y))) = F((\sigma(x),\sigma(y))) = (\sigma(\sigma(x)),\sigma(\sigma(y))) = (x,y).$$

Zatem F jest również inwolucją.

□

Twierdzenie 4.3. $(x_1,y_1) \perp (x_2,y_2) \implies F((x_1,y_1)) \perp F((x_2,y_2))$

Dowód. Przekształcamy równoważnie założenie:

$$\begin{gathered}(x_1,y_1) \perp (x_2,y_2) \\ \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 0 \\ x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \qquad (1)\end{gathered}$$

Przekształcamy równoważnie tezę:

$$\begin{gathered}F((x_1,y_1)) \perp F((x_2,y_2)) \\ \langle (\sigma(x_1),\sigma(y_1)),(\sigma(x_2),\sigma(y_2))\rangle = 0 \\ \sigma(x_1)\sigma(x_2) + \sigma(y_1)\sigma(y_2) = 0. \qquad (2)\end{gathered}$$

Stosujemy automorfizm σ do obu stron założenia (1) i otrzymujemy tezę (2):

$$\begin{gathered}\sigma(x_1x_2 + y_1y_2) = \sigma(0) \\ \sigma(x_1)\sigma(x_2) + \sigma(y_1)\sigma(y_2) = 0\end{gathered}$$

□

Twierdzenie 4.4. *Niech* $A, B, C, D \in K^2$.
Załóżmy, że:

$$d(A, B) = d(C, D).$$

Wówczas:

$$d(F(A), F(B)) = d(F(C), F(D)).$$

Dowód. Niech: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$, gdzie: $x_A, y_A, ..., x_D, y_D \in K$.
Mamy: $F(A) = (\sigma(x_A), \sigma(y_A)), ..., F(D) = (\sigma(x_D), \sigma(y_D))$ oraz

$$d(F(A), F(B)) = \sqrt{(\sigma(x_B) - \sigma(x_A))^2 + (\sigma(y_B) - \sigma(y_A))^2}$$
$$d(F(C), F(D)) = \sqrt{(\sigma(x_D) - \sigma(x_C))^2 + (\sigma(y_D) - \sigma(y_C))^2}.$$

Ponadto:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d(C, D) = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

i z założenia mamy:

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}.$$

Stąd:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2.$$

Ponieważ obie strony powyższego równania należą do ciała K, możemy zastosować automorfizm σ do obu stron:

$$(\sigma(x_B) - \sigma(x_A))^2 + (\sigma(y_B) - \sigma(y_A))^2 = (\sigma(x_D) - \sigma(x_C))^2 + (\sigma(y_D) - \sigma(y_C))^2$$

Po spierwiastkowaniu obu stron otrzymujemy tezę.

□

Mianem n-kąta określać będziemy zbiór n dowolnych punktów należących do K^2.

Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach należących do K^2.

Wniosek 1.

Niech ABC będzie *trójkątem równoramiennym.*
To znaczy $A, B, C \in K^2$ oraz $d(A, C) = d(B, C)$.
Wówczas trójkąt $F(A)F(B)F(C)$ jest też równoramienny.

Dowód. Na podstawie twierdzenia (4.4) mamy:

$$d(F(A), F(C)) = d(F(B), F(C))$$

co daje tezę.

□

Uwaga

Odpowiedni wniosek dla trójkątów równobocznych jest "pusty", gdyż jeśli $A, B, C \in K^2$ to trójkąt ABC na pewno nie jest równoboczny.
Oto uzasadnienie. Jeżeli: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, gdzie $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C \in K$, to:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| \in K.$$

Z drugiej strony:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{d(A,B)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right)\sqrt{3}}{4}.$$

Z powyższych równości wynika, że $\sqrt{3} \in K$ - sprzeczność, gdyż $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Wniosek 2.

Niech ABC będzie trójkątem różnobocznym.
To znaczy $d(A,B) \neq d(B,C) \wedge d(A,B) \neq d(A,C) \wedge d(B,C) \neq d(A,C)$.
Wówczas trójkąt $F(A)F(B)F(C)$ jest również różnoboczny.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że:

$$d(F(A), F(B)) = d(F(A), F(C)).$$

Na mocy twierdzenia (4.4):

$$d(F(F(A)), F(F(B))) = d(F(F(A)), F(F(C))).$$

Ale F jest inwolucją, zatem:

$$d(A, B) = d(A, C)$$

a to jest sprzeczne z założeniem.
Ostatecznie:

$$d(F(A), F(B)) \neq d(F(A), F(C)).$$

Podobnie dowodzimy pozostałych nierówności i otrzymujemy tezę.

□

Wniosek 3.

Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym.
To znaczy $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$.
Wówczas $F(A)F(B)F(C)$ też jest trójkątem prostokątnym.

Dowód. $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ oznacza z definicji, że:

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}.$$

Mamy:

$$\overrightarrow{BA} = A - B, \quad \overrightarrow{BC} = C - B$$

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \iff \langle A - B, C - B \rangle = 0.$$

Z twierdzenia (4.3) wynika, że:

$$\langle F(A - B), F(C - B) \rangle = 0.$$

A z addytywności F:

$$\langle F(A) - F(B), F(C) - F(B) \rangle = 0$$

$$\overrightarrow{F(B)F(A)} \perp \overrightarrow{F(B)F(C)}.$$

Czyli:

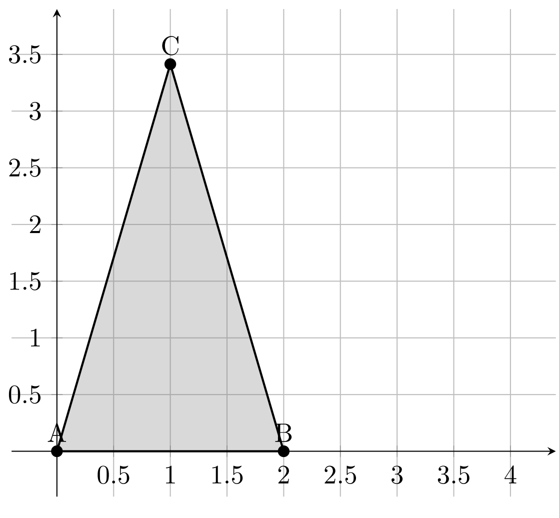
$$\angle F(A)F(B)F(C) = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem $F(A)F(B)F(C)$ jest trójkątem prostokątnym. $\square$

Powyższe wnioski ilustrują geometryczną regularność przekształcenia F. Zauważmy jednak, że F może przekształcić trójkąt ostrokątny w rozwartokątny.

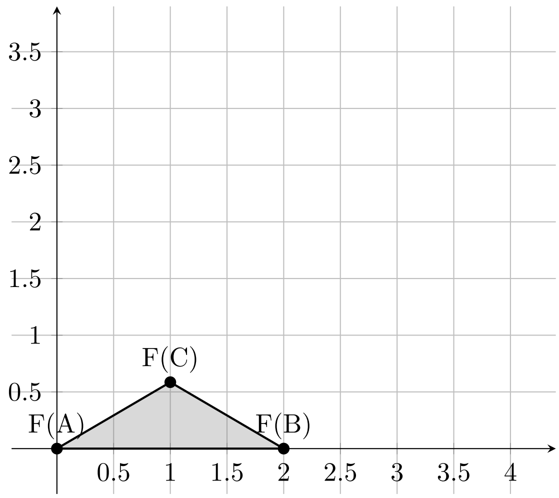
Przykład:

Rozważmy trójkąt o wierzchołkach: $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 2 + \sqrt{2})$.



Jest to trójkąt ostrokątny. Jednak po zastosowaniu przekształcenia F, mamy:

$$F(A) = (0, 0),\ F(B) = (2, 0),\ F(C) = (1, 2 - \sqrt{2})$$



Punkty te tworzą trójkąt rozwartokątny.

Rozpatrzmy teraz czworokąt o wierzchołkach należących do K^2.

Wniosek 4.

Niech $ABCD$ będzie prostokątem.
To znaczy: $|\angle ABC| = |\angle BCD| = |\angle CDA| = |\angle DAB| = \frac{\pi}{2}$.
Wówczas $F(A)F(B)F(C)F(D)$ również jest prostokątem.

Dowód. Wyrażenie $|\angle ABC| = |\angle BCD| = |\angle CDA| = |\angle DAB| = \frac{\pi}{2}$, możemy równoważnie zapisać, jako koniunkcję warunków:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DA}.$$

Postępując analogicznie jak we wniosku 3. mamy po zastosowaniu twierdzenia (4.3):

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} \perp \overrightarrow{F(A)F(D)}$$
$$\overrightarrow{F(B)F(A)} \perp \overrightarrow{F(B)F(C)}$$
$$\overrightarrow{F(C)F(B)} \perp \overrightarrow{F(C)F(D)}$$
$$\overrightarrow{F(D)F(C)} \perp \overrightarrow{F(D)F(A)}.$$

Zatem $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest prostokątem.

□

Wniosek 5.

Niech $ABCD$ będzie kwadratem.
To znaczy z definicji, że $ABCD$ jest prostokątem, a równocześnie $d(A,B) = d(B,C) = d(C,D) = d(D,A)$.
Wtedy $F(A)F(B)F(C)F(D)$ też jest kwadratem.

Dowód. Z poprzedniego wniosku wynika, że $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest prostokątem.
A z twierdzenia (4.4) mamy:

$$d(F(A), F(B)) = d(F(B), F(C))$$
$$d(F(A), F(B)) = d(F(C), F(D))$$
$$d(F(A), F(B)) = d(F(D), F(A)).$$

Czyli:

$$d(F(A), F(B)) = d(F(B), F(C)) = d(F(C), F(D)) = d(F(D), F(A)).$$

Zatem $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest kwadratem.

□

Wniosek 6.

Niech czworokąt $ABCD$ nie będzie prostokątem.
To znaczy, że istnieje przynajmniej jedna para boków nieprostopadłych. Wówczas $F(A)F(B)F(C)F(D)$ też nie jest prostokątem.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że:

$$\overrightarrow{AB} \not\perp \overrightarrow{AD}.$$

Załóżmy nie wprost, że:

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} \perp \overrightarrow{F(A)F(D)}.$$

Korzystając z twierdzenia (4.3) mamy:

$$\overrightarrow{F(F(A)F(B))} \perp \overrightarrow{F(F(A)F(D))}.$$

Jednak korzystając z inwolucyjności przekształcenia F:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}.$$

Sprzeczność. Zatem:

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} \not\perp \overrightarrow{F(A)F(D)}.$$

Wobec tego $F(A)F(B)F(C)F(D)$ również nie jest prostokątem.

□

Wniosek 7.

Niech $ABCD$ będzie prostokątem, ale nie kwadratem.
Oznacza to, że oprócz bycia prostokątem, od $ABCD$ wymagamy istnienia przynajmniej jednej pary boków o różnej długości.
Wówczas $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest również prostokątem, nie będącym kwadratem.

Dowód. Z wniosku 4. Wynika, że $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest prostokątem.
Bez straty ogólności możemy założyć, że:

$$d(A, B) \neq d(A, D).$$

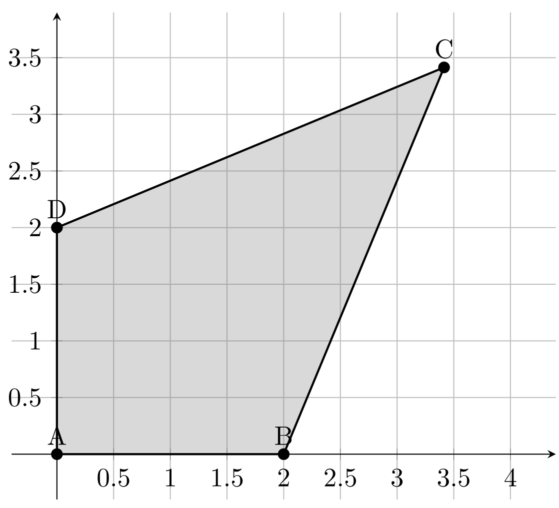
Jednak postępując analogicznie jak we wniosku 2. mamy

$$d(F(A), F(B)) \neq d(F(A), F(D)).$$

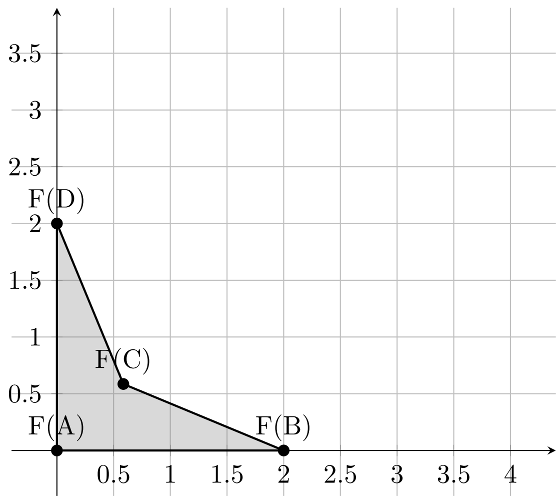
Zatem $F(A)F(B)F(C)F(D)$ jest prostokątem nie będącym kwadratem.

□

Istnieje taka sytuacja, w której czworokąt wypukły przechodzi na czworokąt wklęsły.
Przykład:
Niech $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $F(D) = (0, 2)$.
Wtedy czworokąt, który tworzą powyższe punkty jest wypukły:



Niech $F(A) = (0, 0)$, $F(B) = (2, 0)$, $F(C) = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$, $F(D) = (0, 2)$.
Wtedy czworokąt, który tworzą powyższe punkty jest wklęsły:



Wniosek 8.

Niech czworokąt $ABCD$ będzie deltoidem, to znaczy, że jego przekątne przecinają się pod kątem prostym oraz jedna dzieli drugą w połowie.
Wówczas $F(A)F(B)F(C)F(D)$ również jest deltoidem.

Dowód. Z definicji deltoidu mamy:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD.
Bez straty ogólności możemy założyć, że:

$$d(B,E) = d(D,E).$$

Postępując podobnie jak we wniosku 4. używając twierdzenia (4.3) mamy:

$$\overrightarrow{F(A)F(C)} \perp \overrightarrow{F(B)F(D)}.$$

Natomiast z twierdzenia (4.4)

$$d(F(B),F(E)) = d(F(D),F(E))$$

Zatem czworokąt $F(A)F(B)F(C)F(D)$ też jest deltoidem.

□

Na koniec zajmiemy się okręgami.
Niech $P = (x_0, y_0)$. Wtedy definiujemy okrąg C o środku w punkcie $P \in K^2$ i o promieniu $r \in \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$C(P,r) = \{(x,y) \in K^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}.$$

Lemat 4.5.

$$r^2 \notin K \implies C(P,r) = \varnothing$$

Dowód. Aby okrąg $C(P,r)$ był zbiorem niepustym, musi istnieć przynajmniej jedna para liczb $(x,y) \in K^2$ spełniająca równanie $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$. Ponieważ K jest ciałem $\forall_{x,y,x_0,y_0 \in K} : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \in K$ a ponieważ $r^2 \notin K$ zbiór rozwiązań równania jest pusty. Zatem gdy $r^2 \notin K$, to $C = \varnothing$.

□

Warunek $r^2 \in K$ nie jest niestety wystarczający na to, aby $C(P,r) \neq \varnothing$. Oto przykład.

$$x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{2}. \tag{3}$$

Załóżmy, że $(x,y) \in K^2$, $(x,y) \in C((0,0), \sqrt{1+\sqrt{2}})$. Po zastosowaniu σ do obu stron równania (3) mamy:

$$\sigma(x)^2 + \sigma(y)^2 = 1 - \sqrt{2},$$

co jest niemożliwe, gdyż po lewej stronie równania mamy liczbę nieujemną, a po prawej ujemną.
Zatem $C((0,0), \sqrt{1+\sqrt{2}}) = \varnothing$.
Z przykładu tego wynika, że warunkiem koniecznym na to, aby $C(P,r) \neq \varnothing$ jest koniunkcja nierówności:

$$r^2 > 0 \wedge \sigma(r^2) > 0.$$

Wniosek 9.

Jeżeli $C(P,r)$ jest okręgiem to $F[C(P,r)]$ też.

Dowód.

$$\begin{aligned} F[C(P,r)] &= \{F(P) \in K^2 : P \in C\} = \{(\sigma(x), \sigma(y)) \in K^2 : (x,y) \in C\} \\ &= \{(\sigma(x), \sigma(y)) \in K^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

Jeśli $(x,y) \in C$, to:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

Zatem:

$$(\sigma(x) - \sigma(x_0))^2 + (\sigma(y) - \sigma(y_0))^2 = \sigma(r^2),$$

czyli:

$$(\sigma(x), \sigma(y)) \in C(F(P), \sqrt{\sigma(r^2)}).$$

Wykazaliśmy inkluzję:

$$F[C(P,r)] \subset C(F(P), \sqrt{\sigma(r^2)}).$$

Niech $Q = (u,v)$.
Odwrotnie, niech teraz

$$Q \in C(F(P), \sqrt{\sigma(r^2)}).$$

Oznacza to, że:

$$(u - \sigma(x_0))^2 + (v - \sigma(y_0))^2 = \sigma(r^2).$$

Stosujemy σ:

$$(\sigma(u) - \sigma(\sigma(x_0)))^2 + (\sigma(v) - \sigma(\sigma(y_0)))^2 = \sigma(\sigma(r^2)).$$

Czyli:

$$(\sigma(u) - x_0)^2 + (\sigma(v) - y_0)^2 = r^2.$$

Zatem:

$$F(Q) = (\sigma(u), \sigma(v)) \in C(P, r).$$

Ponadto $Q = F(F(Q))$, czyli $Q \in F(C(P, r))$.
Wykazaliśmy inkluzję

$$C(F(P), \sqrt{\sigma(r^2)}) \subset F[C(P, r)].$$

Ostatecznie:

$$F[C(P, r)] = C(F(P), \sqrt{\sigma(r^2)}).$$

$F(P) \in K$, oraz $\sqrt{\sigma(r^2)} \in \mathbb{R}$ zatem $F[C(P, r)]$ jest okręgiem.

$\square$

5 Dalsze kontynuacje badań

Zamiast ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ można używać ciała typu $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, $d \neq k^2$, $k \in \mathbb{N}$.
Wybór $\sqrt{2}$ podyktowany był potrzebą uzyskania konkretnych wyników (szczególnie w przykładach).
Oczywiście wybór konkretnego d ma pewne znaczenie. Na przykład dla $d = 3$ otrzymujemy geometrię, w której są trójkąty równoboczne (patrz: uwaga na stronie 9).
Można też użyć ciał K bardziej skomplikowanych niż $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Na przykład $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Literatura

[1] Białynicki-Birula, A. (1974). Algebra liniowa z geometrią. Polska: Państwowe Wydaw. Naukowe.
[2] Koźniewski, T. (2003). Wykłady z algebry liniowej. Polska: Uniwersytet Warszawski.
[3] Fichtenholz G. (1966). Rachunek różniczkowy i całkowy tom 1. Polska: Państwowe Wydaw. Naukowe.