# Struktura uogólnionych sit i ciągów flawiuszowskich

Jakub Zieliński
Opiekun naukowy: dr hab. Sebastian Król

## 1 Wprowadzenie

### 1.1 Wstęp i motywacja

Przedmiotem badań niniejszej pracy jest klasa ciągów powstających w procesach wielokrotnego odsiewania pewnych elementów z określonych zbiorów liczbowych. W odróżnieniu od np. sita Eratostenesa, w rozważanych procesach odsiewania nie będziemy operować cały czas na zbiorze liczb naturalnych, ponieważ w $k$-tym kroku sita będziemy usuwać elementy ze zbioru powstałego w $k-1$ kroku. Ponadto, zamiast wykreślać liczby według ich wartości (w sicie Eratostenesa wykreślamy wielokrotności kolejnych liczb pierwszych), w $k-$tym kroku będziemy operować na ich położeniu w zbiorze powstałym w kroku poprzednim. Moim celem jest zbadanie pewnych własności arytmetycznych takich ciągów poprzez dokładne opisanie poszczególnych kroków procedury odsiewania. W szczególności, opiszę strukturę arytmetyczną zbiorów odsiewanych. Pozwoli mi to otrzymać pewne informacje o tych ciągach, które mogą stanowić wstęp do rozstrzygnięcia hipotezy o istnieniu nieskończonej liczby liczb pierwszych występujących w tych ciągach. Hipoteza w szczególnym przypadku ciągu *liczb szczęśliwych* stanowi znany w literaturze problem otwarty.
Problem ten został zaproponowany w artykule *On Certain Sequences of Integers Defined by Sieves* V. Gardinera, R. Lazarusa, N. Metropolis i S. Ulama [**1**]. Autorzy zaproponowali rozważanie dwóch procesów odsiewania. Pierwszy przebiega następująco.

- Mamy dany zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- W pierwszym kroku usuwamy z niego co drugą liczbę.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

- W drugim kroku z pozostałych liczb usuwamy co trzecią.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

- W trzecim kroku z pozostałych liczb usuwamy co czwartą.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

$\vdots$

- W $k-$tym kroku z pozostałych liczb usuwamy co $k+1$ liczbę.

Po nieskończenie wielu iteracjach powyżej opisanego procesu ciąg utworzony z pozostałych wyrazów nazwiemy **ciągiem Flawiusza** (ze względu na podobieństwo do problemu Józefa Flawiusza [**6**]).
Drugie sito zaproponowane w artykule [**1**] wygląda następująco.

- Mamy dany zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Pierwszą liczbą po 1 jest 2, więc w pierwszym kroku usuwamy ze zbioru $\mathbb{N}$ co drugą liczbę.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

- Pierwszą liczbą pozostałą po 1 jest 3, więc w drugim kroku usuwamy z pozostałych co trzecią liczbę.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

- Pierwszą liczbą pozostałą po 3 jest 7, więc w trzecim kroku usuwamy z pozostałych co siódmą liczbę.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

- Pierwszą liczbą pozostałą po 7 jest 9, więc w czwartym kroku usuwamy z pozostałych co dziewiątą liczbę.
  $\vdots$
- Pierwszą liczbą pozostałą po $s_{k-1}$ jest $s_k$, więc w $k-$tym kroku usuwamy z pozostałych co $s_k$ liczbę.

Kontynuując ten proces w nieskończoność otrzymamy **ciąg liczb szczęśliwych**. Oznaczmy jego wyrazy przez $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.
Autorzy artykułu [**1**] postawili dwie hipotezy:

**Hipoteza 1.** Ciąg liczb szczęśliwych zachowuje się asymptotycznie tak samo jako ciąg liczb pierwszych.

**Hipoteza 2.** Ciąg liczb szczęśliwych zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Autorzy pracy zamieścili komentarz odnosząc się do hipotez: "Podobieństwo między zachowaniem liczb szczęśliwych oraz liczb pierwszych zdaje się być uderzające w rozważanym zakresie liczb. Oczywiście jest raczej ciężko udowodnić ogólne twierdzenia"[1]. Pierwszy problem

[1] tłumaczenie autora

doczekał się publikacji rok później [2]. Mianowicie, D. Hawkins i W. E. Briggs udowodnili w [2], że

$$s_n = n\log n + \frac{n}{2}(\log\log n)^2 + o(n(\log\log n)^2).$$

Jeśli $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ oznacza ciąg liczb pierwszych, to, dla porównania, z twierdzenia o liczbach pierwszych [3] wiemy, że

$$p_n = n\log n + n\log\log n + o(n\log\log n).$$

Zatem wiemy, że $\lim_{n\to\infty} p_n/s_n = 1$, ale $\lim_{n\to\infty}(p_n - n\log n)/(s_n - n\log n) = 0$. Ponadto udowodniono, że żadne sito o takiej procedurze odsiewania jak rozważana w pracy [2] nie wygeneruje ciągu, którego $n-$ty wyraz zbiega do $p_n$ z dokładnością co do drugiego miejsca szacowania. Drugi problem wciąż pozostaje otwarty. Zaraz po tym w tekście wspomniano o rzekomych wynikach P. Erdösa w tematyce proponowanych sit, ale najpewniej nie zostały one nigdy opublikowane, a przynajmniej nie są mi znane. Jednocześnie zaproponowano dokonywać pewnych wariacji czy modyfikacji sit definiowanych w taki sposób.
W mojej pracy przyjrzę się strukturze zbiorów odsiewanych i ciągów utworzonych z powstałych liczb zdefiniowanych poprzez ogólną procedurę odsiewania. Rozważmy ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych $a := (a_i)_{i=1}^{\infty}$, $a_1 > 1$.

- Mamy dany zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- W pierwszym kroku usuwamy z niego co $a_1$ liczbę.
- W drugim kroku z pozostałych liczb usuwamy co $a_2$ liczbę.
- W trzecim kroku z pozostałych liczb usuwamy co $a_3$ liczbę.
  $\vdots$
- W $k-$tym kroku z pozostałych liczb usuwamy co $a_k$ liczbę, itd.

Ciąg liczb nieodsianych nazywać będziemy *ciągiem generowanym przez sito*. Natomiast ciąg $a$ będziemy nazywać *ciągiem selekcji* danej procedury odsiewania.
Całe rozumowanie będzie stanowiło krok w stronę wykazania istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych w takich ciągach poprzez wykorzystanie pewnej formy twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w ciągach arytmetycznych. Jednocześnie pokażę, na jakie problemy natrafiamy na tej drodze rozumowania, których rozwiązanie będzie wymagało jeszcze głębszego zrozumienia powstawania elementów zbiorów usuwanych w procedurze odsiewania. Zagadnienie to będzie stanowiło cel moich dalszych badań.

## 1.2 Przyjęte oznaczenia

Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych $\geqslant 1$), a $\mathbb{P}$ - zbiór liczb pierwszych. Zacznijmy od formalnych definicji funkcji liczącej oraz zbiorów, które będą opisywać rozważane procedury odsiewania.

**Definicja 1.** Niech funkcja $\pi\colon \mathbb{R}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ (gdzie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ to zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$) dana będzie wzorem

$$\pi(x,A) := \sum_{\substack{t\leqslant x\\ t\in A}} 1,$$

tzn. $\pi(x,A)$ jest liczbą wszystkich elementów zbiorów $A$, które są nie większe niż $x$.

**Definicja 2.** W ramach rozważanej procedury odsiewania dla danego ciągu selekcji $a$, niech

$$\begin{aligned} B_0(a) &:= \mathbb{N},\\ B_k(a) &:= \mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{k} A_i(a) \qquad (k\geqslant 1),\\ A_{k+1}(a) &:= \{b_i\colon b_i\in B_k(a), i\equiv 0 \pmod{a_{k+1}}\}, \end{aligned}$$

gdzie $b_1, b_2, \ldots$ oznaczają elementy zbioru $B_k(a)$ w kolejności rosnącej.
Innymi słowy, zbiór $A_{k+1}$ składa się z co $a_{k+1}$ liczby ze zbioru $B_k$, czyli wszystkich liczb pozostałych po $k$ krokach sita (usunięciu z $\mathbb{N}$ zbiorów $A_1,\ldots,A_k$).

Dla wygody przyjmijmy oznaczenie zapisu zbioru reszt.

**Definicja 3.** Dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ zapiszemy $[n]=\{0,1,\ldots,n-1\}$.

## 2 Liczby pierwsze w ciągu generowanym przez sito

Aby policzyć, ile liczb pierwszych znajduje się w ciągu utworzonym przez sito, chcielibyśmy wybrać pewien ciąg $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $x_k\to\infty$ przy $k\to\infty$ oraz $x_k<\min A_{k+1}$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$ i obliczyć

$$\pi(x_k, B_k\cap\mathbb{P}) = \pi(x_k,\mathbb{P}) - \sum_{i=1}^{k}\pi(x_k, A_i\cap\mathbb{P}).$$

Jak pokażemy, wszystkie zbiory $A_k$ niezależnie od ciągu selekcji składają się z ciągów arytmetycznych. Dlatego naturalnym zdaje się być podejście wykorzystujące twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w ciągach arytmetycznych. Przywołajmy dwa klasyczne wyniki o asymptotyce liczb pierwszych w ciągach arytmetycznych.

**Twierdzenie 1.** **[3]** (Twierdzenie Dirichleta) Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $q$ i liczby $a$ względnie pierwszej z $q$ dla zbioru $A:=\{t\colon t\in\mathbb{N}, t\equiv a \pmod q\}$ zachodzi zależność asymptotyczna

$$\pi(x, A\cap\mathbb{P}) \sim \frac{\pi(x,\mathbb{P})}{\varphi(q)} \qquad (\text{przy } x\to\infty).$$

Wyrażenie $\varphi(q)$ oznacza tocjent z liczby $q$, tzn.

$$\varphi(q) := q\prod_{\substack{p\mid q\\ p\in\mathbb{P}}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

**Twierdzenie 2.** [**5**] (Twierdzenie Siegela-Walfisza) Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $q$ i liczby $a$ względnie pierwszej z $q$ dla zbioru $A := \{t\colon t \in \mathbb{N}, t \equiv a \pmod{q}\}$ istnieje stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że dla $x \geqslant \exp(q^{\frac{1}{2}})$ zachodzi

$$\pi(x, A \cap \mathbb{P}) = \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(x \exp(-C(\log x)^{\frac{1}{2}})\right),$$

gdzie funkcja Li dana jest przez

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \geqslant 2).$$

Naśladując konwencję przyjętą np. w [**3**, **4**], przez $\log x$ oznaczamy logarytm naturalny z liczby $x$.

W twierdzeniu 4 udowadniam, że każdy zbiór $A_k$ ma postać $\{q_k i + r\colon i \geqslant 0, r \in R_k\}$, gdzie $R_k \subset [q_k]$, dlatego uzasadnionym byłoby zapisanie

$$\pi(x_k, B_k \cap \mathbb{P}) = \pi(x_k, \mathbb{P}) - \sigma_1^k(x_k) - \sigma_2^k(x_k),$$

gdzie

$$\sigma_1^k(x) := \sum_{i=1}^{k} \pi(x, \{r\colon r \in R_i \cap \mathbb{P}, \mathrm{NWD}\,(r, q_i) > 1\})$$
$$\sigma_2^k(x) := \sum_{i=1}^{k} \pi(x, \{r\colon r \in R_i, \mathrm{NWD}\,(r, q_i) = 1\} \cap \mathbb{P}).$$

Jeśli chcemy korzystać z twierdzenia Siegela-Walfisza, możemy zapisać

$$\pi(x_k, B_k \cap \mathbb{P}) = \pi(x_k, \mathbb{P}) - \sigma_1^k(x_k) - \sigma_3^k(x_k) - E(x_k),$$

gdzie

$$\sigma_3^k(x) := \sum_{i=1}^{k} \#\{r\colon r \in R_i, \mathrm{NWD}\,(r, q_i) = 1\} \cdot \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q_i)}$$
$$E(x) := \sigma_2^k(x) - \sigma_3^k(x).$$

Zauważmy, że aby efektywnie skorzystać z twierdzenia Dirichleta, musimy posiadać pewne informacje lub przynajmniej dobre oszacowanie na $\#\{r\colon r \in R_k, \mathrm{NWD}\,(r, q_k) = 1\}$ dla wszystkich $k \geqslant 2$. Jest to problem, który wymaga dalszych badań, ponieważ może on okazać się pomocny w rozstrzygnięciu hipotezy istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych szczęśliwych. Wstępne rozważania pokazują, że bez dokładniejszej analizy zbiorów odsiewanych bezużyteczne będzie również korzystanie z jakichkolwiek dokładniejszych oszacowań (twierdzeń Bombieri-Vinogradova czy Bruna-Titchmarsha) [**5**].

# 3 Sito i ciąg Flawiusza

Jako pierwszym zajmiemy się ciągiem Flawiusza. Rozumowanie przedstawione w tym rozdziale ułatwi rozważanie przypadku ogólnego.

**Definicja 4.** Ciągiem Flawiusza nazwiemy ciąg generowany przez sito o ciągu selekcji $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ danym przez $a_i = i + 1$, $i \in \mathbb{N}$.

Zacznijmy od twierdzenia opisującego strukturę zbiorów $A_k(a)$ i zarazem $B_k(a)$. Dla uproszczenia w ramach tej sekcji nazywajmy je odpowiednio $A_k$ i $B_k$.

**Twierdzenie 3.** Niech $q_k := \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Wówczas, dla dowolnego $k \geqslant 2$ istnieje zbiór $R_k \subset [q_k]$ taki, że

$$A_k = \{q_k i + r \colon i \geqslant 0, r \in R_k\}. \tag{1}$$

Ponadto

$$\#R_k = \frac{q_k}{k(k+1)}. \tag{2}$$

Przedstawimy dwa dowody powyższego twierdzenia, pierwszy w oparciu o arytmetykę modularną i nieco skomplikowaną indukcję, drugi w bardziej konstrukcyjnym duchu.

## 3.1 Pierwszy dowód twierdzenia 3

*Dowód.* Poprowadzimy indukcję ze względu na $k$ dla trzech twierdzeń:

- $T_1(k)$: Zbiór $A_k$ jest postaci $\{q_k i + r \colon i \geqslant 0, r \in R_k\} \setminus \{0\}$, gdzie $q_k, R_k$ są jak wyżej.
- $T_2(k)$: Zachodzi równość
$$\frac{\#R_k}{q_k} = \frac{1}{k(k+1)}.$$
- $T_3(k)$: Dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ zachodzi kongruencja
$$\pi(l + q_{k+1}, B_k) \equiv \pi(l, B_k) \pmod{k+2},$$
gdzie $q_{k+1}$ oraz $B_k$ są zdefiniowane jak wyżej.

Nasze rozumowanie będziemy opierać na bazie indukcji $(T_1(1), T_1(2), T_2(1), T_3(1))$ oraz trzech krokach indukcyjnych:

- **Krok 1:** $T_1(1) \wedge \ldots \wedge T_1(k) \wedge T_2(1) \wedge \ldots \wedge T_2(k-1) \implies T_2(k) \qquad (k \geqslant 2)$.
- **Krok 2:** $T_1(1) \wedge \ldots \wedge T_1(k) \wedge T_2(1) \wedge \ldots \wedge T_2(k) \implies T_3(k) \qquad (k \geqslant 1)$.
- **Krok 3:** $T_1(1) \wedge \ldots \wedge T_1(k) \wedge T_3(k) \implies T_1(k+1) \qquad (k \geqslant 1)$.

**Baza indukcji**. Nie trudno jest zauważyć, że:

- $T_1(1)$: Zbiór $A_1$ jest postaci $\{2i+0\colon i \geqslant 0\} \setminus \{0\}$ ($q_1 = 2$, $\#R_1 = 1$).
- $T_1(2)$: Zbiór $A_2$ jest postaci $\{6i+5\colon i \geqslant 0\}$ ($q_2 = 6$, $\#R_2 = 1$).
- $T_2(1)$: Zachodzi równość
$$\frac{\#R_1}{q_1} = \frac{1}{2}.$$
- $T_3(1)$: Zbiór $B_1$ jest dany przez $\{2i+1\colon i \geqslant 0\}$, dlatego
$$\pi(l+6, B_1) = \pi(l, B_1) + 3 \equiv \pi(l, B_1) \pmod 3.$$

**Krok 1.** Zacznijmy od pomocniczych obserwacji. Zbiór $A_k$ składa się z co $k+1$ liczby ze zbioru $B_{k-1}$, dlatego

$$\begin{aligned}\pi(l, A_k) &= \left\lfloor \frac{\pi(l, B_{k-1})}{k+1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{l - \sum_{i=1}^{k-1} \pi(l, A_i)}{k+1} \right\rfloor \qquad (l \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Ponadto, dla każdego $t \in \mathbb{N}$,

$$\pi(tq_i, A_i) = t\#R_i.$$

Dzięki temu możemy przedstawić liczbę $\pi(l + q_k, A_k)$ na dwa sposoby. Z jednej strony

$$\pi(l + q_k, A_k) = \pi(l, A_k) + \#R_k,$$

zaś z drugiej, skoro $q_i | q_k$ dla $i < k$, to

$$\begin{aligned}\pi(l + q_k, A_k) &= \left\lfloor \frac{l + q_k - \sum_{i=1}^{k-1} \pi(l + q_k, A_i)}{k+1} \right\rfloor, \\ &= \left\lfloor \frac{l - \sum_{i=1}^{k-1} \pi(l, A_i)}{k+1} \right\rfloor + \frac{q_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q_k}{q_i} \#R_i}{k+1} \\ &= \pi(l, A_k) + \frac{q_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q_k}{q_i} \#R_i}{k+1}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\#R_k = \frac{q_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q_k}{q_i} \#R_i}{k+1}.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego $T_2(i)$ dla $i = 1, \ldots, k-1$ oraz znanego wzoru otrzymanego przez teleskopowanie sumy

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{k},$$

możemy zapisać

$$\begin{aligned}\#R_k &= \frac{q_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} q_k}{k+1} \\ &= \frac{q_k}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

To dowodzi prawdziwość implikacji w tym kroku indukcyjnym.

**Krok 2.** Wyrażając liczbę $\pi(l, B_k)$ za pomocą liczb postaci $\pi(l, A_i)$ widzimy, że

$$\begin{aligned}\pi(l + q_{k+1}, B_k) &= l + q_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \pi(l + q_{k+1}, A_i) \\ &= l - \sum_{i=1}^{k} \pi(l, A_i) + q_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{k+1}}{q_i} \#R_i \\ &= \pi(l, B_k) + q_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{k+1}}{q_i} \#R_i.\end{aligned}$$

Korzystając z $T_2(i)$ dla $i = 1, \dots, k$ możemy zapisać

$$\begin{aligned}q_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{k+1}}{q_i} \#R_i &= q_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} q_{k+1} \\ &= q_{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) q_{k+1} \\ &= \frac{q_{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

Stąd, skoro $\mathrm{NWD}\,(k+1, k+2) = 1$, a liczba $q_{k+1}$ jest podzielna przez $k+1$ i $k+2$, to $(k+1)(k+2) | q_{k+1}$. To dowodzi prawdziwość kroku indukcyjnego.

**Krok 3.** Zbiór $A_{k+1}$ składa się z co $k+2$ liczby ze zbioru $B_k$, zatem

$$l \in A_{k+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l \in B_k \quad \wedge \quad \pi(l, B_k) \equiv 0 \pmod{k+2}.$$

Korzystając z $T_1(i)$ dla $i = 1, \dots, k$ warunek $l \in B_k$ możemy zapisać jako

$$l \equiv r \pmod{q_{k+1}},$$

gdzie $r \in \tilde{R}_{k+1}$ dla pewnego zbioru $\tilde{R}_{k+1} \subset [q_{k+1}]$.
Zauważmy, że dzięki $T_3(k)$ możemy stwierdzić, że dla każdej reszty $t \in [k+2]$ istnieje zbiór $R(t) \subset [q_{k+1}]$ taki, że

$$\pi(l, B_k) \equiv t \pmod{k+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l \equiv r \pmod{q_{k+2}},$$

gdzie $r \in R(t)$. Stąd warunek $\pi(l, B_k) \equiv 0 \pmod{k+2}$ jest równoważny kongruencji

$$l \equiv r \pmod{q_{k+1}},$$

gdzie $r \in R(0)$. Ostatecznie, łącząc obie te kongruencje, dochodzimy do stwierdzenia, że

$$l \in A_{k+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l \equiv r \pmod{q_{k+1}},$$

gdzie $r \in \tilde{R}_{k+1} \cap R(0)$. Stąd otrzymujemy zbiór $R_{k+1} = \tilde{R}_{k+1} \cap R(0)$. To dowodzi implikację w kroku 3, co kończy dowód twierdzenia. □

**Uwaga 1.** Twierdzenie zostało sformułowane dla $k \geqslant 2$, ponieważ w szczególnym przypadku $k = 1$ musielibyśmy uwzględnić niezawieranie się 0 w zbiorze $A_k$.

## 3.2 Drugi dowód twierdzenia 3

*Dowód.* Alternatywny dowód twierdzenia 3 oparty będzie na następującym opisie poszczególnych kroków procedury odsiewania w sicie Flawiusza. W pierwszym kroku odpowiadającym odsianiu co $a_1 = 2$ elementu ze zbioru $\mathbb{N}$, naturalnie jest przedstawić zbiór liczb

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

w postaci *bloków* $B_{1,j} := \{2j - 1, 2j\}$, $j \in \mathbb{N}$, zawierających zarówno liczby odsiane jak i nieodsiane. Każdy z bloków ma *długość* (liczbę elementów) równą $l_1 := 2$, a ponadto zawiera $n_1 := 1$ liczb nieodsianych.

$$\underbrace{1, 2}_{B_{1,1}}, \underbrace{3, 4}_{B_{1,2}}, \underbrace{5, 6}_{B_{1,3}}, \underbrace{7, 8}_{B_{1,4}}, \underbrace{9, 10}_{B_{1,5}}, \underbrace{11, 12}_{B_{1,6}}, \underbrace{13, 14}_{B_{1,7}}, \underbrace{15, 16}_{B_{1,8}}, \underbrace{17, 18}_{B_{1,9}}, \underbrace{19, 20}_{B_{1,10}}, \ldots$$

W drugim kroku odsiewamy co $a_2 = 3$ element. Chcemy skonstruować bloki $B_{2,j}$ jako sumy (teoriomnogościowe) każdych $k_2$ kolejnych bloków $B_{1,j}$, tzn.

$$B_{2,j} := \bigcup_{t=3(j-1)+1}^{3j} B_{1,t}, \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Definiujemy

$$k_2 = \frac{\mathrm{NWW}\,(n_1, a_2)}{n_1}.$$

Dlatego $k_2 = 3$, a długość bloków $B_{2,j}$ wynosi $l_2 = 6$.

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{B_{2,1}}, \underbrace{7, 8, 9, 10, 11, 12}_{B_{2,2}}, \underbrace{13, 14, 15, 16, 17, 18}_{B_{2,3}}, \ldots$$

Pokażemy, w jaki sposób w ogólności tworzyć bloki $B_{i,j}$ odpowiadające $i-$temu krokowi sita $(i \geqslant 2)$.
Niech $l_i, n_i$ oznaczają odpowiednio długość (liczbę elementów) i liczbę elementów nieodsianych każdego z bloków $B_{i,j}$ $(i, j \geqslant 1)$. Chcemy, aby bloki $B_{i,j}$ składały się z $k_i$ kolejnych bloków $B_{i-1,j}$, tzn.

$$B_{i,j} := \bigcup_{t=k_i(j-1)+1}^{k_i j} B_{i-1,t} \qquad (i \geqslant 2).$$

Ponadto liczba nieodsianych elementów w $B_{i,j}$ ma być możliwie jak najmniejsza i jednocześnie podzielna przez $i+1$. Dlatego definiujemy

$$k_i = \frac{\mathrm{NWW}\,(n_{i-1}, i+1)}{n_{i-1}} \qquad (i \geqslant 2). \tag{3}$$

Jednocześnie, skoro $B_{i,j}$ składają się z $k_i$ kolejnych bloków $B_{i-1,j}$ oraz zawierają wszystkie elementy nieodsiane z tych bloków oprócz co $i+1$, to

$$n_i = k_i n_{i-1}\left(1 - \frac{1}{i+1}\right) = k_i n_{i-1}\frac{i}{i+1}. \tag{4}$$

Dzięki tym dwóm równościom dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ uzyskamy (poprzez iterację)

$$\begin{aligned} n_i &= k_i n_{i-1}\frac{i}{i+1} \\ &= k_i k_{i-1} n_{i-2}\frac{i}{i+1}\cdot\frac{i-1}{i} \\ &= \ldots \\ &= \frac{k_i k_{i-1}\cdot\ldots\cdot k_2}{i+1}. \end{aligned}$$

Jednocześnie korzystając z (3) otrzymamy równanie rekurencyjne dla $k_i$, $i \in \mathbb{N}$,

$$k_{i+1} = \frac{\mathrm{NWW}\,(k_i k_{i-1}\cdot\ldots\cdot k_2/(i+1), i+2)}{k_i k_{i-1}\cdot\ldots\cdot k_2/(i+1)}. \tag{5}$$

Zauważmy, że wykazanie równości $l_i = \mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)$ będzie równoważne udowodnieniu $k_i = \mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)/\mathrm{NWW}(1,\ldots,i)$ dla wszystkich $i \geqslant 2$. Skorzystamy tutaj z indukcji matematycznej. Dla $i = 2$ widzimy, że faktycznie $k_2 = 3$. Załóżmy, że $k_j$ dla $j = 2,\ldots,i$ jest takiej postaci jak powyżej. Wówczas równanie (5) przybiera postać

$$k_{i+1} = \frac{\mathrm{NWW}\,(\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)/(i+1), i+2)}{\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)/(i+1)}.$$

Zauważmy, że liczby $i+1$ oraz $i+2$ są względnie pierwsze, a $i+1|\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)$. Stąd

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= \frac{\mathrm{NWW}\,(\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1), i+2)\,/(i+1)}{\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)/(i+1)} \\ &= \frac{\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+2)}{\mathrm{NWW}(1,\ldots,i+1)}. \end{aligned}$$

To kończy dowód twierdzenia. □

**Uwaga 2.** Zauważmy, że skoro bloki $B_{i,j}$ są sumami bloków $B_{i-1,j}$, z których odsiany został największy element nieodsiany w kroku poprzednim, to różnice między kolejnymi wyrazami nieodsianymi mogą być dowolnie duże. Dlatego ciąg Flawiusza nie zawiera żadnego podciągu będącego ciągiem arytmetycznym.

Pierwszy dowód został zaproponowany przez autora, drugi przez opiekuna naukowego.

# 4 Struktura uogólnionych sit flawiuszowskich

Jako pierwszemu przyjrzeliśmy się situ Flawiusza, w którym możemy uzyskać bardzo przystępny opis zbiorów $A_k$. Jak pokażemy, w ogólnym przypadku nie będą one takie eleganckie, ale wciąż możemy udowodnić, że usuwane zbiory $A_k$ będą się składać wyłącznie z ciągów arytmetycznych o tej samej różnicy.

**Twierdzenie 4.** Dla dowolnego ciągu selekcji $a$ zbiór $A_k(a)$ dla $k \geqslant 2$ jest postaci

$$A_k(a) = \{q_k i + r \colon i \geqslant 0, r \in R_k\}, \tag{6}$$

gdzie $R_k \subset [q_k]$ oraz

$$q_k = a_1 g_k(a) \prod_{i=2}^{k-1} \frac{a_i}{a_i - 1},$$

przy czym ciąg $(g_k(a))_{k=1}^{\infty}$ jest dany przez

$$\begin{aligned} g_1(a) &= \mathrm{NWW}\,(a_1 - 1, a_2) \\ g_k(a) &= \mathrm{NWW}\left(\left(1 - \frac{1}{a_k}\right) g_{k-1}(a), a_{k+1}\right) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

*Dowód.* Postępujemy analogicznie jak w drugim dowodzie twierdzenia 3. Definiujemy bloki $B_{1,j} := \{a_1(j-1)+1, a_1(j-1)+2, \ldots, a_1 j\}$ oraz

$$B_{i,j} := \bigcup_{t=k_i(j-1)+1}^{k_i j} B_{i-1,t} \qquad (i \geqslant 2).$$

Ponadto, niech $l_i, n_i$ oznaczają odpowiednio długość (liczbę elementów) oraz liczbę elementów nieodsianych w blokach $B_{i,j}$ $(j \in \mathbb{N})$. Oznaczamy

$$k_i = \frac{\mathrm{NWW}\,(n_{i-1}, a_i)}{n_{i-1}} \qquad (i \geqslant 2).$$

Tym razem uzyskujemy

$$n_i = k_i \cdot \ldots \cdot k_2 \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right), \tag{7}$$

a stąd

$$k_{i+1} = \frac{\mathrm{NWW}\left(k_i \cdot \ldots \cdot k_1 \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{a_1}\right), a_{i+1}\right)}{k_i \cdot \ldots k_1 \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)}. \tag{8}$$

Wyraźmy teraz odpowiednio $l_i$,

$$\begin{aligned} l_i &= l_1 k_i k_{i-1} \cdot \ldots \cdot k_2 \\ &= a_1 \prod_{j=2}^{i-1} \frac{a_j}{a_j - 1} \cdot \mathrm{NWW}\left(k_{i-1}k_{i-2} \cdot \ldots \cdot k_2 \prod_{j=2}^{i-1} \frac{a_j}{a_j-1}, a_i\right) \end{aligned}$$

Zauważmy, że pierwsze wyrażenie w NWW wynosi

$$k_{i-1}k_{i-2} \cdot \ldots \cdot k_2 \prod_{j=2}^{i-1} \frac{a_j}{a_j-1} = \left(1 - \frac{1}{a_{i-1}}\right) \mathrm{NWW}\left(k_{i-2}k_{i-3} \cdot \ldots \cdot k_2 \prod_{j=2}^{i-2} \frac{a_j}{a_j-1}, a_{i-1}\right).$$

Ponownie, kolejne wyrażenie w NWW jest równe

$$k_{i-2}k_{i-3} \cdot \ldots \cdot k_2 \prod_{j=2}^{i-2} \frac{a_j}{a_j-1} = \left(1 - \frac{1}{a_{i-2}}\right) \mathrm{NWW}\left(k_{i-3}k_{i-4} \cdot \ldots \cdot k_2 \prod_{j=2}^{i-3} \frac{a_j}{a_j-1}, a_{i-2}\right).$$

Powtarzając dostatecznie wiele razy, otrzymamy wyrażenie $g_i(a)$. □

Zauważmy teraz, że znając ciąg selekcji $a$ możemy wyrazić funkcję liczącą $\pi(l, B_k)$ oraz elementy ciągu generowanego za pomocą złożenia pewnych funkcji elementarnych. Złożenie funkcji $f$ i $g$ będziemy oznaczać przez $f \circ g$.

**Twierdzenie 5.** Rozważmy ciąg funkcji $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, danych przez

$$f_k(l) = l - \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor \qquad (k \geqslant 2).$$

Wówczas dla dowolnego $k \geqslant 2$

$$\pi(l, B_k(a)) = f_{a_k} \circ f_{a_{k-1}} \circ \ldots \circ f_{a_1}(l) \qquad (l \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

*Dowód.* Zastosujemy indukcję ze względu na $k$. Dla $k = 1$ zbiór $B_1(a)$ definiujemy jako $\mathbb{N}$ z usuniętym co $a_1$ elementem, dlatego

$$\pi(l, B_1(a)) = l - \left\lfloor \frac{l}{a_1} \right\rfloor = f_{a_1}(l) \qquad (l \in \mathbb{N}).$$

Załóżmy, że zależność (9) zachodzi dla pewnego $k$. Wówczas, skoro zbiór $B_{k+1}(a)$ składa się z elementów zbioru $B_k(a)$ z usuniętym co $a_1$ elementem, to

$$\pi(l, B_{k+1}(a)) = \pi(l, B_k(a)) - \left\lfloor \frac{\pi(l, B_k(a))}{a_{k+1}} \right\rfloor = f_{a_{k+1}}(\pi(l, B_k(a))) = f_{a_{k+1}} \circ f_{a_k} \circ \ldots \circ f_{a_1}(l).$$

□

Poniższe twierdzenie wyraża elementy ciągu generowanego przez sito w terminach złożenia funkcji elementarnych.

**Twierdzenie 6.** Rozważmy ciąg funkcji $i_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, danych przez

$$i_k(l) = l + \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor .$$

Niech ciąg $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem generowanym przez sito o ciągu selekcji $a$. Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

$$b_{k+1} = i_{a_1-1} \circ i_{a_2-1} \circ \ldots \circ i_{a_k-1}(k) + 1. \tag{10}$$

*Dowód.* Zauważmy, że dla dowolnego ciągu selekcji $a$ przynajmniej $k$ pierwszych wyrazów zbiorów $B_k(a)$ i $B(a)$ jest takich samych. Ponadto $k-$ty element zbioru $B_k(a)$ będzie $i_{a_k-1}(k)-$tym elementem zbioru $B_{k-1}(a)$. Analogicznie $i_{a_k-1}(k)-$ty element zbioru $B_{k-1}(a)$ będzie $i_{a_{k-1}-1} \circ i_{a_k-1}(k)-$tym elementem zbioru $B_{k-2}(a)$.
Powtarzając to rozumowanie dla wszystkich zbiorów $B_{k-3}(a), \ldots, B_1(a), B_0(a) = \mathbb{N}$ otrzymamy żądaną równość. $\square$

**Uwaga 3.** Możliwe, że będziemy w stanie rozstrzygnąć, czy dany ciąg zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych w oparciu o wypracowane równanie (10), ale wstępne rozważania pokazują, że dowód hipotezy 2 oparty na arytmetyce modularnej (w duchu twierdzenia Euklidesa) może być trudny.

**Uwaga 4.** Dzięki otrzymanym wzorom możemy pokazać, że suma $\sigma_1^k(x)$ zdefiniowana w rozdziale 2 jest dla dowolnego ciągu selekcji $a$, $k \geqslant 2$ i $x \geqslant 0$ równa 0 lub 1 (w zależności od tego, czy liczba $a_1$ jest pierwsza). Jeśli bowiem miałaby istnieć liczba pierwsza $p \in R_j$ ($j \geqslant 2$) taka, że $p|q_j$, to z twierdzenia 4 wynika, że $p$ jest dzielnikiem przynajmniej jednej z liczb $a_1, \ldots, a_j$, a w szczególności $p \leqslant a_j$. Jednocześnie, skoro liczba $\min R_j$ jest dokładnie $a_j$-tym elementem zbioru $B_{j-1}(a)$, to, na podstawie wcześniejszych rozważań,

$$\begin{aligned} \min R_j &= i_{a_1-1} \circ \ldots \circ i_{a_{j-1}-1}(a_j) + 1 \\ &\geqslant a_j + 1 \\ &> a_j. \end{aligned}$$

Dlatego zbiór $\{r \colon r \in R_i \cap \mathbb{P}, \mathrm{NWD}\,(r, q_i) > 1\}$ jest dla $i \geqslant 2$ zbiorem pustym.

# 5 Sito i ciąg liczb szczęśliwych

Zajmijmy się drugim sitem zaproponowanym we wspomnianej we wstępie pracy [**1**]. Ponieważ w poprzednim podrozdziale udowodniliśmy pewne wyniki w przypadku ogólnym, rozważania w tym rozdziale zaprezentujemy w charakterze wniosków.

**Definicja 5.** Ciągiem liczb szczęśliwych nazywamy ciąg generowany przez sito zadane ciągiem selekcji $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ określonym rekurencyjnie jak następuje: $a_1 = 2$, $a_i = \min\{a\colon a \in B_{i-1}, a > a_{i-1}\}$ dla $i \geqslant 2$. Ciąg ten oznaczamy przez $(s_i)_{i=1}^{\infty}$.

**Uwaga 5.** Zauważmy, że ciąg generowany przez sito zadane ciągiem selekcji $a$ jest jednocześnie ciągiem selekcji, tj. $a_i = s_i$ dla $i \geqslant 2$.

Wnioskiem z twierdzenia 4 jest poniższe stwierdzenie.

**Wniosek 1.** Dla dowolnego $k \geqslant 2$ zbiór $A_k(a)$ jest postaci

$$A_k(a) = \{q_k i + r\colon i \geqslant 0, r \in R_k\}, \tag{11}$$

gdzie $R_k \subset [q_k]$ oraz

$$q_k = 2g_k(a) \prod_{i=2}^{k-1} \frac{a_i}{a_i - 1},$$

przy czym ciąg $(g_k(a))_{k=1}^{\infty}$ jest dany przez

$$\begin{aligned} g_1(a) &= \mathrm{NWW}\,(a_1 - 1, a_2) = 3 \\ g_k(a) &= \mathrm{NWW}\left(\left(1 - \frac{1}{a_k}\right) g_{k-1}(a), a_{k+1}\right) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

# Bibliografia


[1] V. Gardiner, R. Lazarus, N. Metropolis, S. Ulam, *On Certain Sequences of Integers Defined by Sieves*, Mathematics Magazine, Vol. 29, No. 3, pp. 117-122, Taylor & Francis, Ltd., 1956.

[2] D. Hawkins, W. E. Briggs, *The Lucky Number Theorem*, Mathematics Magazine, Vol. 31, No. 2, pp. 81-84, Taylor & Francis, Ltd., 1957.

[3] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer Science & Business Media, 1998.

[4] A. J. Hildebrand, . *Introduction to analytic number theory, Math 53,1 lecture notes*, Version 1, fall 2005. https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/

[5] L. Thompson, S. C. Santana, *ANALYTIC NUMBER THEORY (MASTERMATH) PART II: SIEVE METHODS*, Fall 2022. https://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/ant-mastermath.html

[6] OEIS, A000960. https://oeis.org/A000960