

XIV Liceum Ogólnokształcące im.
Stanisława Staszica w Warszawie

Anna Koziara

O PEWNYM ZASTOSOWANIU PUNKTÓW IZOGONALNIE
SPRZEŻONYCH W CZWOROŚCIANIE

**Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego**

Opiekun pracy
dr Dominik Burek

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Punkty izogonalnie sprzężone w trójkącie	3
2.1	Definicja	3
2.2	Własności punktów izogonalnie sprzężonych	5
2.3	Prosta Simsona	8
3	Punkty izogonalne sprzężone w czworoboku	9
3.1	Definicje i własności	9
3.2	Płaszczyzna Simsona	14
4	Izogonalne sprzężenie w czworoboku równobocznym	17
	Bibliografia	21

Rozdział 1

Wprowadzenie

Niniejsza praca zawiera pełne wprowadzenie do prostych izogonalnych oraz punktów izogonalnie sprzężonych w trójkącie wraz z ich trójwymiarowymi odpowiednikami. Jako zastosowanie udowodnimy pewną zaskakującą własność czworościanów równościennych.

W pierwszym rozdziale wprowadzimy niezbędne definicje, przedstawimy znane przykłady oraz najważniejsze własności, które będą kluczowe w dalszych rozważaniach. Następnie wskazujemy związek wprowadzonych narzędzi z istnieniem prostej Simsona punktu względem trójkąta.

Rozdział drugi dotyczy trójwymiarowych analogonów własności wymienionych w rozdziale pierwszym. W szczególności wprowadzimy definicje płaszczyzn i prostych izogonalnych względem odpowiednio kątów dwuściennych i trójściennych czworościanu. Następnie omówimy definicję punktów izogonalnie sprzężonych w czworościanie. Wreszcie zdefiniujemy płaszczyznę Simsona punktów względem czworościanu w sposób analogiczny jak dla trójkątów i podamy kryterium jej istnienia, które jest trójwymiarowym odpowiednikiem kryterium dla istnienia prostej Simsona punktu względem trójkąta. Materiał zawarty w tym rozdziale stanowi część stereometrii, która dotychczas nie posiadała źródła w języku polskim.

Rozdział trzeci zawiera oryginalne i główne wyniki pracy. W szczególności pokazemy, że dla żadnego punktu na sferze opisanej na czworościanie równościennym rzuty prostokątne na ściany tego czworościanu nie leżą na jednej płaszczyźnie tzn. nie istnieje płaszczyzna Simsona żadnego punktu sfery opisanej na czworościanie względem tego czworościanu. Oznacza to, że klasyczne twierdzenie Simsona mówiące o tym, że dowolny punkt okręgu opisanego na trójkącie posiada prostą Simsona względem trójkąta nie przenosi się na przypadek trójwymiarowy, co gorsza nawet dla żadnego punktu sfery opisanej na czworościanie równościennym.

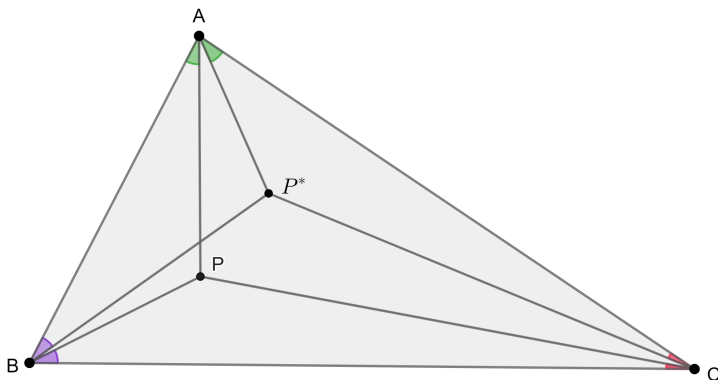
Rozdział 2

Punkty izogonalnie sprzężone w trójkącie

W tym rozdziale wprowadzimy definicję punktów izogonalnie sprzężonych w trójkącie, a także udowodnimy ich podstawowe własności niezbędne do dalszych rozważań. Pełne wprowadzenie do tematu można znaleźć w książce [2] W. Pompe „Wokół Obrotów”.

2.1 Definicja

Twierdzenie 2.1.1. *Punkt P leży w płaszczyźnie trójkąta ABC . Wtedy proste symetryczne do AP , BP , CP względem dwusiecznych kątów odpowiednio BAC , CBA i ACB przecinają się w jednym punkcie.*



Rysunek 2.1: Punkty izogonalnie sprzężone w trójkącie.

Dowód. Punkty A_1 , B_1 , C_1 są punktami przecięcia prostych symetrycznych do AP , BP , CP względem dwusiecznych kątów $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle BCA$ z odpowiednio

bokami BC , AC , AB .

Korzystając z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy dostajemy:

$$\frac{\sin \sphericalangle ABP}{\sin \sphericalangle CBP} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BCP}{\sin \sphericalangle ACP} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CAP}{\sin \sphericalangle BAP} = 1.$$

Skoro $\sphericalangle ABP = \sphericalangle B_1BC$, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle C_1CA$, $\sphericalangle CAP = \sphericalangle A_1AB$, to również:

$$\frac{\sin \sphericalangle B_1BC}{\sin \sphericalangle ABB_1} \cdot \frac{\sin \sphericalangle C_1CA}{\sin \sphericalangle BCC_1} \cdot \frac{\sin \sphericalangle A_1AB}{\sin \sphericalangle CAA_1} = 1.$$

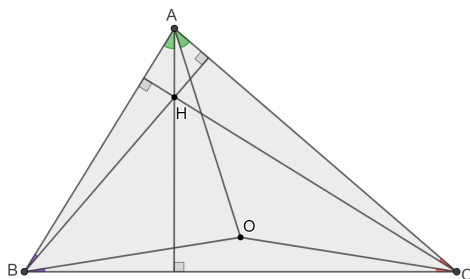
Na podstawie odwrotnego twierdzenia do twierdzenia Cevy dostajemy, że proste AA_1, BB_1, CC_1 są współpękowe. \square

Definicja 2.1.2. Punkt przecięcia prostych symetrycznych do AP, BP, CP względem dwusiecznych kątów odpowiednio BAC, CBA i ACB nazywamy punktem *izogonalnie sprzężonym* do P względem trójkąta ABC . Oznaczamy go jako P^* .

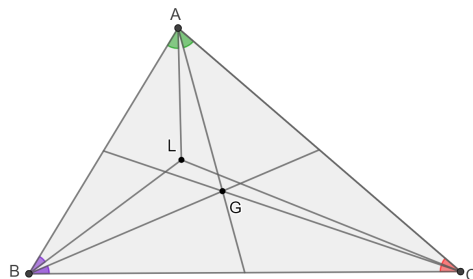
Wniosek 2.1.3. *Istnieje dokładnie jeden punkt izogonalnie sprzężony do punktu P względem trójkąta ABC .*

Wniosek 2.1.4. *Punktem izogonalnie sprzężonym do punktu P^* względem trójkąta ABC jest P .*

Środki okręgów dopisanych i okręgu wpisanego w trójkąt to jedyne punkty, które są izogonalnie sprzężone do siebie względem tego trójkąta. Klasycznymi przykładami innych par punktów izogonalnie sprzężonych są:



Rysunek 2.2: Środek okręgu opisanego i ortocentrum.

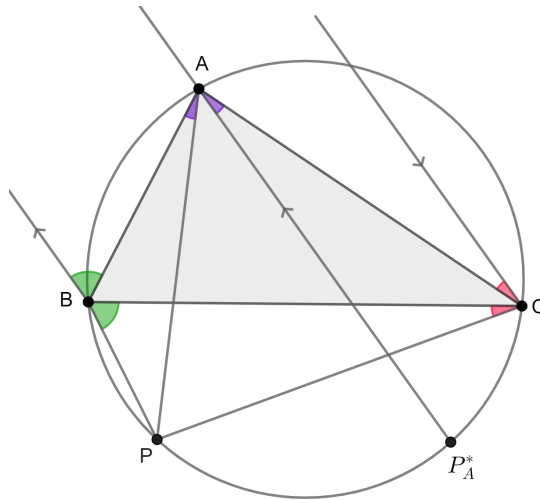


Rysunek 2.3: Środek ciężkości i punkt przecięcia symedian.

Twierdzenie 2.1.5. *Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P leżący na jego okręgu opisanym. Wówczas punktem izogonalnie sprzężonym do P względem trójkąta ABC jest punkt w nieskończoności.*

Dowód. Bez straty ogólności założmy, że punkt P leży na krótszym łuku BC . Niech punkt P_A^* to punkt przecięcia prostej AP^* z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Skoro $\sphericalangle ABP^* = \sphericalangle PBC$, $\sphericalangle BAP_A^* = \sphericalangle PAC$, to otrzymujemy

$$\sphericalangle ABP^* = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle BAP_A^*.$$



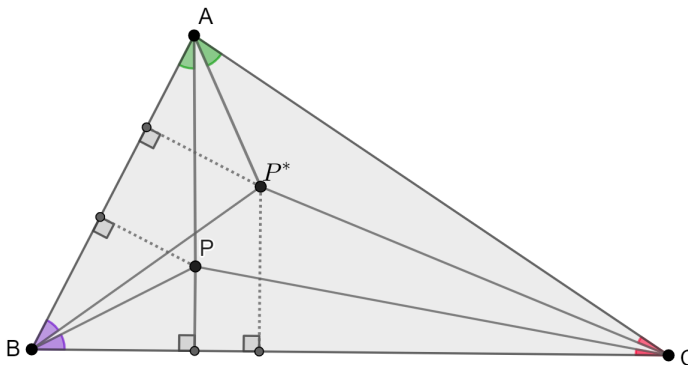
Rysunek 2.4: Punkt izogonalnie sprzężony P^* w nieskończoności.

Oznacza to, że proste P^*A , P^*B są równoległe. Analogicznie pokazujemy, że prosta P^*C jest równoległa do P^*A . Wprost otrzymujemy, więc że punkt P^* jest punktem w nieskończoności. \square

2.2 Własności punktów izogonalnie sprzężonych

W tym podrozdziale wprowadzimy kluczowe lematy i fakty dla dalszych rozważań.

Lemat 2.2.1. *Dany jest trójkąt ABC i punkt P . Odległości dwóch punktów P , P^* izogonalnie sprzężonych względem trójkąta ABC od prostych zawierających boki AB, BC, CA są odwrotnie proporcjonalne.*



Rysunek 2.5: Rzuty punktów P , P^* na boki trójkąta ABC .

Dowód. Punkty P_C, P_A, P_C^*, P_A^* to rzuty prostokątne odpowiednio punktów P, P^* na proste zawierające boki AB, BC . Na podstawie równości $\sphericalangle PBC = \sphericalangle ABP^*$ dostajemy:

$$\frac{PP_C}{BP} = \sin \sphericalangle ABP, \quad \frac{PP_A}{BP} = \sin \sphericalangle CBP},$$

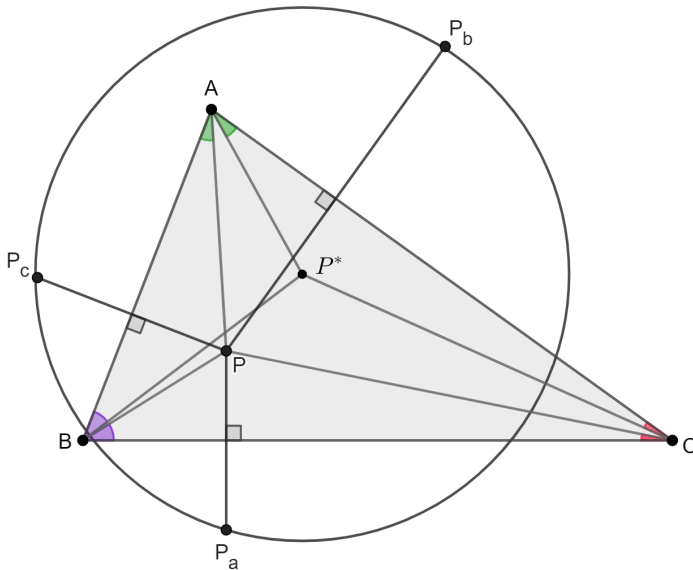
$$\frac{P^*P_C^*}{BP^*} = \sin \sphericalangle ABP^*, \quad \frac{P^*P_A^*}{BP^*} = \sin \sphericalangle P_A^*BP^*.$$

Z tego wynika:

$$\frac{P^*P_C^*}{P^*P_A^*} = \frac{\sin \sphericalangle ABP^*}{\sin \sphericalangle P_A^*BP^*} = \frac{\sin \sphericalangle CBP}{\sin \sphericalangle ABP} = \frac{PP_A}{PP_C} = \left(\frac{PP_C}{PP_A}\right)^{-1}.$$

□

Lemat 2.2.2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Niech P_a, P_b, P_c będą obrazami punktu P w symetrii względem prostych odpowiednio BC, CA, AB . Wtedy środkiem okręgu opisanego na trójkącie $P_aP_bP_c$ jest punkt P^* – izogonalnie sprzężony do P względem trójkąta ABC .



Rysunek 2.6: Okrąg o środku w punkcie P^* zawierający punkty P_a, P_b, P_c .

Dowód. Niech punkty X_a, X_b, X_c to rzuty punktu P na proste zawierające boki odpowiednio BC, CA, AB . Zachodzą poniższe proporcje:

$$\frac{PX_a}{PP_a} = \frac{PX_b}{PP_b} = \frac{PX_c}{PP_c} = \frac{1}{2}.$$

Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy:

$$X_a X_b \parallel P_a P_b, \quad X_c X_b \parallel P_c P_b, \quad X_a X_c \parallel P_a P_c.$$

Ze względu na to, że czworokąty $AX_c P X_b$, $BX_a P X_c$, $CX_b P X_a$ można wpisać w okręgi o środkach leżących odpowiednio na odcinkach AP , BP , CP , to:

$$AP^* \perp X_c X_b, \quad BP^* \perp X_a X_c, \quad CP^* \perp X_a X_b.$$

Jest to równoważne z następującymi prostopadłościami:

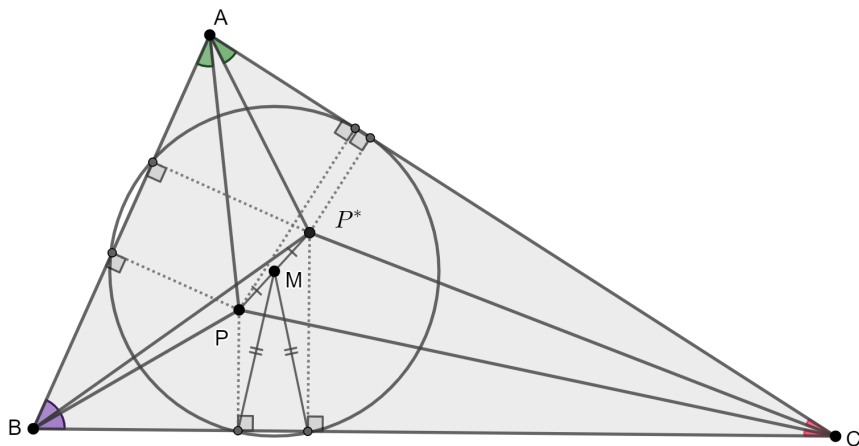
$$AP^* \perp P_c P_b, \quad BP^* \perp P_a P_c, \quad CP^* \perp P_a P_b.$$

Korzystając z symetrii punktów P_a , P_b , P_c względem punktu P otrzymujemy następujące równości:

$$BP_c = BP = BP_a, \quad CP_a = CP = CP_b, \quad AP_b = AP = AP_c.$$

Oznacza to, że punkt P^* jest punktem przecięcia symetralnych odcinków $P_c P_a$, $P_a P_b$, $P_b P_c$, czyli punkt P^* , izogonalnie sprzężony do P względem trójkąta ABC , jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $P_a P_b P_c$. \square

Lemat 2.2.3. *Rzuty punktów P , P^* na boki trójkąta ABC leżą na jednym okręgu. Co więcej, środek tego okręgu to środek odcinka PP^* .*



Rysunek 2.7: Okrąg zawierający rzuty P i P^* na boki trójkąta.

Dowód. Rozważmy jednokładność o środku w punkcie P i skali $\frac{1}{2}$. Niech M to środek odcinka PP^* . Wtedy okrąg opisany w lemacie 2.2.2 przekształca się na okrąg o środku w punkcie M , zawierający rzuty prostokątne punkt P^* na boki trójkąta ABC . Korzystając z wniosku 2.1.4 analogicznie pokazujemy, że rzuty punktu P na boki trójkąta ABC leżą na okręgu o środku w punkcie M . Odległości punktu M od rzutów prostokątnych P , P^* na dany bok są równe, jako że jest to równość odcinków w trapezie prostokątnym. Wprost otrzymujemy, że istnieje okrąg o środku w punkcie M zawierający rzuty prostokątne punktów P , P^* na ściany trójkąta ABC . \square

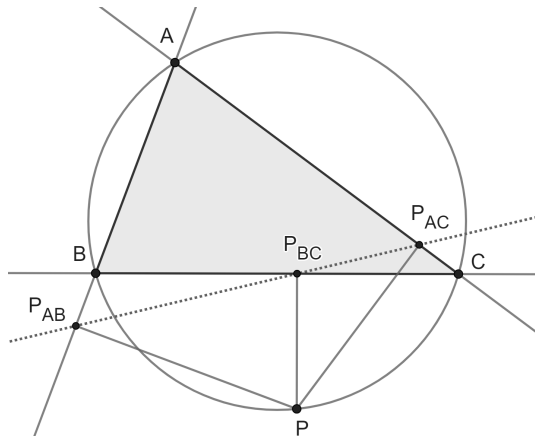
Ponieważ środek okręgu opisanego i ortocentrum są izogonalnie sprzężone w trójkącie, powyższy okrąg stanowi piękne uogólnienie okręgu dziewięciu punktów.

2.3 Prosta Simsona

Rozważmy trójkąt ABC oraz punkt P leżący w jego płaszczyźnie.

Definicja 2.3.1. Powiemy, że P posiada *prostą Simsona* względem trójkąta ABC jeśli rzuty prostokątne punktu P na boki trójkąta leżą na jednej prostej.

Twierdzenie 2.3.2. *Punkt P posiada prostą Simsona względem trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy P^* jest punktem w nieskończoności.*



Rysunek 2.8: Prosta Simsona punktu P .

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2.2.3 wiemy, że środek odcinka PP^* jest środkiem okręgu opisanego na rzutach punktu P na boki trójkąta ABC . Natomiast twierdzenie 2.1.1 informuje nas o tym, że P^* jest punktem leżącym w nieskończoności. Łącząc te zależności otrzymujemy, że środek okręgu zawierającego rzuty P jest punktem w nieskończoności. Oznacza to, że okrąg opisany na trójkącie $P_{AB}P_{BC}P_{AC}$ jest prostą. \square

Na podstawie własności 2.1.5 punkt P posiada prostą Simsona względem trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC – jest to klasyczne twierdzenie Simsona (w artykule [4] można znaleźć pełne wprowadzanie własności i zastosowania w zadaniach olimpijskich).

Rozdział 3

Punkty izogonalne sprzężone w czworościanie

W tym rozdziale przedstawimy definicje i własności prostych izogonalnych w przestrzeni a także punktów izogonalnie sprzężonych w czworościanie. Piękne i kompletne wprowadzenie do tego zagadnienia można znaleźć w książce [1] N. Altshillera Courta „Modern pure solid geometry”.

3.1 Definicje i własności

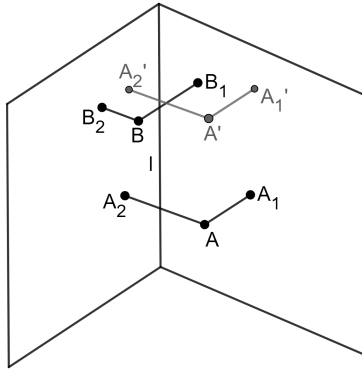
Rozważmy kąt dwuścienny α utworzony przez płaszczyzny π_1 i π_2 przecinające się wzdłuż prostej ℓ .

Definicja 3.1.1. Dwie płaszczyzny przechodzące przez krawędź ℓ kąta dwuściennego α nazywamy *izogonalnymi* względem α , jeśli są symetryczne względem płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego α .

Twierdzenie 3.1.2. Niech f_1, f_2 będą płaszczyznami przechodzącymi przez prostą ℓ kąta dwuściennego α . Rozpatrzmy punkty $A \in f_1$ i $B \in f_2$. Wówczas odległości punktów A i B od płaszczyzn π_1, π_2 są odwrotnie proporcjonalne wtedy i tylko wtedy, gdy f_1 i f_2 są izogonalne względem kąta dwuściennego α .

Dowód. Niech punkty A_1, A_2, B_1, B_2 będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A, B na płaszczyzny π_1, π_2 (Rysunek 3.1). Natomiast A_3, B_3 są punktami znajdującymi się na prostej ℓ , należącymi do płaszczyzn AA_1A_2 i BB_1B_2 , odpowiednio. Płaszczyzny te są prostopadłe do ℓ . Oznacza to, więc że są one do siebie równoległe. Rzutując punkty A, A_1, A_2, A_3 na płaszczyznę BB_1B_2 otrzymujemy czworokąt $A'A_1'A_2'A_3'$ przystający do $AA_1A_2A_3$, przy czym punkt A_3' pokrywa się z punktem B_3 .

Skoro $A'A_1' \parallel BB_1, A'A_2' \parallel BB_2$, to trójki punktów B_3, A_1', B_1 oraz B_3, A_2', B_2 są współliniowe. Otrzymujemy, więc że $\sphericalangle A_1'B_3A' = \sphericalangle BB_3B_2$. Korzystając z



Rysunek 3.1: Rzuty punktów A, B na płaszczyzny π_1, π_2

twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{A'_1 A'}{A' A'_2} = \left(\frac{BB_1}{BB_2} \right)^{-1} \implies \frac{A_1 A}{A A_2} = \left(\frac{BB_1}{BB_2} \right)^{-1}.$$

Twierdzenie odwrotne udowadniamy w analogiczny sposób. \square

Powyższe twierdzenie jest trójwymiarowym analogiem twierdzenia 2.2.1, gdzie również rzuty prostokątne danych punktów tworzyły odwrotną proporcjonalność.

Wniosek 3.1.3. *Prosta łącząca rzuty prostokątne punktu leżącego na płaszczyźnie f_1 na płaszczyzn π_1, π_2 jest prostopadła do f_2 – płaszczyzny izogonalnej do f_1 względem α .*

Rozważmy teraz płaszczyzny π_1, π_2, π_3 tworzące kąt trójścienny β .

Twierdzenie 3.1.4. *Dane są płaszczyzny π_1, π_2, π_3 przecinające się wzdłuż prostej s . Proste a, b, c należą do odpowiednich płaszczyzn i przecinają się w jednym punkcie. Wtedy płaszczyzny izogonalne do płaszczyzn π_1, π_2, π_3 względem odpowiednio kątów dwuściennych $(ab, ca), (bc, ab), (ca, bc)$ przecinają się wzdłuż jednej prostej s' .*

Dowód. Zdefiniujmy początkowo prostą s' jako prostą, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny izogonalne do π_1, π_2 względem dwuściennych kątów $(ab, ac), (bc, ba)$, odpowiednio.

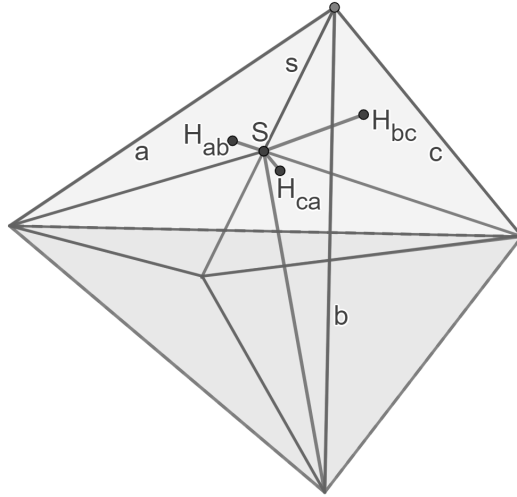
Punkty S, S' znajdują się na odpowiednio prostych s, s' , natomiast $H_{ab}, H_{bc}, H_{ca}, H'_{ab}, H'_{bc}, H'_{ca}$ są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów S, S' na płaszczyzny ab, bc, ca .

Korzystając z twierdzenia 3.1.2 zachodzą poniższe równości:

$$\frac{S' H'_{ab}}{S' H'_{ca}} = \frac{S H_{ca}}{S H_{ab}}, \quad \frac{S' H'_{ca}}{S' H'_{bc}} = \frac{S H_{bc}}{S H_{ca}}.$$

Otrzymujemy, więc że:

$$\frac{S' H'_{ab}}{S' H'_{bc}} = \left(\frac{S H_{ab}}{S H_{bc}} \right)^{-1}.$$



Rysunek 3.2: Rzuty prostokątne punktu S na płaszczyzny ab , bc , ca .

Tym samym, korzystając z twierdzenia 3.1.2 dostajemy, że każdy punkt leżący na prostej s' należy również do płaszczyzny izogonalnej do π_3 względem dwuściennego kąta (ca, cb) . \square

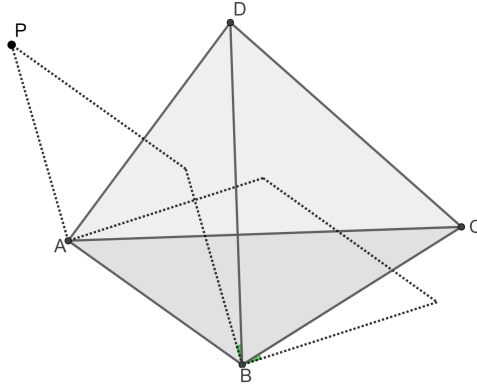
Definicja 3.1.5. Prosta s' nazywamy prostą *izogonalną* do s względem kąta trójściennego β .

Rozpatrzmy teraz czworościan $ABCD$ i dowolny punkt P nienależący do jego ścian. Punkty P_A, P_B, P_C, P_D są rzutami punktu P na odpowiednio ściany BCD, ACD, ABD, ABC .

Twierdzenie 3.1.6. *Płaszczyzny izogonalne do płaszczyzn $ABP, BCP, CAP, DAP, BDP, CDP$ względem kątów dwuściennych odpowiednio $(ACB, ADB), (BDC, BAC), (CBA, CDA), (DCA, DBA), (BAD, BCD), (CBD, CAD)$ mają punkt wspólny P^* .*

Dowód. Korzystając z twierdzenia 3.1.4 otrzymujemy, że płaszczyzny izogonalne do ABP, CAP, DAP względem odpowiednio kątów dwuściennych $(ACB, ADB), (CBA, CDA), (DCA, DBA)$ przecinają się wzdłuż jednej prostej. Niech proste p_a, p_b, p_c, p_d są izogonalne do prostych AP, BP, CP, DP , odpowiednio, względem trójściennych kątów znajdujących się w wierzchołkach A, B, C, D , których ściany są również ścianami czworościanu $ABCD$.

Płaszczyzna izogonalna do płaszczyzny ABP względem kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny ACB, ADB będzie zawierała proste p_a, p_b . Oznacza to w szczególności, że proste p_a, p_b leżą na jednej płaszczyźnie. Analogicznie rozumując otrzymujemy, że dowolne dwie proste p_a, p_b, p_c, p_d są współpłaszczyznowe. Nie mogą one jednak wszystkie znajdować się na jednej płaszczyźnie, więc proste p_a, p_b, p_c, p_d mają wspólny punkt przecięcia. \square



Rysunek 3.3: Płaszczyzna izogonalna do płaszczyzny APB względem kąta dwusiecznego (ACB, ADB) .

Definicja 3.1.7. Punkt P^* nazywamy punktem *izogonalnie sprzężonym* do P względem określonego czworościanu. Każdy punkt P ma dokładnie jeden punkt izogonalnie sprzężony względem danego czworościanu.

Z twierdzenia 3.1.6 wynika istotny dla dalszych rozważań wniosek:

Wniosek 3.1.8. *Dane są proste p_a, p_b, p_c, p_d izogonalne do odpowiednio prostych AP, BP, CP, DP względem trójściennych kątów w wierzchołkach A, B, C, D . Proste p_a, p_b, p_c, p_d są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy P^* jest punktem w nieskończoności.*

Wprost z twierdzenia 3.1.2 dostajemy:

Wniosek 3.1.9. *Odległości punktów P, P^* od ścian czworościanu są odwrotnie proporcjonalne wtedy, i tylko wtedy, gdy punkty P, P^* są izogonalnie sprzężone względem tego czworościanu.*

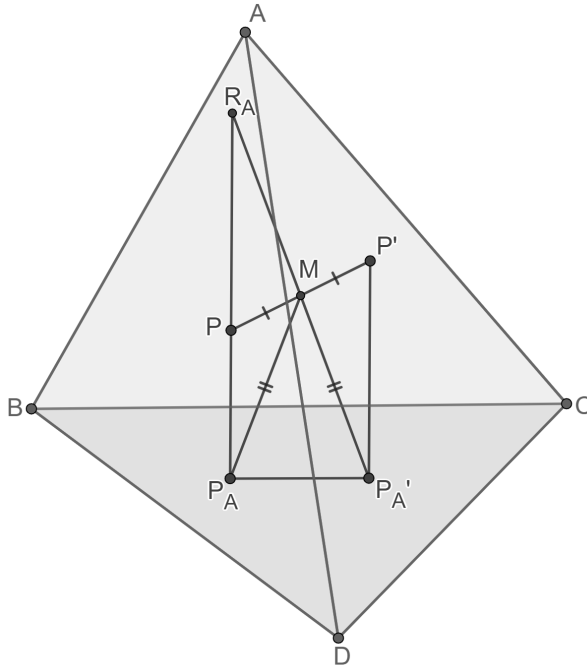
Lemat 3.1.10. *Rzuty prostokątne punktów P, P^* na ściany czworościanu leżą na jednej sferze. Ponadto środkiem tej sfery jest środek odcinka PP^* .*

Dowód. Punkt M jest środkiem sfery ω o promieniu r zawierającej punkty P_A, P_B, P_C, P_D . Punkty P'_A, P'_B, P'_C, P'_D to rzuty prostokątne P' na odpowiednio ściany BCD, ACD, ABD, ABC , przy czym P' jest obrazem punktu P w symetrii względem punktu M .

Jako, że czworokąt $PP'_A P'_A$ jest trapezem prostokątnym to odcinki MP_A, MP'_A są równej długości. Analogiczne wnioski otrzymujemy dla wierzchołków B, C, D .

Wprost z definicji punktu M odcinki MP_A, MP_B, MP_C, MP_D są tej samej długości. Z powyższych zależności otrzymujemy, że punkty P'_A, P'_B, P'_C, P'_D również należą do sfery ω .

Niech R_A jest punktem przecięcia prostych $P_A P, P'_A M$. W ten sam sposób definiujemy punkty R_B, R_C, R_D . Jako, że proste $PP_A, P'_A P'_A$ są równoległe oraz odcinki PM, MP' są równe, to dostajemy przystawanie trójkątów $PR_A M, P'_A P'_A M$.



Rysunek 3.4: Trapez prostokątny $PP'P'_A P_A$ w czworościanie $ABCD$.

Otrzymujemy $PR_A = P'P'_A$, $MP'_A = R_A M$, więc punkt R_A należy do sfery ω . Analogicznie rozumując dostajemy, że punkty P_B , P_C , P_D również leżą na sferze ω .

Korzystając z potęgi punktu dostajemy:

$$\text{potęga punktu } P \text{ względem } \omega := p(P, \omega) = PP_A \cdot PR_A.$$

Analogicznie:

$$p(P, \omega) = PP_B \cdot PR_B,$$

$$p(P, \omega) = PP_C \cdot PR_C,$$

$$p(P, \omega) = PP_D \cdot PR_D.$$

Na podstawie powyższych równości oraz równości odcinków, które otrzymaliśmy na początku:

$$P'P'_A \cdot PP_A = P'P'_B \cdot PP_B = P'P'_C \cdot PP_C = P'P'_D \cdot PP_D.$$

Z twierdzenia 3.1.9 otrzymujemy, że punkt P' jest izogonalnie sprzężony do P względem czworościanu $ABCD$, czyli punkt M jest środkiem odcinka PP' . \square

Powyższy lemat jest trójwymiarowym odpowiednikiem lematu 2.2.3.

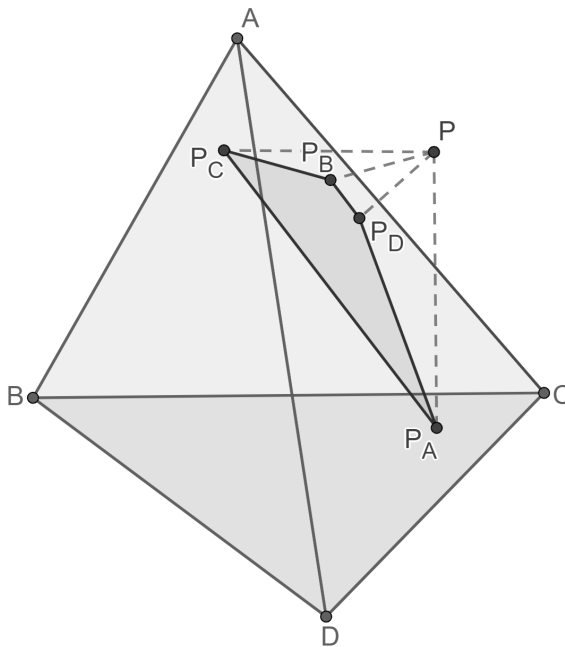
Lemat 3.1.11. *Obrazy punktu P w symetrii względem ścian czworościanu leżą na sferze o środku w punkcie P^* .*

Dowód. Rozpatrzmy jednokładność o środku w punkcie P i skali 2. Korzystając z twierdzenia 3.1.10 sfera zawierająca rzuty prostokątne punktu P o środku w punkcie leżącym na środku odcinka PP^* na ściany czworościanu przekształci się na sferę zawierającą odbicia symetryczne punktu P względem ścian ABC , DAB , CDA , BCD o środku w punkcie P^* . \square

3.2 Płaszczyzna Simsona

Rozważmy czworościan $ABCD$ oraz punkt P w przestrzeni, różny od wierzchołków tego czworościanu.

Definicja 3.2.1. Powiemy, że P posiada *płaszczyznę Simsona* względem czworościanu $ABCD$ jeśli rzuty prostokątne punktu P na ściany czworościanu na jednej płaszczyźnie.



Rysunek 3.5: Rzuty prostokątne punktu P na ściany czworościanu $ABCD$.

Twierdzenie 3.2.2. *Rzuty prostokątne P_A , P_B , P_C , P_D punktu P na odpowiednio ściany BCD , CDA , DAB , ABC czworościanu $ABCD$ leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P^* – izogonalnie sprzężony do P względem $ABCD$ jest punktem w nieskończoności.*

Dowód. Niech proste p_a , p_b , p_c , p_d są izogonalne do odpowiednio AP , BP , CP , DP względem trójściennych kątów znajdujących się w wierzchołkach A , B , C , D dla czworościanu $ABCD$.

(\implies) Jeśli punkty P_A, P_B, P_C, P_D leżą na jednej płaszczyźnie, to na podstawie wniosku 3.1.3 proste p_a, p_b, p_c, p_d są prostopadłe do płaszczyzny $P_AP_BP_CP_D$. Oznacza to, że są one równoległe. Wprost z obserwacji 3.1.6 otrzymujemy, że punkt P^* jest punktem w nieskończoności.

(\impliedby) Korzystając z wniosku 3.1.3 dostajemy, że proste p_a, p_b są prostopadłe do odpowiednio płaszczyzn $P_AP_BP_C, P_AP_BP_D$. Natomiast na podstawie zależności 3.1.8 skoro P^* jest punktem w nieskończoności, to proste p_a, p_b są równoległe. Oznacza to, że płaszczyzny zawierające odpowiednio punkty P_A, P_B, P_C oraz P_A, P_B, P_D również są równoległe. Wobec tego punkty P_A, P_B, P_C, P_D leżą na jednej płaszczyźnie. \square

Powyższe twierdzenie jest przestrzenną analogią do twierdzenia 2.3.2 dla punktu P leżącego w płaszczyźnie trójkąta ABC .

Rozdział 4

Izogonalne sprzężenie w czworościanie równościennym

W tym rozdziale zbadamy własności punktów izogonalnie sprzężonych w czworościanie równościennym. Rezultaty tego rozdziału stanowią główny i oryginalny wynik pracy.

Przypomnijmy definicję dobrze znanej i interesującej klasy czworościanów równościennych. Motyw ten jest obszernie przedstawiony w artykule [3] W. Pompe „O czworościanie równościennym”.

Definicja 4.0.1. Czwościan, którego wszystkie ściany są trójkątami ostrokątnymi o takim samym promieniu okręgu opisanego nazywamy czworościanem *równościennym*.

Twierdzenie 4.0.2. *Punkt P leży na sferze opisanej na czworościanie równościennym $ABCD$ i jest różny od wierzchołków A, B, C i D . Wtedy punkt P^* , izogonalnie sprzężony do P względem danego czworościanu, również leży na tej sferze.*

Dowód. Niech okrąg ω_A oznacza okrąg przystający do okręgu opisanego na trójkącie PAD zawierający punkty A, D i znajdujący się na płaszczyźnie izogonalnej do płaszczyzny DAP względem kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny ABD i ACD . Dodatkowo okrąg ten jest zawarty w sferze opisanej na czworościanie $ABCD$. Analogicznie definiujemy okręgi ω_B, ω_C .

Wykonajmy inwersję o środku w punkcie D i o skali 1. Punkty A', B', C', P' to odpowiednio punkty A, B, C, P po inwersji. Proste r_A, r_B, r_C to obrazy inwersyjne okręgów opisanych na trójkątach CDB, ADC, BDA . Jako, że okręgi te przed inwersją przecinały się parami w punktach C, A, B , to proste r_A, r_B, r_C leżą na jednej płaszczyźnie. Punkty przecięcia par tych prostych to punkty C', A', B' .

Proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C to obrazy inwersyjne okręgów odpowiednio $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, natomiast proste k_A, k_B, k_C to obrazy inwersyjne okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio APD, BPD, CPD .

Sfera przechodząca przez środek inwersji przekształca się w płaszczyznę, więc proste $k_A, k_B, k_C, r_A, r_B, r_C, \ell_A, \ell_B, \ell_C$ leżą na jednej płaszczyźnie. Proste k_A, k_B, k_C przecinają się w punkcie P .

W czworościanie równościennym środek sfery wpisanej pokrywa się ze środkiem sfery opisanej na tym czworościanie ([3]). Dodatkowo inwersja zachowuje kąty między płaszczyznami, więc dostajemy:

$$\sphericalangle(APD, ABD) = \sphericalangle(ACD, \omega_A) \implies \sphericalangle(k_A, r_C) = \sphericalangle(r_B, \ell_A).$$

$$\sphericalangle(BPD, BCD) = \sphericalangle(BAD, \omega_B) \implies \sphericalangle(k_B, r_A) = \sphericalangle(r_C, \ell_B).$$

$$\sphericalangle(CPD, CAD) = \sphericalangle(CBD, \omega_C) \implies \sphericalangle(k_C, r_B) = \sphericalangle(r_A, \ell_C).$$

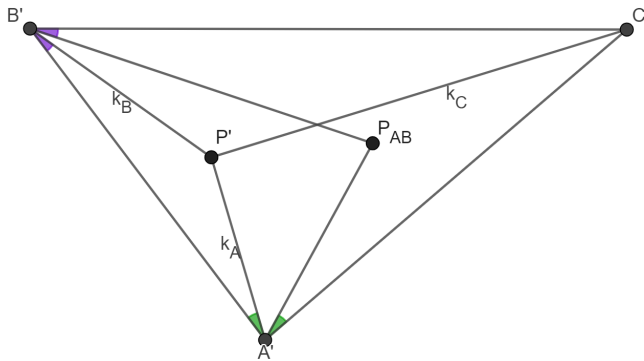
Punkt P_{AB} to punkt przecięcia prostych ℓ_A, ℓ_B . W ten sam sposób definiujemy punkty P_{BC}, P_{AC} .

Wprost z powyższych równości kątów wynika:

$$\sphericalangle P_{AB}A'B' = \sphericalangle P'A'C', \quad \sphericalangle P_{AB}B'A' = \sphericalangle P'B'C',$$

$$\sphericalangle P_{BC}B'C' = \sphericalangle P'B'A', \quad \sphericalangle P_{BC}C'B' = \sphericalangle P'C'A',$$

$$\sphericalangle P_{CA}C'A' = \sphericalangle P'C'B', \quad \sphericalangle P_{CA}A'C' = \sphericalangle P'A'B'.$$



Rysunek 4.1: Obraz, na który przeszła sfera opisana na czworościanie $ABCD$ po inwersji o środku w punkcie D .

Korzystając z twierdzenia 2.1.1 otrzymujemy, że punkty P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} są punktami izogonalnie sprzężonymi do P' względem trójkąta $A'B'C'$. Natomiast punkt izogonalnie sprzężony do P' względem trójkąta $A'B'C'$ istnieje dokładnie jeden, o czym mówi nam wniosek 2.1.3. Oznacza to, że punkty P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} się pokrywają, czyli okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ przecinają się w jednym punkcie. Jako, że wszystkie punkty należące do dowolnego z tych okręgów leżą na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$, to w szczególności ich punkt przecięcia również. Natomiast z twierdzenia 3.1.6 wynika, że punkt przecięcia płaszczyzn zawierających okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ jest punktem izogonalnie sprzężonym do P . Otrzymujemy zatem, że punkt P^* , izogonalnie sprzężony do P względem czworościanu $ABCD$, należy do sfery opisanej na tym czworościanie. \square

Wniosek 4.0.3. *Punkt P leżący na sferze opisanej czworościanu równościennego $ABCD$ (różny od wierzchołków A, B, C, D) nie posiada płaszczyzny Simsona względem $ABCD$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 3.2.2 punkt P posiada płaszczyznę Simsona wtedy i tylko wtedy, gdy P^* jest w nieskończoności. Jednakże na podstawie powyższego twierdzenia punkt P^* leży na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$ – sprzeczność. \square

Wobec tego naturalny analogon klasycznego twierdzenia o prostej Simsona dla trójkąta nie przenosi się (dla żadnego z punktów sfery!) dla czworościanów równościennych.

Dla wnikliwego czytelnika pozostawiamy naturalne pytanie do dalszych rozważań.

Pytanie 4.0.4. Czy istnieją inne klasy czworościanów, które nie posiadają płaszczyzny Simsona dla żadnego z punktów swojej sfery opisanej?

Bibliografia

- [1] N. Altshiller-Court, *Modern pure solid geometry*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964, xiv+353 pp.
- [2] W. Pompe, *Wokół Obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej, Kraków, 2022
- [3] W. Pompe, *O czworoscianie równościennym*, Delta 3/1994
- [4] D. Burek, T. Cieśla, *O własnościach prostej Simsona*, Delta 11/2016