Globalna metoda Eulera przybliżania rozwiązań autonomicznych równań różniczkowych pierwszego rzędu i jej analog w przestrzeniach liniowych

Jakub Pawlak

1 Wstęp

W pracy opisywana jest metoda przybliżania rozwiązań równania różniczkowego postaci $f' = g(f),\ f(0) = c \in \mathbb{R}$ dla danej funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. W szczególności udowodnione zostaje twierdzenie (Twierdzenie 1), że jeżeli ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ zdefiniowany rekurencyjnie przez:

$$f_0(x) = c \in \mathbb{R}$$

$$f_{n+1}(x) = xg\left(f_n(x)\right) + f_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na pewnym przedziale $[a, b] \ni 0$ to funkcja ta spełnia zadane równanie różniczkowe (konkretnie rzecz biorąc równanie

$$\int_0^x g(f(t))dt = f(x) - f(0))$$

na przedziale $[a, b]$.
W dalszej części pracy ciąg $f_n(x)$ dla danej funkcji g i stałej $c \in \mathbb{R}$ będzie (o ile nie zostanie zaznaczone, że jest inaczej) przyjmowany zgodnie z powyższą rekurencją. Ciąg ten będzie też określany mianem ciągu eulerowskiego równania $f' = g(f),\ f(0) = c$, gdyż jego konstrukcja jest bardzo podobna do metody Eulera przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zasadnicza różnica polega na tym, że kolejne wyrazy ciągu są funkcjami, które przybliżają rozwiązanie równania różniczkowego globalnie, we wszystkich punktach dziedziny jednocześnie, a nie tylko w określonych punktach (jak to ma miejsce w metodzie Eulera). Pozwala to na formułowanie założeń i dowodów korzystających z funkcyjnej natury przybliżeń (można chociażby mówić o jednostajnej zbieżności ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$, co jest wykorzystane już w twierdzeniu 1). Ta funkcyjna interpretacja metody Eulera może zatem rzucić na nią nowe światło, czego szczególnym wyrazem jest twierdzenie 4, w pewnym sensie uogólniające metodę Eulera do dowolnych przestrzeni liniowych. Podobieństwa i różnice między prezentowanym podejściem, a klasyczną metodą Eulera zostaną szerzej omówione w dalszej części rozdziału.

W rozdziale 2 dowodzone jest twierdzenie 1. Twierdzenie to ma silne założenie dotyczące ciągu f_n, które ma dość techniczny charakter. Ważnym celem pracy jest podanie warunków dotyczących funkcji g (o której zakładamy, że jest dana), które zapewnią spełnienie założeń twierdzenia. W rozdziale 2 przedstawione są następujące lematy pozwalające na zbadanie, czy spełniony jest warunek zbieżności zawarty w twierdzeniu 1:

- Jeżeli ciąg f_{1n} jest ciągiem eulerowskim równania $f' = g(f),\ f(0) = c$, a f_{2n} jest ciągiem eulerowskim równania $f' = bg(\frac{1}{b}f + a),\ f(0) = b(c - a)$ to $f_{2n}(x) = b(f_{1n}(x) - a)$ (Lemat 3).

- Jeżeli funkcja g jest klasy $\mathcal{C}^1$ i $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania równania różniczkowego $f' = g(f)$ na pewnym przedziale podanym w jawnej postaci (Lemat 8).
- Jeżeli istnieją ciągłe funkcje L, U takie, że dla $x \in [0, a]$ zachodzi $g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (L(x), U(x))$ to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na $[0, a]$ (Lemat 4). Lemat 5 jest analogiem lematu 4, który można stosować do przedziałów $[a, 0] \subset (-\infty, 0]$.
- Jeżeli funkcja $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest ciągła i monotoniczna to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na pewnym przedziale $[a, b] \ni 0$, oraz zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego $f' = g(f)$ na przedziale $[0, b]$ (Lub $[a, 0]$ zależnie od tego, czy g rośnie, czy maleje) – długości tych przedziałów można oszacować z dołu (Lematy 6 i 7).
- Jeżeli funkcja $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest ciągła to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na pewnym przedziale $[a, b] \ni 0$ – długość tego przedziału można oszacować z dołu (Wniosek 2).

Lematy te same w sobie wyrażają istotne własności ciągu f_n, ale przede wszystkim służą do udowodnienia twierdzenia 2, które mówi że jeżeli funkcja g spełnia warunek Lipschitza to założenie twierdzenia 1 jest spełnione na pewnym przedziale $[a, b] \ni 0$, którego postać można wyrazić jawnie.

W rozdziale 3 rozważany jest szczególny przypadek, w którym funkcja g jest analityczna. Okazuje się, że jeżeli tylko $g(c) \neq 0$ to równanie $f' = g(f),\ f(0) = c$ ma dokładnie jedno rozwiązanie analityczne. Znanym rezultatem jest, że rozwiązanie to można wyrazić jako funkcję odwrotną do $\int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$. Dowód tego można znaleźć w literaturze [5], rozdział 2.2, choć został też zamieszczony w lemacie 9. Twierdzenie 3 mówi, że ciągi eulerowskie pozwalają na przybliżanie takich rozwiązań w ich przedziale zbieżności w punkcie $x = 0$. Ciągi eulerowskie mogą być w związku z tym użyte także do przybliżania funkcji odwrotnych do danej funkcji (przy podstawieniu $g(x) = \frac{1}{h'(x)}$ rozwiązaniem równania $f' = g(f)$ jest wówczas funkcja odwrotna do h). Rozdział 4 skupia się wokół twierdzenia 4, które mówi o możliwości konstrukcji ciągów zbieżnych do miejsc zerowych funkcji określonej w przestrzeni liniowej. Założenia twierdzenia są dosyć silne, jednak pokazuje ono że ciągi eulerowskie można próbować stosować do przybliżania rozwiązań równań w różnych przestrzeniach liniowych i pokazuje ogólną zależność stojącą za metodą Eulera. W rozdziale 5 przedstawione są dodatkowe uwagi dotyczące pracy, oraz bibliografia.

1.1 Oznaczenia

W poniższej pracy będą stosowane następujące oznaczenia:

- Zbiór nieujemnych liczb całkowitych:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Zbiór dodatnich liczb całkowitych:

$$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Różnica ciągu $a_n, n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbb{N}$$

lub w celu zaznaczenia zmiennej względem której brana jest różnica:

$$\Delta_n a_n = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbb{N}$$

- Funkcję f nazwę rosnącą jeżeli dla $x > y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$, oraz ściśle rosnącą jeżeli dla $x > y$ zachodzi $f(x) > f(y)$. Podobne nazewnictwo będę stosował dla funkcji malejących i ściśle malejących. Ponadto funkcje rosnące i malejące będę nazywał funkcjami monotonicznymi.

1.2 Klasyczna metoda Eulera, a ciągi eulerowskie

Rzeczą wartą wyjaśnienia jest związek podejścia opisywanego w tej pracy z metodą Eulera. Działanie metody Eulera dla równania różniczkowego

$$f'(x) = g(f(x)),\ f(0) = c$$

można opisać następująco:
Dla ustalonego $\Delta x > 0$ (w założeniu dążącego do 0) rozpatrujemy punkty (x_n, y_n) reprezentujące przybliżenia punktów $(x_n, f(x_n))$ dla $x_n = n\Delta x, n \in \mathbb{N}$. Przyjmując, że dla argumentów różniących się o Δx funkcję f można w przybliżeniu traktować jako funkcję liniową (co jest uzasadnionym założeniem, skoro f ma być różniczkowalna) wartości $\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}$ możemy utożsamiać z wartością pochodnej f w punkcie x_{n-1}, która z założenia wynosi $g(f(x_{n-1})) \approx g(y_{n-1})$. Na tej podstawie możemy ułożyć następującą rekurencję:

$$(x_0, y_0) = (0, f(0))$$

$$(x_n, y_n) = (x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + \Delta x g(y_{n-1})).$$

W ten sposób przybliżane są wartości funkcji $f(x_n)$ dla $x_n = n\Delta x,\ n \in \mathbb{N}$.
Metoda Eulera przybliża zatem wartości funkcji f dla argumentów różniących się o małą, stałą wartość Δx przyjmując założenie, że dla tak małej różnicy argumentów funkcja f zachowuje się jak funkcja liniowa. Podejście prezentowane w tej pracy także opiera się na założeniu o lokalnej liniowości f i jego istotą również jest skonstruowanie odpowiedniej rekurencji. W tym wypadku jednak każdy punkt x dziedziny traktowany jest osobno. Przy ustalonym $n \in \mathbb{N}_+$ przedział $[0, x]$ dzielony jest na n równych części i wartości funkcji f przybliżane są w punktach $\frac{xk}{n},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ przez wartości ciągu $f_k\left(\frac{x}{n}\right)$, na tej samej zasadzie jak w metodzie Eulera. Ciąg $f_n(x)$ zdefiniowany jest przez rekurencję wspomnianą już na początku rozdziału:

$$f_0(x) = c \in \mathbb{R}$$

$$f_{n+1}(x) = xg\left(f_n(x)\right) + f_n(x).$$

Dodatkowo warto zaznaczyć, że powyższą rekurencję można przekształcić w sposób dobrze obrazujący związek tego ciągu z zadanym równaniem różniczkowym:

$$\frac{f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = g\left(f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Gdy w powyższym równaniu utożsamimy wartości $f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)$ z df, $\frac{x}{n}$ z dx, a $g\left(f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ z $g(f)$ dostajemy równanie różniczkowe, którego rozwiązanie chcemy przybliżyć.

Poniżej przedstawię techniczne, nie związane bezpośrednio z tematem pracy twierdzenia i lematy.

1.3 Lemat 1

Dla danych ciągów $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ ustalmy:

$$a_0 = c_{-1}$$

$$a_n = a_{n-1}b_{n-1} + c_{n-1}.$$

Wówczas dla $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi:

$$a_{n+1} = \sum_{k=-1}^{n-1} c_k \prod_{m=k+1}^{n} b_m + c_n.$$

Dowód: Dowód zostanie poprowadzony przez indukcję. Dla $n = 1$ teza lematu jest oczywiście spełniona. Udowodnię że jeśli teza lematu jest spełniona dla $n \in \mathbb{N}_+$ to jest też spełniona dla $n + 1$. Z założenia indukcyjnego mamy:

$$a_{n+2} = a_{n+1}b_{n+1}+c_{n+1} = \left(\sum_{k=-1}^{n-1} c_k \prod_{m=k+1}^{n} b_m + c_n\right) b_{n+1}+c_{n+1} = \sum_{k=-1}^{n} c_k \prod_{m=k+1}^{n+1} b_m+c_{n+1}.$$

Czyli krok indukcyjny można wykonać. □

1.4 Lemat 2

Niech $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas dla każdego $b < \int_0^\infty \frac{1}{g(t)}dt$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $b < \int_0^\infty \frac{1}{g(t)+x}dt, \ x \in (0, \delta)$.

Dowód: Rozważmy dwa przypadki:

1. $\int_0^\infty \frac{1}{g(t)}dt < \infty$
   Ze względu na ciągłość g zachodzi $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} = 0$. Możemy więc wziąć takie $p > 0$, że $\frac{1}{g(t)} < 1, \ t > p$. Ponadto, ponieważ $g > 0$, więc $\int_0^\infty \frac{1}{g(t)+x}dt \le \int_0^\infty \frac{1}{g(t)}dt < \infty$. Mamy zatem:
   $$\left|\int_0^\infty \frac{1}{g(t)}dt - \int_0^\infty \frac{1}{g(t)+x}dt\right| = \int_0^\infty \frac{x}{g(t)(g(t)+x)}dt \le x\int_0^\infty \frac{1}{g(t)^2}dt \le$$
   $$\le x\left(\int_0^p \frac{1}{g(t)^2} + \int_p^\infty \frac{1}{g(t)}\right).$$
   Obie uzyskane całki są skończone, więc powyższe wyrażenie dąży do 0 przy $x \to \infty$ co jest równoważne tezie lematu.

2. $\int_0^\infty \frac{1}{g(t)}dt = \infty$
   Ustalmy dowolne $b > 0$ i weźmy $p > 0$ takie, że $\int_0^p \frac{1}{g(t)}dt > b + 1$. Wówczas dla $x > 0$ zachodzi:
   $$\int_0^p \frac{1}{g(t)}dt \ge \int_0^p \frac{1}{g(t)+x}dt = \int_0^p \frac{-x}{g(t)(g(t)+x)}dt+\int_0^p \frac{1}{g(t)}dt \ge \int_0^p \frac{-x}{g(t)^2}dt+\int_0^p \frac{1}{g(t)}dt.$$
   Całka $\int_0^p \frac{1}{g(t)^2}dt$ jest skończona, więc biorąc $x \to 0^+$ otrzymujemy:
   $$\lim_{x\to0^+} \int_0^p \frac{1}{g(t)+x}dt = \int_0^p \frac{1}{g(t)}dt > b + 1.$$
   Stąd istnieje δ takie, że dla $x \in (0, \delta)$:
   $$\int_0^\infty \frac{1}{g(t)+x}dt \ge \int_0^p \frac{1}{g(t)+x}dt > b.$$
   Otrzymaliśmy tezę lematu.

$\square$

1.5 Twierdzenie (Carleman – patrz [2])

Dla każdej ciągłej funkcji $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i ciągłej funkcji $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ istnieje funkcja całkowita $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniająca:

$$|Q(x) - f(x)| < E(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

2 Ciąg eulerowski równania $f' = g(f)$

Twierdzenie udowodnione poniżej pokazuje ciąg funkcyjny budowany podobnie jak w metodzie Eulera, który ma przybliżać rozwiązanie równania różniczkowego $f' = g(f)$ dla danej funkcji g. Twierdzenie to mówi, że jeżeli ciąg przybliżeń jest zbieżny jednostajnie, to jego granica spełnia równanie $\int_0^x g(f(t))dt = f(x) - f(0)$. Postawiony w nim warunek zależy zatem nie tyle od funkcji g, lecz od ciągu f_n co zazwyczaj sprawia, że sprawdzenie go dla konkretnego przypadku jest trudne. Celem tego i następnego rozdziału będzie więc opisanie dla jakich funkcji g założenie to jest spełnione.

2.1 Twierdzenie 1

Niech dana będzie ciągła funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągiem eulerowskim równania $f' = g(f), \ f(0) = c$ i $f_n(\frac{x}{n}) \to f(x)$ jednostajnie na $[a, b]$ i $0 \in [a, b]$ to

$$\int_0^x g(f(t))dt = f(x) - f(0).$$

Dowód: Niech

$$R_n = \sup_{x \in [a,b]} \left| g(f(x)) - g\left(f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right|.$$

Z ciągłości g i jednostajnej zbieżności $f_n(\frac{x}{n})$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.
Dla danego $\epsilon > 0$ ustalmy $N \in \mathbb{N}_+$ tak aby $R_n < \epsilon$ dla każdego $n > N$. Niech:

$$a_n = \sum_{k=0}^{N} \sup_{x \in [a,b]} \left| g\left(f\left(x\frac{k}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right|.$$

Wówczas wobec $f_k(0) = f_{k-1}(0) = f_0(0) = c$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [a,b]} \left| g\left(f\left(x\frac{k}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right| = \sum_{k=0}^{N} |g(f(0)) - g(c)| = 0.$$

Weźmy $K > N$ takie, że $\frac{a_n}{n} < \epsilon$ dla każdego $n > K$. Dla $n > K$ mamy:

$$\left| \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left(f\left(x\frac{k}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right| \le \frac{|x|}{n} a_n + \frac{|x|}{n} \sum_{k=N+1}^{n} \left| g\left(f\left(x\frac{k}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right| \le$$

$$\le |x|\epsilon + \frac{|x|}{n} \sum_{k=N+1}^{n} R_k \le |x|\epsilon + \frac{|x|}{n} \sum_{k=N+1}^{n} \epsilon \le 2|x|\epsilon.$$

ϵ był dowolny, więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n} \left[g\left(f\left(x\frac{k}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \right] = 0. \tag{1}$$

Weźmy teraz:

$$f(x)-f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right)-c = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}g\left(f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right)-c = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}\left(\frac{x}{n}\right)-c.$$

Ostatnia równość wynika z ciągłości g i zbieżności $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right)$. Z definicji f_n mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}\left(\frac{x}{n}\right) - c = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{n} g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Na podstawie (1) widać zatem, że:

$$f(x) - f(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{n} g\left(f\left(\frac{xk}{n}\right)\right).$$

Funkcja g jest ciągła zatem i $f_n(x)$ są ciągłe. $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zatem ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym jednostajnie, więc $f(x)$ jest ciągła, a stąd całkowalna. Dlatego powyższa granica jest równa:

$$\int_0^x g\left(f(t)\right) dt.$$

Otrzymaliśmy tezę twierdzenia. □

2.2 Przykład 1

Twierdzenie 1 pozwala na znalezienie ciągu przybliżeń rozwiązania równania różniczkowego $f' = f, f(0) = 1$.
Ciąg eulerowski tego równania dany jest rekurencją:

$$f_0(x) = 1$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + xf_n(x)$$

Zatem $f_n\left(\frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego przedziału postaci $[-a, a]$ ciąg ten jest zbieżny jednostajnie. Na podstawie twierdzenia 1 możemy stwierdzić, że granicą tego ciągu jest rozwiązanie danego równania różniczkowego (na dowolnym przedziale postaci $[-a, a]$).

Lemat 3 udowodniony poniżej pozwala stwierdzić, że znając ciąg eulerowski równania $f' = g(f)$ znamy też ciąg eulerowski równania $f' = bg(\frac{1}{b}f + a)$. Jest to rzeczą naturalną, gdyż rozwiązania obu równań także można łatwo powiązać wzorem jawnym – tzn. jeżeli $f' = g(f)$, to funkcja $h(x) = b(f(x) - a)$ spełnia równanie $h' = bg(\frac{1}{b}h + a)$.

2.3 Lemat 3

Dla danych $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ ustalmy f_{1n} – ciąg eulerowski równania

$$f' = g(f),\ f(0) = c,$$

oraz f_{2n} – ciąg eulerowski równania

$$f' = bg\left(\frac{1}{b}f + a\right),\ f(0) = b(c - a).$$

Wówczas $f_{2n}(x) = b(f_{1n}(x) - a)$.

Dowód: Dowód poprowadzę przez indukcję. Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ teza lematu jest spełniona (z założenia jest ona spełniona dla $n = 0$). Udowodnię, że wówczas zachodzi ona także dla $n+1$. Mamy:

$$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(x) + xbg\left(\frac{f_{2n}(x)}{b} + a\right) = b\left(f_{1n}(x) - a\right) + xbg\left(\frac{b(f_{1n}(x) - a)}{b} + a\right) =$$

$$= b\left(f_{1n}(x) - a + xg\left(f_{1n}(x)\right)\right) = b(f_{1n+1}(x) - a).$$

Zatem krok indukcyjny można wykonać. □

2.4 Przykład 2

W lemacie 3 weźmy $a = 0$ i $b = -1$. Otrzymujemy, że jeżeli f_{1n} jest ciągiem eulerowskim równania $f' = g(f),\ f(0) = c$ to ciąg eulerowski f_{2n} równania $f' = -g(-f),\ f(0) = -c$ spełnia:

$$f_{2n} = -f_{1n}.$$

Dzięki temu wiele twierdzeń dotyczących ciągłych funkcji g, które nie mają miejsc zerowych (a zatem nie zmieniają znaku) mogą być udowodnione przy założeniu, że $g > 0$, bo dla $g < 0$ często można po prostu rozważyć ciąg eulerowski dla funkcji $-g(-x) > 0$. Fakt ten warto mieć na uwadze, gdyż w dalszej części pracy często zakładane będzie, że $g > 0$.

Poniżej przedstawione lematy 4 i 5 pozwalają na stwierdzenie jednostajnej ograniczoności ciągu f_n – warunku koniecznego dla występowania zbieżności jednostajnej ciągu funkcji ciągłych. Warunek postawiony w lemacie zależy tylko i wyłącznie od funkcji g, a konkretnie od możliwości ograniczenia jej w pewien szczególny sposób. Warto zwrócić uwagę, że funkcje L, oraz U w prowadzone w lematach są ściśle związane z funkcją będącą rozwiązaniem zagadnienia $f' = g(f),\ f(0) = c$ – jeżeli dla takiej funkcji f ustalimy $L(x) = U(x) = f'(x)$ to warunek lematów będzie bliski bycia spełnionym. Fakt ten zostanie wykorzystany przy dowodach Lematów 6 i 7.

2.5 Lemat 4

Niech dana będzie ciągła funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oraz funkcje ciągłe $L : [0, a] \to \mathbb{R}$ i $U : [0, a] \to \mathbb{R}$.
Jeżeli dla każdego $x \in [0, a]$ zachodzi:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (L(x), U(x))$$

to istnieje N takie, że dla każdego $n > N$ zachodzi $f_n(\frac{x}{n}) \in [c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt], x \in [0, a]$ w szczególności ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na $[0, a]$.

Dowód: Z założenia, dla dowolnego $x \in [0, a]$ zachodzi:

$$\inf_{t \in [c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt]} \min\{g(t) - L(x), U(x) - g(t)\} > 0.$$

Ponadto przedział $[0, a]$ jest domknięty, a funkcje g, U i L ciągłe zatem:

$$\epsilon = \inf_{x \in [0,a]} \inf_{t \in [c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt]} \min\{g(t) - L(x), U(x) - g(t)\} > 0.$$

Wówczas przy $x \in [0, a]$ zachodzi:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (L(x) + \epsilon, U(x) - \epsilon).$$

Funkcje L i U są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0, a]$, więc istnieje takie $\delta > 0$, że

$$h \in (0, \delta) \implies (L(x) + \epsilon, U(x) - \epsilon) \subset (L(x + h), U(x + h)).$$

Dla takiego δ przy $x \in [0, a]$ zachodzi zatem:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset \left(\sup_{t\in[x,x+\delta]} L(t), \inf_{t\in[x,x+\delta]} U(t)\right).$$

Weźmy teraz $N \in \mathbb{N}_+$ takie, że $\delta > \frac{a}{N}$. Ustalmy dowolne $n > N$, $x \in [0, a]$. Pokażę przez indukcję, że zachodzi:

$$f_n\left(\frac{x}{n}\right) \in \left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]. \tag{2}$$

Załóżmy, że dla danego $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$f_k\left(\frac{x}{n}\right) \in \left[c + \int_0^{\frac{xk}{n}} L(t)dt, c + \int_0^{\frac{xk}{n}} U(t)dt\right].$$

Dla $k = 0$ równość ta zachodzi w sposób oczywisty, bo $f_0(\frac{x}{n}) = c$. Udowodnię teraz, że jeśli założenie to jest spełnione dla danego $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ to jest spełnione także dla $k + 1$:

$$f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right) = f_k\left(\frac{x}{n}\right) + g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right)\frac{x}{n}.$$

Łącząc założenie indukcyjne z (2) i $\frac{xk}{n} \in [0, a]$, oraz $\frac{x}{n} \le \frac{a}{n} \le \delta$ mamy:

$$g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) \in \left(\sup_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} L(t), \inf_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} U(t)\right).$$

Stąd:

$$f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right) \in \left[f_k\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\sup_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} L(t), f_k\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\inf_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} U(t)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \left[c + \int_0^{\frac{xk}{n}} L(t)dt + \frac{x}{n}\sup_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} L(t), c + \int_0^{\frac{xk}{n}} U(t)dt + \frac{x}{n}\inf_{t\in\left[\frac{xk}{n},\frac{x(k+1)}{n}\right]} U(t)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \left[c + \int_0^{\frac{x(k+1)}{n}} L(t)dt, c + \int_0^{\frac{x(k+1)}{n}} U(t)dt\right].$$

Zatem krok indukcyjny można wykonać. Dla $k = n$ otrzymujemy:

$$f_n\left(\frac{x}{n}\right) \in \left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right].$$

Zatem dla $n > N$ ciąg $f_n(\frac{x}{n})$ jest jednakowo ograniczony, bo ze względu na ciągłość L i U całki $\int_0^a -|L(t)|dt$ i $\int_0^a |U(t)|dt$ są ograniczone, a ponieważ jest to ciąg funkcji ciągłych, więc jest to równoważne tezie lematu. $\square$

2.6 Lemat 5

Niech dana będzie ciągła funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oraz funkcje ciągłe $L : [a, 0] \to \mathbb{R}$ i $U : [a, 0] \to \mathbb{R}$.
Jeżeli dla każdego $x \in [a, 0]$ zachodzi:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (U(x), L(x))$$

to istnieje N takie, że dla każdego $n > N$ zachodzi
$f_n(\frac{x}{n}) \in [c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt], x \in [a, 0]$ w szczególności $f\left(\frac{x}{n}\right)$ jednostajnie ograniczony na $[a, 0]$.
Dowód przebiega analogicznie do dowodu poprzedniego lematu.

2.7 Wniosek 1

Jeżeli $g(x)$ jest ciągłą funkcją spełniającą $|g(x)| < M$ dla pewnego M to $|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - c| \leq |x|M$.

Dowód. Dla $x \geq 0$ ustalmy:

$$L(x) = -M$$

$$U(x) = M.$$

Wówczas:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (-M, M) = (L(x), U(x)).$$

Zatem założenia lematu 4 są spełnione i zachodzi:

$$f_n\left(\frac{x}{n}\right) - c \in \left[\int_0^x L(t)dt, \int_0^x U(t)dt\right] = [-Mx, Mx],$$

a stąd $|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - c| \leq |x|M$.
Dla $x < 0$ ustalmy:

$$L(x) = M$$

$$U(x) = -M.$$

Wówczas:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) \subset (-M, M) = (U(x), L(x)).$$

Zatem założenia lematu 5 są spełnione i podobnie jak w poprzednim przypadku zachodzi $|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - c| \leq |x|M$. □

2.8 Przykład 3

Niech $g(x) = wx$ przy pewnym $w > 0$. Niech także $c > 0$. Lematy 4 i 5 pozwalają udowodnić, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na dowolnym przedziale postaci $[-a, a]$.
Weźmy $a > 0$. Dla $x \geq 0$ ustalmy:

$$L(x) = 0$$

$$U(x) = e^{\frac{x}{w}}(c + 1)w.$$

Mamy:

$$g\left(\left[c+\int_0^x L(t)dt, c+\int_0^x U(t)dt\right]\right) = g\left(\left[c, c+e^{\frac{x}{w}}w\frac{c+1}{w} - w\frac{c+1}{w}\right]\right).$$

$w > 0$, więc g jest rosnąca. Powyższe wyrażenie jest więc równe:

$$\left[wc, wc+e^{\frac{x}{w}}w(c+1) - w(c+1)\right] = \left[wc, e^{\frac{x}{w}}w(c+1) - w\right] \subset (0, e^{\frac{x}{w}}(c+1)w) = (L(x), U(x)).$$

Zatem na podstawie lematu 4 otrzymujemy, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na przedziale $[0, a]$.
Dla $x < 0$ weźmy:

$$L(x) = \frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw$$
$$U(x) = 0.$$

Wówczas:

$$g\left(\left[c+\int_0^x L(t)dt, c+\int_0^x U(t)dt\right]\right) = g\left(\left[c+\frac{1}{w}\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw - \frac{1}{w}\frac{cw}{1+e^{-(a+1)w}}, c\right]\right) =$$

$$= \left[cw+\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw - \frac{cw}{1+e^{-(a+1)w}}, cw\right] = \left[\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw + cw\frac{e^{-(a+1)w}}{1+e^{-(a+1)w}}, cw\right].$$

Teraz z jednej strony $cw\frac{e^{-(a+1)w}}{1+e^{-(a+1)w}} > 0$, więc także

$$\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw + cw\frac{e^{-(a+1)w}}{1+e^{-(a+1)w}} > 0.$$

Zaś z drugiej strony dla $x > -a-1$ zachodzi $\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}} > 1$ i stąd:

$$\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw > cw.$$

Zatem dla $x \in [-a, 0]$ zachodzi:

$$\left[\frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw + cw\frac{e^{-(a+1)w}}{1+e^{-(a+1)w}}, cw\right] \subset (0, \frac{e^{wx}}{1+e^{-(a+1)w}}cw) = (U(x), L(x)).$$

Zatem na podstawie lematu 5 $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na $[-a, 0]$.

Pokazane poniżej lematy 6 i 7 zakładają o funkcji g, że jest monotoniczna i większa od zera. Warunki te pozwalają na skorzystanie z lematów 4 i 5, a w efekcie ograniczenie ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ na pewnych przedziałach podanych w jawnej postaci. Okazuje się dodatkowo, że na pewnym przedziale wprowadzone ograniczenie pozwala na obliczenie granicy $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ i udowodnienie, że jest ona rozwiązaniem równania różniczkowego $f' = g(f)$. Założenia lematów 6 i 7 mogą się wydawać silne, jednak w rzeczywistości założenie o monotoniczności g można łatwo osłabić (co zostanie pokazane we Wniosku 2). Z kolei założenie, że $g > 0$ jest dosyć naturalne, gdyż często oczekiwane jest, że całka $\int_0^x \frac{1}{g(t)}dt$ istnieje i jest odwracalna – jej odwrotność spełnia bowiem równanie różniczkowe $f' = g(f)$ (jest to wynik powszechnie znany – można go znaleźć chociażby w [5], rozdział 2.2, ale zostanie on także udowodniony w lemacie 9), którego rozwiązanie ma przybliżać ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$. Aby całka istniała i była odwracalna, funkcja g nie może zmieniać znaku, a stąd założenie że g nie ma miejsc zerowych wypływa już naturalnie. Warto także zwrócić uwagę, że lemat 3 pozwala na korzystanie z lematów 6 i 7 również, gdy $g < 0$ (bo można je zastosować do funkcji $-g(-x) > 0$ – patrz przykład 1).

2.9 Lemat 6

Jeżeli funkcja ciągła $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest rosnąca, oraz $c \in \mathbb{R}$ to ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na każdym przedziale $[a, b]$ takim, że $[a, b] \subset (-\infty, \int_c^\infty \frac{1}{g(t)}dt)$. Ponadto ciąg ten jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania różniczkowego $f' = g(f),\ f(0) = c$ na każdym przedziale zawartym w $[0, \int_c^\infty \frac{1}{g(t)}dt)$.

Dowód: Dla $x \in (-\infty, c]$ z założenia, że g rośnie zachodzi $0 \le g(x) \le g(c)$. Na podstawie lematu 5 $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest więc jednostajnie ograniczony na $[a, 0]$ dla dowolnego $a < 0$ – wystarczy wziąć $L(x) = g(c) + 1,\ U(x) = 0$ – porównaj wniosek 1.
Teraz wystarczy pokazać, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony i zbieżny do rozwiązania zadanego równania różniczkowego na dowolnym $[0, b] \subset [0, \int_c^\infty \frac{1}{g(t)}dt)$.
Z założenia $\frac{1}{g} > 0$. Wobec tego funkcja $G(x) = \int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$ jest ściśle rosnąca (Całka istnieje, bo $\frac{1}{g}$ jest ciągła.). Skoro $G(x)$ jest ściśle rosnąca to jest także odwracalna tzn. istnieje funkcja $h : G((-\infty, \infty)) \to \mathbb{R}$ taka, że $G(h(x)) = x,\ x \in G((-\infty, \infty))$. Funkcja odwrotna do funkcji różniczkowalnej jest różniczkowalna. Różniczkując obie strony równości otrzymujemy zatem:

$$G'(h(x))h'(x) = 1$$

$$h'(x) = g(h(x)),\ x \in G((-\infty, \infty)). \tag{3}$$

Skoro $g > 0$, więc h jest ściśle rosnąca. Ustalmy $b \neq 0,\ [0, b] \subset G((-\infty, \infty))$, oraz dostatecznie mały $\epsilon > 0$ tak, aby $[0 - \epsilon, b + \epsilon] \subset G((-\infty, \infty))$ – jest to możliwe, gdyż $G(0) = 0$ i G jest ściśle monotoniczna. Biorąc $U(x) = h'(x + \epsilon),\ x \in [0, b]$, $L(x) = h'(x - \epsilon),\ x \in [0, b]$ i korzystając z założenia, że g jest rosnąca mamy:

$$g\left(\left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right]\right) = g\left([c + h(x - \epsilon) - h(-\epsilon), c + h(x + \epsilon) - h(\epsilon)]\right) =$$

$$= \left[g\left(h(x - \epsilon) + h(0) - h(-\epsilon)\right), g\left(h(x + \epsilon) + h(0) - h(\epsilon)\right)\right] \subset$$

$$\subset \left(g\left(h(x - \epsilon)\right), g\left(h(x + \epsilon)\right)\right) = \left(h'(x - \epsilon), h'(x + \epsilon)\right) = \left(L(x), U(x)\right).$$

Zatem na podstawie lematu 4 istnieje N takie, że dla każdego $n > N$ i $x \in [0, b] \subseteq [0, \int_c^\infty \frac{1}{g(t)}dt)$ zachodzi:

$$f_n\left(\frac{x}{n}\right) \in \left[c + \int_0^x L(t)dt, c + \int_0^x U(t)dt\right] =$$

$$= \left[h(x - \epsilon) + h(0) - h(-\epsilon), h(x + \epsilon) + h(0) - h(\epsilon)\right].$$

Wobec tego, ponieważ ϵ może być dowolnie mały i h jest ciągła otrzymujemy, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest nie tylko jednostajnie ograniczony, ale także dąży jednostajnie do $h(x)$ na $[0, b]$ w połączeniu z (3) otrzymujemy tezę lematu. □

2.10 Lemat 7

Jeżeli funkcja ciągła $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest malejąca, oraz $c \in \mathbb{R}$ to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na każdym przedziale $[a, b]$ takim, że $[a, b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g(t)}dt, \infty)$. Ponadto ciąg ten jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania różniczkowego $f' = g(f),\ f(0) = c$ na każdym przedziale zawartym w $(\int_c^{-\infty} \frac{1}{g(t)}dt, 0]$. Dowód przebiega analogicznie do dowodu poprzedniego lematu.

Korzystając z wyprowadzonych wyżej lematów można sformułować ważny wniosek.

Mówi on, że dla każdej funkcji g, która jest ciągła i większa od zera ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na przedziale, który można wyrazić w jawnej postaci. Wniosek ten można w dalszej perspektywie łączyć z innymi twierdzeniami, które zakładają jednostajną ograniczoność $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ (Np. Lematem 8). Wniosek ten będzie też wykorzystany przy dowodzie twierdzenia 2.

2.11 Wniosek 2

Dla dowolnej ciągłej funkcji $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ i stałej $c \in \mathbb{R}$ ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na dowolnym przedziale $[a, b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)}dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(t)}dt)$, gdzie:

$$g_+(x) = \begin{cases} \sup_{t\in[0,x]} g(t), \ x \geq 0 \\ g(0), \ x < 0 \end{cases}$$

$$g_-(x) = \begin{cases} g(0), \ x \geq 0 \\ \sup_{t\in[x,0]} g(t), \ x < 0 \end{cases}$$

.

Dowód: Ustalmy funkcję:

$$g_+(x) = \begin{cases} \sup_{t\in[0,x]} g(t), \ x \geq 0 \\ g(0), \ x < 0 \end{cases} \quad ,$$

oraz ciąg

$$h_0(x) = c = f_0(x)$$
$$h_{n+1}(x) = h_n(x) + xg_+(h_n(x)).$$

Udowodnię przez indukcję, że dla $x \geq 0$ zachodzi $h_n(x) \geq f_n(x)$. Dla $n = 0$ założenie to jest spełnione w sposób oczywisty. Przyjmijmy, że jest ono spełnione dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ pokażę, że wówczas jest ono spełnione także dla $n + 1$. Funkcja $g_+(x)$ jest rosnąca, a $x > 0$. Mamy zatem:

$$h_{n+1}(x) = h_n(x) + xg_+(h_n(x)) \geq f_n(x) + xg_+(f_n(x)) \geq f_n(x) + xg(f_n(x)) = f_{n+1}(x)$$

Zatem krok indukcyjny można wykonać. Zgodnie z lematem 6 $h_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na dowolnym przedziale $[0, b] \subseteq [0, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(t)}dt)$, zatem $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ też jest jednostajnie ograniczony na $[0, b]$, bo $f_n\left(\frac{x}{n}\right) \geq c, \ x \in [0, b]$. Rozumując identycznie dla $x < 0$ (tzn. wprowadzając funkcję $g_-(x) = \begin{cases} g(0), \ x \geq 0 \\ \sup_{t\in[x,0]} g(t), \ x < 0 \end{cases}$) otrzymujemy, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na każdym przedziale $[a, b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)}dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(t)}dt)$. □

Lemat 8 przedstawiony poniżej zakłada, że g jest klasy C^1. Założenie to pozwala na zastąpienie warunku jednostajnej zbieżności $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ przez warunek jednostajnej ograniczoności tego ciągu. Dowód lematu praktycznie w całości został zaczerpnięty z [6].

2.12 Lemat 8

Niech $g \in C^1(\mathbb{R})$, oraz $c \in \mathbb{R}$. Jeżeli ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie ograniczony na pewnym przedziale $[a,b]$ to zbieżność ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ na przedziale $\mathcal{I} = \left(\int_c^{-\infty}\frac{1}{g(s)}ds, \int_c^{\infty}\frac{1}{g(s)}\right) \cap [a,b]$ jest jednostajna, a zatem spełnione są założenia twierdzenia 1.

Dowód: Niech $\psi(t)\,,\ t \in \left(\int_c^{-\infty}\frac{1}{g(s)}ds, \int_c^{\infty}\frac{1}{g(s)}ds\right)$ będzie funkcją odwrotną do funkcji:

$$G(t) = \int_c^t \frac{1}{g(s)}ds,\ t \in \mathbb{R}$$

Zarówno całka, jak i jej odwrotność istnieją, bo g jest ciągła i dodatnia (a zatem całka jest ściśle rosnąca). Wobec $G(c) = 0$ otrzymujemy $\psi(0) = c$. Odwrotność funkcji różniczkowalnej jest różniczkowalna mamy zatem:

$$G(\psi(t)) = t$$

$$G'(\psi(t))\,\psi'(t) = 1$$

$$\psi'(t) = g(\psi(t))\,,\ t \in \left(\int_c^{-\infty}\frac{1}{g(s)}ds, \int_c^{\infty}\frac{1}{g(s)}ds\right).$$

Ustalmy dowolny $x \in \mathcal{I}$. Całkując obie strony w granicach od $\frac{xk}{n}$ do $\frac{x(k+1)}{n}$ otrzymujemy:

$$\psi\left(\frac{x(k+1)}{n}\right) - \psi\left(\frac{xk}{n}\right) = \int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} g(\psi(t))\,dt.$$

Korzystając z całkowania przez części otrzymujemy:

$$\psi\left(\frac{x(k+1)}{n}\right) - \psi\left(\frac{xk}{n}\right) = \int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} \left(\frac{x(k+1)}{n} - t\right)\frac{d}{ds}g(\psi(s))\bigg|_{s=t} dt +$$

$$+\left(t - \frac{x(k+1)}{n}\right)g(\psi(t))\bigg|_{t=\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}}$$

$$\psi\left(\frac{x(k+1)}{n}\right) = \psi\left(\frac{xk}{n}\right) + \frac{x}{n}g\left(\psi\left(\frac{xk}{n}\right)\right) + \int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} \left(\frac{x(k+1)}{n} - t\right)\frac{d}{ds}g(\psi(s))\bigg|_{s=t} dt.$$

g jest funkcją klasy C^1 i $\psi'(t) = g(\psi(t))$. Wobec ciągłości ψ otrzymujemy zatem:

$$M = \sup_{t\in\mathcal{I}} \frac{d}{ds}g(\psi(s))\bigg|_{s=t} < \infty.$$

g jest klasy C^1, więc spełnia również warunek Lipschitza na każdym przedziale domkniętym. Niech L_g będzie stałą taką, że g spełnia warunek Lipschitza na przedziale:

$$\left[\min\{\psi(x)\,, \inf_{\substack{t\in\mathcal{I}\\ n\in\mathbb{N}}} f_n\left(\frac{x}{n}\right)\}, \max\{\psi(x)\,, \sup_{\substack{t\in\mathcal{I}\\ n\in\mathbb{N}}} f_n\left(\frac{x}{n}\right)\}\right].$$

Korzystając z jednostajnej ograniczoności $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ otrzymujemy, że $L_g < \infty$. Wówczas dla dowolnego $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ mamy:

$$\left|\psi\left(\frac{x(k+1)}{n}\right) - f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}g\left(\psi\left(\frac{xk}{n}\right)\right) - \frac{x}{n}g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right) + \right.$$

$$+\int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} \left(\frac{x(k+1)}{n} - t\right) \frac{d}{ds} g(\psi(s))\Big|_{s=t} dt\Bigg| \leq \left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right| +$$

$$+\frac{|x|}{n}\left|g\left(\psi\left(\frac{xk}{n}\right)\right) - g\left(f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right| + \int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} \left|\left(\frac{x(k+1)}{n} - t\right) \frac{d}{ds} g(\psi(s))\Big|_{s=t}\right| dt \leq$$

$$\leq \left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right|\left(1 + \frac{|x|}{n}L_g\right) + M\int_{\frac{xk}{n}}^{\frac{x(k+1)}{n}} \left|\frac{x(k+1)}{n} - t\right| dt =$$

$$= \left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right|\left(1 + \frac{|x|}{n}L_g\right) + M\frac{x^2}{2n^2}.$$

Otrzymaliśmy:

$$\left|\psi\left(\frac{x(k+1)}{n}\right) - f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right|\left(1 + \frac{|x|}{n}L_g\right) + \frac{Mx^2}{2n^2}$$

Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Nietrudno zauważyć, że jeżeli:

$$\delta_{k+1} = \delta_k\left(1 + \frac{|x|}{n}L_g\right) + \frac{Mx^2}{2n^2}$$

$$\delta_0 = \psi(0) - f_{k+1}\left(\frac{x}{n}\right) = 0,$$

to zachodzi:

$$\left|\psi\left(\frac{xk}{n}\right) - f_k\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \delta_k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Z lematu 1 mamy:

$$\delta_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{Mx^2}{2n^2}\left(1 + \frac{|x|}{n}L_g\right)^{n-i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{Mx^2}{2n^2} e^{1+\frac{|x|}{n}L_g} = \frac{Mx^2(n+1)}{2n^2} e^{1+\frac{|x|}{n}L_g}$$

Wobec dowolności n, oraz $x \in \mathcal{I}$, oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Mx^2(n+1)}{2n^2} e^{1+\frac{|x|}{n}L_g} = 0$$

dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje więc $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $n > N$ i $x \in \mathcal{I}$ zachodzi:

$$\left|\psi(x) - f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \delta_n < \epsilon.$$

Co jest równoważne tezie twierdzenia. □

2.13 Przykład 4

Niech:

$$f_0(x) = 0$$
$$f_{n+1}(x) = e^{-f_n(x)}x + f_n(x)$$

Wówczas na podstawie wniosku 2 i lematu 8 $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ istnieje na każdym przedziale $[a, b] \subset \left(\int_0^{-\infty} \frac{1}{e^{-t}}dt, \int_0^{\infty} \frac{1}{1}dt\right) = (-1, \infty)$ i na tym przedziale przybliża rozwiązanie równia różniczkowego $f' = e^{-f}$. Wniosek 3 udowodniony w następnym rozdziale pozwala stwierdzić, że przybliżanym rozwiązaniem jest $f(x) = \ln(x + 1)$.

Pokazane poniżej twierdzenie 2 rozpatruje sytuację, w której g jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza większą od 0. W takim przypadku można pokazać, że na pewnym przedziale zawierającym 0 ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny do f spełniającego $f' = g(f)$.

2.14 Twierdzenie 2

Niech $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ będzie funkcją spełniającą warunek Lipschitza ze stałą L, oraz

$$g_+(x) = \begin{cases} \sup_{t\in[0,x]} g(t), \;\; x \geq 0 \\ g(0), \;\; x < 0 \end{cases}$$

$$g_-(x) = \begin{cases} g(0), \;\; x \geq 0 \\ \sup_{t\in[x,0]} g(t), \;\; x < 0 \end{cases}$$

Wówczas ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny na każdym przedziale $[a,b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)} dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(x)} dt)$ do rozwiązania równania różniczkowego $f' = g(f)$.

Dowód: Wiedząc, że g jest funkcją ciągłą i $g > 0$ na podstawie twierdzenia Carlemana [2] możemy wziąć ciąg g_i funkcji analitycznych spełniający $|g_i(x) - g(x)| < \min\{\frac{1}{i+1}, g(x)\}$ i ponieważ $g \in \mathbb{R}$ to ciąg g_i można także ustalić rzeczywisty. Wówczas spełnia on:

$$0 < g_i(x) < g(x) + \frac{1}{i+1},$$

więc g_i zbiega jednostajnie do $g(x)$.
Ustalmy ciąg eulerowski $f_n(x,i)$ równania $f' = g_i(f), \; f(0) = c$:

$$f_{n+1}(x,i) = f_n(x,i) + xg_i(f_n(x,i)), i \in \mathbb{N}$$

$$f_0(x,i) = c$$

Weźmy dowolne $\epsilon > 0$. Na podstawie jednostajnej zbieżności g_i ustalmy I tak, aby dla każdego $i > I$ zachodziło $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_i(x) - g(x)| < \epsilon$ Pokażę przez indukcję, że dla $x \in \mathbb{R}$, $i > I$ zachodzi

$$|f_n(x,i) - f_n(x)| \leq \left(e^{|x|nL} - \frac{1}{L}\right)\epsilon \tag{4}$$

Dla $n = 0$ założenie to zachodzi w sposób oczywisty. Przyjmijmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ spełnione jest założenie indukcyjne. Mamy wówczas:

$$|f_{n+1}(x,i) - f_{n+1}(x)| = |f_n(x,i) - f_n(x) + xg_i(f_n(x,i)) - xg(f_n(x))| \leq$$

$$\leq |f_n(x,i) - f_n(x)| + |x|\,|g_i(f_n(x,i)) - g(f_n(x))| \leq$$

$$\leq |f_n(x,i) - f_n(x)| + |x|\,|g(f_n(x,i)) - g(f_n(x))| + |x|\epsilon \leq |f_n(x,i) - f_n(x)|\,(1+|x|L) + |x|\epsilon$$

Na podstawie założenia indukcyjnego powyższe wyrażenie jest nie większe niż:

$$\left(e^{|x|nL} - \frac{1}{L}\right)\epsilon(1 + |x|L) + |x|\epsilon = e^{|x|(n+1)L}e^{-|x|L}(1 + |x|L)\epsilon - \frac{1 + |x|L}{L}\epsilon + |x|\epsilon$$

Korzystając z nierówności $x + 1 \leq e^x$ powyższe wyrażenie jest nie większe niż:

$$e^{|x|(n+1)L}\epsilon - \frac{1 + |x|L}{L}\epsilon + |x|\epsilon = \left(e^{|x|(n+1)L} - \frac{1}{L}\right)\epsilon$$

Zatem krok indukcyjny można wykonać.
Ustalmy $[a,b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)} dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(x)} dt)$ i na podstawie lematu 2 weźmy $J \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $i > J$ zachodzi $[a,b] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)+\frac{1}{i+1}} dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(x)+\frac{1}{i+1}} dt)$
Na podstawie lematu 8 przy ustalonym i ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}, i\right)$ jest zbieżny jednostajnie na

każdym przedziale $[a_0, b_0] \subset (\int_c^{-\infty} \frac{1}{g_-(t)+\frac{1}{i+1}}dt, \int_c^{\infty} \frac{1}{g_+(x)+\frac{1}{i+1}}dt)$. Weźmy zatem $i > \max\{I, J\}$, oraz N_i takie, że dla $n, m > N_i$ zachodzi:

$$\left|f_n\left(\frac{x}{n}, i\right) - f_m\left(\frac{x}{m}, i\right)\right| < \epsilon.$$

Teraz dla $x \in [a, b]$ mamy:

$$\left|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - f_m\left(\frac{x}{m}\right)\right| = \left|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - f_n\left(\frac{x}{n}, i\right) + f_n\left(\frac{x}{n}, i\right) - f_m\left(\frac{x}{m}, i\right) + f_m\left(\frac{x}{m}, i\right) - f_m\left(\frac{x}{m}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|f_n\left(\frac{x}{n}\right) - f_n\left(\frac{x}{n}, i\right)\right| + \epsilon + \left|f_m\left(\frac{x}{m}, i\right) - f_m\left(\frac{x}{m}\right)\right|$$

Na podstawie (4) powyższe wyrażenie jest mniejsze niż:

$$\epsilon + \left(e^{\left|\frac{x}{n}\right|nL} - \frac{1}{L}\right)\epsilon + \left(e^{\left|\frac{x}{m}\right|mL} - \frac{1}{L}\right)\epsilon = \left(2e^{|x|L} - \frac{2}{L} + 1\right)\epsilon$$

ϵ było dowolne, zatem ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ i stąd na podstawie twierdzenia 1 jego granica spełnia zadane równanie różniczkowe na tym przedziale. $\square$

3 Przypadek funkcji analitycznych

W tym rozdziale w celu zbadania zbieżności ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ zakłada się, że funkcja g jest analityczna. Pozwala to udowodnić nie tylko, że ciąg eulerowski równania $f' = g(f)$ umożliwia wówczas przybliżanie poszukiwanego rozwiązania równania różniczkowego, ale także znalezienie jawnej postaci jego granicy – zarówno w postaci szeregu, jak i funkcji odwrotnej do całki z funkcji $\frac{1}{g}$.
Lemat 9 mówi, że gdy funkcja g jest analityczna to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie analityczne badanego równania różniczkowego, a jego postać można podać jawnie na dwa wspomniane już sposoby.

3.1 Lemat 9

Niech $D \subseteq \mathbb{C}$ będzie kołem otwartym i $g : D \to \mathbb{C}$ będzie funkcją analityczną. Jeżeli dla danego $c \in D$ zachodzi $g(c) \neq 0$, to równanie różniczkowe

$$f'(x) = g(f(x))$$

$$f(0) = c$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie analityczne. Rozwiązanie to jest rozwijalne w szereg potęgowy o środku w punkcie $x = 0$ i niezerowym promieniu zbieżności. Szereg ten przyjmuje postać:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_n,$$

gdzie

$$\lambda_0 = c$$

$$\lambda_1 = g(c)$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_i=n-1 \\ a_1,a_2,...,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i}.$$

Ponadto rozwiązanie to jest funkcją odwrotną do funkcji $\int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$.

Dowód: Najpierw pokażę, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie analityczne danego równania, a następnie pokażę że jest ono jedyne.
Niech

$$r = \inf_{z \in g^{-1}(\{0\})} |z - c|.$$

Z założenia $g(c) \neq 0$, więc wobec analityczności g dostajemy $r > 0$ (przyjmując $\inf \emptyset = +\infty$). Zatem funkcja $\frac{1}{g(x)}$ jest analityczna i przy rozwinięciu w szereg w punkcie $x = c$ ma promień zbieżności równy r. W takim razie także $\int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$ jest funkcją analityczną o takim samym promieniu zbieżności.
$\int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$ ma w punkcie $x = c$ niezerową pochodną i stąd jest w otoczeniu tego punktu odwracalna. Oznaczmy zatem przez $f(x)$ odwrotność funkcji $\int_c^x \frac{1}{g(t)}dt$ wokół punktu c. Mamy $\int_c^c \frac{1}{g(t)}dt = 0$, zatem $f(0) = c$ i $f(x)$ jest funkcją analityczną o niezerowym promieniu zbieżności w punkcie $x = 0$.
Pokażę teraz, że f spełnia zadane równanie różniczkowe. Mamy:

$$\int_c^{f(x)} \frac{1}{g(t)}dt = x.$$

Różniczkując obie strony na podstawie analityczności f otrzymujemy:

$$f'(x)\frac{1}{g(f(x))} = 1.$$

Zatem dane równanie różniczkowe ma co najmniej jedno rozwiązanie analityczne.

Przyjmijmy teraz, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_n$ jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego. Pokażę, że ciąg λ_n jest określony w sposób jednoznaczny. Mamy:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1} n \lambda_n,$$

a ponadto

$$g(f(x)) = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_n \right)^i = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\substack{a_1 + a_2 + ... + a_i = n \\ a_1, a_2, ..., a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i} =$$

$$= g_0 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + a_2 + ... + a_i = n \\ a_1, a_2, ..., a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i}.$$

Kolejne równości wynikały z jednostajnej zbieżności szeregów potęgowych.
Wobec $f'(x) = g(f(x))$ i $f(0) = c$ otrzymujemy:

$$\lambda_0 = c$$

$$\lambda_1 = g(c)$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + a_2 + ... + a_i = n \\ a_1, a_2, ..., a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i}, \ n > 1.$$

Otrzymane równanie rekurencyjne definiuje ciąg λ_n w sposób jednoznaczny, zatem dane równanie ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Co kończy dowód lematu. $\square$

3.2 Przykład 5

Lemat 9 orzeka, że jedynym analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego $f'(x) = f^2 + 1,\ f(0) = 0$ jest funkcja odwrotna do $\int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan(x)$, czyli $f(x) = \tan(x)$. Lemat 9 mówi też, że kolejne współczynniki szeregu potęgowego f w punkcie $x = 0$ dane są rekurencją:

$$\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_1 = g(0) = 1$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_i=n-1 \\ a_1,a_2,...,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a_1+a_2=n-1 \\ a_1,a_2 \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \lambda_{a_2} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{a_1=0}^{n-1} \lambda_{a_1} \lambda_{n-1-a_1}.$$

Sformułowane poniżej twierdzenie 3 pokazuje, że jeżeli g jest analityczna to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zawsze zbieżny do analitycznego rozwiązania równania różniczkowego w przedziale zbieżności w punkcie $x = 0$ tego rozwiązania. Oprócz analityczności g twierdzenie 3 zakłada także, że c należy do przedziału zbieżności funkcji g – założenie to jest jednak (z oczywistych względów) praktycznie niezbędne. Warto zwrócić uwagę, że przedział na którym $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ przybliża rozwiązanie równania różniczkowego może być znacząco większy niż promień zbieżności tego rozwiązania. W praktyce $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ może być zbieżny do poszukiwanego rozwiązania równania różniczkowego nawet na przedziałach postaci $[a, \infty)$, jak to ma miejsce w przykładzie 4.

3.3 Twierdzenie 3

Jeśli $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_i x^i$ ma promień zbieżności większy niż $|c|$ dla $c \in \mathbb{R}$ i

$$\lambda_0 = c$$

$$\lambda_1 = g(c)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \left[g_i \sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_i=k-1 \\ a_1,a_2,...,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} \cdot ... \cdot \lambda_{a_i} \right].$$

To wówczas dla każdego x należącego do wnętrza przedziału zbieżności szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \lambda_k$ zachodzi:

$$\lim_{n \to \infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \lambda_k.$$

Dowód: Złożenie funkcji analitycznych jest funkcją analityczną, więc f_n jest ciągiem funkcji analitycznych. Niech:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(n) x^k.$$

Wówczas korzystając z jednostajnej zbieżności szeregów potęgowych mamy:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n+1)x^k\right] = g(f_n(x))x + f_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[g_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(n)x^k\right)^i\right] x + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n)x^k\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[g_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(n)x^k\right)^i\right] x + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n)x^k\right] + g_0 x =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[g_i \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n)\right] x + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n)x^k\right] + g_0 x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n)x^k\right] + g_0 x.$$

Otrzymaliśmy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n+1)x^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_k(n)x^k\right] + g_0 x.$$

Zatem ciąg $\lambda_k(n)$ spełnia następujące równanie rekurencyjne:

$$\lambda_0(0) = c$$

$$\lambda_k(0) = 0,\ k \neq 0$$

$$\lambda_0(n+1) = \lambda_0(n)$$

$$\lambda_1(n+1) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=0 \\ a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n) + g_0 + \lambda_1(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(g_i \lambda_0(n)^i\right) + g_0 + \lambda_1(n) =$$

$$= g(\lambda_0(n)) + \lambda_1(n)$$

$$\lambda_k(n+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k-1 \\ a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n)\right] + \lambda_k(n),\ k \geq 2.$$

Zgodnie z powyższymi równaniami mamy:

$$\lambda_0(n) = c$$

a stąd także

$$\lambda_1(n) = g(c)n.$$

Ponadto dla $k \geq 2$ zachodzi:

$$\lambda_k(n+1) = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k-1 \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(j) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(j) \right].$$

Pokażę teraz przez indukcję, że zachodzi

$$\lambda_k = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_k(n)}{n^k}.$$

Dla $k = 0$ i $k = 1$ założenie to jest spełnione w sposób oczywisty. Pokażę teraz, że jeśli założenie to jest spełnione dla $k \geq 1$ to zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n \lambda_{k+1}(n+1)}{\Delta_n (n+1)^{k+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1}(n)}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lambda_{k+1},$$

co na podstawie twierdzenia Stolza (Więcej informacji o tym twierdzeniu można znaleźć w [4] - par.33) dowiedzie, że założenie indukcyjne jest spełnione także dla $k+1$. Mamy:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n (n+1)^{k+1}}{n^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}{n^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} \left[\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \lim_{n \to \infty} n^{i-k} = k+1.$$

Zatem:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n \lambda_{k+1}(n+1)}{\Delta_n (n+1)^{k+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n \lambda_{k+1}(n+1)}{\frac{\Delta_n (n+1)^{k+1}}{n^k} n^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n \lambda_{k+1}(n+1)}{(k+1) n^k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(k+1) n^k} \Delta_n \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(j) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(j) \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(k+1) n^k} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{(k+1) n^k} \sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(k+1) n^k} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n) \right] =$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(k+1) n^k} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_i = k \\ a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n) \cdot \cdots \cdot \lambda_{a_i}(n).$$

Ostatnia równość wynika z założenia indukcyjnego. Dalej będę przekształcał jedynie sumę pod ostatnią granicą. Niech j oznacza liczbę niezerowych indeksów a_i mamy wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)n^k} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i\in\mathbb{N}}} \lambda_{a_1}(n)\cdot\dots\cdot\lambda_{a_i}(n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)n^k} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{j=1}^{k} \binom{i}{j} \lambda_0(n)^{i-j} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lambda_{a_1}(n)\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j}(n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)n^k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lambda_{a_1}(n)\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j}(n) \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \binom{i}{j} \lambda_0(n)^{i-j}.$$

Kolejność sumowania możemy zmienić, bo na podstawie kryterium Cauchy'ego suma $\sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \binom{i}{j} \lambda_0(n)^{i-j}$ jest bezwzględnie zbieżna. Mamy bowiem:

$$\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left| g_i \binom{i}{j} \lambda_0(n)^{i-j} \right|} \le \limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|g_i \lambda_0(n)^{i-j}|} = \limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|g_i|}c.$$

Na podstawie założenia o promieniu zbieżności funkcji g daje, że powyższe wyrażenie jest mniejsze od 1. Przekształcając dalej sumę otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)n^k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lambda_{a_1}(n)\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j}(n) \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \binom{i}{j} \lambda_0(n)^{i-j} =$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \lambda_{a_1}(n)\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j}(n) \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \binom{i}{j} c^{i-j}.$$

Na podstawie założenia indukcyjnego, powyższa suma jest równa:

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lambda_{a_1}\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \binom{i}{j} c^{i-j} =$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{j=1}^{k} \binom{i}{j} c^{i-j} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=k \\ a_1,\ldots,a_j\in\mathbb{N}_+}} \lambda_{a_1}\cdot\dots\cdot\lambda_{a_j} =$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i\in\mathbb{N}}} \lambda_{a_1}\cdot\dots\cdot\lambda_{a_i}.$$

Otrzymaliśmy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n \lambda_{k+1}(n+1)}{\Delta_n (n+1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i\in\mathbb{N}}} \lambda_{a_1}\cdot\dots\cdot\lambda_{a_i} +$$

$$+\frac{1}{k+1}\sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_i=k \\ a_1,\ldots,a_i\in\mathbb{N}}} \lambda_{a_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{a_i} = \lambda_{k+1}.$$

Czyli na podstawie twierdzenia Stolza krok indukcyjny można wykonać.
Korzystając z jednostajnej zbieżności szeregów potęgowych na przedziałach $[-R, R]$ zawartych w przedziale zbieżności $\sum_{k=0}^{\infty} x^k\lambda_k$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^k \lambda_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_k(n)}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\lambda_k.$$

Czego należało dowieść. □

3.4 Wniosek 3

Dla analitycznej funkcji g, której promień zbieżności zawiera $|c|$, $c \in \mathbb{R}$ równanie różniczkowe $f' = g(f)$, $f(0) = c$ ma rozwiązanie analityczne f. Rozwiązanie to jest przybliżane w swoim przedziale zbieżności w punkcie $x = 0$ przez ciąg $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$.

Dowód: Wniosek ten jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 2 i lematu 9. □

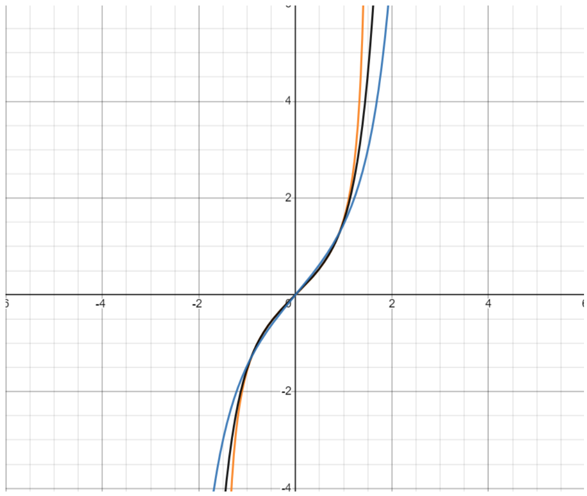
3.5 Przykład 6

Weźmy:

$$f_n(0) = 0$$
$$f_{n+1}(x) = x + xf_n(x)^2 + f_n(x).$$

Wówczas twierdzenie 3 orzeka, że $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ dąży do analitycznego rozwiązania danego równania różniczkowego $f' = f^2 + 1$, $f(0) = c$. Na podstawie przykładu 5 wiemy, że rozwiązaniem tym jest funkcja $\mathrm{tg}(x)$. Zatem:

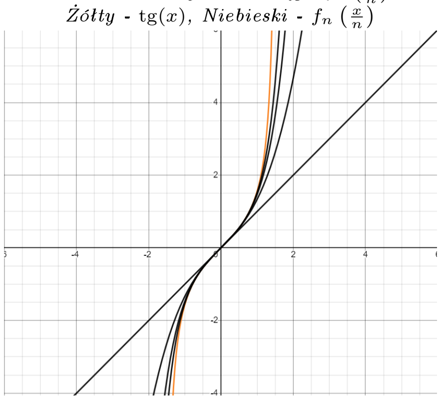
$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{tg}(x),\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Porównanie szeregu Taylora i ciągu eulerowskiego dla funkcji tangens na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Żółty - $\mathrm{tg}(x)$, *Czarny* - 5 *wyraz szeregu Taylora* $\mathrm{tg}(x)$, *Niebieski* - $f_5\left(\frac{x}{5}\right)$ *przy* f_n *zdefiniowanym powyżej.*

Pierwsze 5 wyrazów ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$

Żółty - $\mathrm{tg}(x)$, *Niebieski* - $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$



Pierwsze 5 ***wyrazów rozwinięcia funkcji tangens w szereg Taylora***

Żółty - $\mathrm{tg}(x)$, *Czarny - Kolejne rozwinięcia* $\mathrm{tg}(x)$ *w szereg Taylora*

Rysunki wykonane w programie Desmos.

4 Ciągi eulerowskie w przestrzeniach liniowych

Wyniki zamieszczone w tym rozdziale są praktycznie zupełnie odrębne od tych, wyprowadzonych w poprzedniej części pracy. Twierdzenie 4 mówi o możliwości skonstruowania ciągów eulerowskich dla równań w dowolnych przestrzeniach liniowych. Jego treść jest zainspirowana spostrzeżeniem, że treść twierdzenia 1 można przeformułować w sposób pozwalający na znaczące zwiększenie ogólności. Jeżeli bowiem dla danej funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniujemy ciąg przekształceń funkcyjnych:

$$T_n(h)(x) = h\left(x\frac{n-1}{n}\right) + \frac{x}{n}g\left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

to wówczas $T_{n+1}(f_n\left(\frac{x}{n}\right)) = f_{n+1}\left(\frac{x}{n+1}\right)$ (patrz przykład 8), a zatem treść twierdzenia 1 można by sformułować następująco:
Jeżeli granica

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(T_{n-1}(\ldots T_1(f_0(x))))$$

istnieje i zbieżność jest jednostajna to $f' = g(f)$.
Takie sformułowanie problemu pozwala zauważyć jego interesujący związek z teorią punktów stałych (więcej informacji o tej teorii można znaleźć w [3], a zwłaszcza rozdziale 2 tej pozycji). Rozpatrzmy bowiem ciąg punktów stałych T_n:

$$T_n(h) = h$$

$$h\left(x\frac{n-1}{n}\right) + \frac{x}{n}g\left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right) = h(x)$$

$$g\left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right) = \frac{n}{x}\left(h(x) - h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

I przy $n \to \infty$ otrzymujemy (przy odpowiednich założeniach):

$$g(x) = f'(x)$$

Okazuje się więc, że aby treść twierdzenia 1 była spełniona, ciąg $T_n(T_{n-1}(\dots T_1(f_0(x))))$ i pewien ciąg punktów stałych T_n muszą mieć tą samą granicę. Zaobserwowaną zależność można uzasadnić przeprowadzając następujące (nieformalne) rozumowanie:
Dla dużych n wyrazy ciągu $a_n = T_n(T_{n-1}(\dots T_1(f_0(x))))$ są blisko siebie (tzn. $a_{n+1} \approx a_n$), bo $T_n(f) \to f$. W związku z tym kolejne punkty (wyrazy ciągu a_n) coraz bardziej przypominają krzywą zadaną równaniem różniczkowym $T(f(t))(x) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, gdzie $T(f) = \lim_{n\to\infty}(T_n(f) - f)c_n,\ c_n \in \mathbb{R}$ (aby to zobaczyć najlepiej dla uproszczenia rozważyć ciąg przekształceń $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zbieżny do identyczności). Wówczas jeżeli $\lim_{t\to\infty} f(x,t) = f(x)$ istnieje to przy odpowiednich założeniach można przeprowadzić następujące rozumowanie:

$$0 = f(x) - f(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{f(x,t)t}{t} - f(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}t + f(x,t) - f(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}t.$$

I w związku z tym (przy odpowiednich założeniach dotyczących odwzorowania T) zachodzi:

$$T(f(x))(x) = \lim_{t\to\infty} T(f(x,t))(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0.$$

A ponieważ dla dużych n spodziewamy się $0 = \lim_{k\to\infty}(T_k(f(x)) - f(x))c_k = T(f(x)) \approx a_n$, więc widać że granica a_n powinna być w ścisłym związku z punktami stałymi T_n. Przypuszczenie to jest formalizowane w twierdzeniu 4, którego dowód jest w istocie dyskretnym odpowiednikiem przekształceń przedstawionych powyżej.

4.1 Twierdzenie 4

Twierdzenie:
Niech X będzie przestrzenią unormowaną, oraz $C \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Niech $T_n : C \to C$ będzie ciągiem funkcji ciągłych, zbieżnym punktowo do $\mathrm{id}(x) = x$. Ustalmy:

$$a_0 \in C$$
$$a_n = T_n(a_{n-1}).$$

Jeżeli $a_n \to a$ i istnieje ciąg $c_n \in (0,\infty)$ spełniający $\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{c_m}\right) = \infty$ taki, że ciąg $(T_n(x) - x)c_n$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $T(x)$ w pewnym otoczeniu a to

$$T(a) = 0.$$

Dowód: Weźmy:

$$\lambda_n = \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{c_m}\right).$$

Na podstawie ciągłości T_n, jednostajnej zbieżności $(T_n(x) - x)c_n$ i zbieżności a_n mamy:

$$T(a) = \lim_{n\to\infty}(T_n(a_n) - a_n)c_n = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)c_n = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)(c_n + 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((a_{n+1}-a_n)\frac{\frac{1}{c_n}+1}{\frac{1}{c_n}}\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}}+a_n\right)-a = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(a_{n+1}-a_n)}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}+a_n-a =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n a_{n+1}-\lambda_{n-1}a_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}-a = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta(\lambda_{n-1}a_n)}{\Delta\lambda_{n-1}}-a.$$

$c_m > 0$, więc λ_n jest ciągiem rosnącym, z założenia dążącym do nieskończoności. Można więc zastosować twierdzenie Stolza (Więcej informacji o tym twierdzeniu można znaleźć w [4] - par.33), zgodnie z którym powyższa granica jest równa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n-1}a_n}{\lambda_{n-1}}-a=0.$$

Co dowodzi tezy twierdzenia. □

4.2 Wniosek 4

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Niech dla każdego $x \in X$ ciąg $f_n : X \to X$ dąży jednostajnie do f w pewnym otoczeniu x. Ustalmy ciąg:

$$x_0 \in X$$

$$x_{n+1} = \frac{f_n(x_n)}{n} + x_n$$

Jeżeli granica $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ istnieje to $f(x) = 0$.

Dowód: Ustalmy:

$$T_n(x) = \frac{f_n(x)}{n} + x,\ \ x \in X$$

Wówczas $x_{n+1} = T_n(x_n)$, $\lim_{n\to\infty}(T_n(x) - x)n = f(x)$ i zbieżność jest jednostajna. Mając $\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ wszystkie założenia twierdzenia 4 są więc spełnione, więc jeżeli granica $x_n \to x$ istnieje to $f(x) = 0$. □

4.3 Przykład 7

Ustalmy:

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n - x_n\right) + x_n$$

Na podstawie wniosku 4, jeżeli x_n jest zbieżny do x to:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - t = e^{-x} - x.$$

Czyli x jest punktem stałym funkcji e^{-x}.

4.4 Przykład 8

Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Ustalmy:

$$T_n(h(x))(x) = g\left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right)\frac{x}{n} + h\left(x\frac{n-1}{n}\right)$$

Jeżeli istnieje zbiór $\mathcal{C}$ domknięty w $C[a,b]$ taki, że $T_n(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ i dla każdego $f \in \mathcal{C}$ istnieje otoczenie $B_f \subseteq \mathcal{C}$ takie, że $(T_n(f) - f)n$ jest zbieżny jednostajnie na B_f i ciąg zdefiniowany przez:

$$f_1(x) \in \mathcal{C}$$

$$f_{n+1}(x) = g\left(f_n(x)\right)x + f_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji f to zachodzi

$$f'(x) = g(f(x)),\ x \in [a,b]$$

Dowód: Mamy:

$$f_{n+1}\left(\frac{x}{n+1}\right) = g\left(f_n(\frac{x}{n+1})\right)\frac{x}{n+1} + f_n(\frac{x}{n+1}) = g\left(f_n(\frac{x}{n}\frac{n}{n+1})\right)\frac{x}{n+1} + f_n(\frac{x}{n}\frac{n}{n+1}) =$$

$$= T_{n+1}\left(f_n\left(\frac{x}{n}\right)\right)(x), n \in \mathbb{N}_+$$

Ponadto $T_n(h) \to h$. Z założenia, że dla każdego $h \in \mathcal{C}$ istnieje otoczenie $B_h \subseteq \mathcal{C}$ takie, że $(T_n(h) - h)n$ jest zbieżny jednostajnie na B_h mamy:

$$(T_n(h) - h)n = g\left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right)\right)x + \left(h\left(x\frac{n-1}{n}\right) - h(x)\right)n \to g(h(x))x - h'(x)x$$

Zatem biorąc w twierdzeniu 4 $a_n = f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ otrzymujemy, że jeżeli

$$f_n\left(\frac{x}{n}\right) \to f(x)$$

to

$$g(f(x))x - f'(x)x = 0$$

A ponieważ $f_n(0) = f_{n-1}(0) = f(0)$, więc:

$$g(f(x)) = f'(x)$$

$\square$

5 Uwagi końcowe i bibliografia

Zaprezentowane twierdzenia pokazują, że ciąg

$$f_0(x) = c \in \mathbb{R}$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{n}g\left(f_n(x)\right) + f_n(x)$$

może służyć do przybliżania rozwiązań równań różniczkowych postaci $f' = g(f)$. Zbieżność ciągu $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ do rozwiązania tego równania można pokazać dla szerokiej klasy funkcji g – w szczególności funkcji spełniających warunek Lipschitza i funkcji analitycznych. Niewątpliwie jednak uzyskane wyniki można znacząco rozwinąć. Powinno być możliwe chociażby znacznie lepsze oszacowanie przedziału zbieżności $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ w twierdzeniu 3.
Interesujący może być też przypadek, w którym funkcja g jest określona na zbiorze postaci $\mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ – ze względu na związek rozwiązań równania różniczkowego postaci $f' = g(f)$ z funkcjami odwrotnymi do funkcji $\int_0^x \frac{1}{g(t)}dt$ można oczekiwać, że jeżeli funkcja g jest postaci $\frac{1}{h'(x)}$ to $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ przybliża funkcję odwrotną do h na zbiorze, na którym h jest odwracalna. Można wobec tego zadać pytanie, czy

istnieją sytuacje w których zbiór na którym $f_n\left(\frac{x}{n}\right)$ przybliża h nie jest spójny. Twierdzenie 4 sugeruje, że ciągi eulerowskie mogą być konstruowane dla równań w dowolnych przestrzeniach liniowych, choć temat ten wymaga jeszcze głębszego zbadania. Przede wszystkim potrzebne byłoby znalezienie analogów wyników niniejszej pracy dla dowolnych przestrzeni liniowych, tak aby można je było zastosować do założeń twierdzenia 4. Przydatne mogłoby być też ścisłe udowodnienie związku między ciągiem $T_n(T_{n-1}(\dots T_1(f_0(x))))$, a krzywą $T(f(t))(x) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ o którym mowa była na początku rozdziału 4.

Serdecznie dziękuję wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania pracy – zwłaszcza jej opiekunowi naukowemu – dr hab. Jackowi Gulgowskiemu, oraz mojej nauczycielce matematyki Pani Małgorzacie Ilewicz.

References

[1] Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.

[2] Wilfred Kaplan, *Approximation by entire functions* (Dostęp dnia 17 IV 2023). https://projecteuclid.org/journals/michigan-mathematical-journal/volume-3/issue-1/Approximation-by-entire-functions/10.1307/mmj/1031710533.full.

[3] Daria Bugajewska Marcin Borkowski Piotr Kasprzak, *Selected topics in nonlinear analysis*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, 2021.

[4] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom I*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022.

[5] A.D. Myszkis J. Muszyński, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1984.

[6] *Conditions for convergence of Euler's method* (Dostęp dnia 29 IV 2023). https://mathoverflow.net/questions/185419/conditions-for-convergence-of-eulers-method.