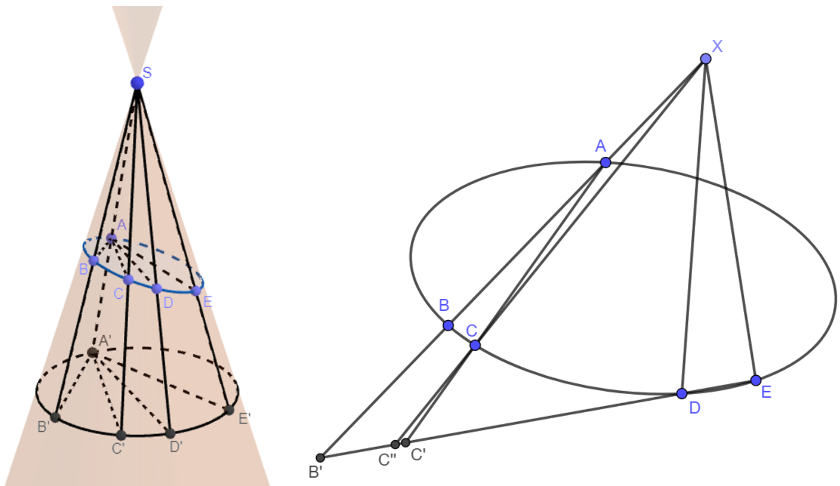
# Dowód i zastosowania własności hiperboli prostokątnych

Kazimierz Chomicz

## 1 Własności hiperboli prostokątnych.

**Fakt 1.0.** Przez dowolne pięć punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe, przechodzi dokładnie jedna krzywa stożkowa.

*Dowód faktu 1.0.* Krzywa stożkowa to inaczej przecięcie płaszczyzną nieskończonego, obustronnego stożka. Taką krzywą stożkową możemy zrzutować przez wierzchołek stożka na płaszczyznę, której przecięcie ze stożkiem jest okręgiem. Takie rzutowanie zachowa dwustosunek (jest mapą rzutową), a wiemy jak dwustosunek przenosi się po okręgu. Z tego wynika, że dla szcześciu punktów na krzywej stożkowej $A$, $A'$, $B$, $C$, $D$, $E$ mamy $k = (AB, AC; AD, AE) = (A'B, A'C; A'D, A'E)$. Udowodnijmy teraz, że poza krzywą stożkową nie ma żadnych innych punktów $X$, dla których $(XB, XC; XD, XE) = k$. Gdyby taki punkt był, możemy założyć, że prosta $XB$ przecina krzywą stożkową ponownie w punkcie $A$. Niech przecięcie prostych $XB$, $AC$, $XC$ z prostą $DE$ to odpowiednio punkty $B'$, $C'$ oraz $C''$. Dostajemy, że $(B', C'; D, E) = (B, C; D, E) = (B', C''; D, E)$, co implikuję $C' = C''$, czyli $X = A$. Dostaliśmy, więc że krzywa stożkowa przez punkty $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$ (z których żadne trzy nie są współliniowe) to zbiór wszystkich punktów $A'$ dla których $(A'B, A'C; A'D, A'E) = k = (AB, AC; AD, AE)$, który jest zdefiniowany jednoznacznie. □




**Definicja 1.1.** Mówimy, że hiperbola jest prostokątna, wtedy i tylko wtedy, gdy jej asymptoty przecinają się pod kątem prostym.

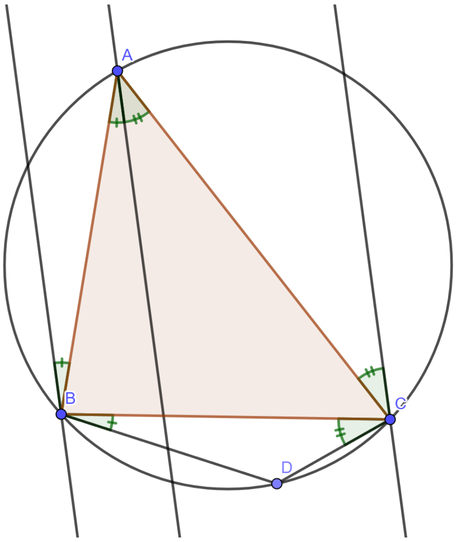
**Fakt 1.2.** Ustalmy trójkąt $ABC$. Rozpatrzmy inwolucję (funkcję, która złożona dwukrotnie daje identyczność), która dla każdego punktu na płaszczyźnie, nieleżącego na prostych $AB$, $BC$, $CA$, przypisuje jego izogonalne sprzężenie względem trójkąta $ABC$.

W takim przekształceniu prosta $k$ przejdzie nam na krzywą stożkową przechodzącą przez punkty $A$, $B$, $C$ i vice versa.

*Dowód faktu 1.2.* Niech $P$ to punkt na prostej $k$, a $P'$ to jego izogonalne sprzężenie względem trójkąta $ABC$. Mapa $BP' \to BP \to P \to CP \to CP'$ jest rzutowa i przekształca pęk prostych przechodzących przez $B$ na pęk prostych przechodzących przez $C$, co z *twierdzenia Steinera* (patrz *Twierdzenie 2.1*) daje, że zbiór wszystkich takich punktów $P'$ tworzy krzywą stożkową. W drugą stronę wystarczy zauważyć, że wybierając dowolne dwa punkty na krzywej stożkowej, opisanej na trójkącie $ABC$, mamy bijekcję między krzywą a prostą przechodzącą przez sprzężenia owych dwóch wybranych punktów. Jest to prawda, ponieważ krzywa stożkowa jest jednoznacznie wyznaczona przez pięć punktów. □

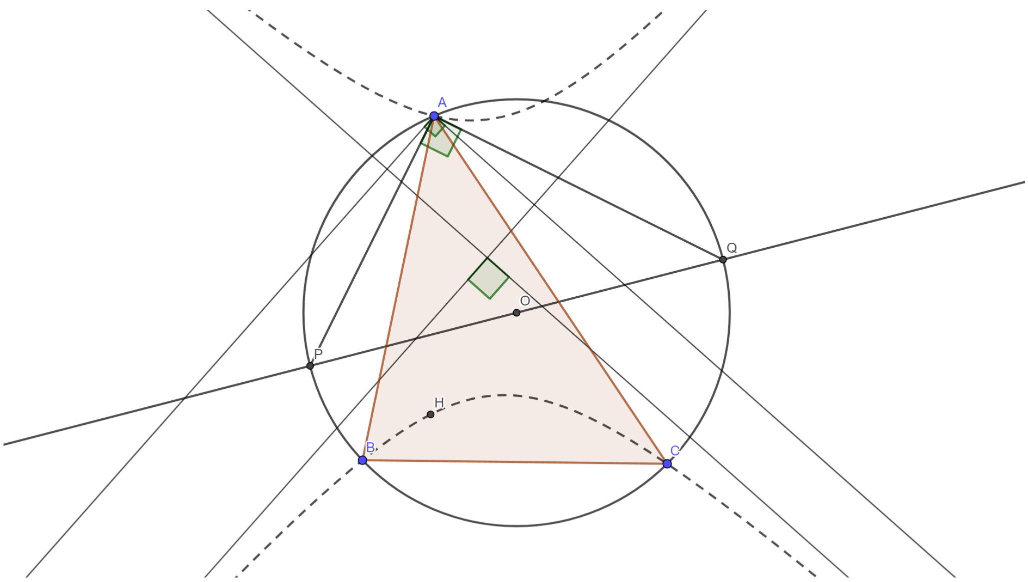
**Fakt 1.3.** Izogonalne sprzężenie $D'$ punktu $D$ leżącego na okręgu opisanym na trójkącie $ABC$ będzie punktem w nieskończoności.

*Dowód faktu 1.3.* Chcemy udowodnić równoległość prostych $BD'$ i $CD'$. Rozpatrzmy prostą $l$, przechodzącą przez $A$, równoległą do $BD'$. Mamy więc, że kąt z jakim prosta $l$ przecina $AB$ jest taki sam jak $\angle D'BA$. Skoro $\angle D'BA + \angle D'CA = \angle DBC + \angle DCB = \angle BAC$, więc kąt z jakim $l$ przecina $AC$ jest równy $\angle BAC - \angle D'BA = \angle D'CA$, czyli mamy $BD' \parallel l \parallel CD'$. □




**Lemat 1.4.** Hiperbola $\mathcal{H}$ opisana na trójkącie $ABC$ jest prostokątna, wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez ortocentrum $H$ trójkąta $ABC$.

*Dowód lematu 1.4.* Zakładamy najpierw, że $\mathcal{H}$ przechodzi przez $H$. Izogonalne sprzężenie $\mathcal{H}$ to prosta przechodząca przez środek $O$ okręgu opisanego na $ABC$ (gdyż $H$ jest sprzężeniem $O$). Niech owa prosta przecina okrąg opisany w punktach $P$ i $Q$. By wykazać, że asymptoty $\mathcal{H}$ są prostopadłe wystarczy pokazać, że $\angle P_\infty A Q_\infty$ jest prosty, gdzie $P_\infty$ i $Q_\infty$ to izogonalne sprzężenia, odpowiednio $P$ i $Q$, ponieważ leżą one w nieskończoności oraz na hiperboli, więc proste $AP_\infty$ i $AQ_\infty$ będą równoległe do odpowiednich asymptot. Zauważmy, że skoro sprzężenie $\mathcal{H}$ to prosta przechodząca przez $O$, więc $90^\circ = \angle PAQ = \angle P_\infty A Q_\infty$, bo oba kąty są swoim odbiciem względem dwusiecznej kąta $BAC$. Dowód w drugą stronę przebiega analogicznie. □



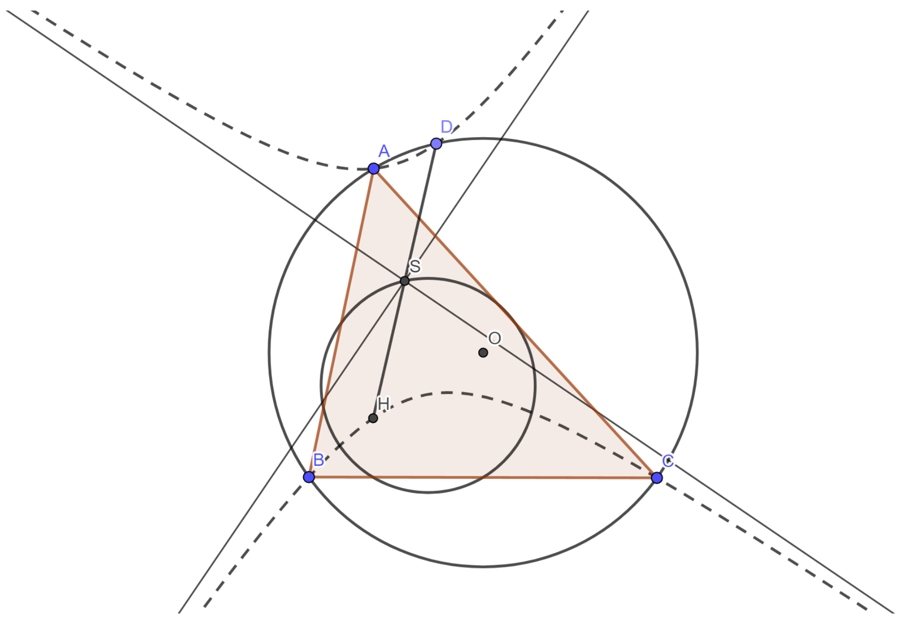
Na podstawie powyższych spostrzeżeń dostajemy ponadto, że dla każdego punktu $P \neq H$, nieleżącego na prostych zawierających boki trójkąta, hiperbola ABCHP jest prostokątna i unikalna.

**Definicja 1.5.** Środek hiperboli prostokątnej, opisanej na $ABC$, przechodzącej przez $P$, będziemy nazywać **punktem Ponceleta** punktu $P$ względem trójkąta $ABC$.

**Lemat 1.6.** Środek hiperboli prostokątnej $\mathcal{H}$ opisanej na $ABC$ leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta $ABC$.

Będzie to kluczowy lemat przy dowodzie fundamentalnego twierdzenia hiperboli prostokątnych.

*Dowód lematu 1.6.* Niech $D$ będzie przecięciem $\mathcal{H}$ z $(ABC)$, różnym od $A$, $B$, $C$. Niech $D_\infty$ będzie izogonalnym sprzężeniem $D$. Niech prosta $OD_\infty$ (czyli izogonalne sprzężenie $\mathcal{H}$) przecina $(ABC)$ w $K$ i $L$. Niech $K_\infty$ i $L_\infty$ będą izogonalnymi sprzężeniami, odpowiednio $K$ i $L$ (czyli są to punkty w nieskończoności $\mathcal{H}$). Mamy $-1 = (O, D_\infty; K, L) = (H, D; K_\infty, L_\infty)$, co implikuje, że przecięcie asymptot $\mathcal{H}$, czyli jej środek leży na $HD$, a z symetrii musi być w jego środku, więc też na okręgu dziewięciu punktów.□




W powyższym dowodzie skorzystaliśmy z dwóch faktów:

1. izogonalne sprzężenie zachoduje dwustosunek, gdyż jest to odbicie złożone z rzutowaniem,
2. $(A_1, A_3; A_2, A_4) = -1$ jest czworokątem harmonicznym na krzywej stożkowej, wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie stycznych do niej w $A_1$ i $A_3$ leży na prostej $A_2A_4$.
   (jest to prawda na okręgu, a z rzutowania przez wierzchołek stożka, zaprezentowanego w dowodzie *faktu 1.0* jest to też prawda na krzywej stożkowej)

Wykorzystaliśmy ten fakt dla $\{A_1, A_3\} = \{K_\infty, L_\infty\}$ oraz $\{A_2, A_4\} = \{H, D\}$. Styczne do hiperboli w punktach w nieskończoności to asymptoty, więc ich przecięcie to środek hiperboli.

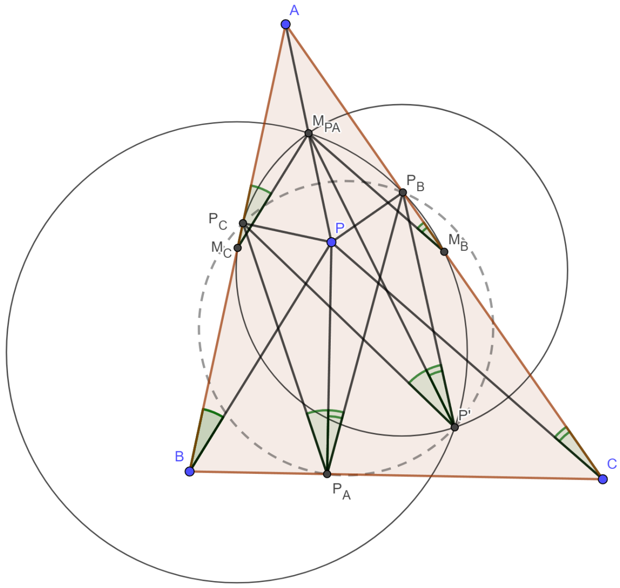
**Twierdzenie 1.7 (Fundamentalne twierdzenie hiperboli prostokątnych).** Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperbolą prostokątna opisaną na $ABC$. Niech $P \in \mathcal{H}$. Wtedy środek $\mathcal{H}$ leży na okręgu ortycznym punktu $P$ względem $ABC$.

*Uwaga.* Okrąg ortyczny punktu względem trójkąta to okrąg przechodzący przez jego rzuty na proste zwierające boki owego trójkąta.

*Dowód twierdzenia 1.7.* Niech $P_A$, $P_B$, $P_C$ to rzuty $P$ odpowiednio na $BC$, $CA$, $AB$. Używając *lematu 1.6* środek $\mathcal{H}$ możemy przedefiniować jako $P'$ - przecięcie okręgów 9-punktów trójkątów $ABP$ i $ACP$. Niech $M_B$ i $M_C$ to środki odpowiednio $AC$ i $AB$. Niech $M_{PA}$ to środek $PA$. Za pomocą przenoszenia kątów udowodnimy, że $P'$ leży na $(P_AP_BP_C)$:

$$\angle P_CP_AP_B = \angle P_CP_AP + \angle PP_AP_B = \angle P_CBP + \angle PCP_B =$$

$$\angle P_CM_CM_{PA} + \angle M_{PA}M_BP_B = \angle P_CP'M_{PA} + \angle M_{PA}P'P_B = \angle P_CP'P_B. \blacksquare$$




## 2 Przykłady zastosowań.

Przy *fakcie 1.2* wspomnieliśmy już o *tw. Steinera.* Oto jego streść:

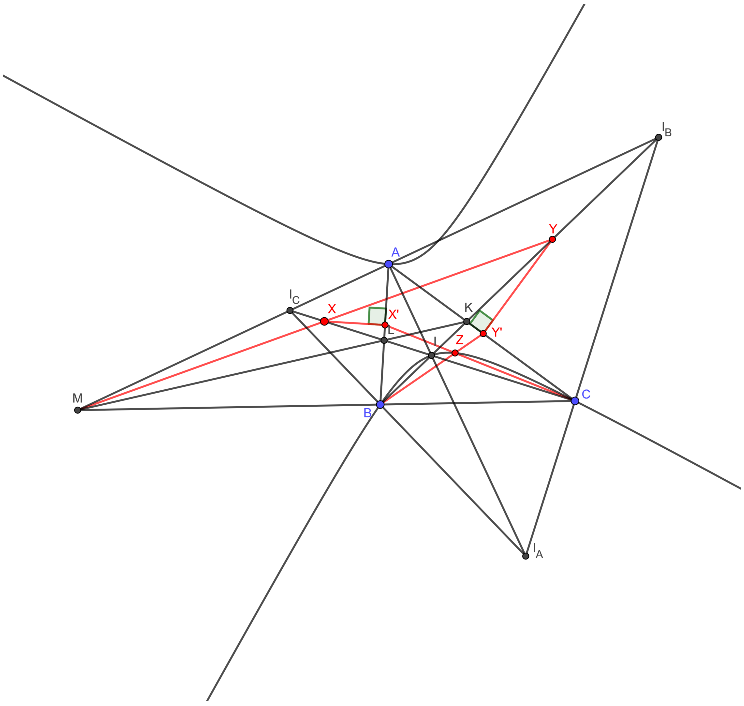
**Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie Steinera).** Dane są pęk prostych przechodzących przez punkt $A$ i pęk prostych przechodzących przez punkt $B$. Rozpatrzmy mapę rzutową jednego pęku na drugi (tzn. bijekcje, która zachowuje dwustosunek). Wszystkie punkty powstałe z przecięcia prostej z jednego pęku z jej obrazem w drugim pęku leżą na jednej krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty $A$ i $B$.

*Dowód twierdzenia 2.1.* Weźmy cztery takie punkty: $C$, $D$, $E$ i $F$. Mamy $(AC, AD; AE, AF) = (BC, BD; BE, BF)$ co z dowodu *faktu 1.0* daje, że punkty $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ leżą na jednej krzywej stożkowej. Wymieniając punkt $F$ na inny, zdefiniowany jak powyżej, dostajemy tezę. $\blacksquare$

Użyjemy *twierdzenia Steinera* do dowodu następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.2 (Hiperbola Feuerbacha).** Istnieje hiperbola opisana na trójkącie, przechodząca przez jego ortocentrum, środek okręgu wpisanego i punkt Nagela, której środek to punkt Feuerbacha.

*Dowód twierdzenia 2.2.* Punkty $I$, $I_A$, $I_B$, $I_C$ to środek okręgu wpisanego i odpowiednie środki okręgów dopisanych. Niech $K$ i $L$ będą odpowiednio przecięciami $BI$ i $CI$ z $AC$ i $AB$. Niech $M$ to przecięcie $BC$ i $I_BI_C$. Z czwórki harmonicznej $(AI \cap BC, M; B, C) = -1$ dostajemy, że $K$, $L$, $M$ są współliniowe. Rozważmy punkt $X$ ruszający się na $CI$. Konstruujemy z niego punkt $Y = MX \cap BI$ oraz punkty $X'$ i $Y'$ będące rzutami $X$ i $Y$ na odpowiednio $AB$ i $AC$. Punkt $Z$ to przecięcie $BY'$ z $CX'$. Z *twierdzenia Steinera* dostajemy, że $Z$ rusza się po krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty $B$ i $C$. Dla przypadku $X = I_C$ mamy $Z$ jako $N$ = punkt Nagela. Gdy $X = L$ mamy $Z = I$. Gdy $X = I$ mamy $Z$ jako $G$ = punkt Gergonne'a. Gdy $X = C$ mamy $Z = H$. Mamy, więc że $B, C, H, I, G, N$ leżą na jednej krzywej stożkowej. Analogicznie dowodzimy, że $A, C, H, I, G, N$ leżą na jednej krzywej stożkowej, ale istnieje tylko jedna krzywa stożkowa przez pięć punktów $C, H, I, G, N$, więc $A$ i $B$ również muszą na niej leżeć. Z fundamentalnego twierdzenia hiperboli dostajemy, że jej środek to punkt wspólny okręgu 9-punktów trójkąta $ABC$ i okręgu wpisanego w ten trójkąt - to własnie punkt Feuerbacha. ■



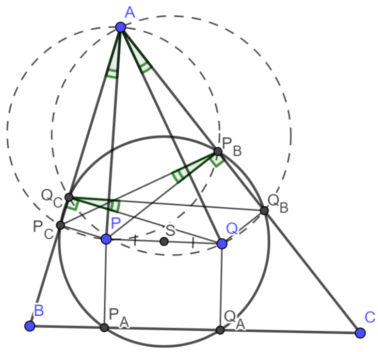

Pokażemy teraz zastosowanie *fundamentalnego twierdzenia hiperboli prostokątnych* przy dowodzie drugiego i trzeciego *twierdzenia Fontené*. Najpierw jednak będzie nam potrzebny lemat.

**Lemat 2.3.** Punkty $P$ i $Q$ są swoimi izogonalnymi sprzężeniami względem trójkąta $ABC$. Wtedy punkty $P$ i $Q$ mają ten sam okrąg ortyczny.

*Dowód lematu 2.3.* Niech $P_A, P_B, P_C$ i $Q_A, Q_B, Q_C$ to rzuty odpowiednio $P$ i $Q$ na $BC$, $CA$, $AB$. Z cykliczności $AP_BPP_C$ i $AQ_BQQ_C$ dostajemy następujące przeliczenie kątów.

$$\angle P_CP_BQ_B = 90^\circ + \angle P_CP_BP = 90^\circ + \angle P_CAP = 90^\circ + \angle QAQ_B = 90^\circ + \angle QQ_CQ_B = \angle P_CQ_CQ_B$$

co daje cykliczność $P_BP_CQ_BQ_C$. Podobnie dowodzimy cykliczność pozostałych dwóch analogicznych czworokątów. Zauważmy, że środkiem każdego z tych czworokątów jest środek odcinka $PQ$ (bo to przecięcie symetralnych $P_XQ_X$), więc sześciokąt $P_AQ_AP_BQ_BP_CQ_C$ jest cykliczny, co implikuje tezę. □



**Twierdzenie 2.4 (Drugie twierdzenie Fontené).** Dana jest prosta $k$ przechodząca przez środek okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Okręgi ortyczne względem $ABC$ wszystkich punktów na prostej $k$ przechodzą przez stały punkt.

*Dowód twierdzenia 2.4.* Biorąc izogonalne sprzężenie prostej dostaniemy hiperbolę prostokątną. Z *lematu 2.3* dostajemy, że okręgi ortyczne są stałe w tym przekształceniu. Z *twierdzenia 1.7* dostajemy, że okręgi ortyczne przechodzą przez stały punkt - środek hiperboli, a skoro izogonalne sprzężenie ich nie zmienia, to wcześniej też przechodziły przez stały punkt. ■

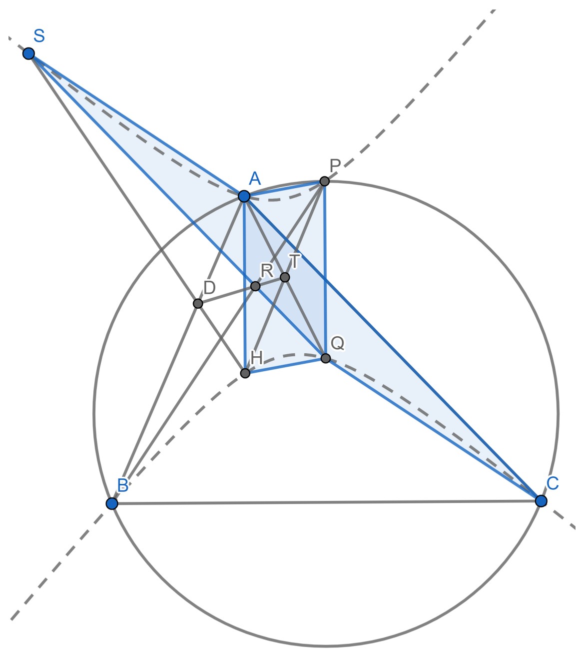
**Twierdzenie 2.5 (Trzecie twierdzenie Fontené).** Dany jest punkt $P$ oraz jego izogonalne sprzężenie $Q$ względem trójkąta $ABC$, którego środek okręgu opisanego to $O$. Wówczas okrąg ortyczny $P$ jest styczny do okręgu 9-punktów trójkąta $ABC$, wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $P$, $O$, $Q$ są współliniowe.

*Dowód twierdzenia 2.5.* Z *twierdzenia 1.7* mamy, że część wspólna okręgu 9-punktów i okręgu ortycznego $P$ (który z *lematu 2.3* jest też okrągiem ortycznym $Q$) to dokładnie środki hiperboli prostokątnych przechodzących odpowiednio przez $P$ i przez $Q$. Zauważmy, że okrąg ortyczny jest styczny do okręgu 9-punktów, wtedy i tylko wtedy, gdy owe środki hiperboli prostokątnych się pokryją, co jest równoważne z tym, że to jedna i ta sama hiperbola. Ponieważ ortocentrum jest sprzężeniem $O$, po wzięciu izogonalnego sprzężenia hiperboli, dostajemy współliniowość $P$, $O$, $Q$, wtedy i tylko wtedy, gdy okrąg ortyczny jest styczny do okręgu 9-punktów. ■

Zaprezentuję jeszcze dwa zastosowania powyższych twierdzeń w zadaniach olimpijskich.

**Zadanie 2.6 (Iranian Geometry Olympiad 2023/intermediate/4).** Dany jest trójkąt $ABC$ z ortocentrum $H$ oraz punkt $P$, który jest środkiem łuku $BAC$ okręgu opisanego na $ABC$. Niech $Q$ i $S$ będą takimi punktami, że czworokąty $HAPQ$ i $SACQ$ są równoległobokami. Niech $T$ to środek $AQ$, a $R$ to przecięcie $SQ$ i $PB$. Udowodnij, że $AB$, $SH$ i $TR$ przecinają się w jednym punkcie.

*Dowód zadania 2.6.* Zauważmy, że punkt $T$ jest środkiem $AQ$, $PH$ oraz $CS$. Rozważmy hiperbolę prostokątną przez $A$, $B$, $C$, $H$, $P$. Z *lematu 1.6* dostajemy, że punkt $T$ jest jej środkiem. Z symetrii środkowej w $T$ dostajemy, że na rozważanej hiperboli leżą też punkty $Q$ oraz $S$. By skończyć dowód wystarczy użyć *twierdzenia Pascala* dla sześciokąta $SHPBAQ$ wpisanego w krzywą stożkową, z którego dostajemy współliniowość punktów $D = SH \cap BA$, $T = HP \cap AQ$, $R = PB \cap QS$. ■



**Zadanie 2.7** (`https://artofproblemsolving.com/community/c6h2516356p21323287`).
Niech $H$ i $I$ to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Niech $M$ to środek $BC$. Udowodnij, że $\angle HIM = 90°$, wtedy i tylko wtedy, gdy $AB + AC = 2BC$.

*Dowód zadania 2.7.* Wprowadźmy do zadania hiperbolę Feuerbacha. Niech $N$ to punkt Nagela. Mamy, że $H$, $I$, $N$, $A$, $B$, $C$ leżą na jednej hiperboli prostokątnej. Udowodnimy teraz, że warunek $AB + AC = 2BC$ jest równoważny $IG \parallel BC$, gdzie $G$ to środek ciężkości trójkąta $ABC$. Zauważmy najpierw, że punkty $I$, $G$, $N$ są współliniowe, ponieważ leżą na *prostej Nagela*. Niech $h$ to wysokość z $A$, a $r$ to promień okręgu wpisanego. Mamy $2a = b + c \iff 3a = a + b + c \iff 3ar = 2[ABC] \iff 6r[ABC] = 2h[ABC] \iff 3r = h$ co jest równoważne z $IG \parallel BC$, bo $AM : GM = 3$. Równoległość daje nam $IG = IN \perp AH$, a skoro te cztery punkty leżą na jednej hiperboli prostokątnej to z *lematu 1.4* mamy, że $I$ jest ortocentrum trójkąta $AHN \implies HI \perp AN$. Wystarczy, więc udowodnić, że $IM \parallel AN$. Niech $D'$ to antypoda $D$ na okręgu wpisanym. Z jednokładności w $A$, która przekształca okrąg wpisany na okrąg $A$-dopisany, wynika, że $AD' \cap BC$ to punkt styczności okręgu $A$-dopisanego z $BC$. Mamy $DI = ID'$ oraz z to, że $M$ jest środkiem odcinka między punktami styczności do $BC$, okręgów wpisanego i $A$-dopisanego. Z jednokładności w $D$ o skali 2, dostajemy $IM \parallel AN$. ■