

V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta
Witkowskiego w Krakowie

Miłosz Płatek

N_aG_eL I OKRĘGI Z NIMI ZWIĄZANE

Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki
im. Pawła Domańskiego

Opiekun pracy
dr Dominik Burek

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Podstawowe własności	3
2.1	Oznaczenia	3
2.2	Sześciokąt i okrąg Tuckera	3
2.3	Twierdzenie Sondata	4
3	Okręgi Lemoine’a	5
3.1	Pierwsze dwa okręgi Lemoine’a	5
3.2	Trzeci okrąg Lemoine’a oraz okrąg Bui’sa	6
3.3	Propozycja nowego okręgu Lemoine’a	7
3.4	Odwrotne twierdzenia	15
4	Okrąg Gergonne’a—Nagela	17
4.1	Okręgi Gergonne’a	17
4.2	Propozycja nowego okręgu Gergonne’a—Nagela	19
4.3	Odwrotne Twierdzenia	23
5	Okrąg styczny Gergonne’a i Nagela	29
5.1	Okrąg styczny — punkt Gergonne’a	29
5.2	Propozycja nowego okręgu stycznego — punkt Nagela	30

Rozdział 1

Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest konstrukcja nowych okręgów związanych z punktami Gergonne'a, Nagela i Lemoine'a. Analizuję sześciokąty cykliczne, powstałe przez przecięcie trzech, symetrycznie zdefiniowanych okręgów z bokami trójkąta.

W pierwszym rozdziale przedstawione zostały oznaczenia punktów oraz twierdzenia i własności, które są używane w pracy, a które nie zostały opisane w polskiej literaturze. Są to sześciokąt i okrąg Tuckera oraz Twierdzenie Sondata.

W następnym rozdziale skupiamy się na okręgach związanych z punktem Lemoine'a. W pierwszej części wprowadzam dwa pierwsze okręgi Lemoine'a, odkryte pod koniec *XIX* wieku przez Émile'a Lemoine'a. Były one punktem wyjścia do napisania tej pracy. W następnej części przedstawione zostały nowoczesne odkrycia związane z tymi okręgami — trzeci okrąg Lemoine'a, odkryty w 2002 roku przez Jean'a-Pierre'a Ehrmann'a, oraz okrąg Q.T.Bui'a, odkryty przez niego w 2006 roku. W trzeciej części tego rozdziału przedstawiam propozycję dwóch nowych, autorskich okręgów Lemoine'a. Przeprowadzam ich odpowiednią analizę oraz pokazuję ich jednoznaczność.

Trzeci rozdział poświęcony jest punktom Gergonne'a i Nagela. Punkt Gergonne'a okazuje się ciekawym punktem wyjścia, ponieważ jest to punkt Lemoine'a trójkąta powstałego z punktów styczności okręgu wpisanego z bokami trójkąta. W pierwszej części przedstawiam dwa znane okręgi oraz nowy, autorski synetyczny dowód jednego z nich. W następnej części prezentuję propozycję nowego autorskiego okręgu — okręgu Gergonne'a—Nagela. Jest to szczególny okrąg w pracy, ponieważ w przeciwieństwie do pozostałych, spełniają go aż dwa punkty — punkt Gergonne'a i punkt Nagela, stąd też zaproponowana przeze mnie nazwa. W ostatniej części dowodzę twierdzeń odwrotnych. Udało mi się zarówno pokazać jednoznaczność znanych okręgów, jak i pokazać jednoznaczność nowo odkrytego okręgu Gergonne'a—Nagela.

W ostatnim rozdziale przedstawiam niezależnie odkryty przeze mnie okrąg Angel'a Montesdeoca (2023 rok), mój autorski synetyczny dowód oraz moją propozycję nowego, autorskiego okręgu, który świetnie komponuje się z tym wcześniejszym. Oba dowody pokazują jako zastosowanie wcześniej zdefiniowanego okręgu Gergonne'a—Nagela.

W pracy przedstawione zostały więc następujące autorskie rezultaty:

- pierwszy nowy okrąg Lemoine’a, jego odwrotne twierdzenie oraz współstożkowość sześciu punktów przez niego zdefiniowanych (odpowiednio tw. 3.3.1, tw. 3.4.1 oraz uwaga z nimi związana),
- drugi nowy okrąg Lemoine’a, jego odwrotne twierdzenie oraz współstożkowość sześciu punktów przez niego zdefiniowanych (odpowiednio tw. 3.3.3, tw. 3.4.2 oraz uwaga z nimi związana),
- nowy okrąg Gergonne’a—Nagela oraz jego odwrotne twierdzenie (tw. 4.2.1 i tw. 4.3.4),
- nowy okrąg styczny punktu Nagela (tw. 5.2.1),
- nowy syntetyczny dowód okręgu Gergonne’a, Angel’a Montedeoca z 2023 roku (w przeciwieństwie do obecnego, barycentrycznego) oraz jego odwrotne twierdzenie (tw. 4.1.2 i tw. 4.3.2),
- nowy syntetyczny dowód okręgu stycznego Angel’a Montedeoca z 2023 roku (w przeciwieństwie do obecnego, barycentrycznego, tw. 5.1.1).

Miłosz Płatek

Rozdział 2

Podstawowe własności

2.1 Oznaczenia

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia na punkty:

- L — punkt Lemoine’a trójkąta ABC ,
- G_e — punkt Gergonne’a trójkąta ABC ,
- N_a — punkt Nagela trójkąta ABC ,
- I — środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC ,
- O — środek okręgu opisanego na trójkącie ABC .

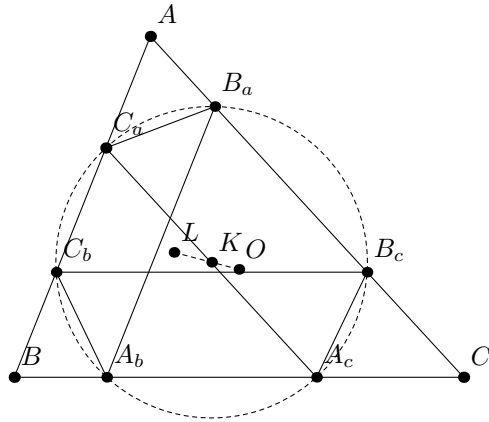
2.2 Sześciokąt i okrąg Tuckera

Definicja 2.2.1. Dany jest trójkąt ABC . Niech punkt B_a będzie punktem na prostej AC , różnym od punktów B i C . Niech:

- antyrównoległa do BC przez punkt B_a tnie AB w C_a .
- równoległa do CA przez punkt C_a tnie BC w A_c
- antyrównoległa do AB przez punkt A_c tnie CA w B_c
- równoległa do BC przez punkt B_c tnie AB w C_b
- antyrównoległa do CA przez punkt C_b tnie BC w A_b

Wówczas równoległa do AB przez punkt A_b tnie CA w punkcie B_a . Boki sześciokąta $B_aC_aA_cB_cC_bA_b$ są więc naprzemiennie równoległe i antyrównoległe do boków trójkąta ABC . Taki sześciokąt nazywamy sześciokątem Tuckera.

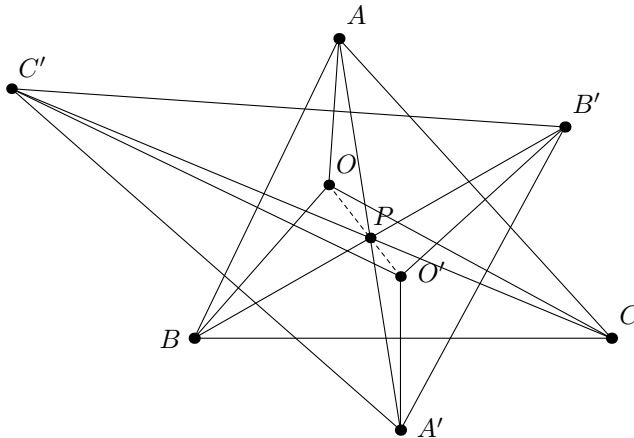
Twierdzenie 2.2.2. Wierzchołki sześciokąta Tuckera leżą na jednym okręgu, nazywanym okręgiem Tuckera, którego środek znajduje się na prostej OL [1].



2.3 Twierdzenie Sondata

Twierdzenie 2.3.1. *Dane są dwa trójkąty ABC i $A'B'C'$ takie, że proste prostopadłe z wierzchołków A, B, C do odpowiednio boków $B'C', C'A', A'B'$ trójkąta $A'B'C'$ są współpękowe w punkcie O . Takie trójkąty nazywamy trójkątami ortologicznymi. Wówczas [4]:*

- proste prostopadłe z wierzchołków A', B', C' do odpowiednio boków BC, CA, AB trójkąta ABC są współpękowe w punkcie O' ,
- jeśli $O = O'$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są perspektywiczne,
- jeśli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są perspektywiczne w punkcie P , to punkty O, O', P leżą na jednej prostej, prostopadłej do ich osi perspektywy.

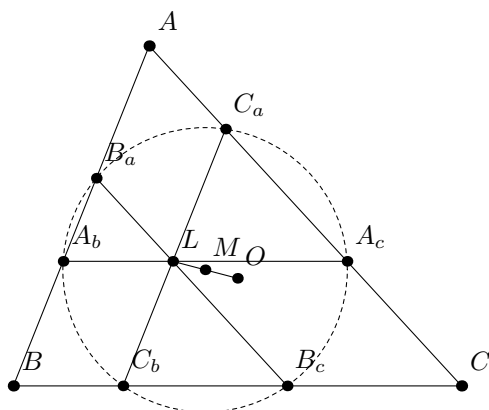


Rozdział 3

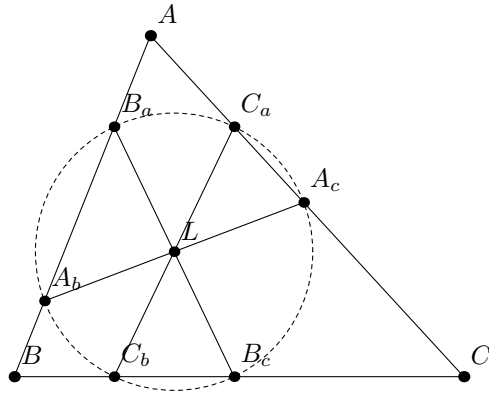
Okręgi Lemoine'a

3.1 Pierwsze dwa okręgi Lemoine'a

Twierdzenie 3.1.1. Niech proste równoległe do prostych BC , BC , CA , CA , AB , AB przez punkt L przecinają proste CA , AB , AB , BC , BC , CA w sześciu punktach. Te sześć punktów leży na jednym okręgu, nazywanym pierwszym okręgiem Lemoine'a trójkąta ABC . Ten okrąg jest okręgiem Tuckera i jego środek jest środkiem odcinka LO .



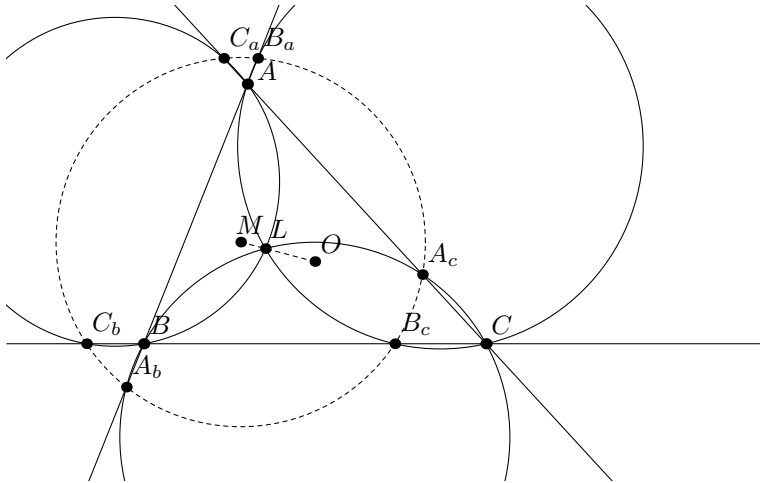
Twierdzenie 3.1.2. Niech proste antyrównoległe do prostych BC , BC , CA , CA , AB , AB przez punkt L przecinają proste CA , AB , AB , BC , BC , CA w sześciu punktach. Te sześć punktów leży na jednym okręgu, nazywanym drugim okręgiem Lemoine'a trójkąta ABC . Ten okrąg jest okręgiem Tuckera i jego środek to punkt L .



3.2 Trzeci okrąg Lemoine’a oraz okrąg Bui’sa

Jean-Pierre Ehrmann w 2002 roku odkrył następujący rezultat [5]:

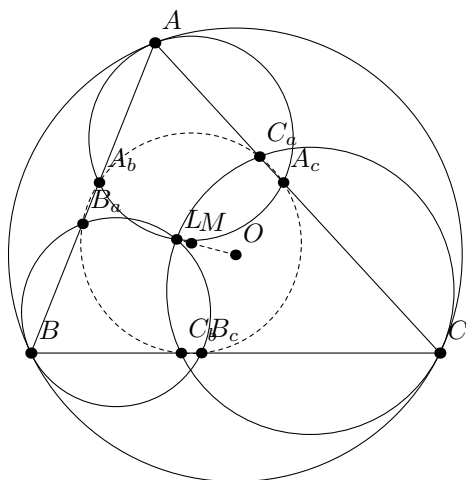
Twierdzenie 3.2.1. Niech okrąg opisany na trójkącie BLC przecina proste AB i AC w punktach odpowiednio A_b i A_c (różnych od B i C). Niech okrąg opisany na trójkącie CLA przecina proste BC i BA w punktach odpowiednio B_c i B_a (różnych od C i A). Niech okrąg opisany na trójkącie ALB przecina proste CA i CB w punktach odpowiednio C_a i C_b (różnych od A i B). Wówczas punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu nazywanym trzecim okręgiem Lemoine’a. Ten okrąg jest okręgiem Tuckera, a jego środek M leży na prostej OL i spełnia $LM = -\frac{1}{2}LO$ (gdzie odcinki są skierowane).



Q.T.Bui w 2006 roku odkrył następujący rezultat [3]:

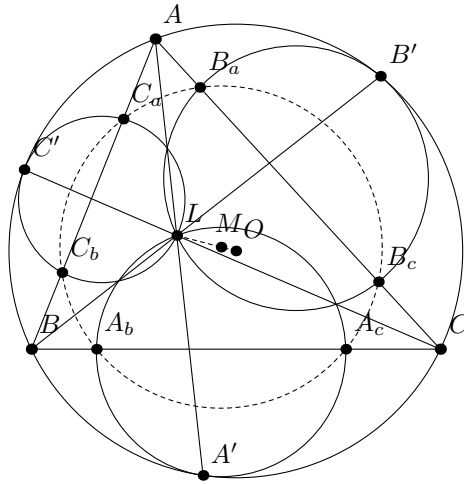
Twierdzenie 3.2.2. Niech ABC będzie trójkątem o okręgu opisanym ω . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkty A i L , styczny do ω w punkcie A , przecina proste AB i

AC w punktach odpowiednio A_b i A_c . Okrąg ω_2 przechodzący przez punkty B i L , styczny do ω w punkcie B , przecina proste BC i BA w punktach odpowiednio B_c i B_a . Okrąg ω_3 przechodzący przez punkty C i L , styczny do ω w punkcie C , przecina boki CA i CB w punktach odpowiednio C_a i C_b . Wówczas punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Okrąg ten jest okręgiem Tuckera, a jego środek M leży na prostej OL i spełnia $LM = \frac{1}{4} \cdot LO$, więc punkt M jest środkiem odcinka LO' , gdzie O' jest środkiem pierwszego okręgu Lemoine'a.



3.3 Propozycja nowego okręgu Lemoine'a

Twierdzenie 3.3.1. Niech ABC będzie trójkątem o okręgu opisanym ω . Oznaczmy przez A', B', C' przecięcia się odpowiednio prostych AL, BL, CL z okręgiem ω (różne od A, B, C). Okrąg ω_1 przechodzący przez punkty A' i L , styczny do ω w punkcie A' , przecina prostą BC w punktach A_b i A_c . Okrąg ω_2 przechodzący przez punkty B' i L , styczny do ω w punkcie B' , przecina prostą CA w punktach B_c i B_a . Okrąg ω_3 przechodzący przez punkty C' i L , styczny do ω w punkcie C' , przecina prostą AB w punktach C_a i C_b . Wówczas punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek M leży na prostej OL i spełnia $LM = \frac{3}{4} \cdot LO$, więc punkt M jest środkiem odcinka OO' , gdzie O' jest środkiem pierwszego okręgu Lemoine'a.

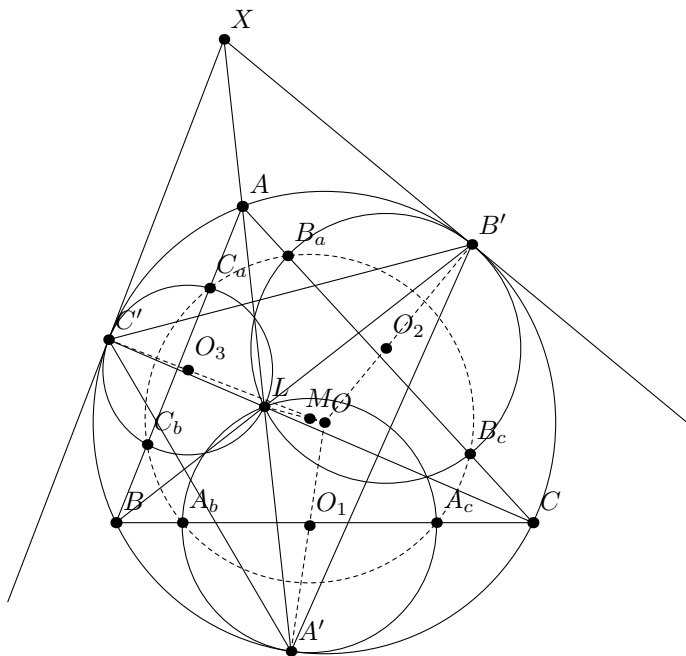


Dowód. Na początek udowodnimy następujący lemat:

Lemat 3.3.2. *Punkt L jest punktem Lemoine'a w trójkącie $A'B'C'$.*

Dowód. Zauważmy, że wystarczy dowieść, że L leży na symedianie z wierzchołka A' w trójkącie $A'B'C'$ (dowód, że leży na pozostałych symedianach będzie wówczas analogiczny). Skoro punkty A, L, A' są współliniowe, to wystarczy, że pokażemy, że czworokąt $AC'A'B'$ jest harmoniczny, czyli równoważnie, że: $(A, A'; B', C')_\omega = -1$. Mamy więc, że: $(A, A'; B', C')_\omega = B(A, A'; B', C') = (A, A'; L, BC' \cap AA')_{AA'} = C'(A, A'; C, B) = (A, A'; C, B)_\omega = -1$, bo czworokąt $ABA'C$ jest harmoniczny. Zatem punkt L jest punktem Lemoine'a w trójkącie $A'B'C'$. \square

Oznaczmy przez X punkt przecięcia się stycznych w punktach B' i C' do okręgu ω . Wówczas $XB' = XC'$, a co za tym idzie punkt X leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Skoro punkt L także leży na osi potęgowej tych dwóch okręgów, to prosta LX to oś potęgowa okręgów ω_2 i ω_3 , a co za tym idzie punkt A także leży na tej osi (bo A', L, A, X są współliniowe z definicji symediany). Zatem z potęgi punktu dostajemy, że $AB_a \cdot AB_c = AC_a \cdot AC_b$, więc czworokąt B_a, B_c, C_b, C_a jest cykliczny. Analogicznie dostajemy, że czworokąty $B_a B_c A_c A_b$ i $A_c A_b C_b C_a$ są cykliczne. Jeśli któreś dwa z trzech udowodnionych czworokątów cyklicznych są współśrodkowe, to natychmiastowo otrzymujemy, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Przypuśćmy więc, że mają parami różne środki. Wówczas osie potęgowe tych okręgów to odpowiednie boki trójkąta ABC , które oczywiście nie przecinają się w jednym punkcie i nie są parami równoległe, sprzeczność z twierdzeniem o osiach potęgowych. Zatem punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu.



Pokażemy teraz, że punkt M leży na LO i spełnia $LM = \frac{3}{4} \cdot LO$. Niech M' będzie punktem na prostej LO dzielącym ją w tym właśnie stosunku. Chcemy więc pokazać, że $M = M'$. Niech O_1, O_2 i O_3 to środki odpowiednio okręgów ω_1, ω_2 i ω_3 . Prosta prostopadła do A_bA_c przechodząca przez punkt O_1 to symetralna odcinka A_bA_c , zatem przechodzi przez punkt M . Analogicznie prosta prostopadła do B_cB_a przechodząca przez punkt O_2 to symetralna odcinka B_aB_c i prosta prostopadła do C_aC_b przechodząca przez punkt O_3 to symetralna odcinka C_aC_b , zatem obie te proste przechodzą przez punkt M . Wystarczy nam więc pokazać, że $M'O_1 \perp A_bA_c$, $M'O_2 \perp B_aB_c$ i $M'O_3 \perp C_bC_a$ (w zasadzie dwie z tych własności nam już wystarczą). Pokażemy, że $M'O_1 \perp A_bA_c$, dowód pozostałych prostopadłości będzie analogiczny. Na początek zauważmy, że ze styczności okręgów ω i ω_1 dostajemy, że punkty A', O_1 i O są współliniowe. Ponadto zauważmy, że A' to środek jednokładności dodatniej przekształcającej ω_1 na ω . Zatem $\frac{A'O_1}{A'O} = \frac{A'L}{A'A}$. W dalszym dowodzie będziemy korzystać ze współrzędnych barycentrycznych. Na początek wprowadźmy:

$$L = (a^2 : b^2 : c^2) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right)$$

$$O = (x_o, y_o, z_o) = (a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)) =$$

$$= \left(\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}, \frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}, \right.$$

$$\left. \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)} \right)$$

Równanie prostej przez wierzchołek A to $y = kz$. Zatem prosta AL ma równanie $y = \frac{b^2}{c^2} \cdot z$. Równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC to $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Zauważmy, że punkt o współrzędnych $(a^2 : -2b^2 : -2c^2)$ spełnia równanie okręgu opisanego, równanie prostej AL oraz jest różny od A . Zatem

$$A' = (a^2 : -2b^2 : -2c^2) = \left(\frac{a^2}{a^2-2b^2-2c^2}, \frac{-2b^2}{a^2-2b^2-2c^2}, \frac{-2c^2}{a^2-2b^2-2c^2} \right)$$

Niech $t = \frac{A'L}{A'A}$. Wówczas $L = t \cdot A + (1-t) \cdot A'$, rozpatrując pierwszą współrzędną punktu L (współrzedną A) dostajemy, że:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} &= t + (1-t) \cdot \frac{a^2}{a^2-2b^2-2c^2} \\ a^2(a^2-2b^2-2c^2) &= t(a^2+b^2+c^2)(a^2-2b^2-2c^2) + a^2(1-t)(a^2+b^2+c^2) \\ a^2(a^2-2b^2-2c^2-a^2-b^2-c^2) &= t(a^2+b^2+c^2)(a^2-2b^2-2c^2) - ta^2(a^2+b^2+c^2) \\ -3a^2(b^2+c^2) &= t((a^2+b^2+c^2)(a^2-2b^2-2c^2) - a^2(a^2+b^2+c^2)) \\ -3a^2(b^2+c^2) &= t(a^4-2b^2a^2-2c^2a^2+b^2a^2-2b^4-2c^2b^2+c^2a^2-2b^2c^2-2c^4-a^4- \\ & a^2b^2-a^2c^2) \\ -3a^2(b^2+c^2) &= -2t(b^2a^2+c^2a^2+b^4+c^2b^2+b^2c^2+c^4) \\ 3a^2(b^2+c^2) &= 2t(a^2(b^2+c^2)+b^2(b^2+c^2)+c^2(b^2+c^2)) \\ t &= \frac{3a^2}{2a^2+2b^2+2c^2} \end{aligned}$$

Mamy więc, że $\frac{A'O_1}{A'O} = \frac{A'L}{A'A} = \frac{3a^2}{2a^2+2b^2+2c^2}$. Zatem:

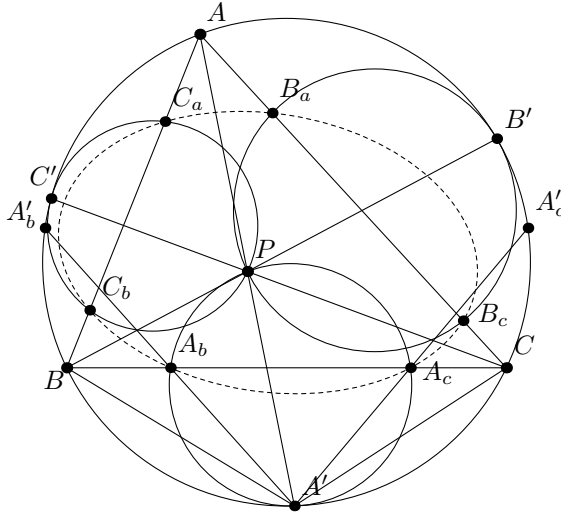
$$\begin{aligned} O_1 &= tO + (1-t)A' = \frac{3a^2}{2a^2+2b^2+2c^2}O + \frac{-a^2+2b^2+2c^2}{2a^2+2b^2+2c^2}A' \\ O_1 &= (tx_o + \frac{-a^2+2b^2+2c^2}{2a^2+2b^2+2c^2} \cdot \frac{a^2}{a^2-2b^2-2c^2}, ty_o + \frac{-a^2+2b^2+2c^2}{2a^2+2b^2+2c^2} \cdot \frac{-2b^2}{a^2-2b^2-2c^2}, tz_o + \frac{-a^2+2b^2+2c^2}{2a^2+2b^2+2c^2} \cdot \frac{-2c^2}{a^2-2b^2-2c^2}) \\ &= (tx_o - \frac{a^2}{2a^2+2b^2+2c^2}, ty_o + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, tz_o + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}) \\ M' &= \frac{3}{4}O + \frac{1}{4}L = (\frac{3}{4}x_o + \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{3}{4}y_o + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{3}{4}z_o + \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}) \\ \overrightarrow{O_1M'} &= (tx_o - \frac{a^2}{2a^2+2b^2+2c^2} - \frac{3}{4}x_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, ty_o + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3}{4}y_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, tz_o + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3}{4}z_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}) \\ &= (tx_o - \frac{a^2}{2a^2+2b^2+2c^2} - \frac{3}{4}x_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} : ty_o + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3}{4}y_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} : \\ & tz_o + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3}{4}z_o - \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}) = (4t(a^2+b^2+c^2)x_o - 3(a^2+b^2+c^2)x_o - 3a^2 : \\ & 4t(a^2+b^2+c^2)y_o - 3(a^2+b^2+c^2)y_o + 3b^2 : 4t(a^2+b^2+c^2)z_o - 3(a^2+b^2+c^2)z_o + 3c^2) = \\ & (6a^2x_o - 3(a^2+b^2+c^2)x_o - 3a^2 : 6a^2y_o - 3(a^2+b^2+c^2)y_o + 3b^2 : 6a^2z_o - 3(a^2+b^2+c^2)z_o + 3c^2) = \\ & ((a^2-b^2-c^2)x_o - a^2 : (a^2-b^2-c^2)y_o + b^2 : (a^2-b^2-c^2)z_o + c^2) = \\ & (a^2(a^2-b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2) - a^2(a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)) : \\ & b^2(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2) + b^2(a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)) : \\ & c^2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2) + c^2(a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2))) = \\ & (-4a^2b^2c^2 : 2a^2b^2c^2 + b^4c^2 - b^2c^4 : 2a^2b^2c^2 + c^4b^2 - c^2b^4) = (-2 : 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} : \\ & 1 + \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}). \end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że $\overrightarrow{OM'} \perp BC$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = a^2(z-y) + x(c^2-b^2)$, gdzie $\overrightarrow{OM'} = (x, y, z)$ [13]. Zauważmy, że możemy bez straty ogólności dowolnie skalować x, y, z . Możemy więc przyjąć zgodnie z naszymi wyliczeniami, że $x = -2, y = 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}, z = 1 + \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}$. Podstawiając je do naszego równania dostajemy, że:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2(1 + \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} - 1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}) - 2(c^2 - b^2) \\ 0 &= 2c^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2b^2, \text{ tożsamość.} \end{aligned}$$

Co dowodzi, że $O_1M' \perp BC$. Analogicznie pokazujemy, że $O_2M' \perp CA$ i $O_3M' \perp AB$, z czego dostajemy już, że $M = M'$. \square

Uwaga: Dla punktu P będącego dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC definiujemy punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ analogicznie jak w twierdzeniu 3.3.1. Wówczas punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednej stożkowej.



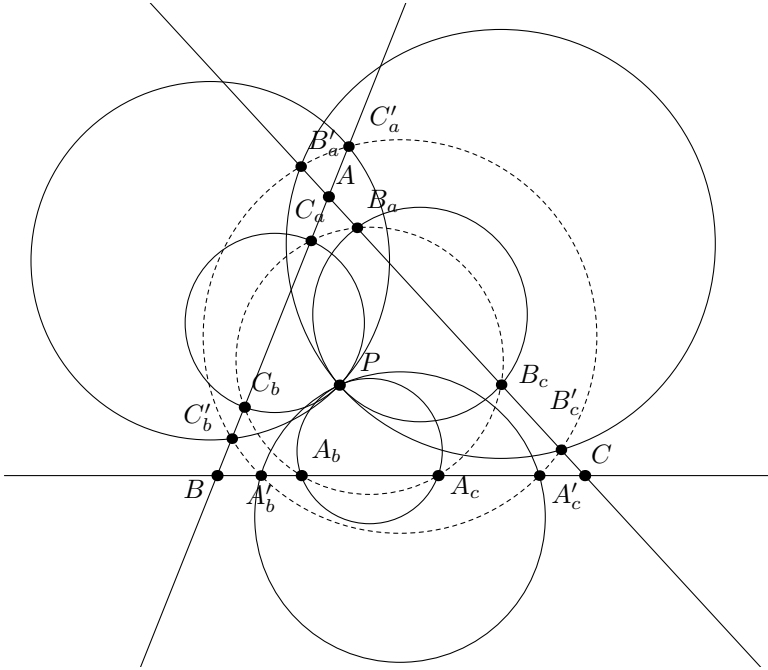
Dowód. Niech punkty A'_b i A'_c , będą obrazami punktów A_b i A_c po jednokładności w punkcie A' przekształcającej ω_1 na ω . Wówczas $A'_b A'_c \parallel A_b A_c$, a zatem czworokąt $A'_b B C A'_c$ jest trapezem równoramiennym, a co za tym idzie $\sphericalangle A'_b A' B = \sphericalangle A'_c A' C$. Wiemy więc, że proste $A' A_b$ i $A' A_c$ są izogonalnie sprzężone w kącie $BA'C$, zatem $\frac{BA_b}{A_b C} \cdot \frac{BA_c}{A_c C} = \frac{BA'^2}{A'C^2} = \frac{\sin \sphericalangle BAA'^2}{\sin \sphericalangle A'AC^2}$ (z twierdzenia sinusów i twierdzenia o prostych izogonalnie sprzężonych). Analogicznie rozumując dla pozostałych punktów dostajemy, że $\frac{BA_b}{A_b C} \cdot \frac{BA_c}{A_c C} \cdot \frac{CB_c}{B_c A} \cdot \frac{CB_a}{B_a A} \cdot \frac{CA_c}{C_a B} \cdot \frac{CA_b}{C_b B} = \left(\frac{\sin \sphericalangle BAA'}{\sin \sphericalangle A'AC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CBB'}{\sin \sphericalangle B'BA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACC'}{\sin \sphericalangle C'CB} \right)^2 = 1$ (z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy dla punktu P i trójkąta ABC), co z kryterium współstożkowości sześciu punktów daje nam tezę. \square

Twierdzenie 3.3.3. Niech ABC będzie trójkątem o okręgu opisanym ω . Niech k_a , k_b , k_c będą stycznymi do okręgu ω odpowiednio w punktach A , B , C . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt L , styczny do prostych k_b i k_c , przecina bok BC w punktach A_b i A_c (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt L , styczny do prostych k_c i k_a , przecina bok AC w punktach B_c i B_a (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt L , styczny do prostych k_a i k_b , przecina bok AB w punktach C_a i C_b (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty A_b , A_c , B_a , B_c , C_a , C_b leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek to punkt O .

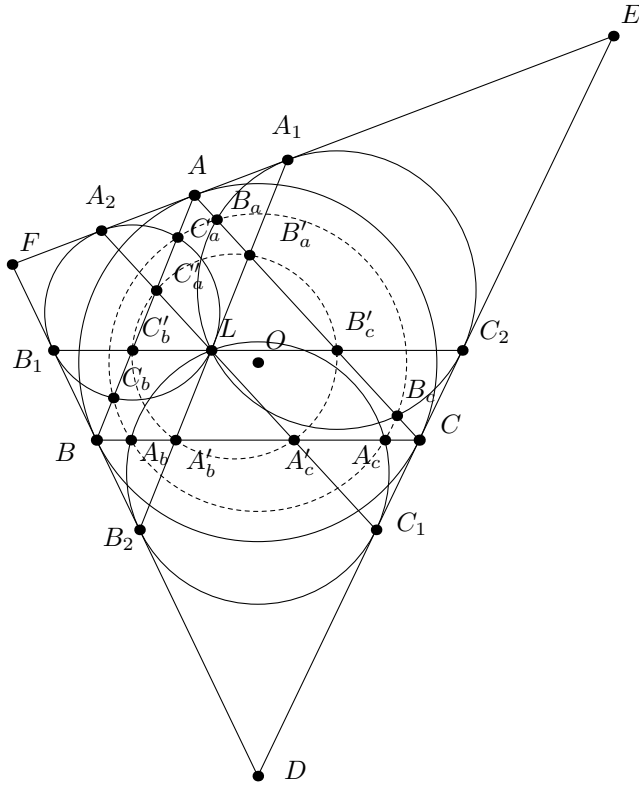
Dowód. Rozpocznijmy od udowodnienia następującego lematu:

Lemat 3.3.4. Dany jest dowolny punkt P na płaszczyźnie trójkąta ABC oraz trzy okręgi ω_1 , ω_2 , ω_3 przecinające odpowiednio proste BC , CA i AB w odpowiednio punktach A_b i A_c , B_c i B_a , C_a i C_b . Niech k będzie pewną ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Okrąg ω'_1 powstały poprzez jednokładność o skali k w punkcie P okręgu ω_1 przecina prostą BC w punktach A'_b i A'_c . Okrąg ω'_2 powstały poprzez jednokładność

o skali k w punkcie P okręgu ω_2 przecina prostą AC w punktach B'_a i B'_c . Okrąg ω'_3 powstały poprzez jednokładność o skali k w punkcie P okręgu ω_3 przecina prostą AB w punktach C'_a i C'_b . Wówczas sześciokąt $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy gdy sześciokąt $A'_bA'_cB'_cB'_aC'_aC'_b$ jest cykliczny.



Dowód. Udowodnimy to w jedną stronę (dowód w drugą stronę jest analogiczny). Przyjmijmy więc, że sześciokąt $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ jest cykliczny. Skoro czworokąt $C_aC_bB_cB_a$ jest cykliczny to punkt A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Zatem oś potęgowa tych dwóch okręgów to prosta PA . Po jednokładności w P o skali k oś potęgowa okręgów ω_2 i ω_3 się nie zmieni (ich drugie przecięcie nadal będzie leżeć na prostej PA). Zatem punkt A leży na osi potęgowej ω'_2 i ω'_3 . Z potęgi punktu dostajemy więc, że czworokąt $C'_aB'_aC'_bB'_c$ jest cykliczny. Analogicznie dostajemy, że czworokąt $A'_bA'_cC'_aC'_b$ i czworokąt $A'_bA'_cB'_cB'_a$ jest cykliczny, z czego podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.3.1 otrzymujemy, że sześciokąt $A'_bA'_cB'_cB'_aC'_aC'_b$ jest cykliczny. \square

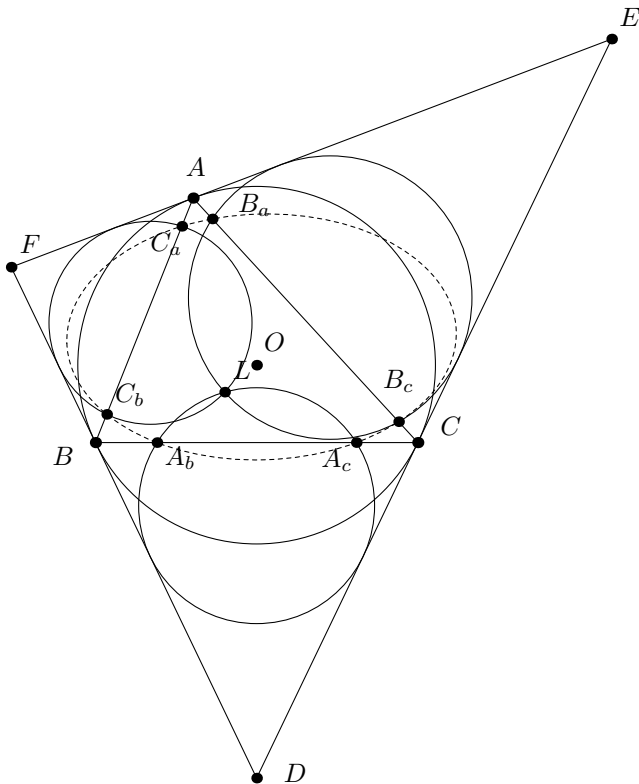


Na początek udowodnimy, że sześciokąt $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ jest cykliczny. Oznaczmy przez B_2, C_1 punkty styczności okręgu ω_1 z odpowiednio prostymi k_b i k_c , przez C_2, A_1 punkty styczności okręgu ω_2 z odpowiednio prostymi k_c i k_a , oraz przez A_2, B_1 punkty styczności okręgu ω_3 z odpowiednio prostymi k_a i k_b . Ponadto oznaczmy przez D, E, F punkty przecięcia się odpowiednio prostych k_b i k_c , k_c i k_a , k_a i k_b . Rozpatrzmy jednokładność w punkcie D przekształcającą ω_1 na ω . Wówczas skoro punkty D, L, A są współliniowe, to punkt L przejdzie na punkt A , co implikuje, że $B_2L \parallel AB$ i $LC_1 \parallel AC$. Analogicznie dostajemy, że $A_1L \parallel AB$, $LC_2 \parallel BC$, $LA_2 \parallel AC$, $B_1L \parallel BC$, a co za tym idzie punkty B_2, L, A_1 ; C_1, L, A_2 ; B_1, L, C_2 są współliniowe i leżą na prostych równoległych do odpowiednich boków trójkąta ABC . Oznaczmy przez $A'_b, A'_c, B'_c, B'_a, C'_a, C'_b$ punkty odpowiednio przecięć LB_2 i LC_1 z BC , LC_2 i LA_1 z CA , LA_2 i LB_1 z CA . Wówczas punkty $A'_b, A'_c, B'_c, B'_a, C'_a, C'_b$ leżą na jednym okręgu będącym pierwszym okręgiem Lemoine'a trójkąta ABC . Z faktu, że pierwszy okrąg Lemoine'a jest okręgiem Tuckera dostajemy, że $C'_bA'_b$ jest antyrównoległa do AC . Zatem $\sphericalangle BC'_bA'_b = \sphericalangle BCA = \sphericalangle ABF \implies C'_bA'_b \parallel B_1B_2$. Skoro także $BC'_b \parallel B_2A'_b$, to czworokąt $BB_2A'_bC'_b$ to równoległobok, zatem $B_2A'_b = BC'_b$. Również czworokąt $BA'_bLC'_b$ jest równoległobokiem, więc $LA'_b = BC'_b$. Łącząc te dwie równości otrzymujemy, że $B_2A'_b = A'_bL$. Analogicznie dowodzimy, że $LA'_c = A'_cC_1$, $LB'_c = B'_cC_2$, $LB'_a = B'_aA_1$, $LC'_a = C'_aA_2$, $LC'_b = C'_bB_1$. Rozpatrując jednokładność o skali $\frac{1}{2}$ w L , dostajemy z lematu 3.3.4, że sześciokąt $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy gdy sześciokąt $A'_bA'_cB'_cB'_aC'_aC'_b$ jest cykliczny, co pokazaliśmy,

że jest prawdą. Zatem sześciokąt $A_bA_cB_aB_cC_aC_b$ jest cykliczny.

Pozostało udowodnić, że środkiem tego okręgu jest punkt O . Zauważmy, że wystarczy dowieść, że symetralna odcinka A_bA_c przechodzi przez O (pokazanie, że symetralne odcinków B_aB_c i C_aC_b przechodzą przez O będzie analogiczne). Skoro O leży na symetralnej BC , to chcemy pokazać, że $BA_b = A_cC$, co otrzymujemy z symetrii względem dwusiecznej kąta BDC . Zatem punkt O to środek naszego okręgu. \square

Uwaga: Dla punktu P będącego dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC definiujemy punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ analogicznie jak w twierdzeniu 3.3.3. Wówczas punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednej stożkowej.



Dowód. Będziemy stosować analogiczne oznaczenia jak w dowodzie twierdzenia 3.3.3. Podobnie jak wcześniej mamy, że $CA_c = BA_b$, a zatem $\frac{BA_b}{A_bC} \cdot \frac{BA_c}{A_cC} = 1$. Analogicznie dostajemy, że: $\frac{CB_c}{B_cA} \cdot \frac{CB_a}{B_aA} = 1$ i $\frac{AC_a}{C_aB} \cdot \frac{AC_b}{C_bB} = 1$, a zatem: $\frac{BA_b}{A_bC} \cdot \frac{BA_c}{A_cC} \cdot \frac{CB_c}{B_cA} \cdot \frac{CB_a}{B_aA} \cdot \frac{AC_a}{C_aB} \cdot \frac{AC_b}{C_bB} = 1$, co z kryterium współstożkowości sześciu punktów daje nam tezę. \square

3.4 Odwrotne twierdzenia

Twierdzenie 3.4.1. *Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC o okręgu opisanym ω . Oznaczmy przez A', B', C' przecięcia się prostych AP, BP, CP z okręgiem ω (różne od A, B, C). Okrąg ω_1 przechodzący przez punkty A' i P , styczny do ω w punkcie A' , przecina bok BC w punktach A_b i A_c . Okrąg ω_2 przechodzący przez punkty B' i P , styczny do ω w punkcie B' , przecina bok CA w punktach B_c i B_a . Okrąg ω_3 przechodzący przez punkty C' i P , styczny do ω w punkcie C' , przecina bok AB w punktach C_a i C_b . Wówczas jeśli punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu, to punkt P jest punktem Lemoine'a trójkąta ABC .*

Dowód. Będziemy korzystać z analogicznych oznaczeń jak w dowodzie twierdzenia 3.3.1. Niech P będzie takim punktem, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Wówczas z potęgi punktu dostajemy, że: $AB_a \cdot AB_c = AC_a \cdot AC_b$, zatem A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Zatem AP to oś potęgowa tych okręgów, więc w szczególności A' leży na ich osi potęgowej. Zatem punkty X, A, P, A' są współliniowe (leżą na osi potęgowej ω_2 i ω_3). Punkt P leży więc na symedianie poprowadzonej z wierzchołka A' w trójkącie $A'B'C'$ (wprost z konstrukcji symediany w trójkącie). Analogicznie dostajemy, że punkt P leży na symedianie poprowadzonej z wierzchołka B' i poprowadzonej z wierzchołka C' w trójkącie $A'B'C'$. Zatem punkt P to punkt Lemoine'a w trójkącie $A'B'C'$. Z lematu 3.3.2 zastosowanego dla trójkąta $A'B'C'$ dostajemy, że P to także punkt Lemoine'a trójkąta ABC . \square

Twierdzenie 3.4.2. *Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC o okręgu opisanym ω . Niech k_a, k_b, k_c będą stycznymi do okręgu ω odpowiednio w punktach A, B, C . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt P , styczny do prostych k_b i k_c , przecina bok BC w punktach A_b i A_c (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt P , styczny do prostych k_c i k_a , przecina bok AC w punktach B_c i B_a (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt P , styczny do prostych k_a i k_b , przecina bok AB w punktach C_a i C_b (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty jeśli $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu to punkt P jest punktem Lemoine'a trójkąta ABC .*

Dowód. Będziemy korzystać z analogicznych oznaczeń jak w dowodzie twierdzenia 3.3.3. Przypuśćmy, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Z potęgi punktu dostajemy, że: $AC_a \cdot AC_b = AB_a \cdot AB_c$, a zatem punkt A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 , więc $AA_1 = AA_2$. Analogicznie dowodzimy, że $BB_1 = BB_2$ i $CC_1 = CC_2$. Ze styczności okręgów ω i ω_1 do prostych k_b i k_c dostajemy, że: $B_2B = C_1C$, a co za tym idzie $DB_1 = DC_2$. Z potęgi punktu dostajemy więc, że D leży na osi potęgowej ω_2 i ω_3 . Zatem punkty A, P, D są współliniowe (bo leżą na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3). Analogicznie dowodzimy, że punkt P leży na BE i CF , z czego otrzymujemy, że punkt P to punkt Lemoine'a trójkąta ABC . \square

Rozdział 4

Okrąg Gergonne’a—Nagela

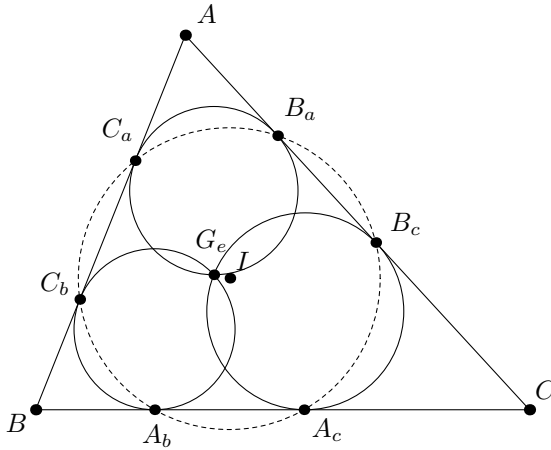
W tym rozdziale zajmiemy się okręgami związanymi z punktem G_e . Rozważenie punktu Gergonne’a jako wyjściowego punktu, dla którego definiujemy okręgi, okazuje się bardzo interesujące. Możemy wówczas znaleźć podobne zależności jak w przypadku rozważania punktu Lemoine’a. Powiązanie tych dwóch nie bierze się znikąd — wynika z faktu, że punkt Gergonne’a to punkt Lemoine’a w trójkącie DEF (gdzie D, E, F to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z jego bokami). Naszym odpowiednikiem prostej OL , na której będą leżeć środki rozważanych okręgów, jest prosta G_eI — oś Brocarda trójkąta DEF [6].

4.1 Okręgi Gergonne’a

Adams w 1843 roku udowodnił następujący rezultat [9]:

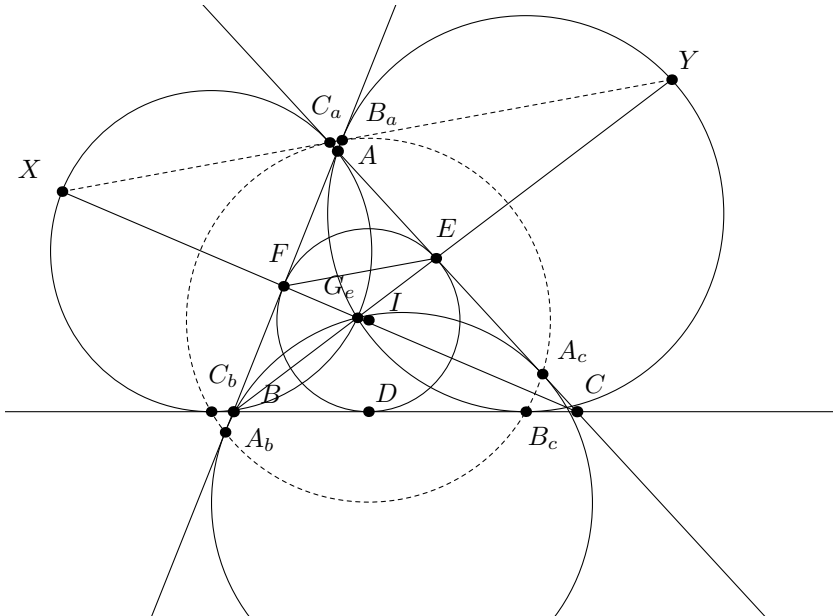
Twierdzenie 4.1.1. *Dany jest trójkąt ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych AB i CA w punktach odpowiednio C_a i B_a (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych BC i AB w punktach odpowiednio A_b i C_b (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych CA i BC w punktach odpowiednio B_c i A_c (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek to punkt I .*

Dowód. Z dowodu twierdzenia 3.3.3 wiemy, że punkt A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Zatem $AC_b = AB_c$, także $AC_a = AB_a$ (styczne do ω_1). Mamy więc, że $AC_a \cdot AC_b = AB_a \cdot AB_c$, co z potęgi punktu daje nam, że czworokąt $C_aC_bB_cB_a$ jest cykliczny. Analogicznie dowodzimy cykliczność czworokątów $B_aB_cA_cA_b$ i $A_cA_bC_bC_a$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.3.1 z cykliczności tych trzech czworokątów dostajemy, że sześciokąt $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ jest cykliczny. Pozostało dowieść, że jego środek to punkt I . W tym celu wystarczy zauważyć, że symetralne C_bA_b, A_cB_c i B_aC_a to odpowiednie dwusieczne trójkąta ABC . Zatem punkt ich przecięcia, czyli punkt I to środek naszego okręgu. \square



Pokażemy nowy, syntetyczny dowód okręgu Angel’a Montesdeoca z 2023 roku [8]:

Twierdzenie 4.1.2. *Dany jest trójkąt ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych AB i AC w punktach odpowiednio A_b i A_c (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych BC i BA w punktach odpowiednio B_c i B_a (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych CA i CB w punktach odpowiednio C_a i C_b (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek to punkt I .*

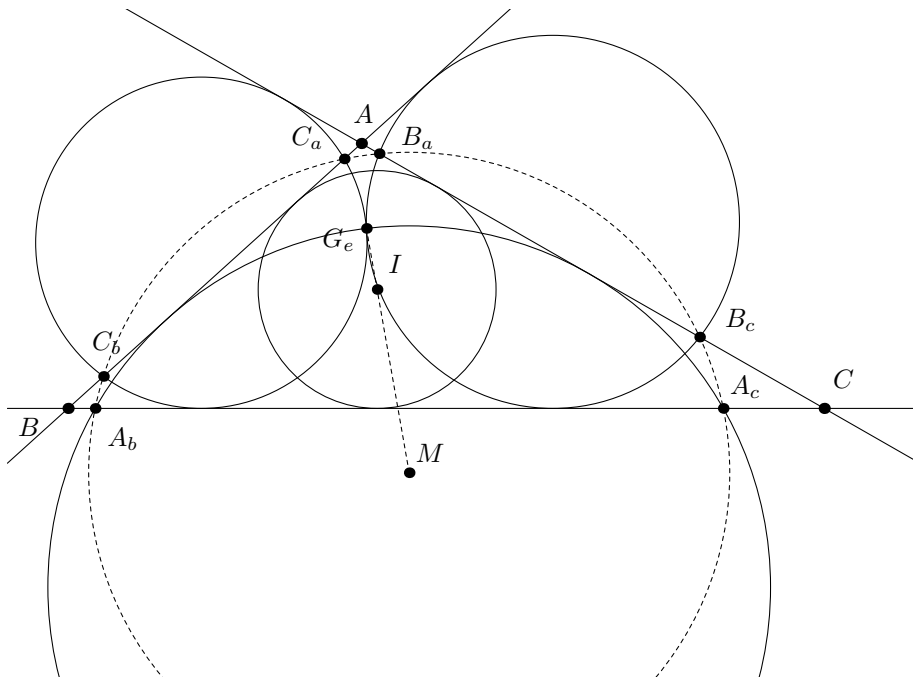


Dowód. Niech D, E, F to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do odpowiednio boków BC, CA, AB . Na początek udowodnimy, że $C_a B_a \parallel EF$. Niech

proste G_eF i G_eE tną po raz drugi odpowiednio okręgi ω_3 i ω_2 w odpowiednio punktach X i Y . Rozpatrując jednokładność w C przekształcającą okrąg wpisany na ω_3 dostajemy, że $EF \parallel XC_a$. Analogicznie dostajemy, że $EF \parallel YB_a$. Przeliczając kąty dostajemy, że $\sphericalangle C_aXG_e + \sphericalangle B_aYG_e + \sphericalangle XG_eY = \sphericalangle EFG_e + \sphericalangle FEG_e + \sphericalangle FG_eE = 180^\circ$, z czego wynika, że punkty X, C_a, B_a, Y są współliniowe. Zatem $C_aB_a \parallel EF$. Skoro trójkąt AEF jest równoramienny, to także trójkąt AC_aB_a jest równoramienny. Zatem symetralna C_aB_a to dwusieczna kąta BAC , a więc przechodzi przez punkt I . Zauważmy ponadto, że symetralna C_aC_b to dwusieczna kąta BCA (bo trójkąt CC_bC_a jest równoramienny). Analogicznie rozumując dla pozostałych boków naszego sześciokąta dostajemy, że symetralna każdego z jego boków przechodzi przez punkt I . Zatem punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu o środku w punkcie I . \square

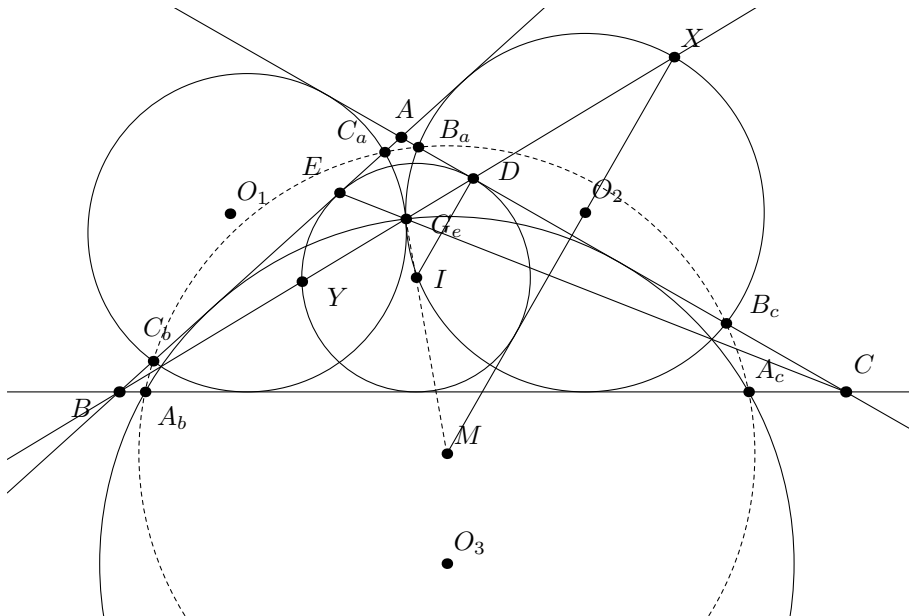
4.2 Propozycja nowego okręgu Gergonne'a—Nagela

Twierdzenie 4.2.1. *Dany jest trójkąt ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych AB, AC i przecina prostą BC w odpowiednio punktach A_b i A_c (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych BC, BA i przecina prostą CA w odpowiednio punktach B_c i B_a (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych CA, CB i przecina prostą AB w odpowiednio punktach C_a i C_b (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek M leży na prostej G_eI i spełnia $G_eM = 4 \cdot G_eI$.*



Dowód. Na początek udowodnimy, że sześciokąt $C_a C_b A_b A_c B_c B_a$ jest cykliczny. Z dowodu twierdzenia 4.1.2 wiemy, że odcinki styczne z punktu A do okręgów ω_2 i ω_3 są równe, więc A leży na osi potęgowej tych okręgów. Zatem z potęgi punktu dostajemy, że czworokąt $C_a C_b B_c B_a$ jest cykliczny. Analogicznie dowodzimy, że czworokąty $C_a C_b A_b A_c$ i $A_b A_c B_c B_a$ są cykliczne. Z czego dostajemy już cykliczność naszego sześciokąta $C_a C_b A_b A_c B_c B_a$.

Udowodnimy teraz, że M, I, G_e są współliniowe. Oznaczmy środki okręgów $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ przez odpowiednio O_1, O_2, O_3 . Zauważmy, że trójkąty ABC i $O_1 O_2 O_3$ są ortologiczne, bo proste prostopadłe z O_1, O_2, O_3 do odpowiednio boków BC, CA, AB trójkąta ABC przecinają się w punkcie M (bo są to symetralne odpowiednich boków naszego sześciokąta cyklicznego). Skoro A leży na osi potęgowej ω_2 i ω_3 to $AG_e \perp O_2 O_3$. Analogicznie dowodzimy, że proste prostopadłe z odpowiednio wierzchołków B i C trójkąta ABC do odpowiednio boków $O_1 O_3$ i $O_3 O_2$ trójkąta $O_1 O_2 O_3$ przechodząca przez punkt G_e . Zatem G_e to drugi punkt ortologii trójkątów ABC i $O_1 O_2 O_3$. Ponadto trójkąty ABC i $O_1 O_2 O_3$ są perspektywiczne w punkcie I (bo AO_1, BO_2 i CO_3 to dwusieczne odpowiednich kątów trójkąta ABC). Zatem z twierdzenia Sondata dla trójkątów ABC i $O_1 O_2 O_3$ dostajemy, że punkty I (środek prespektywy), M (pierwszy środek ortologii), G_e (drugi środek ortologii) są współliniowe, co chcieliśmy udowodnić.



Pozostało nam dowieść, że $G_e M = 4 \cdot G_e I$. Niech D to punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC . Rozpatrzmy jednokładność w B przekształcającą ω na ω_2 . Wówczas styczna AC do ω przechodzi na styczną w X do ω_2 . Zatem prosta AC jest równoległa do stycznej w X do ω_2 , a co za tym idzie $B_a X = X B_c$. Zatem XO_2 to symetralna $B_a B_c$, więc punkty M, O_2, X są współliniowe (leżą na symetralnej $B_a B_c$). Wiemy także, że $ID \perp AC$, a skoro $MX \perp AC$ to

$ID||MX$. Z twierdzenia Talesa dla prostych ID i MX dostajemy, że $\frac{G_e M}{G_e I} = \frac{G_e X}{G_e D}$. Pozostało więc dowieść, że $\frac{G_e X}{G_e D} = 4$. Punkt Y to punkt przecięcia się AD z ω (różny od X), a punkt E to punkt styczności ω z AB . Oznaczmy ponadto długości boków BC , CA , AB przez odpowiednio a , b , c . Z jednokładności w B przekształcającej ω na ω_2 dostajemy, że $\frac{G_e X}{YD} = \frac{BG_e}{BY} \implies G_e X = \frac{BG_e \cdot YD}{BY}$. Zatem nasza teza jest równoważna temu, że $BG_e \cdot YD = 4 \cdot G_e D \cdot BY \iff \frac{YD}{BY} = 4 \cdot \frac{G_e D}{BG_e}$. Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta BDA i prostej $E - G_e - C$ dostajemy, że $\frac{BG_e}{G_e D} \cdot \frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1 \implies \frac{G_e D}{BG_e} = \frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{a+b-c}{2b} \cdot \frac{-a+b+c}{a-b+c} = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{2b(a-b+c)}$. Zatem teza jest równoważna temu, że $\frac{YD}{BY} = 2 \cdot \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{b(a-b+c)} \iff \frac{BY}{YD} = \frac{b(a-b+c)}{2(a+b-c)(-a+b+c)} \iff \frac{BD}{YD} = \frac{b(a-b+c)+2(a+b-c)(-a+b+c)}{2(a+b-c)(-a+b+c)} \iff \frac{YD}{BD} = \frac{2(a+b-c)(-a+b+c)}{b(a-b+c)+2(a+b-c)(-a+b+c)}$. Wykażemy, że $Y = (\frac{1}{-a+b+c} : \frac{4}{a-b+c} : \frac{1}{a+b-c})$. Niech Y' będzie punktem o współrzędnych barycentrycznych zdefiniowanych jak wyżej. Wystarczy pokazać, że $Y = Y'$ czyli, że spełnione są trzy następujące warunki: Y' leży na prostej AD , Y' leży na okręgu ω , $Y' \neq D$. Zauważmy, że $\frac{4}{a-b+c} \neq 0$, zatem Y' nie leży na AC , czyli jest różny od D . Ponadto dostajemy, że $D = (\frac{DC}{AC}, 0, \frac{AD}{AC}) = (a+b-c : 0 : -a+b+c)$. Zatem prosta BD ma równanie $x = \frac{a+b-c}{-a+b+c} \cdot z$. Oczywiście Y' leży na tej prostej, bowiem $\frac{1}{-a+b+c} = \frac{a+b-c}{-a+b+c} \cdot \frac{1}{a+b-c}$. Pozostało pokazać, że Y' leży na okręgu ω . Okrąg wpisany ma następujące równanie [13]: $-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x+y+z)((s-a)^2x + (s-b)^2y + (s-c)^2z) = 0$ (gdzie $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$). Podstawiając do równania okręgu wpisanego punkt Y' , otrzymujemy: $\frac{-4a^2}{(a-b+c)(a+b-c)} - \frac{b^2}{(-a+b+c)(a+b-c)} - \frac{4c^2}{(-a+b+c)(a-b+c)} + (\frac{1}{(-a+b+c)} + \frac{4}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c})(\frac{-a+b+c}{4} + a - b + c + \frac{a+b-c}{4}) = 0$. Wymnażając otrzymujemy tożsamość [11]. Zatem $Y = Y' = (\frac{1}{-a+b+c} : \frac{4}{a-b+c} : \frac{1}{a+b-c}) =$

$$= \left(\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)+4(-a+b+c)(a+b-c)+(-a+b+c)(a-b+c)}, \right.$$

$$\left. \frac{4(-a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)+4(-a+b+c)(a+b-c)+(-a+b+c)(a-b+c)}, \right.$$

$$\left. \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a-b+c)(a+b-c)+4(-a+b+c)(a+b-c)+(-a+b+c)(a-b+c)} \right).$$

Skoro $Y = \frac{YD}{BD} \cdot B + \frac{BY}{BD} \cdot D$, a współrzędna B punktu D to zero, to $\frac{YD}{BD} =$

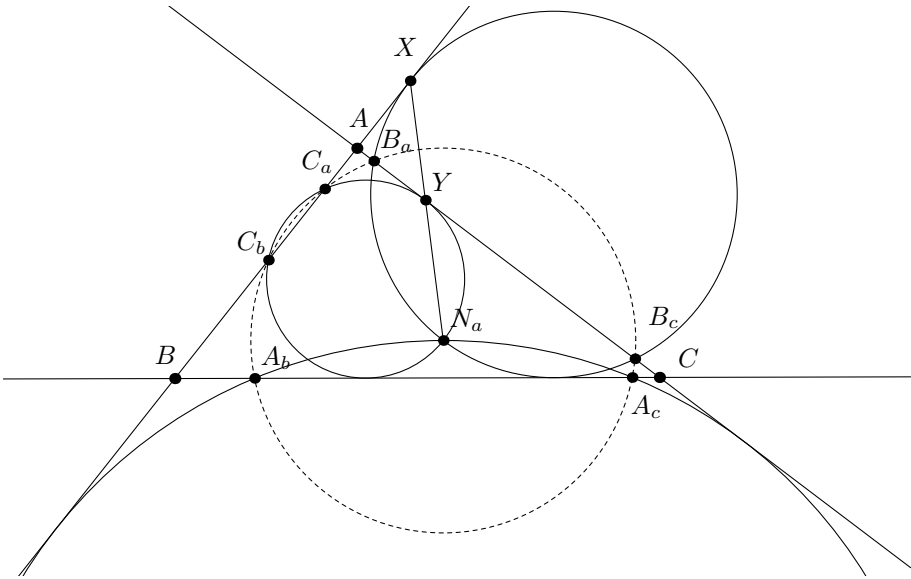
$$\frac{4(-a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)+4(-a+b+c)(a+b-c)+(-a+b+c)(a-b+c)}.$$

Podstawiając wyliczoną wartość $\frac{YD}{BD}$ do dowodzonego równości otrzymujemy: $\frac{4(-a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)+4(-a+b+c)(a+b-c)+(-a+b+c)(a-b+c)} =$

$$\frac{2(a+b-c)(-a+b+c)}{b(a-b+c)+2(a+b-c)(-a+b+c)},$$

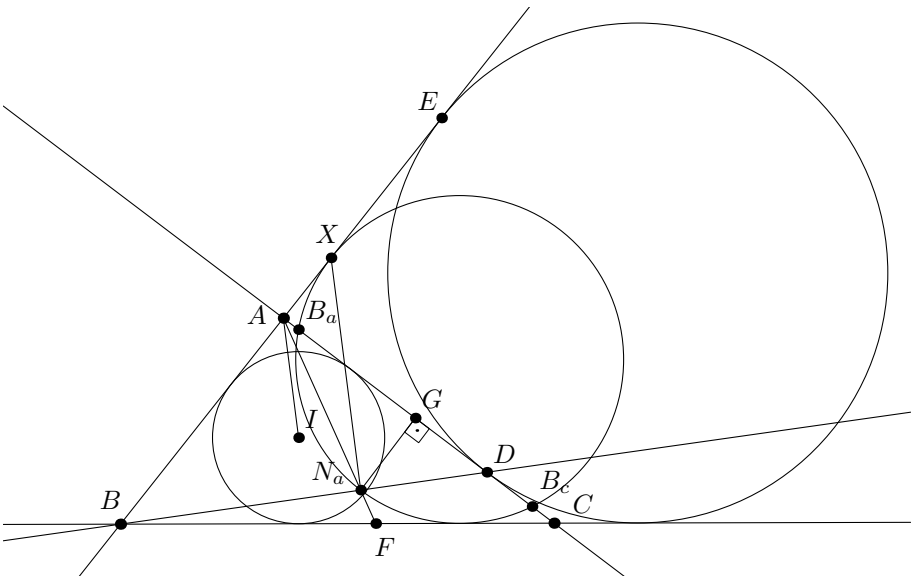
co po wymnożeniu daje tożsamość [12]. \square

Twierdzenie 4.2.2. *Dany jest trójkąt ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych AB , AC i przecina prostą BC w odpowiednio punktach A_b i A_c (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych BC , BA i przecina prostą CA w odpowiednio punktach B_c i B_a (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych CA , CB i przecina prostą AB w odpowiednio punktach C_a i C_b (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas punkty A_b , A_c , B_c , B_a , C_a , C_b leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nie jest okręgiem Tuckera, a jego środek M to punkt N_a . Promień tego okręgu wynosi $2r$, gdzie r to promień okręgu wpisanego.*



Dowód. Udowodnimy, że A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Niech X i Y to odpowiednio punkt styczności ω_2 z prostą AB i punkt styczności ω_3 z prostą AC . Ponadto przez I będziemy oznaczali środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Lemat 4.2.3. $AI \parallel XN_a$



Dowód. Oznaczmy przez Ω okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku AC . Niech D i E to punkty styczności tego okręgu z odpowiednimi prostymi AC i AB . Z definicji punktu Nagela mamy, że punkty B, N_a, D są współliniowe. Rozpatrzmy jednokładność w B przekształcającą ω_2 na Ω . W tej jednokładności punkt N_a

przechodzi na punkt D , a punkt X przechodzi na punkt E . Zatem $N_a X \parallel ED$. Z faktu, że $AE = AD$ oraz faktu, że AI to dwusieczna kąta BAC dostajemy, że $AI \parallel ED$ (proste kąty). Zatem $AI \parallel XN_a$ co chcieliśmy dowieść. \square

Korzystając dwukrotnie z lematu 4.2.3 dostajemy, że $N_a X \parallel AI$ i $N_a Y \parallel AI$, zatem punkty X, Y, N_a są współliniowe, więc $AI \parallel XY$. Zatem $\sphericalangle BAI = \sphericalangle AXY$ i $\sphericalangle IAC = \sphericalangle AYZ$ co implikuje, że $\sphericalangle AXY = \sphericalangle AYZ$. Zatem $AX = AY$, co z potęgi punktu daje nam, że A leży na osi potęgowej okręgów ω_2 i ω_3 . Ponownie korzystając z potęgi punktu dostajemy, że czworokąt $C_a C_b B_c B_a$ jest cykliczny. Analogicznie dowodzimy, że czworokąty $C_a C_b A_b A_c$ i $A_b A_c B_c B_a$ są cykliczne. Z cykliczności tych trzech czworokątów dostajemy, że sześciokąt $A_b A_c B_c B_a C_a C_b$ jest cykliczny, co chcieliśmy dowieść.

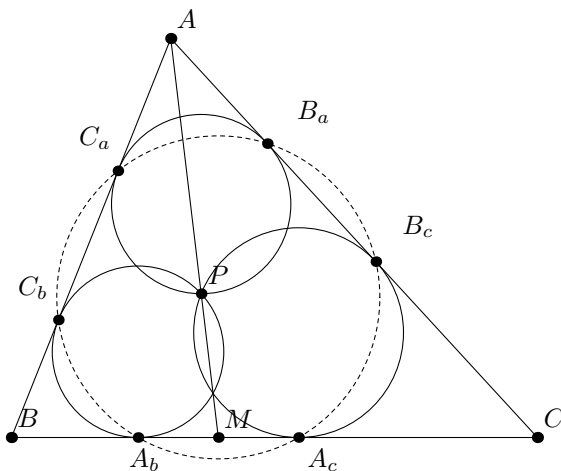
Udowodnimy teraz, że środkiem tego okręgu jest punkt N_a . Pokażemy, że N_a leży na symetralnej $B_a B_c$ i na symetralnej $C_a C_b$. Te dwa warunki są symetryczne, więc wystarczy nam pokazać, że N_a leży na symetralnej $B_a B_c$ czyli, że $N_a B_a = N_a B_c$. Będziemy używać analogicznych oznaczeń jak w dowodzie lematu 4.2.3. Niech l to styczna do ω_2 w punkcie N_a . Wówczas po jednokładności przekształcającej ω_2 na Ω , prosta l przejdzie na AC . A zatem $l \parallel AC$, czyli $l \parallel B_a B_c$, a co za tym idzie $N_a B_a = N_a B_c$, zatem N_a to środek naszego okręgu.

Pozostało nam udowodnić, że promień tego okręgu wynosi $2r$. Oznaczmy długości odcinków BC, CA, AB przez odpowiednio a, b oraz c . Niech R, r_b, r to odpowiednio promień okręgu ω_2 , promień okręgu Ω i promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wówczas $\frac{R}{r_b} = \frac{BN_a}{BD}$ (z jednokładności w B). Ponadto $r_b = r \cdot \frac{a+b+c}{a+c-b}$ (ze wzoru na promień okręgu dopisanego lub po prostu z przeliczenia stosunków odcinków stycznych). Zatem $R = r \cdot \frac{a+b+c}{a+c-b} \cdot \frac{BN_a}{BD}$. Zastosujemy twierdzenie Menelaosa dla trójkąta CDB i prostej FA (gdzie punkt F to punkt styczności okręgu dopisanego na przeciwko wierzchołka A z bokiem BC), otrzymujemy: $\frac{BN_a}{N_a D} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CF}{BF} = 1 \implies \frac{N_a D}{BN_a} = \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CF}{BF} = \frac{a+b-c}{2b} \cdot \frac{a-b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{2b}$. Zatem $\frac{BD}{BN_a} = 1 + \frac{N_a D}{BN_a} = \frac{a+b+c}{2b} \implies \frac{BN_a}{BD} = \frac{2b}{a+b+c} \implies R = 2r \cdot \frac{b}{a+c-b}$. Niech h to długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka B w trójkącie ABC . Niech punkt G to rzut punktu N_a na bok AC trójkąta ABC . Wówczas punkt G to środek odcinka $B_a B_c$. Z twierdzenia Talesa dostajemy, że $\frac{N_a G}{h} = \frac{N_a D}{BD} = 1 - \frac{BN_a}{BD} = 1 - \frac{2b}{a+b+c} = \frac{a-b+c}{a+b+c}$. Zapisując pole trójkąta ABC na dwa sposoby dostajemy, że $\frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{hb}{2} \implies h = \frac{(a+b+c)r}{b}$. Zatem $N_a G = \frac{(a-b+c)r}{b}$. Niech $\sphericalangle N_a B_a B_c = \alpha$. Z twierdzenia sinusów mamy, że $\frac{N_a B_c}{\sin \alpha} = 2R \implies N_a B_c = 2R \cdot \sin \alpha$. Skoro $B_a N_a = N_a B_c$, to $\sphericalangle N_a B_c B_a = \sphericalangle N_a B_a B_c = \alpha$. Z trójkąta prostokątnego $N_a B_c G$ dostajemy, że $\sin \alpha = \frac{N_a G}{N_a B_c} \implies 2R \sin \alpha^2 = \frac{(a-b+c)r}{b} \implies \sin \alpha = \sqrt{\frac{(a-b+c)r}{2Rb}}$. Zatem $N_a B_c = 2R \cdot \sqrt{\frac{(a-b+c)r}{2Rb}} = \sqrt{\frac{2Rr(a-b+c)}{b}} = \sqrt{\frac{4r^2(a-b+c)b}{(a-b+c)b}} = 2r$. \square

4.3 Odwrotne Twierdzenia

Twierdzenie 4.3.1. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych AB i AC w punktach

odpowiednio C_a i B_a (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych BC i BA w punktach odpowiednio A_b i C_b (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych CA i CB w punktach odpowiednio B_c i A_c (jest to mniejszy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas jeśli punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu, to punkt P jest punktem Gergonne'a trójkąta ABC .



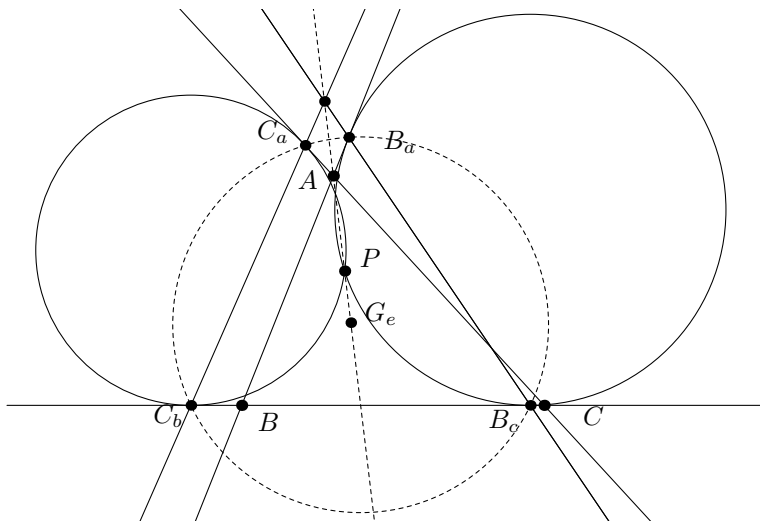
Dowód. Rozpatrzmy punkt P taki, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Niech D, E, F to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z odpowiednio bokami BC, CA i AB . Udowodnimy, że P leży na AD (dowód, że P leży na BE i CF będzie analogiczny). Skoro punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, A_b$ leżą na jednym okręgu i $AC_a = AB_a$, to z potęgi punktu dostajemy, że $AC_b = AB_c$, zatem A leży na osi potęgowej ω_2 i ω_3 . Niech M to przecięcie prostej AP z BC . Wówczas skoro AP to oś potęgowa ω_2 i ω_3 , to $MA_b = MA_c$. Niech $AC_b = x = AB_c$, $BA_b = y = BC_b$, $CA_c = z = CB_c$ i $MA_b = d = MA_c$. Wówczas $CM = d + z$. Z drugiej strony $CD = \frac{BC+CA-AB}{2} = \frac{2d+z+y+z+x-x-y}{2} = z + d$. Zatem $CM = CD$, co implikuje, że $D = M$, z czego wynika, że P leży na AD . Powtarzając analogiczne rozumowanie dla BE i CF dostajemy, że P to punkt Gergonne'a w trójkącie ABC . \square

Twierdzenie 4.3.2. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych AB i AC w punktach odpowiednio A_b i A_c (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych BC i BA w punktach odpowiednio B_c i B_a (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych CA i CB w punktach odpowiednio C_a i C_b (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas jeśli punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu, to punkt P jest punktem Gergonne'a trójkąta ABC .

Dowód. Na początek udowodnimy następujący lemat:

Lemat 4.3.3. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa okręgi ω_1 i ω_2 styczne odpowiednio do prostych AB, BC i AC, BC w odpowiednio punktach B_a i B_c, C_a i C_b tak,

że $AB_a = AC_a$. Oba punkty B_a i C_a leżą na bokach trójkąta albo oba poza nimi. Wówczas oś potęgowa ω_1 i ω_2 to prosta AG_e .



Dowód. Na początek pokażemy, że czworokąt $C_aC_bB_cB_a$ jest cykliczny. Z kątów w czworokącie $C_aC_bB_cB_a$ mamy, że $\sphericalangle C_aC_bB_c + \sphericalangle C_bB_cB_a + \sphericalangle B_cB_aB + \sphericalangle AB_aC_a + \sphericalangle AC_aB_a + \sphericalangle CC_aC_b = 360^\circ$, co korzystając z faktu, że trójkąty C_aC_bC , BB_cB_a i AB_aC_a są równoramienne daje nam, że $\sphericalangle C_aC_bB_a + \sphericalangle BB_aB_c + \sphericalangle AB_aC_a = 180^\circ$. Zatem czworokąt $C_aC_bB_cB_a$ jest cykliczny. Zauważmy zatem, że z twierdzenia o osiach potęgowych, punkt przecięcia się prostych C_bC_a i B_cB_a leży na osi potęgowej ω_1 i ω_2 . Wystarczy więc nam pokazać, aby wykazać tezę, że punkt przecięcia się prostych C_bC_a i B_aB_c leży na prostej AG_e (bo wiemy, że punkt A leży już niej leży). Aby to wykazać, będziemy ruszać punktem C_a po prostej AC . Zauważmy, że punkt w nieskończoności każdej z prostych C_aB_a , C_bC_a i B_cB_a jest stały, niezależny od wyboru C_a (bo kąty $\sphericalangle AC_aB_a$, $\sphericalangle C_bC_aC$, $\sphericalangle B_cB_aB$ są stałe). Przez ∞_k będziemy oznaczać punkt w nieskończoności prostej k .

$$C_a(AC) \rightsquigarrow C_a \infty_{C_bC_a} (\infty_{C_bC_a}) \rightsquigarrow C_a \infty_{C_bC_a} \cap AG_e(AG_e) = C_aC_b \cap AG_e(AG_e)$$

$$C_a(AC) \rightsquigarrow C_a \infty_{C_aB_a} (\infty_{C_aB_a}) \rightsquigarrow B_a(BA)$$

$$B_a(AB) \rightsquigarrow B_a \infty_{B_cB_a} (\infty_{B_cB_a}) \rightsquigarrow B_a \infty_{B_cB_a} \cap AG_e(AG_e) = B_cB_a \cap AG_e(AG_e)$$

Zatem mamy następujące przekształcenie:

$$C_a \infty_{C_bC_a} \cap AG_e(AG_e) \rightsquigarrow B_a \infty_{B_cB_a} \cap AG_e(AG_e)$$

Chcemy więc pokazać, że powyższa mapa rzutowa jest jednoznacznością. Wystarczy to pokazać w trzech przypadkach. Oznaczmy przez D , E , F punkty styczności okręgu wpisanego z odpowiednio bokami BC , CA i AB .

1. $C_a = A$ — trywialne.

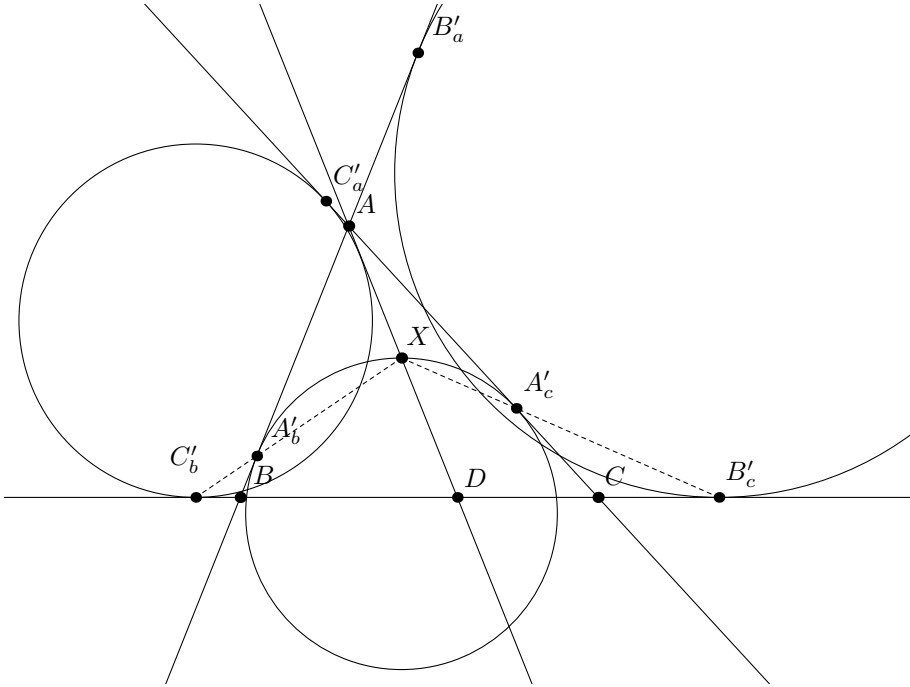
2. $C_a = \infty_{AC} \implies B_a = \infty_{AB}$, wówczas $C_a \infty_{C_b C_a} \cap AG_e = \infty_{AG_e} = B_a \infty_{B_c B_a} \cap AG_e$.
3. $C_a = E \implies B_a = F$ (bo zachodzi $EF \parallel C_a B_a$), ponadto skoro trójkąty FBD i DCE są równoramienne to $DE \parallel C_a C_b$ i $DF \parallel B_c B_a$, a zatem $C_a \infty_{C_b C_a} \cap AG_e = D = B_a \infty_{B_c B_a} \cap AG_e$.

Pokazaliśmy, że te trzy mapy rzutowe są równe w trzech punktach, więc są równe w każdym punkcie. Dowodzi to, że proste $C_a C_b$ i $B_c B_a$ przecinają się na AG_e , co bezpośrednio implikuje, że AG_e to oś potęgowa ω_1 i ω_2 . \square

Przejdźmy teraz do udowodnienia naszego twierdzenia 4.3.2. Przyjmijmy, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Wówczas z potęgi punktu dostajemy, że $AA_b \cdot AB_a = AA_c \cdot AC_a$, a skoro $AA_b = AA_c$, to $AB_a = AC_a$. Ponadto skoro oba punkty A_b i A_c leżą na odpowiednio półprostych AB i AC , to punkty B_a i C_a leżą albo oba na bokach trójkąta albo oba poza nimi (w przypadku, gdy jeden leżałby na boku, a drugi nie to nasz czworokąt $B_a C_a A_b A_c$ byłby zdegenerowany, przez co nie cykliczny). Korzystając teraz z lematu 4.3.3 dla okręgów ω_2 i ω_3 otrzymujemy, że punkt P leży na prostej AG_e . Analogicznie pokazujemy, że P leży na prostych BG_e i CG_e . Zatem $P = G_e$. \square

Twierdzenie 4.3.4. *Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych AB, AC i przecina prostą BC w odpowiednio punktach A_b i A_c (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych BC, BA i przecina prostą CA w odpowiednio punktach B_c i B_a (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt P jest styczny do prostych CA, CB i przecina prostą AB w odpowiednio punktach C_a i C_b (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Wówczas jeśli punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu, to punkt P jest punktem Gergonne'a lub punktem Nagela trójkąta ABC .*

Dowód. Przyjmijmy, że punkty $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ leżą na jednym okręgu. Ponadto oznaczymy punkty styczności okręgów ω_1, ω_2 i ω_3 z odpowiednio prostymi AB i AC, BC i BA, CA i CB przez odpowiednio A'_b i A'_c, B'_c i B'_a, C'_a i C'_b . Jeśli $P = G_e$ to teza jest spełniona. Przyjmijmy więc, że $P \neq G_e$. Z potęgi punktu punktu A dostajemy, że $AC_a \cdot AC_b = AB_a \cdot AB_c$. Zatem punkt A leży na osi potęgowej ω_2 i ω_3 , więc $AC'_a = AB'_a$. Analogicznie dostajemy, że $BA'_b = BC'_b$ i $CB'_c = CA'_c$. Jeśli co najmniej dwie pary punktów spośród B'_a i C'_a, A'_b i C'_b, B'_c i A'_c obie leżą na bokach trójkąta albo oba poza nimi, to korzystając dwukrotnie z lematu 4.3.3 dostaniemy, że $P = G_e$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. Zatem dla co najmniej dwóch par z wyżej wymienionych zachodzi warunek, że jeden punkt z danej pary leży na boku trójkąta, a drugi nie. Gdy zdefiniujemy dla każdej z powyższych trzech par, prostą przechodzącą przez punkty z danej pary, to dla co najmniej dwóch par, prosta ta będzie równoległa do odpowiedniej dwusiecznej trójkąta ABC (tak jak w dowodzie twierdzenia 4.2.2). Bez straty ogólności przyjmijmy, że $A'_b C'_b$ jest równoległe do dwusiecznej kąta ABC i że $A'_c B'_c$ jest równoległe do dwusiecznej kąta ACB .



Niech D to punkt na boku BC taki, że AD przechodzi przez N_a . Niech X to punkt przecięcia się ω_1 z AD takpunkt X leży między punktami A i D . Z lematu 4.2.3 dla punktu X dostajemy, że XA'_c jest równoległe do dwusiecznej kąta ACB , czyli równoległe do $A'_cB'_c$. Dostajemy z tego, że punkty X, A'_c, B'_c są współliniowe. Analogicznie dowiedzimy, że punkty X, A'_b, C'_b są współliniowe. Udowodnimy teraz następujący lemat:

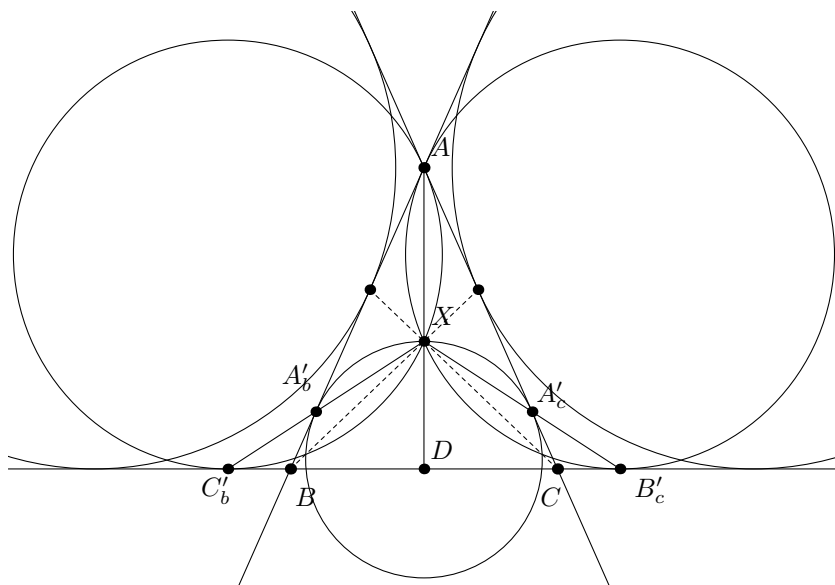
Lemat 4.3.5. *Punkt D to środek odcinka $C'_bB'_c$.*

Dowód. Na początek zauważmy, że skoro $A'_cB'_c$ jest równoległe do dwusiecznej kąta BCA to trójkąt $A'_cC'B'_c$ jest równoramienny (kąty). Analogicznie trójkąt $C'_bBA'_b$ jest równoramienny. Zatem przekształcając równoważnie tezę: $C'_bD = DB'_c \iff C'_bD + AA'_b = DB'_c + AA'_c \iff AB + BD = AC + CD$, co jest prawdziwe, bo punkt D to punkt styczności okręgu dopisanego, dla którego spełniona jest ta własność. \square

Zatem z powyższego lematu otrzymujemy, że punkt D to środek $C'_bB'_c$, a co za tym idzie punkt D leży na osi potęgowej ω_2 i ω_3 . Zatem prosta AD to oś potęgowa okręgów ω_2 i ω_3 , więc punkt P leży na AD . Mamy dwa przypadki:

1. Jeden z punktów C'_a i B'_a leży na boku trójkąta ABC , a drugi nie. W tym przypadku możemy powtórzyć analogiczne rozumowanie jak powyżej (dwa razy dla dwóch innych par punktów) otrzymując, że punkt P leży także na prostych BN_a i CN_a , wówczas $P = N_a$.
2. Punkty C'_a i B'_a oba leżą na bokach trójkąta ABC lub oba poza. Korzystając z lematu 4.3.3 dla ω_2 i ω_3 otrzymujemy, że punkt P leży na prostej AG_e . Wiemy

jednak, że punkt P leży na prostej AN_a , więc proste AG_e i AN_a to te same proste. Z definicji prostych AN_a i AG_e dostajemy, że punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC to środek odcinka BC , co z symetrią względem AD daje nam, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Skoro punkt P leży na ω_1 i na odcinku AD , to punkt P to punkt przecięcia się odcinka AD z ω_1 , czyli punkt X . Niech punkt X' to punkt przecięcia się okręgu ω_2 z odcinkiem łączącym punkt B z punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta ABC na przeciwko wierzchołka B . Wówczas z lematu 4.2.3 dostajemy, że prosta $X'B'_c$ jest równoległa do dwusiecznej kąta BCA , więc punkty X' , A'_c i B'_c są współliniowe, a co za tym idzie $X = X'$. Zatem X leży zarówno na prostej AN_a , jak i BN_a . Zatem $X = N_a$, więc $P = N_a$.

□

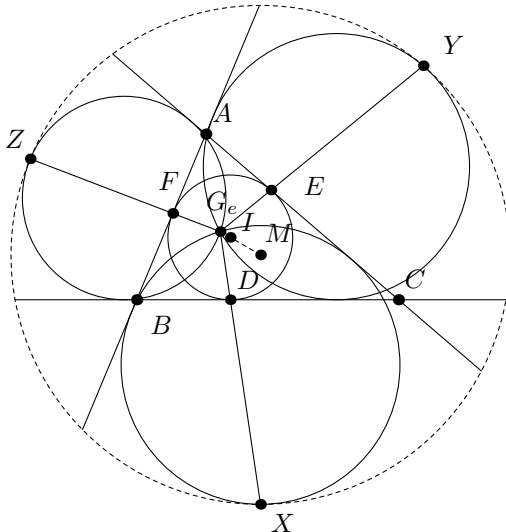
Rozdział 5

Okrag styczny Gergonne'a i Nagela

5.1 Okrag styczny — punkt Gergonne'a

Pokażemy nowy, syntetyczny dowód okręgu Angel'a Montesdeoca z 2023 roku [10][8]:

Twierdzenie 5.1.1. *Dany jest trójkąt ABC o okręgu wpisanym ω . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych AB i AC (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych BC i BA (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt G_e jest styczny do prostych CA i CB (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg Ω to okrąg styczny do ω_1, ω_2 i ω_3 . Wówczas środek M okręgu Ω , leży na prostej IG_e i spełnia $G_eM = 4G_eI$. Promień tego okrętu wynosi $4r$, gdzie r to promień okręgu wpisanego.*



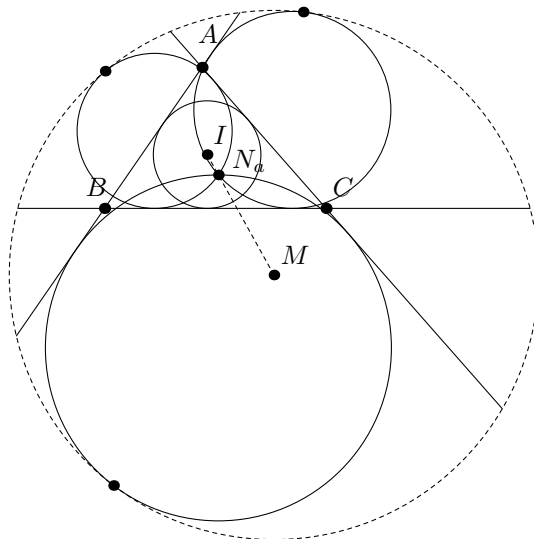
Dowód. Niech D, E, F to punkty styczności okręgu ω z odpowiednio bokami BC, CA, AB . Ponadto niech punkty X, Y, Z to drugie przecięcia się odpowiednio prostych G_eD, G_eE, G_eF z odpowiednio okręgami ω_1, ω_2 i ω_3 . Wówczas z dowodu twierdzenia 4.2.1 wiemy, że $\frac{G_eD}{G_eX} = \frac{G_eE}{G_eY} = \frac{G_eF}{G_eZ} = \frac{1}{4}$. Także z dowodu twierdzenia 4.2.1 wiemy, że styczna w X do ω_1 , styczna w Y do ω_2 i styczna w Z do ω_3 jest równoległa do odpowiednio prostej BC, CA i AB . Rozpatrzmy więc jednokładność w G_e o skali 4. Wówczas punkt D przechodzi na punkt X , a zatem prosta BC przechodzi na styczną w punkcie X do ω_1 . Po tej jednokładności ω przechodzi więc na okrąg styczny do ω_1 . Analogicznie pokazujemy, że po tej jednokładności, okrąg ω będzie styczny do ω_2 i ω_3 . Zatem jest to szukany okrąg z naszego twierdzenia. Jego środek M leży zatem na prostej G_eI i spełnia $G_eM = 4G_eI$. Promień tego okręgu jest cztery razy większy od promienia okręgu wpisanego, czyli wynosi $4r$. \square

Wniosek: G_e to środek jednokładności dodatniej przekształcającej ω na Ω .

5.2 Propozycja nowego okręgu stycznego — punkt Nagela

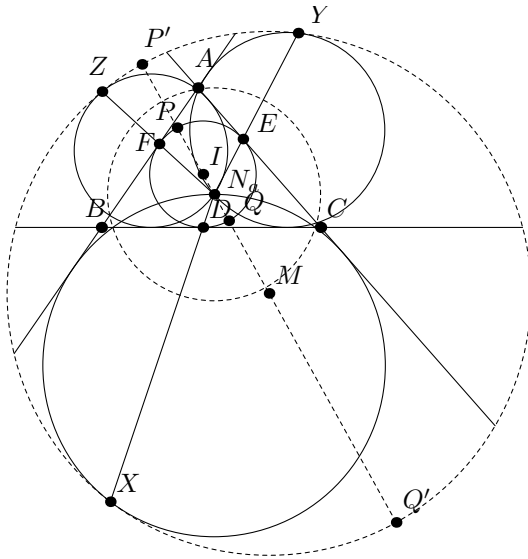
Twierdzenie 5.2.1. *Dany jest trójkąt ABC o okręgu wpisanym ω . Okrąg ω_1 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych AB i AC (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_2 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych BC i BA (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg ω_3 przechodzący przez punkt N_a jest styczny do prostych CA i CB (jest to większy okrąg z dwóch możliwych). Okrąg Ω to okrąg styczny do ω_1, ω_2 i ω_3 . Wówczas środek M okręgu Ω , leży na prostej IN_a . Promień tego okręgu wynosi $\frac{4r^3}{|r^2 - IN_a^2|}$, gdzie r to promień okręgu wpisanego.*

Uwaga: Jeśli $r = IN_a$ to nasz okrąg to prosta, który można interpretować jako okrąg o środku w punkcie w nieskończoności i nieskończonym promieniu.



Dowód. Niech D, E, F to punkty styczności ω z odpowiednio bokami BC, CA i AB trójkąta ABC . Niech X, Y, Z to punkty styczności Ω z odpowiednio okręgami ω_1, ω_2 i ω_3 . Rozpatrzmy inwersję względem okręgu Gergonne'a—Nagela punktu N_a . Wówczas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ przechodzą na odpowiednio proste BC, CA i AB . Zatem okrąg Ω przeszedł na okrąg styczny do prostych BC, CA i AB , czyli na okrąg ω . Zatem punkty $X, D, N_a; Y, E, N_a; Z, F, N_a$ są współliniowe (nie korzystamy potem już z tego faktu, ale jest to ładna własność). Punkt M leży więc na prostej IN_a .

Pozostało nam wyznaczyć promień tego okręgu. Jeśli $IN_a = r$, to nasz okrąg przejdzie na prostą, czyli okrąg o nieskończonym promieniu. W dalszym ciągu przyjmijmy, że $IN_a \neq r$. Ponadto przyjmijmy bez straty ogólności, że $IN_a < r$ (jeśli $IN_a > r$ to rozumowanie jest analogiczne). Niech P i Q to punkty przecięcia się prostej IN_a z ω tak, że punkty P, I, N_a, R leżą w tej kolejności na prostej IN_a . Niech P' i Q' to obrazy tych punktów po naszej inwersji. Mamy wówczas, że: $(N_a I + r)(N_a P') = 4r^2 \implies N_a P' = \frac{4r^2}{N_a I + r}$; $N_a Q \cdot N_a Q' = 4r^2 \implies N_a Q' = \frac{4r^2}{r - IN_a}$. Środek okręgu Ω to środek odcinka $P'Q'$, zatem promień tego okręgu wynosi $\frac{\frac{4r^2}{r - IN_a} + \frac{4r^2}{N_a I + r}}{2} = 2r^2 \cdot \left(\frac{1}{r - IN_a} + \frac{1}{N_a I + r}\right) = 2r^2 \cdot \frac{2r}{r^2 - IN_a^2} = \frac{4r^3}{r^2 - IN_a^2}$, co chcieliśmy dowieść. \square



Wniosek: N_a to środek jednokładności przekształcającej ω na Ω .

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\frac{N_a M}{IN_a} = \frac{4r^3}{|r^2 - IN_a^2|}$. Przyjmijmy analogiczne oznaczenia i konfigurację jak w dowodzie powyższego twierdzenia. Wówczas $N_a M = \frac{\frac{4r^2}{r - IN_a} + \frac{4r^2}{N_a I + r}}{2} - \frac{4r^2}{N_a I + r} = \frac{2r^2}{r - IN_a} - \frac{2r^2}{N_a I + r} = 2r^2 \cdot \left(\frac{1}{r - IN_a} - \frac{1}{N_a I + r}\right) = 2r^2 \cdot \frac{2 \cdot IN_a}{r^2 - IN_a^2} = \frac{4r^2 \cdot IN_a}{r^2 - IN_a^2}$. Przekształcając równoważnie tęzę: $\frac{N_a M}{IN_a} = \frac{4r^3}{|r^2 - IN_a^2|} \iff \frac{4r^2 \cdot IN_a}{r^2 - IN_a^2} = \frac{4r^3}{r^2 - IN_a^2}$, tożsamość. \square

Bibliografia

- [1] Sandor Nagydobai Kiss and Paul Yiu, *On the Tucker Circles*, <https://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201720.pdf>
- [2] J. P. Ehrmann. Hyacinthos message 6098, Dec 2 2002
- [3] Q.T. Bui, Hyacinthos message 13617, July 9, 2006
- [4] Sam Korsky, Cosmin Pohoata, Titu Andreescu, *Lemmas in Olympiad Geometry*
- [5] Darij Grinberg, Massachusetts Institute of Technology, <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/JCG2012V1pp40-52.pdf>
- [6] Brocard Axis, <https://mathworld.wolfram.com/BrocardAxis.html>
- [7] Encyclopedia of Triangle Centers, <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart17.html>
- [8] Angel Montesdeoca, June 1, 2023, <https://amontes.webs.ull.es/otrashtm/HGT2023.htm>
- [9] Adams circle, <https://mathworld.wolfram.com/AdamsCircle.html>
- [10] X(30332), <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCpart16.html#X30543>
- [11] Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/input?i=-4a%5E2%2F%28%28a-b%2Bc%29%28a%2Bb-c%29%29+-+b%5E2%2F%28%28a-b%2Bc%29%28a%2Bb-c%29%29+-+4c%5E2%2F%28%28a-b%2Bc%29%28a-b%2Bc%29%29+%2B+%281%2F%28-a%2Bb%2Bc%29+%2B+4%2F%28a-b%2Bc%29+%2B+1%2F%28a%2Bb-c%29%29%28%28-a%2Bb%2Bc%29%2F4+%2B+%28a-b%2Bc%29+%2B+%28a%2Bb-c%29%2F4%29%3D0>
- [12] Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/input?i=%284%28-a%2Bb%2Bc%29%28a%2Bb-c%29%29%2F%28%28a-b%2Bc%29%28a%2Bb-c%29%2B4%28-a%2Bb%2Bc%29%28a%2Bb-c%29%2B%28-a%2Bb%2Bc%29%28a-b%2Bc%29%29+%3D+%282%28a%2Bb-c%29%28-a%2Bb%2Bc%29%29%2F%28b%28a-b%2Bc%29+%2B+2%28a%2Bb-c%29%28-a%2Bb%2Bc%29%29>
- [13] Max Schindler, Evan Chen, Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry, <https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf>