# O pewnym szczególnym punkcie czworokąta

Mateusz Wawrzyniak

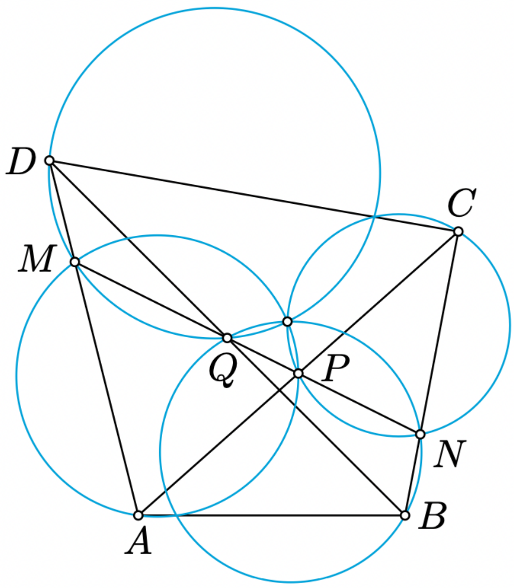

## Streszczenie

W pracy omówione zostały pewne własności szczególnego punktu czworokąta. Najwięcej uwagi poświęcono położeniu tego punktu względem okregów i prostych zdefiniowanych przez wierzchołki czworokąta zupełnego. Dzięki tym własnościom udało się udowodnić zestaw twierdzeń o czworokącie zupełnym.


## Wstęp

Inspiracją do napisania tej pracy było następujące zadania[1]:

Czworokąt $ABCD$ jest wypukły (rysunek 0). Punkty $P$ i $Q$ są środkami przekątnych $AC$ i $BD$ odpowiednio. Prosta $PQ$ przecina boki $BC$ i $DA$ w punktach $N$ i $M$ odpowiednio. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach $BNQ$, $CNP$, $DMQ$ i $AMP$ mają punkt wspólny.



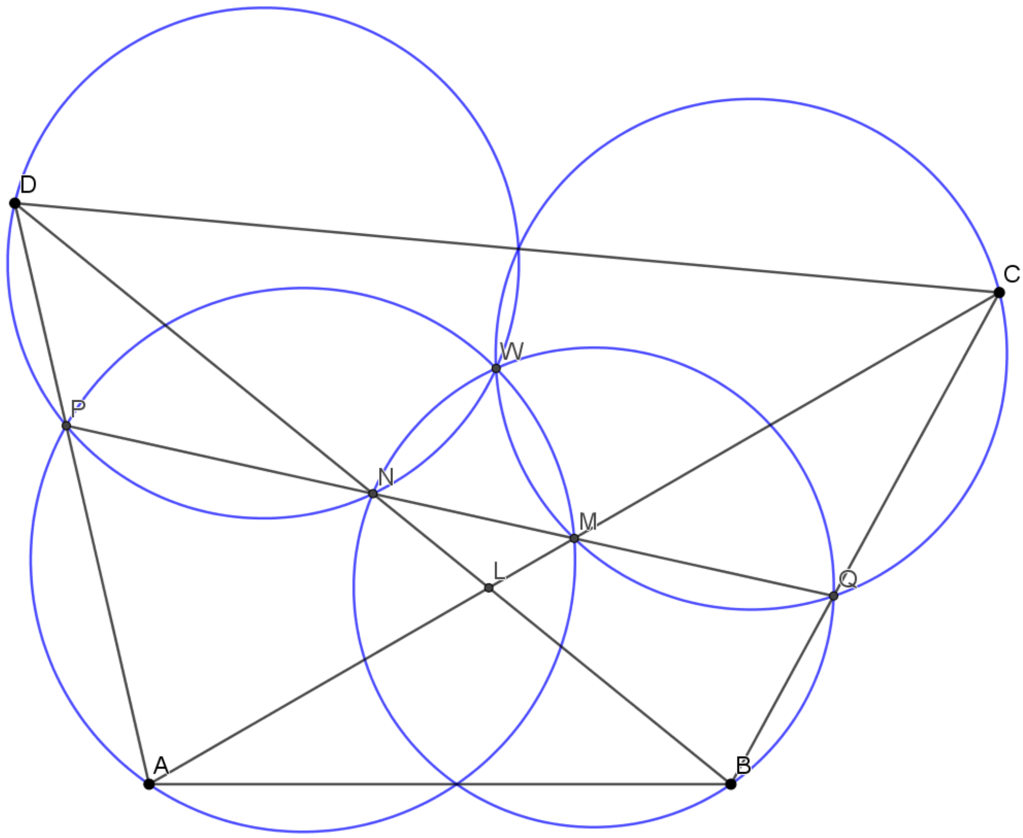

Rysunek 0.

[1] Zadanie pochodzi z publikacji „Zbiór zadań z geometrii” autorstwa Dominika Burka i Michała Woźnego, dostępnej pod adresem https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/main.pdf, (zadanie 13).

## Część 1. Definicja punktu *W*

Zacznijmy od dowodu powyższego zadania.

**Zadanie 1.**




Rysunek 1.

Dowód:
Niech $L$ będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$. Na początku udowodnimy, że zachodzi równość

$$DA/PA = BC/QC.$$

Użyjmy twierdzenia sinusów dla trójkąta $DPN$:

$$DP \,/\, \sin(\angle PND) = DN \,/\, \sin(\angle NPD).$$

Teraz użyjmy twierdzenia sinusów dla trójkąta $BQN$:

$$BN \,/\, \sin(\angle BQN) = BQ \,/\, \sin(\angle BNQ).$$

Wiemy, że $DN = NB$ oraz $\angle PND = \angle BNQ$, więc po podzieleniu tych równań stronami dostajemy

$$DP/BQ = \sin(\angle BQN) \,/\, \sin(\angle NPD).$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$CQ/AP = \sin(\angle APM) / \sin(\angle MQC).$$

Skoro $\sin(\angle APM) = \sin(\angle NDP)$ oraz $\sin(\angle MQC) = \sin(\angle BQN)$, to po przemnożeniu stronami dostaniemy oczekiwaną równość.

Niech $W$ będzie (jeśli to możliwe innym od $L$) punktem przecięcia $ALD$ i $BLC$ (rys. 2)[2]. Zachodzą wtedy równości $\angle WCA = \angle WBD$ oraz $\angle WAC = \angle WDB$, więc trójkąty $AWC$ i $DWB$ są podobne. Z podobieństwa spiralnego o środku w punkcie $W$ wynika, że również trójkąty $WCB$ i $WAD$ są podobne. Z tego wnioskujemy, że kąty $WAD$ i $WCB$ są równe oraz że zachodzi

$$BC/WC = DA/WA.$$

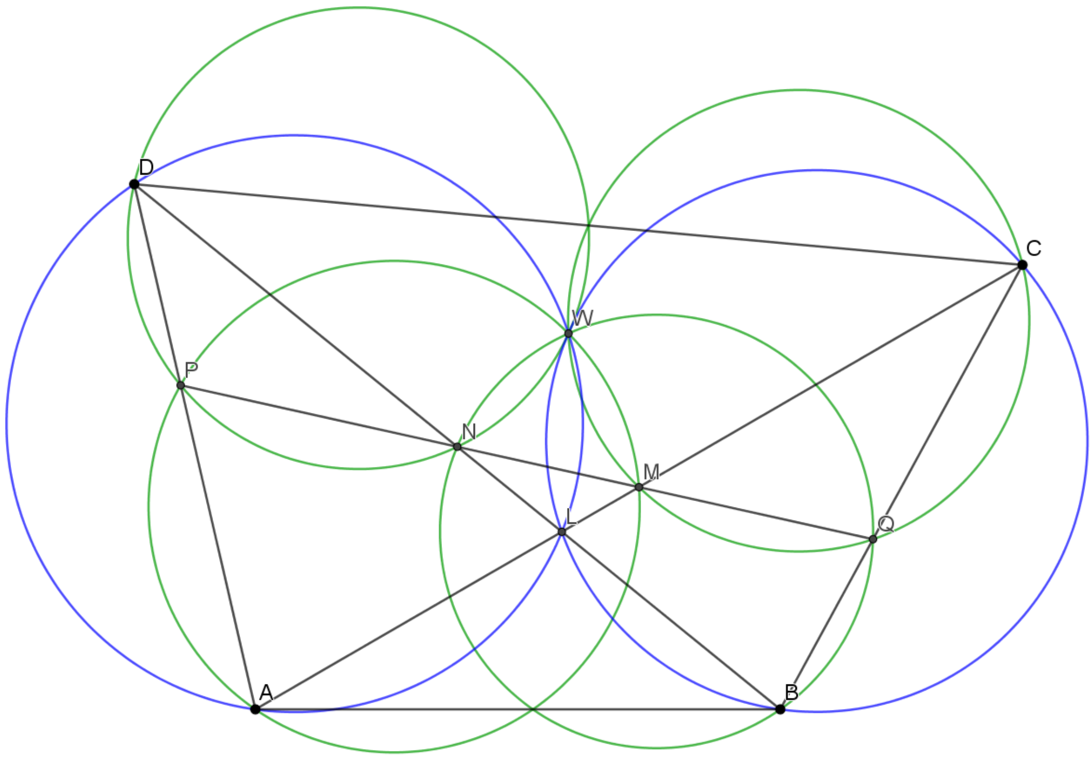
Jeżeli tę równość podzielmy stronami przez $BC/QC = DA/PA$, to dostaniemy

$$QC/WC = PA/WA,$$

co w zestawieniu z równością kątów $WAD$ i $WCB$ przekłada się na podobieństwo trójkątów $WCQ$ i $WAP$. Skoro te dwa trójkąty są podobne, to z podobieństwa spiralnego o środku w $W$ wynika, że trójkąty $AWC$ i $PWQ$ są podobne, co implikuje równości kątów

$$\angle PQW = \angle ACW = \angle DBW \text{ oraz } \angle QPW = \angle CAW = \angle BDW.$$

Z tego natomiast wynika, że $W$ leży na 4 okręgach z treści zadania 1.




Rysunek 2.

[2] Dla uproszczenia, do końca pracy przez okrąg $XYZ$ będziemy rozumieć okrąg opisany na trójkącie $XYZ$.

**Fakt 1.2**
*W* leży na okręgach *ALD* i *BLD.*

Dowód:

Z dowodu zadania 1 wprost wynika, że punkt *W* leży również na okręgach *ALD* i *BLD*.

## Część 2. Ciąg dalszy opisu punktu *W*

**Fakt 2.1**
Jeżeli punkt przecięcia prostych *AD* i *BC* nazwiemy *S,* to punkt *W* leży na okręgu *ACS* (rys. 3)[3].

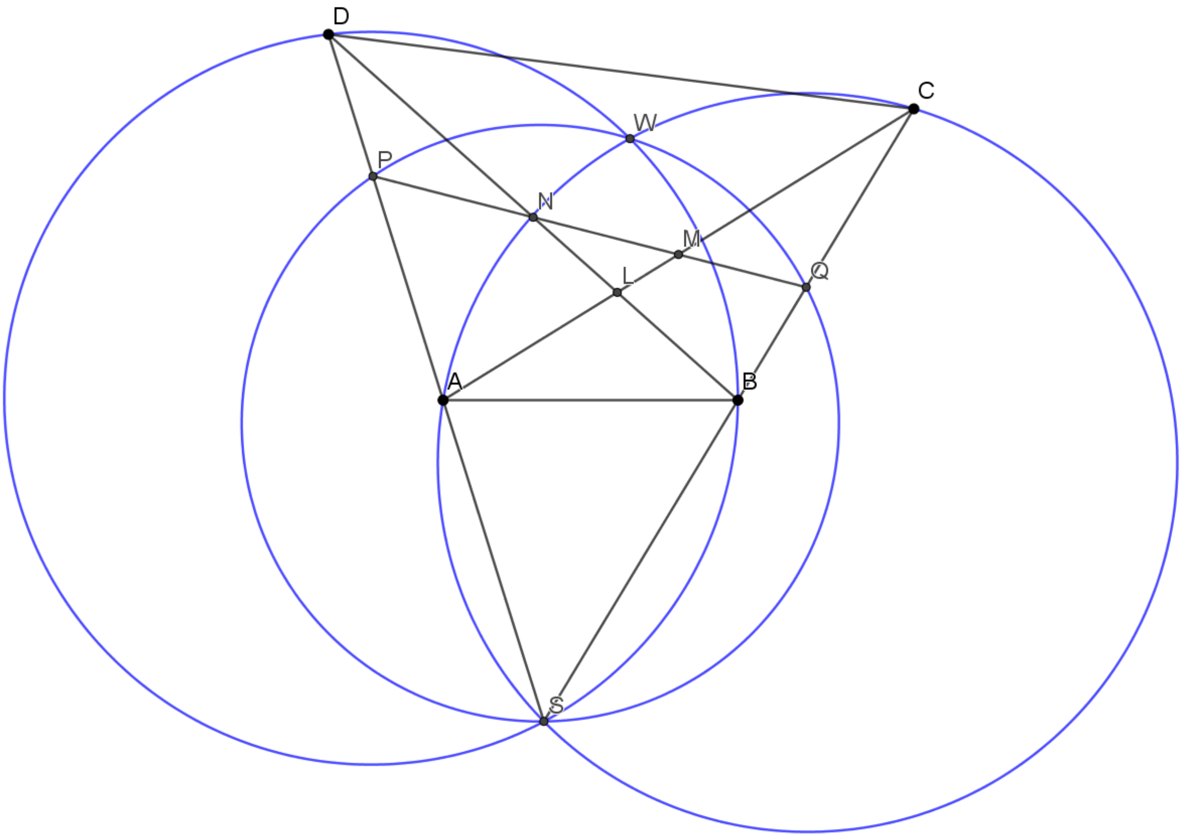
Dowód:
Skoro trójkąty *WAD* i *WCB* są podobne, to zachodzi

$$\angle WCS = 180 - \angle SAW$$

więc czworokąt *WASC* jest cykliczny[4].

---

[3] W całej pracy zakładamy, że proste rownoległe przecinają się w nieskończoności.
[4] W całej pracy wszystkie kąty są wyrażone w stopniach, więc będą one pomijane w zapisie.




Rysunek 3.

**Fakt 2.2**
Punkt *W* leży na okręgach *PQS* oraz *DBS* (rys. 3).

<u>Dowód:</u>
Skoro czworokąty *DSBW*, *PSQW* i *ASCW* mają ten sam kąt przy *S* oraz z podobieństwa trójkątów *DWB*, *PWQ*, *AWC* kąty *DWB*, *PWQ* i *AWC* są równe, to Fakt 2.2 jest równoważny Faktowi 2.1.

**Fakt 2.3**
Punkt *W* jest punktem Miquela dla czworokąta *ACBD*.

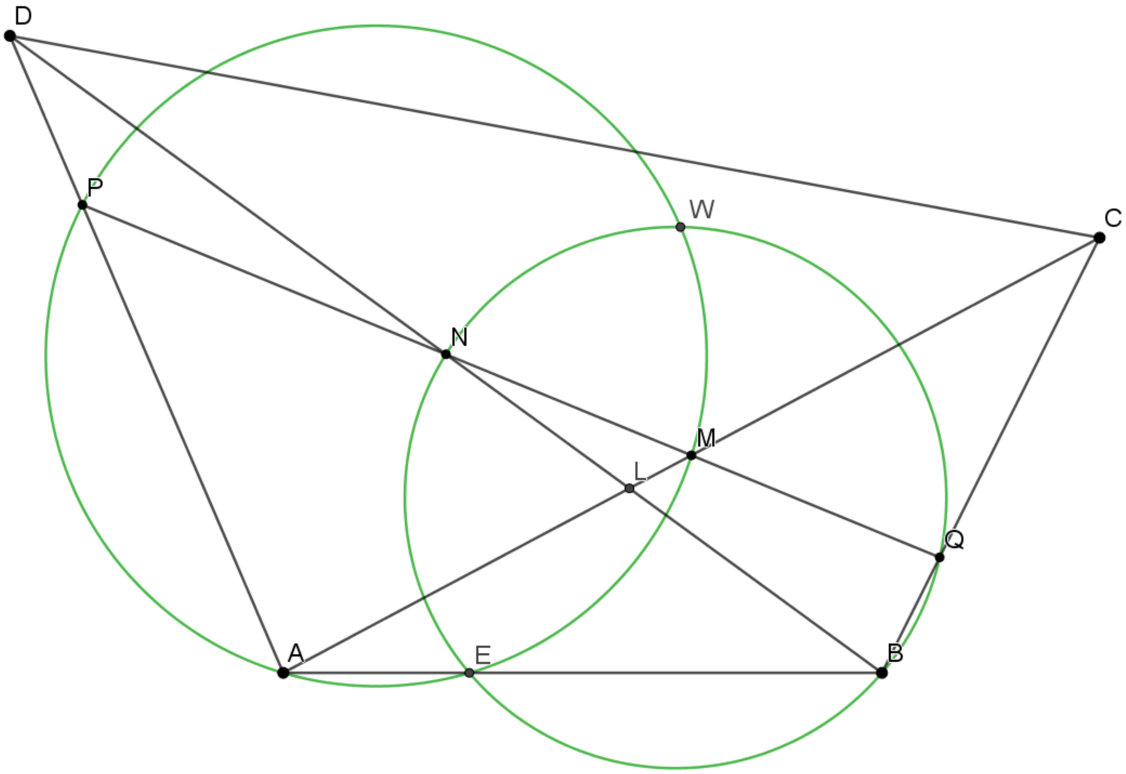
<u>Dowód:</u>
Skoro punkt *W* leży na okręgach *SBD*, *SCA*, *LBC* i *ALD*, to istotnie jest to punkt Miquela dla czworokąta *ACBD*.

**Uwaga 2.4**
Zauważmy, że jedyna zależność dotycząca *P* i *Q*, którą wykorzystujemy, to

$$\mathrm{DA}/\mathrm{PA} = \mathrm{BC}/\mathrm{QC}.$$

Zatem jeżeli na odcinkach $AD$ i $BC$ byłyby punkty $P'$ i $Q'$ takie, że $DA/P'A = BC/Q'C$, to wszystkie powyższe fakty dla $P'$ i $Q'$ zamiast $P$ i $Q$ będą prawdziwe.

**Fakt 2.5**
Okręgi $BQN$ i $APM$ przecinają się w punkcie $W$ i na prostej $AB$ (rys. 4).




Rysunek 4.

Dowód:
Niech punkt przecięcia okręgów $APM$ i $BQN$ (jeśli to możliwe inny niż $W$) nazywa się $E$, a punkt przecięcia okręgów $DPN$ i $CQM$ (jeśli to możliwe inny niż $W$) nazywa się $F$. Zauważmy, że

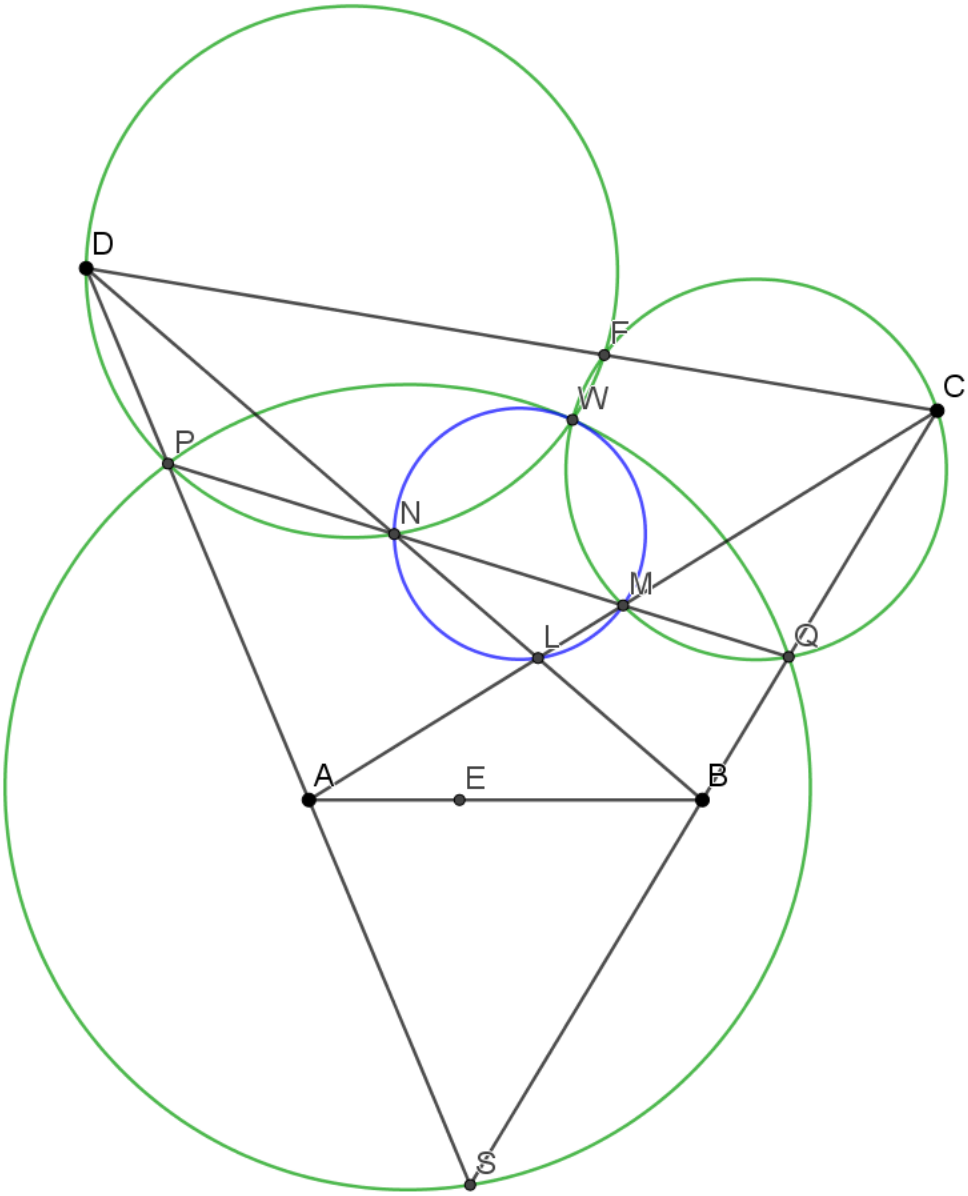
$$\angle AEW + \angle WEB = 180 - \angle WPA + 180 - \angle BQW = 180,$$

bo czworokąt $PSQW$ jest cykliczny.

**Fakt 2.6**
Okręgi $DPN$ i $CQM$ przecinają się w punkcie $W$ i na prostej $CD$ (rys. 4).

Dowód:
Analogicznie jak dla faktu 2.4.

**Fakt 2.7**
Punkt $W$ leży na okręgu $NLM$ (rys. 5).



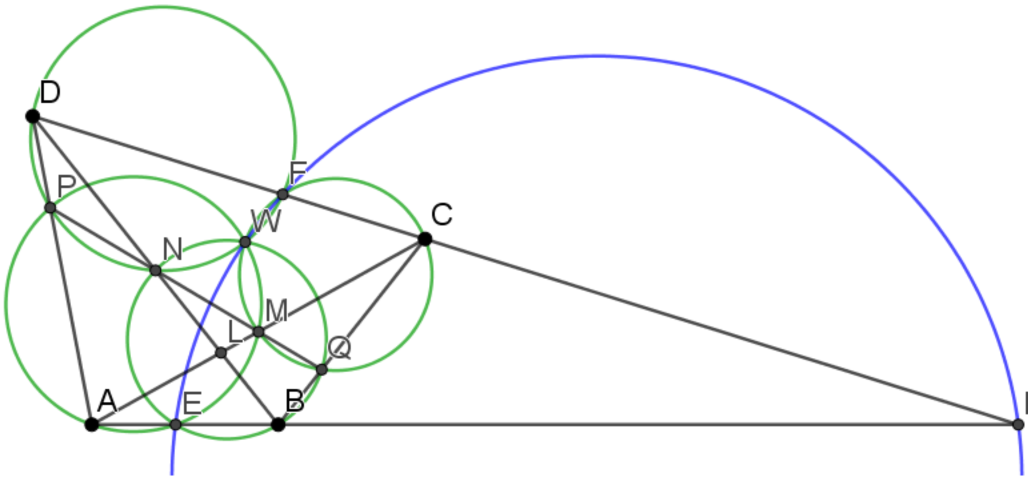

Rysunek 5.

Dowód:

$$\angle NWM = \angle PWQ - \angle PWN - \angle MWQ = (180 - \angle QSP) - \angle PDN - \angle MCQ =$$
$$= 180 - (\angle QSP + \angle PDN + \angle MCQ) = 180 - (360 - \angle NLM) = 180 - \angle MLN,$$
więc $N$, $L$, $M$ i $W$ leżą na jednym okręgu, który od teraz będziemy nazywać $\omega$.

Uwaga: w wyrażeniu „180 - (360 - $\angle NLM$)" kąt $\angle NLM$ jest miarą kąta $NLM$ zawierającego punkt $S$.

**Fakt 2.8**
Jeżeli punkt przecięcia prostych $AB$ i $CD$ nazwiemy $R$, to punkt $W$ leży na okręgu $ERF$ (rys. 6). Dla przypomnienia E i F to odpowiednio przecięcia MQC, DPN i NQB, MPA.




Rysunek 6.

Dowód:
Zauważmy, że $\angle BQW + \angle WQC = 180$, ale

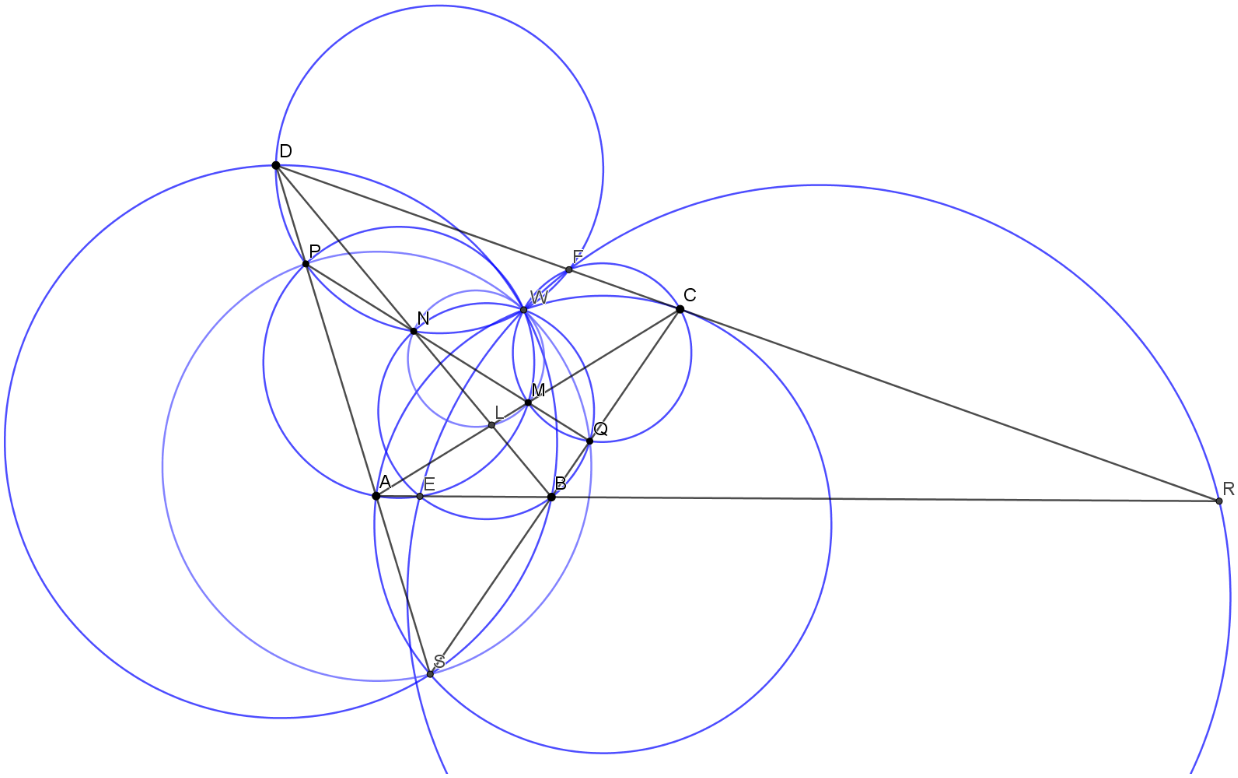
$$\angle WEB = 180 - \angle BQW \text{ oraz } \angle CFW = 180 - \angle WQC,$$

więc $\angle WEB + \angle CFW = 180$.

W ten sposób wykazaliśmy główny rezultat tej części pracy zawarty w poniższym twierdzeniu.

## Twierdzenie 1.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty $N$ i $M$ są środkami odpowiednio $BD$ i $AC$. $L$, $S$, $P$ i $Q$ są przecięciami odpowiednio $AC$ i $BD$, $AD$ i $BC$, $NM$ i $AD$, $BC$ i $NM$. Wtedy istnieje punkt wspólny okręgów $AMP$, $BQN$, $QMC$, $DPN$, $NML$, $DBS$, $ACS$, $SPQ$ (rys. 7).

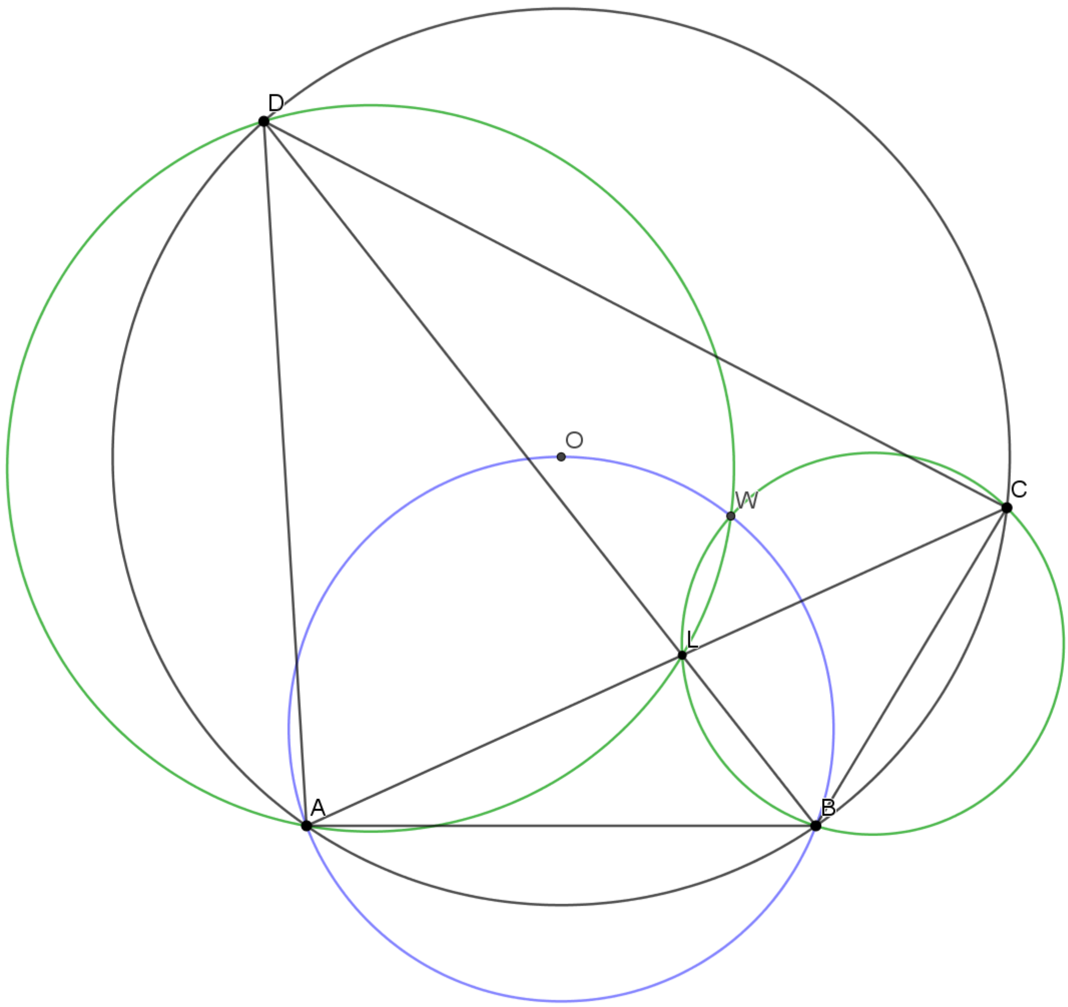



Rysunek 7.

## Część 3. Czworokąt cykliczny

W części 3 zakładamy, że istnieje okrąg Ω o środku w *O* przechodzący przez punkty *A*, *B*, *C* i *D*.

**Fakt 3.1**
Punkt *W* leży na okręgu *OAB*, gdzie *O* jest środkiem Ω (rys. 8).




Rysunek 8.

Dowód:

Wiemy, że

$$\angle AOB = \angle ADB + \angle ACB = \angle ADL + \angle LCB = \angle AWL + \angle LWB = \angle AWB$$

**Fakt 3.2**

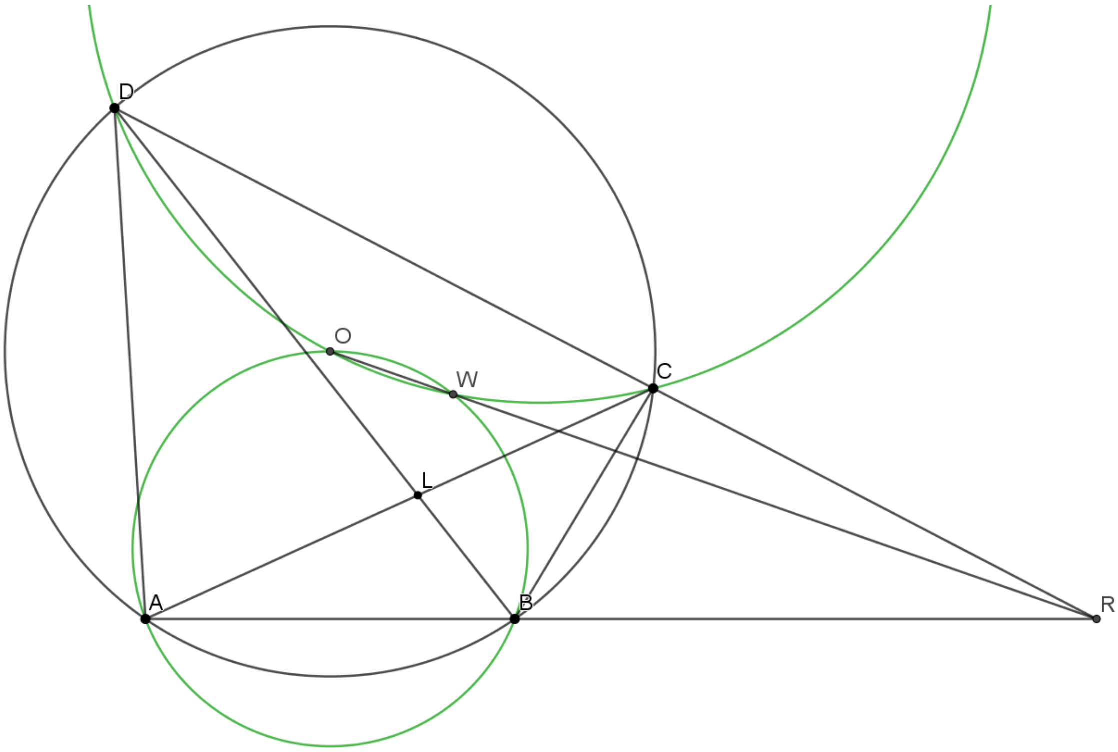
Punkt *W* leży na okręgu *COD*.

Dowód:

Analogicznie jak dla faktu 3.1.

**Fakt 3.3**

Punkt *W* jest punktem inwersyjnym do R względem Ω.



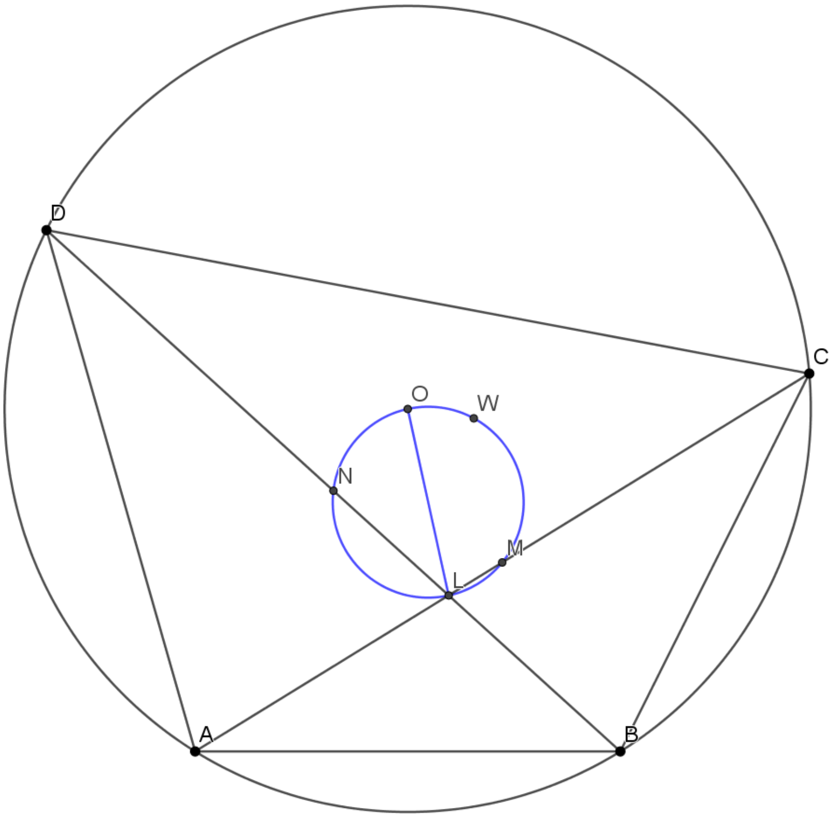

Rysunek 9.

Dowód:
Po inwersji względem Ω punkt *R* przejdzie na część wspólną okręgów *COD* i *AOB* (jeśli to możliwe różnych od *O*), czyli na *W*.

**Fakt 3.4**
Punkty *O*, *W* i *R* leżą w tej kolejności na jednej prostej.

Dowód:
To wynika wprost z Faktu 3.3.

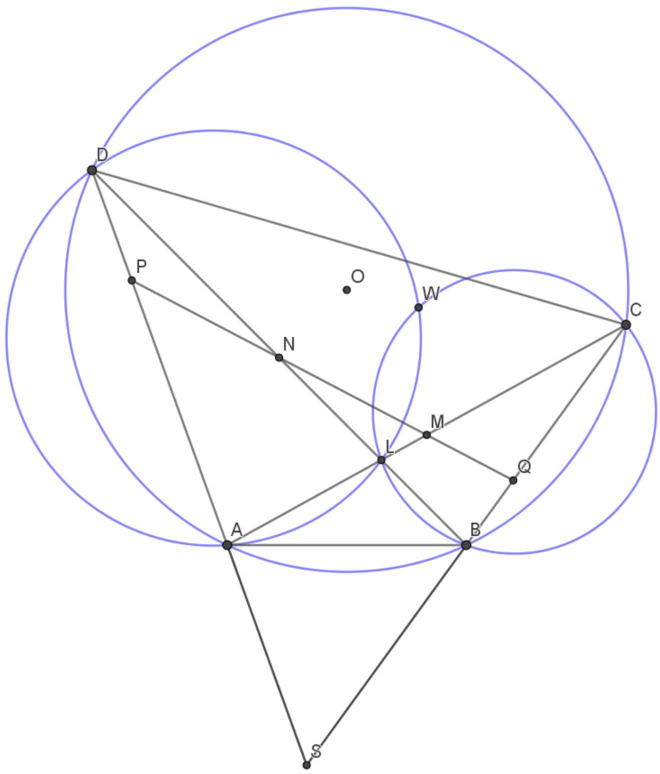
**Fakt 3.5**
Punkt *O* leży na ω. Ponadto *OL* jest średnicą tego okręgu (rys. 10).




Rysunek 10.

Dowód:
Wiemy, że $\angle LNO = \angle OML = 90$, więc $OL$ jest średnicą $\omega$. Z tego wprost wynika Fakt 3.5.

**Fakt 3.6**
Punkty $W$, $L$ i $S$ leżą na jednej prostej (rys.11).

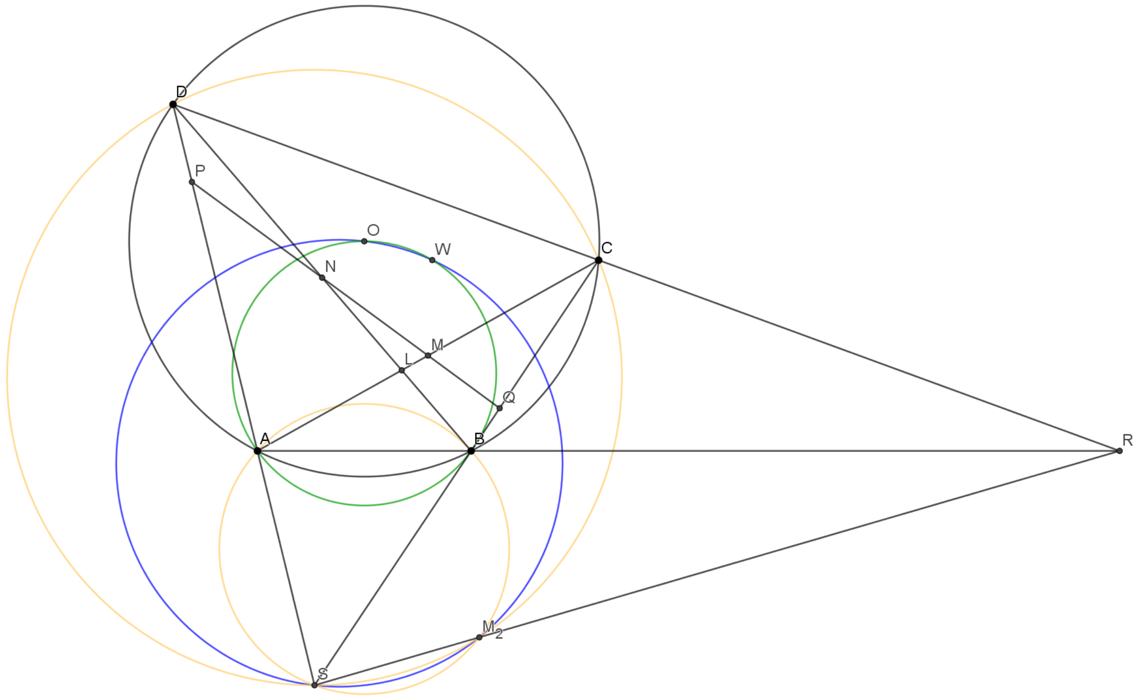



Rysunek 11.

Dowód:
Skoro czworokąty *ABCD*, *LBCW* i *LWDA* są cykliczne, to *S* jest ich środkiem potęgowym[5], więc *S* leży na *WL*.

**Fakt 3.7**
Punkt Miquela czworokąta *ABCD* leży na okręgu *OWS* (rys. 12).

[5] Potrzebne informacje o punkcie Miquela, inwersji i osiach potęgowych znajdziemy w książce „Matematyka Olimpijska: Planimetria" Beaty Bogdańskiej i Adama Neugebauera, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (strony 66, 158, 159) .




Rysunek 12.

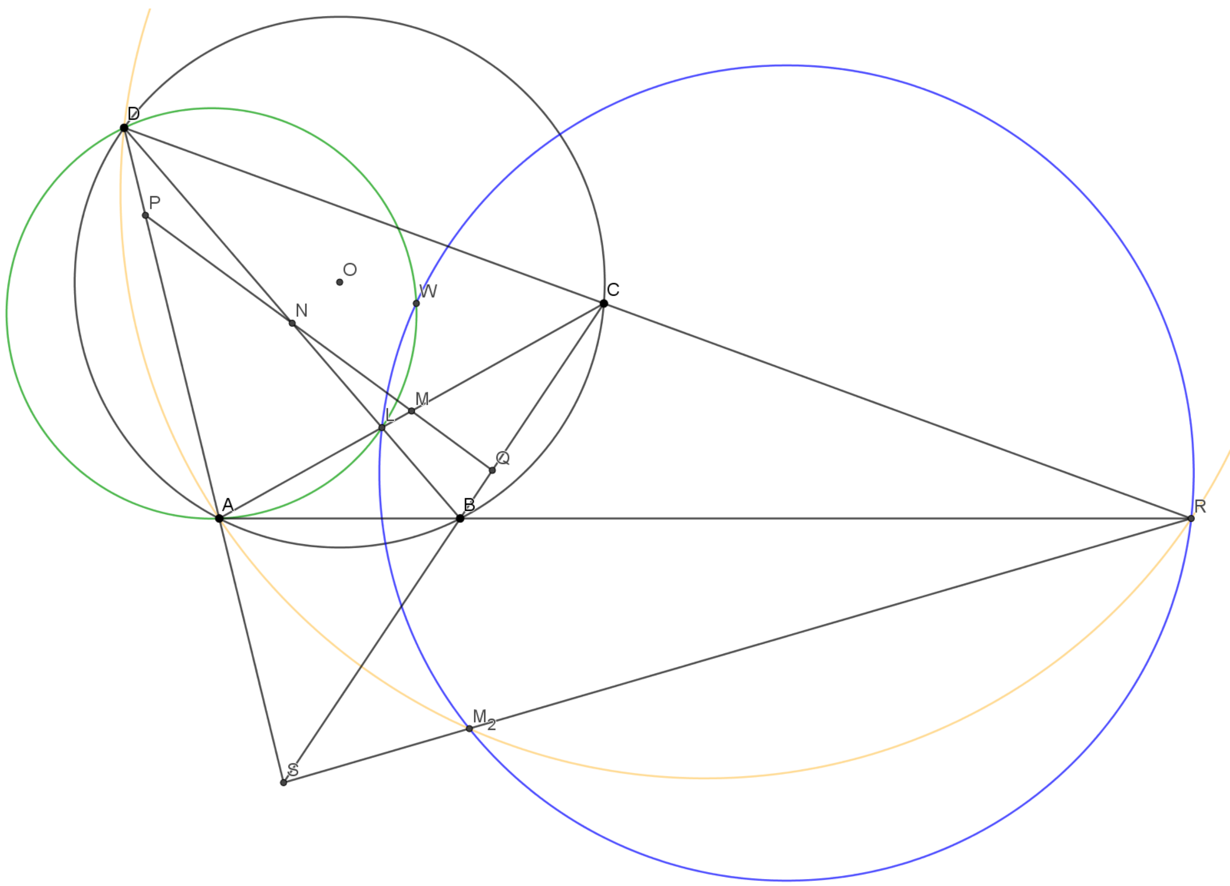
Dowód:
Niech $M_2$ będzie punktem Miquela definiowanym przez pomarańczowe okręgi (rys. 12). Jeżeli $ABCD$ jest cykliczny, to $M_2$ leży na $RS$[6]. Skoro $ABM_2S$ jest cykliczny, to:

$$RS \cdot RM_2 = RA \cdot RB.$$

Jednak $RA \cdot RB = RW \cdot RO$, skoro $ABWO$ jest cykliczny. Skoro $RS \cdot RM_2 = RW \cdot RO$, to $OWM_2S$ jest cykliczny.

**Fakt 3.8**
Punkty $W$, $L$, $M_2$ i $R$ leżą na jednym okręgu (rys. 13).

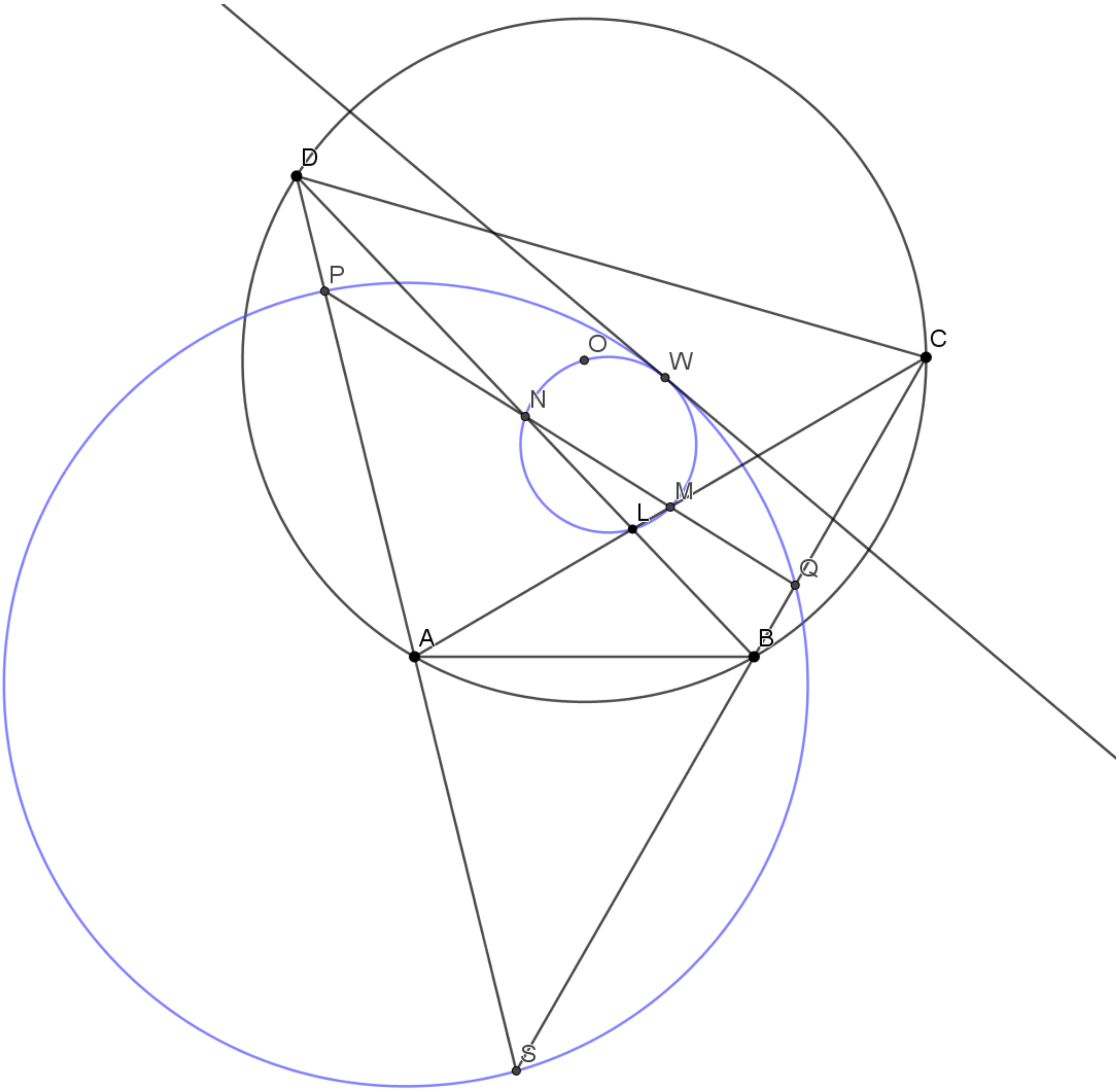
[6] Znając definicję punktu Miquela, fakt ten można wykazać w trywialny sposób.




Rysunek 13.

Dowód:
Z definicji punkt Miquela leży na okręgu $DAR$, więc $SM_2 \cdot SR = SA \cdot SD$. Z kolei punkty $D$, $A$, $W$ i $L$ leżą na jednym okręgu, więc $SA \cdot SD = SL \cdot SW$, co kończy dowód.

**Fakt 3.9**
Okręgi $SPQ$ i $\omega$ są styczne w $W$.




Rysunek 14.

Dowód:
Z faktu 3.6 wiemy, że W, L, S sa współliniowe, więc fakt 3.9 jest równoważny z równością $\angle LNW$ i $\angle BPW$, która wynika z cykliczności *DPNW*.

**Fakt 3.10**
Kąt *SWR* jest prosty.

Dowód:
Wiemy, że *S* leży na biegunowej punktu *R* względem okręgu Ω. Z Faktu 3.3 wynika, że *W* też leży na tej biegunowej oraz jest przecięciem *OR* z biegunową, co implikuje fakt 3.10.

**Fakt 3.11**
*SW* to biegunowa punktu *R* względem Ω.

Dowód:
Wiemy, że $S$ leży na tej biegunowej oraz $W$ jest inwersją $R$ względem $\Omega$, więc jeżeli $S$ i $W$ nie są tym samym punktem, to biegunowa $R$ jest prostą $SW$.
Poniższe dwa fakty i dwa twierdzenia dowodzimy wspólnie.

**Fakt 3.12**
Okręgi $SPQ$ i $SNM$ są styczne do prostej $RS$.

Niech $K$ będzie środkiem odcinka $RS$.

**Fakt 3.13**
$K$ leży na wspólnej stycznej okręgów $SPQ$ i $\omega$.

## Twierdzenie 3.1

$K$ jest środkiem potęgowym okręgów $\omega$, $SNM$, $RNM$, $SPQ$ i $ABCD$.

## Twierdzenie 3.2

$$KM \cdot KN = SK^2$$

Dowód faktów 3.12, 3.13 i twierdzeń 3.1, 3.2:
Niech $Z$ będzie punktem powstałym po inwersji $L$ względem $\Omega$. Wiemy, że $SR$ jest biegunową $L$[7], więc $LZ$ jest prostopadłe do $RS$. Oznaczmy przez $R$ promień $\Omega$, a przez $r$ promień $\omega$. Niech $O_2$ będzie środkiem okręgu $NML$. Z Faktu 3.5 wynika, że $O_2$ jest środkiem $OL$, a ponadto leży na prostej $LZ$. Z definicji inwersji wiemy, że:

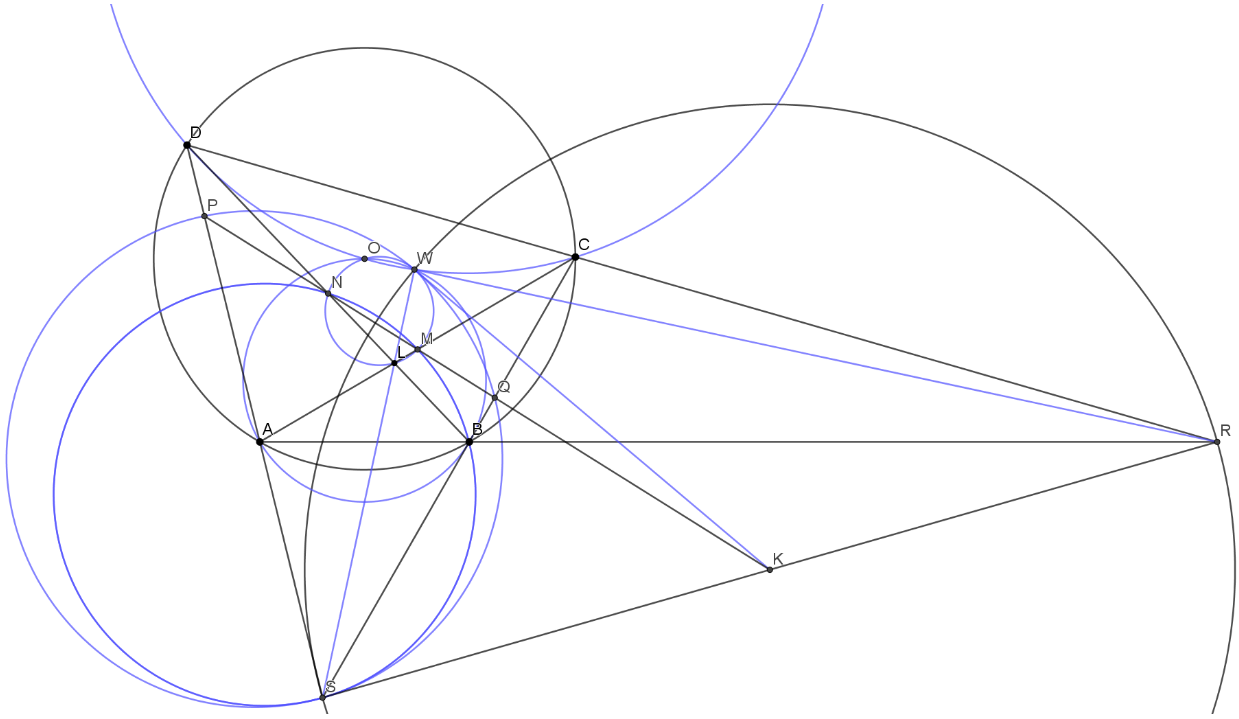
$$OL \cdot OZ = R^2$$
$$R^2 = 2r \cdot (LZ + 2r)$$
$$R^2 + LZ^2 + 2r \cdot LZ = 4r \cdot LZ + 4r^2 + LZ^2$$
$$LZ \cdot (2r + LZ) = (LZ + 2r)^2 - R^2$$

Zatem potęgi punktu $Z$ względem $\Omega$ i $NML$ są równe. Oznacza to, że $RS$ jest osią potągową obu tych okręgów.

[7] Wszystkie fakty dotyczące biegunowych dostąpne są w pracy Dominika Burka zatytułowanej *Dwustosunek i biegunowe*.

Z Faktu 3.10 wynika, że $\angle KWR = \angle KRW = \angle SLZ = \angle O_2LW = \angle O_2WL$,
więc $90 = \angle SWR = \angle O_2WK$, co implikuje Fakt 3.13.
Oznacza to, że punkt $K$ leży na osi potęgowej okręgów $SPQ$ i $NML$, więc jest środkiem potęgowym okręgów $SPQ$, $NML$ i $ABCD$ (analogicznie udowodnić można, że także okręgu $RNM$). Oznacza to, że $KN \cdot KM = KW^2$, ale $KW = KS$ (wynika to z Faktu 3.10), a, więc okrąg $SNM$ jest styczny do prostej $RS$.

Skoro $K$ ma potęgę punktu względem okręgu $SNM$ równą $KM \cdot KN$ oraz
$KM \cdot KN = KS^2$, to ten okrąg musi być styczny do $SK$ w $S$.




Rysunek 15.

## Część 4. Współokręgowość

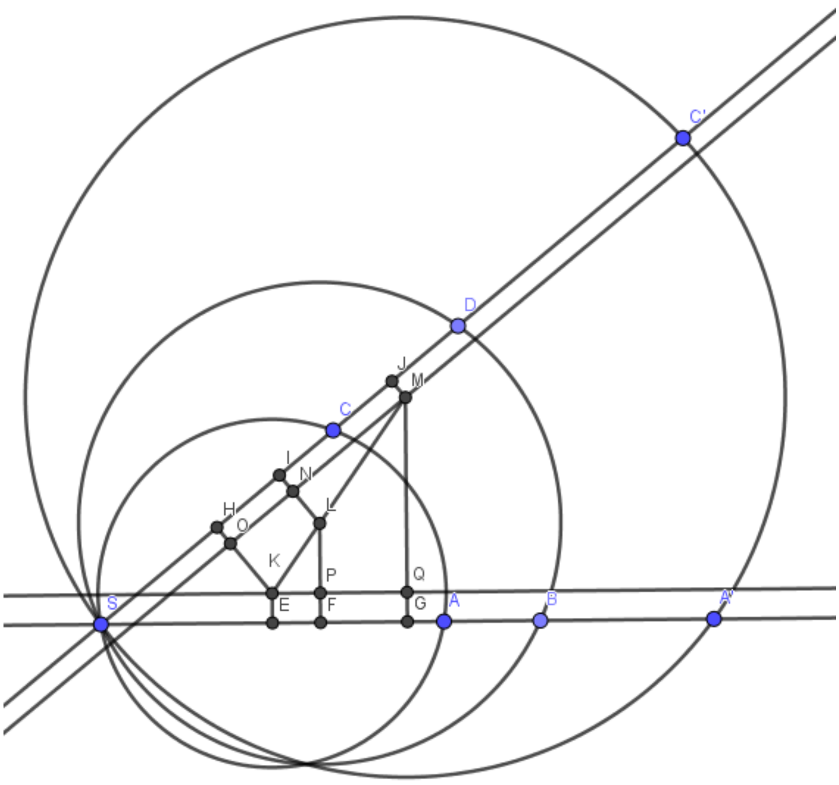
Odejdźmy na chwilę od punktu $W$.

### Twierdzenie 4.1

Niech $S$ będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie. Niech $A$, $B$, $C$, $D$ będą takimi punktami, że trójki $A$, $B$, $S$ i $C$, $D$, $S$ są współliniowe oraz S, A i B nie leżą na jednej prostej. Dana jest niezerowa liczba rzeczywista $k$. Zróbmy jednokładność o skali $k$ o środku w $B$. Punkt $A$ przejdzie w tej jednokładności na punkt $A'$. Analogicznie zróbmy jednokładność o skali $l$ i o środku w $D$. Niech punkt $C$ przejdzie w tej jednokładności na $C'$, jeżeli te punkty z wyjątkiem $S$ (dla np. $S = A$ uznajemy okrąg $SAC$ jako okrąg styczny do $AS$ przechodzący przez $C$) są parami różne to, okręgi $SAC$, $SBD$, $SA'C'$ są współpękowe wtedy i tylko wtedy, kiedy $k = l$.

<u>Dowód:</u>

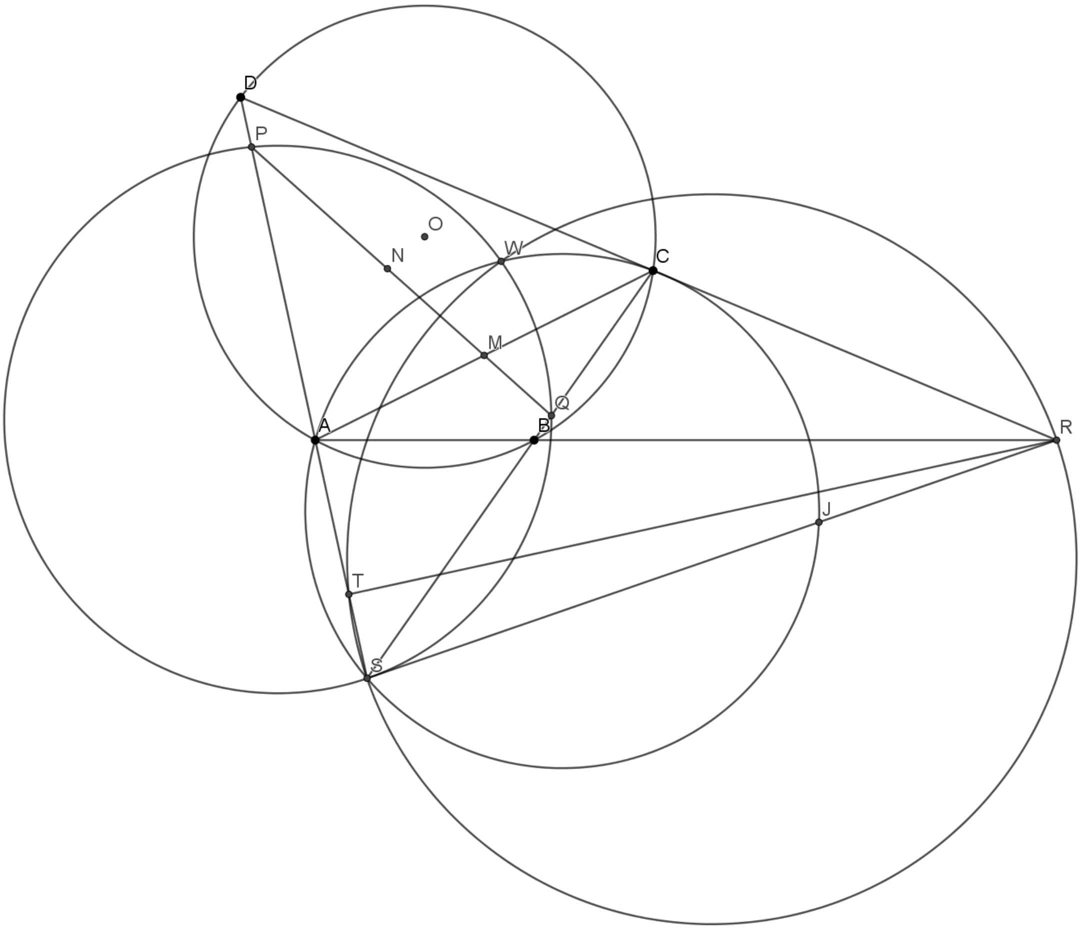
Załóżmy, że $k = l$. Niech $H, I, J, E, F, G$ będą środkami odpowiednio odcinków $SC, SD, SC', SA, SB, SA'$. Niech $K, L, M$ będą środkami odpowiednio okręgów opisanych na trójkątach $SAC$, $SBD$, $SA'C'$. Niech $P$ i $Q$ będą odpowiednio przecięciami prostych $LF$ i $MG$ z prostą przechodzącą przez $K$ równoległą do $SA$. Niech $N$ i $O$ będą odpowiednio przecięciami prostych $IL$ i $HK$ z prostą równoległą do $SC$, przechodzącą przez $M$. Zauważmy, że $KEFP$, $KEGQ$, $OHIN$, $OHJM$ są prostokątami. Niech $X$ będzie punktem przecięcia prostej PF z prostą $KM$. Wtedy z twierdzenia Talesa wynika, że
$XM/XK = PQ/KP = FG/EF = (SG\text{-}FG)/(SF\text{-}SE) = (SA'\text{-}SB)/(SB\text{-}SA) = A'B/BA = k$.
Analogicznie punkt $Y$ będący przecięciem prostej $IN$ z prostą $KM$ spełnia warunek $YM/YK = k$, więc $Y = X$, czyli $IN$ i $PF$ przecinają się na $KM$, czyli wszystkie 3 środki tych okręgów leżą na jednej prostej. Odbijmy $S$ symetrycznie względem tej prostej. Ten punkt będzie leżał na wszystkich tych 3 okręgach, więc te okręgi są współosiowe.
Załóżmy, że okręgi $SAC$, $SBD$, $SA'C'$ są współpękowe, wtedy niech $C''$ będzie punktem powstałym przez przekształcenie $C$ jednokładnością o środku w $D$ o skali $K$. Udowodniliśmy, że okręgi $SAC$, $SBD$, $SA'C''$ są współpękowe. Niech $X$ będzie punktem wspólnym $SAC$, $SBD$, $SA'C'$, wtedy $X$ jest też punktem wspólnym okręgów, $SAC$, $SBD$, $SA'C''$, czyli okręgi $SA'C$ i $SA'C''$ są tym samym okręgiem, więc $C'' = A$, co daje $l = k$.




Rysunek 16.

**Fakt 4.2**
Wróćmy do konfiguracji z części 3. Ponadto, niech $J$ będzie (jeśli to możliwe) różnym od $S$ punktem przecięcia okręgu $ACS$ z prostą $SR$, a $T$ będzie rzutem prostokątnym $R$ na prostą $DS$. Wtedy zachodzi równość

$$RJ \cdot JS = TA \cdot AP.$$



Rysunek 17.

Dowód:
Zastosujmy twierdzenie 4.1 dla trójek $R$, $J$, $S$ i T, $A$, $P$. Wiemy, że okręgi z tego twierdzenia są współpękowe, bo wszystkie przechodzą przez $S$ i $W$. Udowodnijmy, że $S$ jest różne od $W$.
Fakt 3.4 mówi, że $O$, $W$ i $R$ leżą na jednej prostej, więc jeśli $S = W$ to $S$, $R$, $O$ leżą na jednej prostej, co jest sprzeczne z wypukłością $ABCD$. Teza teraz wynika wprost z twierdzenia 4.1.

## Podsumowanie

W pracy udało się pokazać ciekawe własności czworokąta zupełnego oraz opisać punkt *W*, który jako część wspólna wielu okręgów może być przydatny do udowadniania licznych stosunków z twierdzenia 4.1.

## Referencje:

1. Dominik Burek, Michał Woźny, „Zbiór zadań z geometrii", https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/main.pdf.
2. Beata Bogdańska, Adam Neugebauer, „Matematyka Olimpijska: Planimetria", Wydawnictwo Szkolne OMEGA.