

XIV Liceum Ogólnokształcące im.
Stanisława Staszica w Warszawie

Antoni Łuczak

O KRZYWYCH APOLONIUSZA W TRÓJKĄCIE

XLVI Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego

Opiekun pracy
dr Dominik Burek

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Dodawanie punktów na krzywej sześciennej	2
3	Krzywe Apoloniusza	2
4	Krzywe Apoloniusza w trójkącie	6
5	Krzywe Γ_I, Γ_J	9
6	Konstrukcja krzywych Γ_I, Γ_J	12
7	Krzywa Γ_M	18
8	Jeszcze jeden wniosek	21
9	Konstrukcja ogólnej krzywej	23
10	Współrzędne barycentryczne	25

1 Wprowadzenie

Dla czterech punktów A, B, C leżących w tej kolejności na jednej prostej, zbiór punktów P dla których $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC$ jest sumą prostej zawierającej te punkty oraz okręgu zwanego *okręgiem Apoloniusza*. Fakt ten nasuwa następujące pytanie: Jak wygląda zbiór punktów, które widzą odcinki AB oraz CD pod tym samym kątem, jeżeli A, B, C, D nie koniecznie leżą na jednej prostej? Okazuje się, że w ogólności jest to krzywa sześcienna (zwana *Krzywą Apoloniusza* lub *Krzywą Izooptyczną*).

Korzystając z faktu, że na płaszczyźnie $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dowolna prosta przecina nierozkładalną krzywą sześcienną w 3 punktach, na krzywych sześciennych możemy definiować operację dodawania punktów. Okazuje się, że dodawanie punktów na Krzywych Apoloniusza posiada wiele zaskakujących własności geometrycznych.

Celem pracy jest zbadanie Krzywych Apoloniusza odcinków AB, CD w przypadku, kiedy punkt D leży na prostej BC , a punkt A poza nią. Korzystając z operacji dodawania punktów oraz standardowych technik geometrii euklidesowej, udowodnimy wiele ważnych faktów dotyczących tak zdefiniowanych krzywych oraz dowiemy się jak je konstruować. Dodatkowo, korzystając z wyprowadzonych własności, udowodnimy kilka czysto elementarnych twierdzeń.

2 Dodawanie punktów na krzywej sześcienniej

Z Twierdzenia Bezout każda prosta przecina nierozkładalną krzywą sześcienną Γ w trzech punktach na płaszczyźnie $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (licząc z krotnościami). Możemy zdefiniować operację dodawania punktów regularnych (nieosobliwych) Γ w następujący sposób: dla dowolnych punktów regularnych $A, B, C \in \Gamma$ definiujemy

$$A, B, C \text{ są współliniowe} \iff A + B + C = O,$$

gdzie O jest pewnym ustalonym punktem naszej krzywej. Okazuje się, że biorąc za O pewien punkt przecięcia krzywej Γ , punkty regularne krzywej, wraz z elementem neutralnym O oraz operacją dodawania tworzą grupę przemienną. Zachodzi przy tym następujące twierdzenie ([1]):

Twierdzenie 2.1. *Dana jest liczba naturalna n , krzywa sześcienna Γ oraz punkty $P_1, \dots, P_{3n} \in \Gamma$. Punkty te leżą na krzywej algebraicznej stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{3n} = O.$$

3 Krzywe Apoloniusza

W tej pracy przez $\sphericalangle(k, l)$ będziemy oznaczali kąt skierowany między prostymi k oraz l . W szczególności skrótowo będziemy pisali $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle(XY, YZ)$.

Twierdzenie 3.1. *Dane są dwa odcinki AB oraz CD na płaszczyźnie. Wtedy zbiorem takich punktów P , że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ jest krzywa sześcienna, którą będziemy oznaczali przez $APOL(AB, CD)$.*

Twierdzenie 3.2. *Dana jest Krzywa Apoloniusza Γ . Rozpatrzmy jej domknięcie na płaszczyźnie $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Wtedy Γ przechodzi przez punkty A, B, C, D oraz punkty okręgowe $I_1 = (1 : i : 0)$, $I_2 = (1 : -i : 0)$ (czyli punkty, przez które przechodzi każdy okrąg o współczynnikach rzeczywistych). Spełnione są dodatkowo warunki*

$$C = B + O_1 \text{ oraz } D = A + O_1,$$

gdzie O_1 jest pewnym ustalonym punktem spełniającym $2O_1 = O$.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [1].

Twierdzenie 3.3 (Twierdzenie o stycznej i cięciwie). *Dana jest Krzywa Apoloniusza $\Gamma = APOL(AB, CD)$. Niech l będzie prostą styczną do Γ w punkcie A . Wtedy*

$$\sphericalangle(AB, l) = \sphericalangle DAC.$$

Dowód. Niech Ω będzie okręgiem przechodzącym przez punkt B oraz stycznym do l w A . Wtedy okrąg Ω jest styczny do Γ w A . Korzystając z Twierdzenia 2.1 mamy zatem

$$A + A + B + P + I_1 + I_2 = O,$$

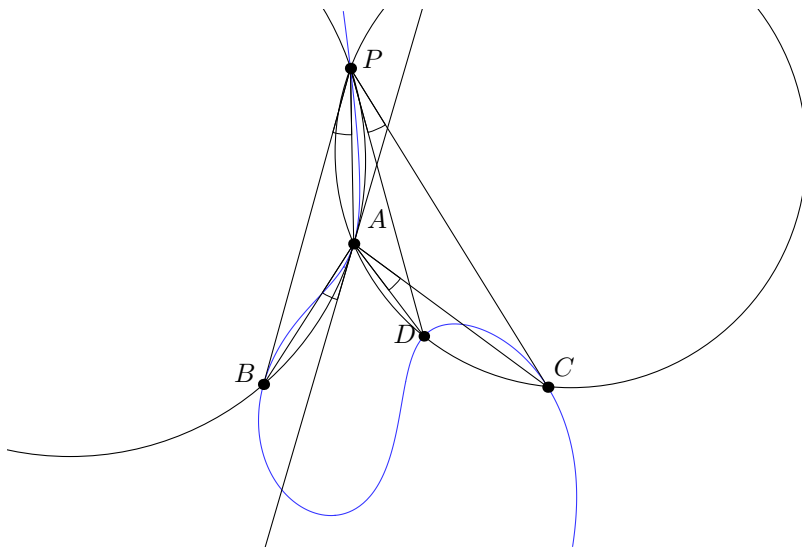
gdzie P to czwarte rzeczywiste przecięcie Ω z Γ . Dodając do naszej równości $2O_1$ stronami mamy

$$O = A + (A + O_1) + (B + O_1) + P + I_1 + I_2 = A + C + D + P + I_1 + I_2,$$

zatem na mocy Twierdzenia 2.1, punkty A, C, D, P również leżą na jednym okręgu. Mamy zatem

$$\sphericalangle(AB, l) = \sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC = \sphericalangle DAC.$$

□



Twierdzenie 3.4 (Van Rees). *Na krzywej $APOL(AB, CD)$ leżą punkty regularne A', B' . Oznaczmy $C' = A' + O_1$ oraz $D' = B' + O_1$. Wtedy*

$$APOL(A'B', C'D') = APOL(AB, CD).$$

Twierdzenie 3.5. *Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu ω o środku w punkcie I . Wtedy*

$$APOL(AI, IC) = APOL(BI, ID) = APOL(AB, DC)$$

Aby udowodnić to twierdzenie zaczniemy od przytoczenia następującego lematu.

Lemat 3.6 (Lemat izogonalny dla równoległoboku). *Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt P spełniający*

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle PCB.$$

Wtedy spełniony jest również warunek

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle CBP.$$

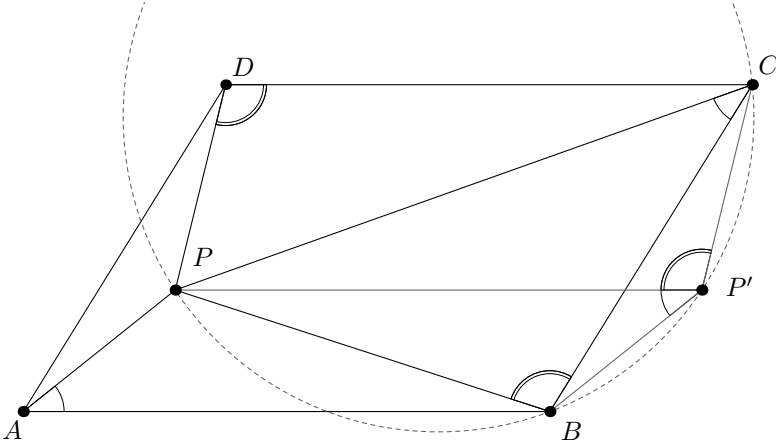
Dowód. Niech P' to obraz punktu P w translacji o wektor \overrightarrow{AB} . Wtedy czworokąty $ABP'P$ oraz $CDPP'$ są równoległobokami. Mamy zatem

$$\sphericalangle PP'B = \sphericalangle BAP = \sphericalangle PCB,$$

czyli punkty P, P', B, C leżą na wspólnym okręgu. W takim razie

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle CP'P = \sphericalangle CBP,$$

co należało pokazać. □



Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia.

Dowód. Niech proste AB, BC, CD, DA będą styczne do ω odpowiednio w punktach X, Y, Z, T oraz niech P będzie dowolnym punktem na $APOL(AI, IC)$. Rozważmy inwersję względem okręgu ω . Niech A', B', C', D', P' oznaczają obrazy punktów A, B, C, D, P odpowiednio. Punkty A', B', C', D' są środkami odcinków TX, XY, YZ, ZX odpowiednio, zatem tworzą równoległobok. Z definicji punktu P

$$\sphericalangle P'A'I = \sphericalangle IPA = \sphericalangle CPI = \sphericalangle IC'P'.$$

Dodatkowo

$$\sphericalangle IA'D' = \sphericalangle ADI = \sphericalangle IDC = \sphericalangle D'C'I,$$

więc łącząc powyższe równości dostajemy $\sphericalangle P'A'D' = \sphericalangle D'C'P'$. Na mocy naszego lematu mamy zatem $\sphericalangle P'D'C' = \sphericalangle C'B'P'$. Podobnie jak wcześniej

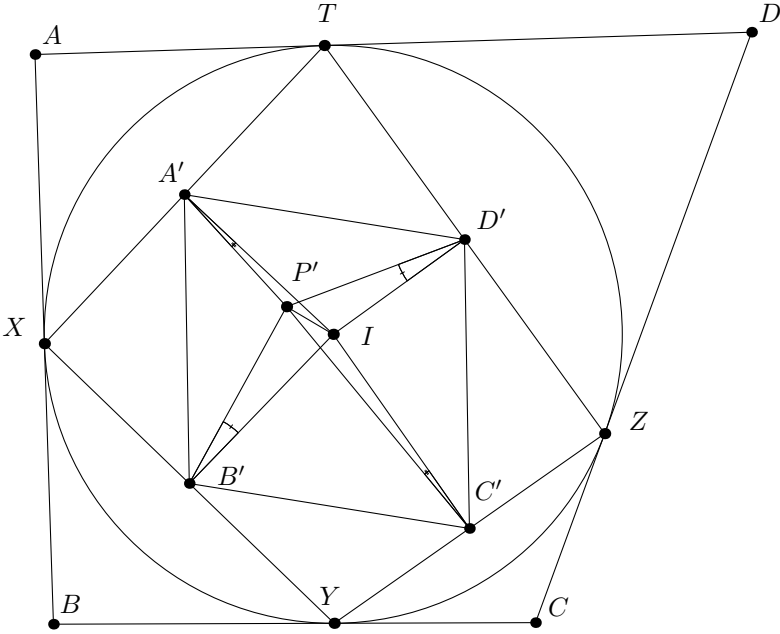
$$\sphericalangle C'B'I = \sphericalangle ICB = \sphericalangle DCI = \sphericalangle ID'C',$$

więc łącząc to z poprzednią równością dostajemy $\sphericalangle IB'P' = \sphericalangle P'D'I$. Finalnie

$$\sphericalangle BPI = \sphericalangle IB'P' = \sphericalangle P'D'I = \sphericalangle IPD,$$

zatem z definicji $P \in APOL(BI, ID)$. W analogiczny sposób dowodzimy, że jeśli $P \in APOL(BI, ID)$, to również $P \in APOL(AI, IC)$. Oznacza to, że krzywe te

są równe. Zauważmy teraz, że odejmując równości $\sphericalangle API = \sphericalangle IPC$ oraz $\sphericalangle BPI = \sphericalangle IPD$ otrzymujemy równość $\sphericalangle APB = \sphericalangle DPC$, czyli punkt P również leży na krzywej $APOL(AB, DC)$. Stąd mamy $APOL(AI, IC) \subseteq APOL(AB, DC)$, jednak skoro obie te krzywe są stopnia 3, to muszą być równe. \square



Twierdzenie 3.7. *W powyższej konfiguracji krzywa $APOL(AI, IC)$ jest obrazem krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty A', B', C', D', I w inwersji względem okręgu wpisanego.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że zbiór punktów spełniających warunek kątowy z Lematu 3.6 jest krzywą stożkową. Niech f to przekształcenie będące złożeniem symetrii względem dwusiecznej kąta $D'C'B'$ z jednokładnością o środku C' oraz skali $\frac{B'C'}{C'D'}$. Wprost z definicji wynika, że $f(D') = B'$. Możemy zatem zawęzić dziedzinę funkcji f i traktować ją jako mapę rzutową z pęku D' na pęk B' . Niech m oznacza prostą $P'D'$. Wtedy z warunku $\sphericalangle P'D'C' = \sphericalangle C'B'P'$ wiemy, że $f(m)$ jest prostą $B'P'$. Na mocy Twierdzenia Steinera zbiór punktów postaci $m \cap f(m)$ jest prostą, lub krzywą stożkową przechodzącą przez punkty B' oraz D' . Zauważmy, że nie może to być prosta, gdyż w tym wypadku wykonując ponownie inwersję otrzymalibyśmy, że krzywa $APOL(AI, IC)$ jest okręgiem lub prostą, co nie jest prawdą. W takim razie jest to krzywa stożkowa. Dodatkowo punkty A', C', I spełniają żądany warunek kątowy, zatem leżą na tej krzywej. \square

Dodatkowo okazuje się, że krzywą tą jest hiperbola prostokątna, której asymptoty są równoległe do dwusiecznych kąta $D'C'B'$. Pozwala to skonstruować w dość szybki sposób krzywą $APOL(AI, IC)$.

Zauważmy, że w dowodach powyższych twierdzeń kolejność, w jakiej punkty A , B , C , D leżą na ω nie ma znaczenia. Oznacza to, że będą one poprawne, dopóki proste zawierające boki czworokąta będą styczne do wspólnego okręgu.

4 Krzywe Apoloniusza w trójkącie

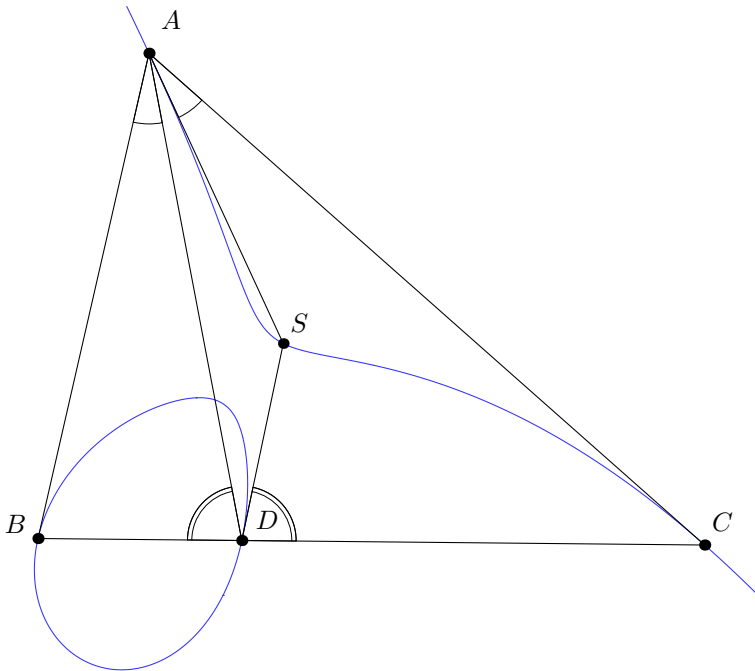
Od tej pory będziemy się zajmowali krzywymi $APOL(AB, CD)$ w przypadku gdy D leży na prostej BC oraz jest różny od B i C . Dodatkowo będziemy zakładali, że $AB \neq AC$ aby uniknąć przypadku, w którym krzywa $APOL(AB, CD)$ degeneruje się do sumy okręgu i prostej. Załóżmy, że D dzieli odcinek BC w stosunku $\frac{p}{q}$. Wtedy $APOL(AB, CD)$ będziemy oznaczali przez $\Gamma(p : q)$. Teraz zajmiemy się udowodnieniem kilku ważnych faktów dotyczących rozpatrywanych krzywych.

Lemat 4.1. *Krzywa $\Gamma(p : q)$ jest styczna do AB oraz AC odpowiednio w punktach B oraz C .*

Dowód. Niech l będzie styczną do $\Gamma(p : q)$ w punkcie B . Stosując twierdzenie o stycznej i cięciwie dostajemy

$$\sphericalangle(BC, l) = \sphericalangle(BD, l) = \sphericalangle CBA = \sphericalangle(BC, BA),$$

zatem proste l , AB się pokrywają. Analogicznie dowodzimy, że prosta AC jest styczna do $\Gamma(p : q)$ w C . \square



Lemat 4.2. *Prosta styczna do $\Gamma(p : q)$ w punkcie A jest izogonalna do prostej AD w kącie BAC , natomiast styczna do $\Gamma(p : q)$ w punkcie D jest izogonalna do AD w kącie BDC . Dodatkowo styczne te przecinają się w punkcie $S \in \Gamma(p : q)$.*

Dowód. Niech l to styczna do $\Gamma(p : q)$ w A . Z twierdzenia o stycznej i cięciwie mamy

$$\sphericalangle(AC, l) = \sphericalangle DAB,$$

czyli l oraz AD są izogonalne w kącie BAC . Podobnie, niech k to styczna to Γ w punkcie D . Analogicznie dostajemy

$$\sphericalangle(DC, k) = \sphericalangle ADB,$$

zatem k oraz AD są izogonalne względem kąta CDB . Prosta l przecina $\Gamma(p : q)$ dwa razy w punkcie A oraz po raz trzeci w pewnym punkcie S . Mamy zatem

$$O = A + A + S = A + A + S + 2O_1 = (A + O_1) + (A + O_1) + S = D + D + S,$$

zatem punkt S również leży na prostej stycznej do $\Gamma(p : q)$ w punkcie D . \square

Lemat 4.3. *Dany jest punkt $P \in \Gamma(p : q)$. Wtedy sprzężenie izogonalne P^* punktu P względem czworokąta zdegenerowanego $ABDC$ również leży na $\Gamma(p : q)$ oraz spełnia*

$$P^* = P + O_1.$$

Jest to w szczególności sprzężenie izogonalne punktu P w trójkącie ABC .

Dowód. Z warunku $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ wynika, że punkt P posiada sprzężenie izogonalne względem czworokąta $ABCD$ (dowód tego faktu można znaleźć między innymi w [6]). Niech $P' = P + O_1$. Na mocy Twierdzenia Van Reesa mamy

$$\Gamma(p : q) = APOL(AB, CD) = APOL(AP, P'D),$$

zatem skoro $B \in \Gamma(p : q)$, to $\sphericalangle ABP = \sphericalangle P'BD$. Podobnie $\sphericalangle ACP = \sphericalangle P'CD$, czyli P' jest sprzężeniem izogonalnym punktu P względem czworokąta $ABDC$. \square

Wniosek 4.4. *Niech $\Gamma(p : q)$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz czwarty w punkcie rzeczywistym N . Wtedy Jeśli D' to odbicie punktu D względem środka boku BC , to prosta AN jest izogonalna do prostej AD' w kącie BAC . Skoro I_1 oraz I_2 leżą na $\Gamma(p : q)$, to*

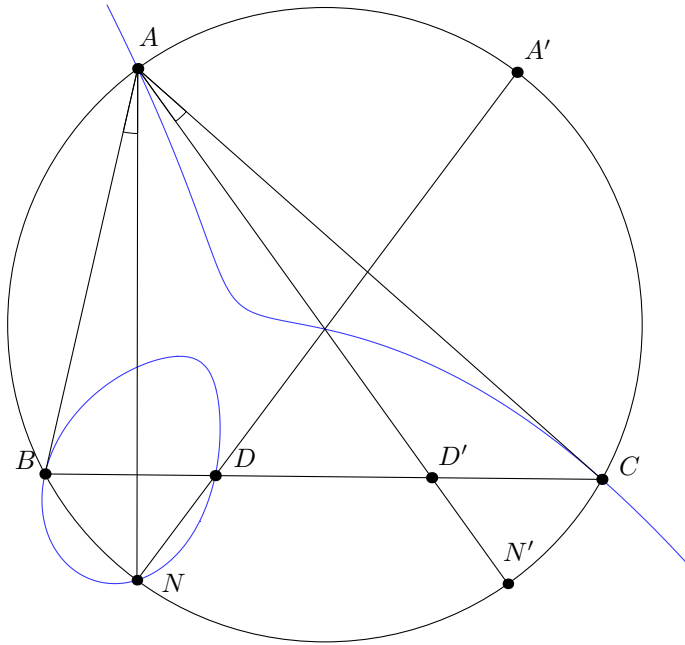
$$N^* + I_1 + I_2 = O \iff N + I_1 + I_2 = O_1.$$

Ponadto N^ jest kierunkiem unikalnej asymptoty rzeczywistej krzywej $\Gamma(p : q)$.*

Dowód. Niech A' oznacza odbicie punktu A względem symetralnej odcinka BC . Wtedy

$$\sphericalangle CNA' = \sphericalangle CBA' = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ANB = \sphericalangle CND,$$

czyli punkty A' , D , N leżą na jednej prostej. W takim razie prosta AD' przecina okrąg opisany po raz drugi w punkcie symetrycznym do N względem symetralnej BC , zatem jest izogonalna do prostej AN . Znany fakt jest, że punkty leżące na okręgu opisanym na trójkącie ABC (różne od jego wierzchołków) w sprzężeniu izogonalnym przechodzą na punkty na prostej w nieskończoności. W takim razie N^* to przecięcie Γ z prostą w nieskończoności różne od I_1 oraz I_2 . W takim razie równość $N^* + I_1 + I_2 = O$ wynika wprost z definicji dodawania punktów na $\Gamma(p : q)$. Dodatkowo N^* jest punktem przecięcia $\Gamma(p : q)$ oraz jej asymptoty rzeczywistej. Skoro jednak N^* leży na prostej w nieskończoności, to jest kierunkiem tej asymptoty. \square



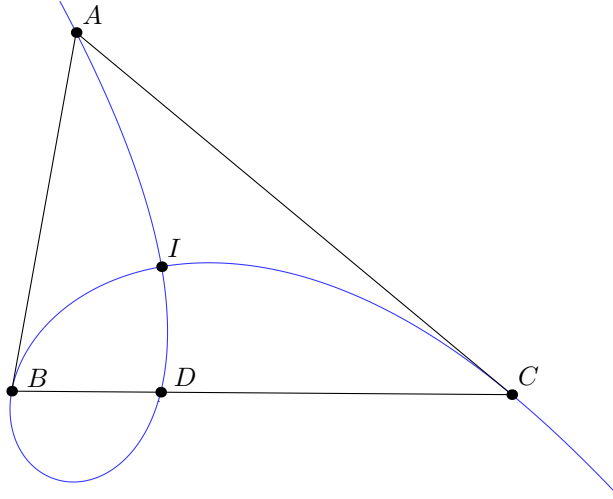
Definicja 4.5. Proste k, l przecinają się w punkcie O . Wyobraźmy sobie, że zaczynamy obracać prostą k względem punktu O w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara do momentu aż pokryje się ona z prostą l . Wtedy zbiór punktów, przez które przejdzie prosta k nazwiemy *obszarem dodatnim* pary (k, l) . Analogicznie definiujemy *obszar ujemny*, tylko tym razem prosta k będzie się obracała zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Lemat 4.6. *Jeżeli D leży na odcinku BC , to krzywa $\Gamma(p : q)$ całkowicie zwiera się w obszarze dodatnim pary (AB, AC) . Jeżeli D nie leży na odcinku BC , to krzywa ta należy do obszaru ujemnego pary (AB, AC) .*

Dowód. Z Lematu 4.1 krzywa $\Gamma(p : q)$ jest styczna do AB w punkcie B . Dodatkowo jest to styczność krotkości 2 (bo styczna w tym punkcie przecina Γ w punkcie A), zatem $\Gamma(p : q)$ nie przechodzi w tym punkcie na drugą stronę prostej AB . Wynika stąd, że jedyny punkt, w którym $\Gamma(p : q)$ przechodzi na drugą stronę prostej AB to punkt A . Analogicznie, Γ przechodzi na drugą stronę prostej AC jedynie w punkcie A . Wynika stąd, że $\Gamma(p : q)$ znajduje się zawsze w tym samym obszarze. Jeżeli zatem punkt D leży na odcinku BC , to znajduje się też w obszarze dodatnim pary (AB, AC) , czyli również cała krzywa znajduje się w tym obszarze. Analogicznie, jeśli punkt D znajduje się poza odcinkiem BC , to znajduje się w obszarze ujemnym pary (AB, AC) , zatem również cała krzywa znajduje się w tym obszarze. \square

5 Krzywe Γ_I, Γ_J

Definicja 5.1. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg wpisany w ten trójkąt ma środek I oraz jest styczny do boku BC w punkcie D . Wtedy przez Γ_I będziemy oznaczali krzywą $APOL(BI, IC)$



Teraz przedstawimy kilka ważnych własności rozpatrywanej krzywej.

Wniosek 5.2. *Krzywe*

$$\Gamma_I, APOL(AI, ID), APOL(AB, CD)$$

są identyczne.

Dowód. Wynika to wprost z Twierdzenia 3.5. □

Wniosek 5.3. Niech E oznacza punkt styczności okręgu A -dopisanego do trójkąta ABC . Wtedy krzywa Γ_I przecina okrąg (ABC) w punktach rzeczywistych A, B, C, N , przy czym prosta AN jest izogonalna do prostej AE w kącie BAC . Dodatkowo asymptota rzeczywista krzywej Γ_I jest równoległa do prostej AE .

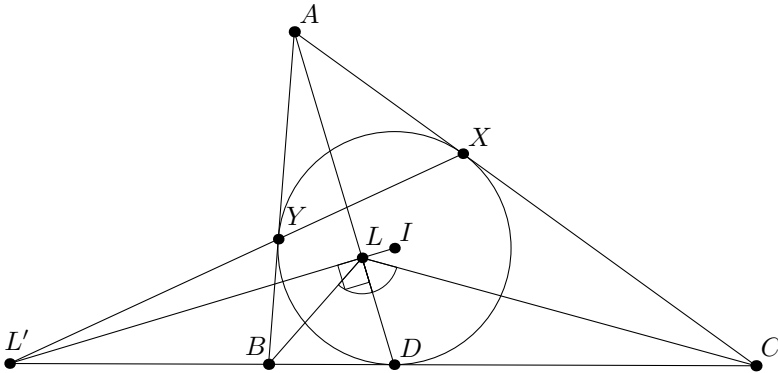
Dowód. Wynika to wprost z Wniosku 4.4, gdyż punkty D oraz E są symetryczne względem środka odcinka BC . □

Wniosek 5.4. Prosta AE , prosta DN , symetralna odcinka BC oraz prosta przechodząca przez I , równoległa do BC przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Pokażemy, że punkt ten leży na Γ_I . Niech prosta AE przecina Γ_I w punkcie R różnym od A oraz N^* . Skoro A, R, N^* są współliniowe oraz leżą na Γ_I , to

$$O = A + N^* + R = A + N^* + R + 2O_1 = (A + O_1) + (N^* + O_1) + R = D + N + R,$$

Wniosek 5.5. Niech L oznacza rzut prostokątny punktu I na prostą AD . Wtedy okrąg opisany na trójkącie ANL jest styczny w punkcie A do odbicia prostej AD względem dwusiecznej AI .



Dowód. Pokażemy najpierw, że punkt L leży na krzywej Γ_I . Niech L' oznacza przecięcie LI z prostą BC . Skoro AL jest prostopadłe do IL' , to L jest obrazem inwersyjnym L' względem okręgu wpisanego. W takim razie prosta DL jest biegunową punktu L' względem okręgu wpisanego. Skoro A leży na biegunowej L' , to L' leży na biegunowej A . Oznaczmy przez X, Y punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio do prostych AC, AB . Wtedy biegunową punktu A jest prosta XY . Wiemy ponadto, że proste AD, BX, CY przecinają się w punkcie Gergonne'a trójkąta ABC . Wynika stąd, że $(C, B; D, L') = -1$ (Lemat 2.27 w [5]). Skoro $\sphericalangle L'LD = \frac{\pi}{2}$, to z Lematu 2.28 z [5] wiemy, że LD jest dwusieczną wewnętrzną kąta BLC . Mamy zatem

$$\sphericalangle BLD = \sphericalangle DLC \implies \sphericalangle ALB = \sphericalangle CLD,$$

czyli L leży na Γ_I .

Skoro sprzężenie izogonalne prostej AD względem kąta BAC jest styczne do krzywej Γ_I , to wystarczy pokazać, że okrąg opisany na trójkącie ANL jest styczny do krzywej Γ_I w punkcie A . Na mocy Twierdzenia 2.1 wystarczy pokazać, że

$$A + A + N + L + I_1 + I_2 = O.$$

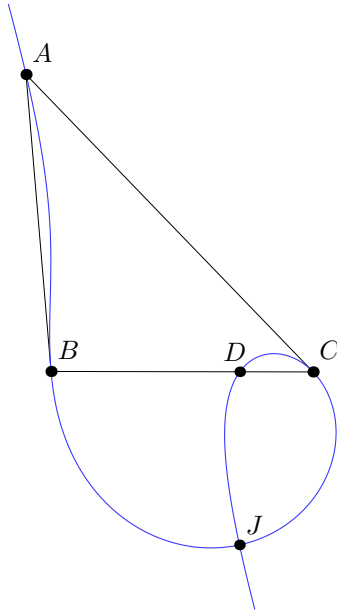
Jest to jednak prawdą, gdyż

$$\begin{aligned} N + I_1 + I_2 &= O_1 + N^* + I_1 + I_2 = O_1 \text{ oraz } A + A + L = O_1 + D + A + L = O_1 \\ &\implies A + A + N + L + I_1 + I_2 = O_1 + O_1 = O. \end{aligned}$$

□

Okazuje się, że bardzo podobną krzywą otrzymujemy zastępując środek okręgu wpisanego środkiem okręgu A -dopisanego.

Definicja 5.6. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg A -dopisany do tego trójkąta ma środek J . Wtedy przez Γ_J oznaczmy krzywą $APOL(BJ, JC)$

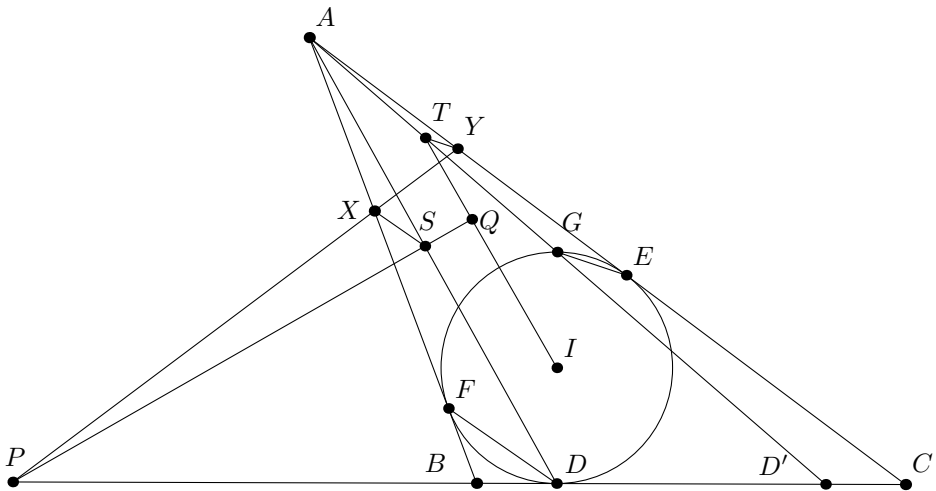


Analogiczne wnioski do tych udowodnionych w tej sekcji otrzymujemy również dla krzywej Γ_J .

6 Konstrukcja krzywych Γ_I, Γ_J

W tej sekcji zajmiemy się udowodnieniem poprawności szczególnych konstrukcji krzywych Γ_I, Γ_J .

Konstrukcja:



Niech E, F oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego ω do boków AC, AB odpowiednio. Niech G będzie odbiciem punktu D przez punkt I . Teraz wybieramy dowolny punkt X na prostej AB . Punkt Y to przecięcie prostej prostopadłej do AI , przechodzącej przez X z prostą AC oraz niech prosta XY przecina BC w punkcie P . Prosta równoległa do DF , przechodząca przez X przecina AD w punkcie S . Prosta przechodząca przez Y , równoległa do EG przecina AG w punkcie T . Niech Q oznacza przecięcie prostych PS oraz TI . Wtedy gdy punkt X porusza się po prostej AB , punkt Q porusza się po Γ_I .

Wystarczy teraz pokazać, że tak zdefiniowany punkt Q spełnia żądane własności. Udowodnimy najpierw, że Q porusza się po krzywej stopnia 3 oraz że proste PQ, QI są prostopadłe. W tym celu skorzystamy z wielomianowej wersji metody *moving points*, która została opisana w [3].

Definicja 6.1. Wielomianowym ruchomym punktem nazwiemy mapę

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \mapsto \mathbb{RP}^2 \text{ zadaną przez } t \mapsto X = (P(t) : Q(t) : R(t)),$$

gdzie $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ są względnie pierwszymi wielomianami. Dodatkowo obraz dla $t = \infty$ jest definiowany przez granicę. Ponadto powiemy, że liczba

$$\deg(X) = \max\{\deg P, \deg Q, \deg R\}$$

to stopień punktu X .

Lemat 6.2. *Dane są wielomianowe punkty P, Q stopni d_1, d_2 odpowiednio. Wtedy prosta PQ również jest wielomianowa oraz ma stopień co najwyżej $d_1 + d_2$. Analogiczna własność zachodzi dla przecięć wielomianowych ruchomych prostych.*

Lemat 6.3. *Dane są wielomianowe ruchome punkty P, Q, R stopni d_1, d_2, d_3 odpowiednio. Wtedy warunek*

$$P, Q, R \text{ są współliniowe}$$

jest równoważny z zerowaniem się wielomianu stopnia co najwyżej $d_1 + d_2 + d_3$. Wynika stąd, że aby pokazać współliniowość punktów P, Q, R , wystarczy ją pokazać dla $d_1 + d_2 + d_3 + 1$ wartości t . Analogiczny warunek zachodzi dla współpękowości ruchomych prostych.

Dowody powyższych lematów można znaleźć w [3]. Przejdźmy teraz do dowodu poprawności konstrukcji.

Dowód. Załóżmy bez straty ogólności, że $AB < AC$. Niech X będzie wielomianowym ruchomym punktem stopnia 1, poruszającym się po prostej AB . Skoro kierunek prostej AI jest stały, to również kierunek prostej XY jest stały. W takim razie $\deg(XY) = 1 \implies \deg(Y) = \deg(P) = 1$. Kierunki prostych DF oraz EG są stałe, zatem również kierunki prostych XS oraz YT są stałe. Mamy zatem $\deg(S) = \deg(T) = 1$. Skoro $\deg(I) = 0$, to $\deg(IT) = 1$ oraz

$$\deg(PS) \leq 2 \implies \deg(Q) \leq \deg(IT) + \deg(PS) = 3.$$

Zauważmy, że wielomiany, które definiują współrzędne punktu Q parametryzują pewną krzywą wymierną stopnia $\deg(Q) \leq 3$, czyli Q porusza się po krzywej algebraicznej stopnia co najwyżej 3. Jednak w momencie gdy X pokrywa się odpowiednio z A, F, B oraz odbiciem C przez prostą AI , to punkt Q pokrywa się odpowiednio z A, D, B oraz C . Widzimy zatem, że Q nie może poruszać się po prostej (bo punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej) oraz nie może poruszać się po stożkowej (bo wtedy leżałyby na niej 3 punkty współliniowe). To dowodzi, że Q porusza się po krzywej sześcienniej. Dodatkowo parametryzacja krzywej za pomocą wielomianów stopnia co najwyżej tego samego co krzywa, wygeneruje wszystkie punkty na niej leżące, więc nasza konstrukcja wygeneruje wszystkie punkty rzeczywiste Γ_I . Teraz udowodnimy, że $PS \perp IT$. Stopień prostej PS jest nie większy niż 2, stopień prostej prostopadłej do IT jest równy 1. Wystarczy pokazać, że te proste przecinają się na prostej w nieskończoności. Warunek ten ma stopień nie większy niż 3, zatem wystarczy pokazać prawdziwość tezy dla 4 ustalonych położení punktu X .

Przypadek 1 ($X = A$)

Wtedy punkty S, T pokrywają się z A , zatem prosta IT staje się prostą AI , natomiast PS staje się prostą XY , czyli z definicji jest prostopadła do AI .

Przypadek 2 ($X = F$)

Wtedy S pokrywa się z punktem D , natomiast T z punktem G . Wtedy PS pokrywa się z BC , a IT z prostą ID , zatem są prostopadłe.

Przypadek 3 ($X = B$)

Wtedy również $P = B$. Skoro $XS \parallel FD$, to PS jest dwusieczną zewnętrzną kąta CBA . Aby pokazać, że $PS \perp IT$ wystarczy zatem pokazać, że $T \in PI$. Odcinek DG jest średnicą okręgu wpisanego, zatem $\sphericalangle DFG = \frac{\pi}{2}$. Dodatkowo $BI \perp FD$, zatem $FG \parallel BI$. Niech proste FG oraz AI przecinają się w punkcie H . Wtedy prosta HE to odbicie prostej HF względem AI oraz IY to odbicie IX względem AI , zatem również $HE \parallel YI$. Skoro proste HI, GT, EY przecinają się w punkcie A , to na mocy Twierdzenia Desarguesa przecięcia par prostych $(HG, IT), (GE, TY), (EH, YI)$ są współliniowe. Jednak proste HE, IY są równoległe oraz proste GE, TY są równoległe. To oznacza, że HG oraz IT również są równoległe $\implies P, I, T$ są współliniowe.

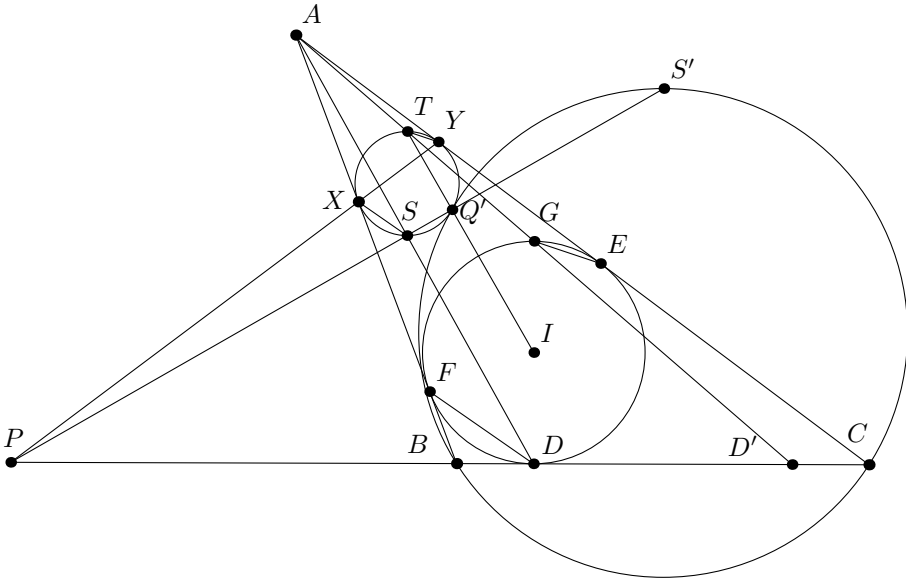
dla pewnej liczby rzeczywistej λ . Z twierdzenia o potędze punktu mamy zatem

$$\frac{BX}{CY} = \frac{\sqrt{BQ' \cdot BU}}{\sqrt{CQ' \cdot CV}} = \sqrt{\frac{\lambda BQ'^2}{\lambda CQ'^2}} = \frac{BQ'}{CQ'}$$

Teraz na mocy Twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ABC oraz prostej PXY mamy

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BX}{XA} \cdot \frac{AY}{YC} = \frac{BX}{CY} = \frac{BQ'}{CQ'}$$

Na mocy twierdzenia o dwusiecznej, prosta PQ' jest zatem jedną z dwusiecznych kąta $BQ'C$.



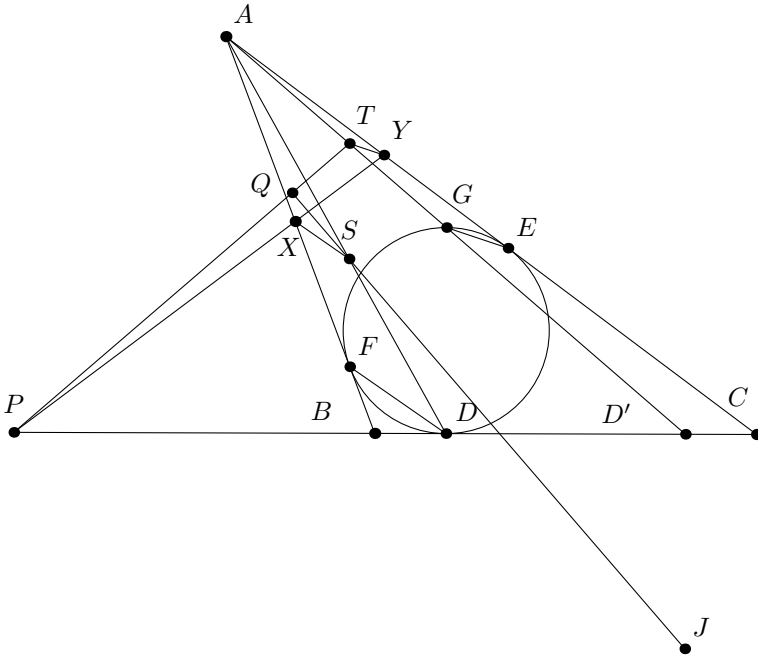
Skoro P leży poza odcinkiem BC , to PQ' jest dwusieczną zewnętrzną tego kąta. Niech S' oznacza środek łuku BAC okręgu γ . Wtedy S' leży na prostej PQ' . Jeżeli zinterpretujemy BC jako prostą poziomą, to S' jest najwyższym punktem okręgu γ . Skoro zatem punkt Q' jest środkiem jednokładności przekształcającej γ w ω' , to drugie przecięcie $Q'S$ z ω' jest najniższym punktem okręgu ω' , czyli punktem S . Dostajemy zatem, że punkt Q' jest przecięciem prostej PS z okręgiem ω' różnym od S , czyli jest punktem Q . W takim razie prosta QI jest prostopadła do prostej PQ będącej dwusieczną zewnętrzną kąta BAC . Jest ona w takim razie dwusieczną wewnętrzną kąta BAC , zatem

$$\sphericalangle BQI = \sphericalangle IQC \implies Q \in APOL(BI, IC).$$

Przypadek, gdy X leży poza odcinkiem AF jest analogiczny. Różni się jedynie tym, że γ definiujemy jako okrąg, do którego ω' jest styczny wewnętrznie.

□

Analogicznie możemy skonstruować krzywą Γ_J . Jedyną różnicą jest taka, że przy oznaczeniach z poprzedniej konstrukcji, Q definiujemy jako przecięcie prostych PT oraz JS .



Dowód poprawności tej konstrukcji przebiega analogicznie, więc zostanie pominięty. Jak widać w powyższych konstrukcjach korzystamy jedynie z przecinania dwóch prostych w punkcie oraz prowadzenia prostej przez dwa punkty (przy czym jeden z tych punktów mógł leżeć na prostej w nieskończoności). Okazuje się, że krzywej $\Gamma(p : q)$ w ogólnym przypadku nie da się w ten sposób skonstruować. Tłumaczy to następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.4. *Nierozkładalna krzywa algebraiczna jest krzywą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jej osobliwości jest maksymalna (licząc z krotnościami).*

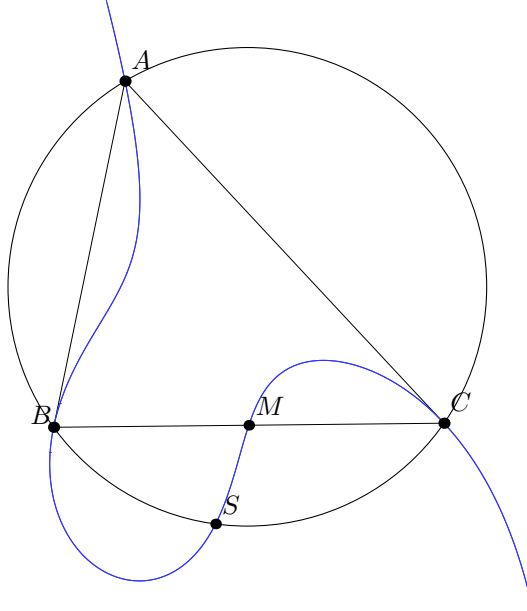
W przypadku krzywych sześciennych oznacza to, że krzywa stopnia 3 jest wymierna (czyli jej punkty da się zapisać jako $(P(t) : Q(t) : R(t))$ dla ustalonych wielomianów P, Q, R i zmiennej t) wtedy i tylko wtedy, gdy posiada ona osobliwość. Okazuje się, że gdy D leży na prostej BC , to krzywa $APOL(AB, CD)$ jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy D jest punktem styczności okręgu wpisanego lub jednego z okręgów dopisanych do boku BC . Punktem osobliwym jest wtedy środek odpowiedniego okręgu.

7 Krzywa Γ_M

W tej sekcji zajmiemy się badaniem innej krzywej o równie interesujących własnościach co dwie poprzednie.

Definicja 7.1. Dany jest trójkąt ABC . Niech M oznacza środek boku BC . Wtedy przez Γ_M będziemy oznaczali krzywą $\Gamma(1 : 1)$. Jest to jednocześnie zbiór takich punktów P , że AP jest P -symedianą w trójkącie BPC .

Standardowo, na takiej krzywej definiujemy operację dodawania punktów.



Wniosek 7.2. Niech S oznacza przecięcie A -symediany trójkąta ABC z okręgiem na nim opisanym. Wtedy $S \in \Gamma_M$.

Dowód. Z twierdzenia o czworokącie harmonicznym wiemy, że skoro AS jest A -symedianą w trójkącie ABC , to AS jest też S -symedianą w trójkącie BSC . W takim razie z definicji Γ_M , S leży na tej krzywej. \square

Wniosek 7.3. Proste AS , MS są styczne do Γ_M odpowiednio w punktach A , M .

Dowód. Styczność prostej AS do Γ_M w punkcie A wynika wprost z Lematu 4.2, gdyż proste AS oraz AM są izogonalne w kącie BAC . W takim razie mamy $2A + M = O$. Korzystając z faktu, że $M = A + O_1$ dostajemy

$$2M + S = 2(M + O_1) + S = 2A + S = O,$$

zatem również styczna do Γ_M w punkcie M przechodzi przez S . \square

Wniosek 7.4. Niech P, Q to przecięcia wysokości przechodzącej przez wierzchołek A z okręgiem o średnicy BC . Wtedy P i Q leżą na Γ_M .

Dowód. Skoro punkt P leży na okręgu o średnicy BC , to trójkąt BPC jest prostokątny (z kątem prostym przy wierzchołku P). Skoro środkowa wychodząca z wierzchołka P oraz prosta przez P i środek okręgu opisanego na trójkącie BPC się pokrywają to również ich sprzężenia izogonalne w kącie BPC się pokrywają. Są nimi odpowiednio symediana oraz wysokość. W takim razie symediana przechodząca przez wierzchołek P , czyli prosta AP przechodzi przez A , zatem P z definicji należy do Γ_M . Analogiczny dowód przeprowadzamy dla drugiego przecięcia. \square

Wniosek 7.5. Dane są punkty $X, Y \in \Gamma_M$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. Punkty A, X, Y są współliniowe.
2. Punkty M, S, X, Y leżą na jednym okręgu.

Dowód. Pierwszy warunek jest równoważny z $A + X + Y = O$, natomiast drugi z $M + S + X + Y + I_1 + I_2 = O$. Skoro S jest przecięciem Γ_M z okręgiem opisanym na trójkącie ABC , to $S^* + I_1 + I_2 = O \implies S + I_1 + I_2 = O_1$. W takim razie drugi warunek jest równoważny z

$$M + X + Y + O_1 = O \iff A + X + Y + O.$$

\square

Wniosek 7.6. Punkty P, Q, M, S leżą na jednym okręgu.

Wniosek 7.7. Dane są punkty $X, Y \in \Gamma_M$. Wtedy następujące warunki są równoważne

1. Punkty M, X, Y są współliniowe
2. Punkty A, S, X, Y leżą na jednym okręgu

Dowód przebiega analogicznie do dowodu Wniosku 7.5.

Wniosek 7.8. Prosta przechodząca przez S przecina krzywą Γ_M w dwóch pozostałych punktach X oraz Y wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcia prostych BX, CY oraz BY, CX leżą na prostej przechodzącej przez A .

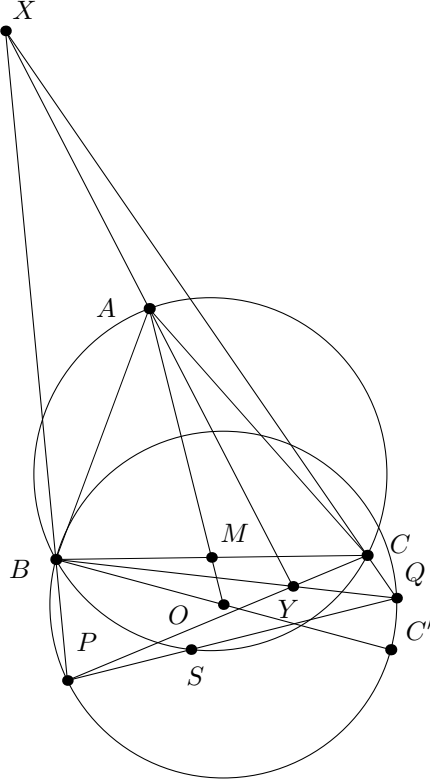
Dowód. Skoro $S = -2A = 2B + 2C$, to

$$X + Y + S = O \iff X + Y + B + B + C + C = O,$$

czyli X, Y, S są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy X, Y, B, C leżą na stożkowej stycznej do Γ_M w B oraz C , czyli stycznej do AB oraz AC w punktach B oraz C odpowiednio. Jednak jeśli oznaczymy przez P przecięcie BX z CY oraz przez Q przecięcie BY z CX , to stosując Twierdzenie Pascala dla sześciokąta $XBBCYCC$ dostajemy, że leżenie punktów B, C, X, Y na stożkowej stycznej do AB oraz AC w B oraz C odpowiednio jest równoważne ze współliniowością punktów P, Q, A . \square

Korzystając z powyższego wniosku możemy udowodnić następujący fakt:

Wniosek 7.9. Dany jest trójkąt różnoboczny ABC . Punkt M jest środkiem boku BC , natomiast S to taki punkt na krótszym łuku BC okręgu opisanego na ABC , że $\sphericalangle BAS = \sphericalangle MAC$. Niech l będzie prostą prostopadłą do AM przechodzącą przez S . Punkt P leży na prostej l po tej samej stronie prostej AM co punkt B oraz spełnia $\sphericalangle SPB + \sphericalangle SPC = \frac{\pi}{2}$. Punkt Q leży na prostej l po tej samej stronie prostej AM co punkt C oraz spełnia $\sphericalangle BQS + \sphericalangle CQS = \frac{\pi}{2}$. Proste BP oraz CQ przecinają się w punkcie X , natomiast proste BQ oraz CP przecinają się w punkcie Y . Wtedy A jest środkiem odcinka XY .



Dowód. Udowodnimy najpierw, że punkty A, X, Y leżą na jednej prostej. Skoro proste AM, PQ są prostopadłe, to

$$\sphericalangle SPC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CPB = \sphericalangle BP \infty_{AM},$$

zatem P leży na $APOL(SC, B \infty_{AM})$. Skoro $\infty_{AM} = S + O_1$, to na mocy Twierdzenia Van Reesa

$$APOL(SC, B \infty_{AM}) = APOL(MC, BA) = APOL(AB, CM) = \Gamma_M.$$

Analogicznie Q leży na Γ_M . W takim razie na mocy poprzedniego wniosku dostajemy, że punkty A, X, Y leżą na jednej prostej. Niech teraz C' to odbicie C przez

prostą PQ . Mamy

$$\sphericalangle C'PB = \sphericalangle C'PQ + \sphericalangle QPB = \sphericalangle QPC + \sphericalangle QPB = \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\sphericalangle BQC' = \sphericalangle BQP + \sphericalangle PQC' = \sphericalangle BQS + \sphericalangle CQS = \frac{\pi}{2},$$

zatem punkty B, P, C', Q leżą na wspólnym okręgu o średnicy BC' . Niech O oznacza środek tego okręgu, czyli środek odcinka BC' . Wiemy, że O leży na symetralnej odcinka PQ . Dodatkowo OM jest linią środkową w trójkącie CBC' , zatem $OM \parallel CC'$. CC' z definicji punktu C' jest prostopadłe do PQ , zatem $OM \perp PQ$. W takim razie punkty A, M, O leżą na symetralnej odcinka PQ . Stosując Twierdzenie Newtona-Gaussa dla czworokąta $CPBQ$ dostajemy, że środek odcinka XY leży na prostej przechodzącej przez środki odcinków PQ oraz BC . Jednak tą prostą jest symetralna odcinka PQ , zatem środkiem odcinka XY jest punkt A . \square

8 Jeszcze jeden wniosek

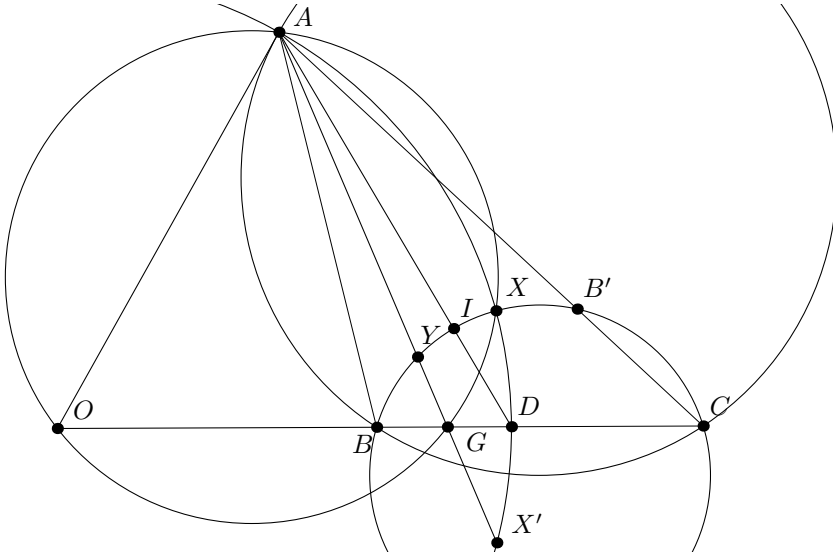
Jak już zdążyliśmy zauważyć, przedstawiona technika pozwala rozwiązywać bardzo skomplikowane problemy, do których ciężko podejść korzystając ze standardowych metod. Oto jeszcze jeden przykład takiego problemu.

Wniosek 8.1. *Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg Ω . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, natomiast ω to okrąg opisany na trójkącie BIC . Styczna do Ω w punkcie A przecina BC w punkcie O . Punkt X jest jednym z przecięć okręgu o środku O i promieniu AO z okręgiem ω . Okrąg opisany na trójkącie AOX przecina Ω w różnych punktach A oraz S . Prosta prostopadła do AI , przechodząca przez X przecina AS w punkcie P . Wtedy $\sphericalangle PBA = \sphericalangle ACP$.*

Dowód. Oznaczmy kąty trójkąta ABC przez α, β, γ . Niech Y oznacza odbicie punktu X przez prostą AI , X' odbicie X przez prostą BC oraz niech AI przecina BC w punkcie D . Z twierdzenia o kącie dopisanym mamy $\sphericalangle OAB = \gamma$, zatem

$$\sphericalangle OAD = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle ADO,$$

czyli $OA = OD \implies$ punkty A, X, D leżą na okręgu o środku O oraz promieniu OA . Zauważmy, że okrąg ten jest symetryczny względem prostej BC , zatem punkt X' również leży na tym okręgu. Mamy $DX = DX'$, zatem AD jest dwusieczną kąta $X'AX$. W takim razie punkty A, Y, X' są współliniowe. Oznaczmy przez G przecięcie prostych AY oraz BC . Widzimy, że $\sphericalangle YGB = \sphericalangle CGX$. Dodatkowo jeśli B' to odbicie B względem AI , to z faktu, że ω jest symetryczny względem AI dostajemy, że $BY = B'X$, zatem $\sphericalangle B'CX = \sphericalangle YCB$. Podobnie $\sphericalangle CBX = \sphericalangle YBA$. W takim razie punkty X, Y są izogonalne względem czworokąta $ABGC$. Zauważmy, że BC jest dwusieczną zewnętrzną kąta XGA . Skoro punkt O leży na symetralnej odcinka AX oraz na dwusiecznej zewnętrznej kąta XGA , to leży na okręgu (AXG) . Wynika stąd, że G leży na okręgu (AOX) .



Niech Γ oznacza krzywą $APOL(AB, CG)$. Oczywiście $A, B, C, G \in \Gamma$. Punkty X, Y posiadają sprzężenia izogonalne względem czworokąta $ABCG$, zatem również X, Y należą do Γ . Zauważmy, że $\sphericalangle SBG = \sphericalangle SAC$ oraz

$$\sphericalangle BGS = \sphericalangle OAS = \sphericalangle OAB + \sphericalangle BAS = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCS = \sphericalangle ACS,$$

czyli $\sphericalangle GSB = \sphericalangle CSA$. W takim razie również punkt S leży na krzywej Γ . Tak jak w poprzednich sekcjach, definiujemy na Γ grupę dodawania punktów. Punkty B, C, X, Y leżą na jednym okręgu, zatem

$$\begin{aligned} O &= X + Y + B + C + I_1 + I_2 = X + Y + 2B + O_1 - S^* = X + Y - A - S \\ &\implies X + Y = A + S. \end{aligned}$$

Niech P_1 to trzecie przecięcie XY z Γ . Dostajemy

$$O = P_1 + X + Y = P_1 + A + S,$$

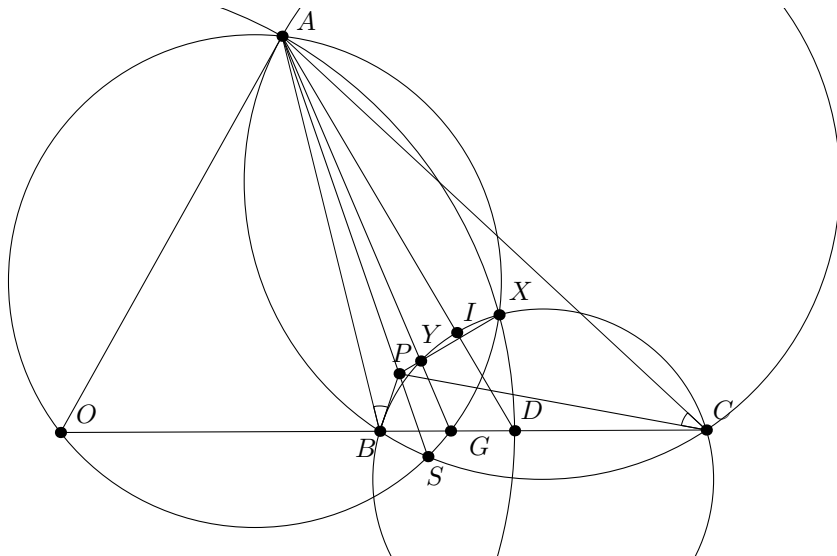
czyli P_1 leży na $AS \implies P_1 = P$. W takim razie

$$\sphericalangle GPC = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BPS.$$

Dodatkowo skoro $Y = X + O_1$, to z twierdzenia Van Rees'a mamy

$$\Gamma = APOL(AB, CG) = APOL(AX, YG),$$

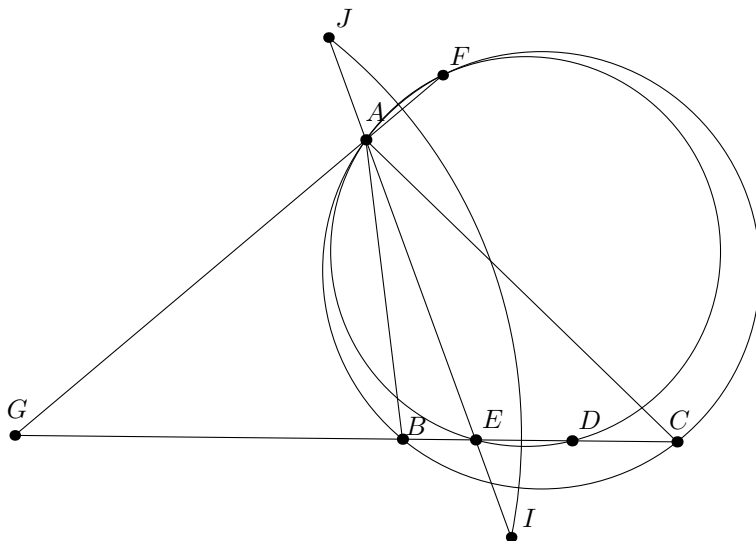
zatem $\sphericalangle XPA = \sphericalangle GPY$. Skoro dwusieczna kąta GPA (prosta PX) jest prostopadła do AI , to dwusieczna kąta SPG , będąca jednocześnie dwusieczną kąta BPC , jest równoległa do prostej AI . Niech b, c będą prostymi przechodzącymi przez P , równoległymi odpowiednio do AC, AB . Na mocy poprzedniej obserwacji proste te są izogonalne w kącie BPC , zatem $\sphericalangle PBA = \sphericalangle (BP, c) = \sphericalangle (b, PC) = \sphericalangle ACP$. \square



9 Konstrukcja ogólnej krzywej

W tej sekcji opiszemy konstrukcję krzywej $\Gamma = APOL(AB, CD)$ dla dowolnego punktu D na prostej BC .

Konstrukcja:



Niech Ω oznacza okrąg opisany na trójkącie ABC . Jeżeli D leży wewnątrz odcinka BC , to wybieramy losowy punkt E wewnątrz boku BC , jeżeli D leży poza odcinkiem BC , to wybieramy losowy punkt E poza odcinkiem BC (zajmiemy się pierwszym

przypadkiem, drugi jest analogiczny). Niech ω o okrąg opisany na trójkącie ADE . Oznaczmy przez F drugie przecięcie okręgów Ω i ω oraz przetnijmy proste AF i BC w punkcie G (Jeżeli okręgi te są styczne w punkcie A , to przecinamy ich wspólną styczną z BC w G). Niech okrąg γ o środku w G , ortogonalny do Ω przecina prostą AE w punktach I oraz J (taki okrąg można skonstruować prowadząc z punktu G styczną do Ω w punkcie S , a następnie narysować okrąg o środku w G i promieniu GS). Wtedy dla wszystkich położen punktu D , punkty I, J generują krzywą $APOL(AB, CD)$.

Uwaga: Możliwe, że dla niektórych punktów E , okrąg γ nie przecina prostej AE - takie przypadki po prostu ignorujemy.

Teraz pokażemy, że nasza konstrukcja jest poprawna. W tym celu udowodnimy, że dowolny punkt uzyskany przez konstrukcję posiada żądaną własność oraz że każdy punkt z żądaną własnością jest generowany przez pewien punkt E .

Dowód. Skoro okrąg γ jest ortogonalny do Ω , to długość stycznej poprowadzonej do Ω z punktu G jest równa GI . Stosując kilkakrotnie twierdzenie o potędze punktu otrzymujemy

$$GI^2 = GB \cdot GC = GA \cdot GF = GE \cdot GD.$$

W takim razie inwersja względem okręgu γ przekształca B w C oraz E w D . Wynikają stąd następujące równości kątów

$$\sphericalangle BIG = \sphericalangle GCI, \quad \sphericalangle EIG = \sphericalangle GDI.$$

Stąd z kolei dostajemy

$$\sphericalangle AIB = \sphericalangle EIB = \sphericalangle EIG - \sphericalangle BIG = \sphericalangle GDI = \sphericalangle GCI = \sphericalangle CID,$$

zatem z definicji $I \in APOL(AB, CD)$. Analogicznie otrzymujemy $J \in APOL(AB, CD)$.

Teraz weźmy dowolny punkt $P \in \Gamma$ oraz niech AP przecina BC w punkcie E . Wykonajmy teraz wszystkie kroki konstrukcji dla punktu E . Udowodnimy, że P jest jednym z uzyskanych punktów I, J . W tym celu wystarczy pokazać, że $P \in \gamma$. Z definicji krzywej Γ mamy

$$\sphericalangle EPB = \sphericalangle APB = \sphericalangle CPD.$$

Niech P' oznacza obraz punktu P w inwersji względem γ . Korzystając z własności inwersji oraz powyższej równości otrzymujemy

$$\sphericalangle EPB = \sphericalangle CPD = \sphericalangle EP'B',$$

zatem punkty P oraz P' leżą na wspólnym okręgu o_1 przechodzącym przez punkty E oraz B odpowiednio. Analogicznie punkty C, D, P, P' leżą na jednym okręgu o_2 . Gdyby P i P' były różne, to prosta PP' byłaby osią potęgową okręgów o_1, o_2 . Jednak punkt G , jako środek inwersji, również musiałby leżeć na tej prostej, zatem

$$GB \cdot GE = GD \cdot GC.$$

Jednak łącząc to z równością $GB \cdot GC = GE \cdot GD$, otrzymujemy $GB = GD$, czyli sprzeczność. W takim razie $P = P'$, czyli $P \in \gamma$. \square

10 Współrzędne barycentryczne

Jak już zdążyliśmy zauważyć, krzywe $APOL(AB, CD)$, gdzie D leży na prostej BC , da się bardzo dobrze opisać za pomocą punktów szczególnych w trójkącie ABC oraz operacji brania sprzężenia izogonalnego. Wykorzystamy to w tej sekcji, w celu znalezienia równania ogólnej krzywej we współrzędnych barycentrycznych względem trójkąta ABC . Dodatkowo pracując na płaszczyźnie \mathbb{CP}^2 możemy pozwolić, aby współrzędne niektórych punktów nie były rzeczywiste.

Lemat 10.1. *Dowolna krzywa sześcienna jest zadana we współrzędnych barycentrycznych równaniem postaci*

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=3} \lambda_{(\alpha,\beta,\gamma)} x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0$$

dla pewnych stałych $\lambda_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, przy czym rozpatrywana suma przebiega po wszystkich kombinacjach nieujemnych liczb całkowitych α, β, γ , których suma jest równa 3.

Lemat 10.2. *Sprzężenie izogonalne punktu $(x : y : z)$ względem trójkąta ABC ma współrzędne*

$$\left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right).$$

Dowody powyższych lematów można znaleźć w [8].

Lemat 10.3. *Dany jest punkt $P = (x : y : z)$ różny od A . Wtedy punkt w nieskończoności prostej AX ma współrzędne*

$$(-y - z : y : z).$$

Dowód. Punkt ∞_{AX} leży na prostej AX , zatem $\infty_{AX} = (k : y : z)$ dla pewnej liczby rzeczywistej k . Z drugiej strony leży na prostej w nieskończoności, zatem

$$k + x + y = 0 \implies \infty_{AX} = (-y - z : y : z).$$

□

Lemat 10.4. *Punkty okręgowe mają współrzędne*

$$(-a : be^{\pm i\gamma} : ce^{\mp i\beta})$$

gdzie β oraz γ to kąty przy wierzchołkach B oraz C odpowiednio.

Dowód. Z [9] wiemy, że punkty okręgowe we współrzędnych trójliniowych względem trójkąta ABC mają współrzędne

$$(-1 : e^{\pm i\gamma} : e^{\mp i\beta}).$$

Aby otrzymać współrzędne barycentryczne ze współrzędnych trójliniowych, wystarczy pomnożyć pierwszą, drugą oraz trzecią współrzędną przez a, b oraz c odpowiednio. Robiąc to otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 10.5. *Dany jest różnoboczny trójkąt ABC oraz punkt D na boku BC różny od B oraz C o współrzędnych $(0 : p : q)$. Wtedy krzywa $\Gamma(p : q)$ ma równanie*

$$py(c^2x^2 + a^2z^2 + (a^2 + c^2 - b^2)xz) - qz(b^2x^2 + a^2y^2 + (a^2 + b^2 - c^2)xy) = 0.$$

Dowód. Z Lematu 10.1 wiemy, że krzywa zadana takim równaniem jest krzywą sześcienną. Nazwijmy ją Γ' . Oznaczmy przez N przecięcie krzywej $\Gamma(p : q)$ z okręgiem opisanym na trójkącie ABC , przez ∞_Γ rzeczywisty punkt w nieskończoności $\Gamma(p : q)$. Skoro współczynniki przy x^3 , y^3 , z^3 są zerami, to Γ' przechodzi przez wierzchołki trójkąta. Wstawiając do równania $(0 : p : q)$ dostajemy

$$pya^2z^2 - qza^2y^2 = a^2p^2q^2 - a^2p^2q^2 = 0,$$

zatem $D \in \Gamma'$. Na mocy Wniosku 4.4 ∞_Γ to kierunek prostej przechodzącej przez A oraz $(0 : q : p)$. w takim razie $\infty_\Gamma = (-p - q : q : p)$. Wstawiając to do równania mamy

$$\begin{aligned} & pq(c^2(p+q)^2 + a^2p^2 - (a^2 + c^2 - b^2)(p+q)p) - qp(b^2(p+q)^2 + a^2q^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(p+q)q) = \\ & = pq(p+q)(c^2(p+q) + a^2(p-q) - (a^2 + c^2 - b^2)p - b^2(p+q) + (a^2 + b^2 - c^2)q) = 0, \end{aligned}$$

zatem również ∞_Γ leży na Γ' . Zauważmy, że wstawiając do naszego równania współrzędne $\left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$ oraz mnożąc równanie przez $\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}$ otrzymujemy takie same wyrażenie, jak wstawiając do naszego równania współrzędne $(x : y : z)$. Jeżeli zatem ∞_Γ leży na Γ' , to również jego sprzężenie izogonalne, czyli punkt N leży na Γ' . Niech U oznacza przecięcie prostych CN oraz $B\infty_\Gamma$ oraz V przecięcie prostych BN oraz $C\infty_\Gamma$. Skoro na $\Gamma(p : q)$

$$C + N = C^* + O_1 + N^* + O_1 = B + \infty_\Gamma,$$

to proste CN oraz $B\infty_\Gamma$ przecinają się na $\Gamma(p : q)$, czyli $U \in \Gamma(p : q)$. Podobnie $V \in \Gamma(p : q)$. Niech $U = (x : y : z)$. Punkt U leży na prostej CN , zatem skoro

$$N = \left(\frac{a^2}{-p-q} : \frac{b^2}{q} : \frac{c^2}{p} \right), \text{ to } \frac{y}{x} = \frac{-b^2(p+q)}{a^2q}.$$

Podobnie, skoro U leży na prostej $B\infty_\Gamma$, to

$$\frac{z}{x} = \frac{-p}{p+q}.$$

W takim razie

$$U = \left(1 : \frac{-b^2(p+q)}{a^2q} : \frac{-p}{p+q} \right) = (-a^2q(p+q) : b^2(p+q)^2 : a^2pq).$$

Teraz wystarczy wstawić współrzędne punktu U do równania krzywej Γ' i pokazać, że jest ono spełnione. Można w tym celu wykorzystać oprogramowanie komputerowe, takie jak *Wolfram Mathematica*. Wystarczy wtedy skorzystać z poleceń

```

x = -a^2*q*(p + q)
y = b^2*(p + q)^2
z = a^2*p*q
Simplify[p*y *(c^2 *x^2 + a^2 *z^2 + (a^2 + c^2 - b^2) x*z)
- q*z *(b^2 *x^2 + a^2 *y^2 + (a^2 + b^2 - c^2)* x*y)]

```

Po uruchomieniu komórki zauważymy, że w ostatnim wierszu wyjścia otrzymaliśmy liczbę 0, czyli faktycznie współrzędne punktu U spełniają równanie krzywej Γ' . Analogicznie otrzymujemy, że $V \in \Gamma'$. Niech teraz

$$(x : y : z) = (-a : be^{-i\gamma} : ce^{i\beta}).$$

Na mocy twierdzenia cosinusów mamy $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos \beta$. W takim razie

$$\begin{aligned} c^2 x^2 + a^2 z^2 + (a^2 + c^2 - b^2)xz &= c^2 a^2 + a^2 c^2 e^{2i\beta} - 2ac \cos \beta a c e^{i\beta} = \\ &= a^2 c^2 (1 + (\cos \beta)^2 - (\sin \beta)^2 + 2i \cos \beta \sin \beta - 2 \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta)) = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + (a^2 + b^2 - c^2)xy = 0,$$

zatem jeden z punktów okręgowych leży na Γ' . Analogicznie dostajemy, że również drugi punkt okręgowy leży na Γ' . Zauważmy zatem, że krzywe $\Gamma(p : q)$, Γ' mają 10 różnych punktów wspólnych

$$A, B, C, D, N, U, V, \infty_{\Gamma}, I_1, I_2.$$

Wiemy jednak, że dwie różne nierozkładalne krzywe sześciennic mają co najwyżej 9 punktów wspólnych. W takim razie $\Gamma' = \Gamma(p : q)$, co chcieliśmy pokazać. \square

Podziękowania

Chciałbym szczególnie podziękować opiekunowi pracy dr Dominikowi Burkowi oraz Konstantemu Smolirze za cenne wskazówki i wsparcie podczas pisania pracy.

Literatura

- [1] Paris Pamfilos, Apostolos Thoma, *Apollonian Cubics: An Application of Group Theory to a Problem in Euclidean Geometry*
https://www.researchgate.net/publication/265525055_Apollonian_Cubics_An_Application_of_Group_Theory_to_a_Problem_in_Euclidean_Geometry
- [2] Daniel Hu, *Constructions in the Locus of Isogonal Conjugates in a Quadrilateral*
<https://arxiv.org/pdf/1912.08296.pdf>
- [3] Vladyslav Zveryk, *The Method of Moving Points*
- [4] Max Schindler, Evan Chen, *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*
<https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf>
- [5] Dominik Burek, *Dwustosunek i biegunowe*
<https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/dwustosunek.pdf>
- [6] Waldemar Pompe, *Wokół obrotów*
- [7] <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/rationnelle/rationnelle.shtml>
- [8] Radosław Żak, *Sprzężenia izogonalne i kilka własności punktu X_{25}*
https://deltami-old.mimuw.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich/2020/09/26/zak-radoslaw.pdf
- [9] H.S.M. Coxeter, *Some applications of trilinear coordinates*
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00169-R](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00169-R)