

Zadanie 742. [$p = 4k + 1$ liczba pierwsza $\Rightarrow \exists s, m \in \mathbf{Z}: 0 < s < p, sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2 = m^2$] (WT=1,55; LPR=9). Rozwiązanie firmowe (w którym Czytelnicy niechybnie dostrzegli literówkę: brak symbolu $\lfloor \rfloor$ w przedostatnim zdaniu) było oparte na twierdzeniu Fermata (przedstawienie $p = a^2 + b^2$) i pokazywało, że można wręcz uzyskać $m = 1$. **Marcin Kasperski** i **Tomasz Wietecha** zauważyli, że do uzyskania tej tezy wystarczy własność nieco prostsza niż twierdzenie Fermata: -1 jest resztą kwadratową (mod p); piszemy $t^2 + 1 = sp, t \in \{1, \dots, p-1\}$; liczba s (wraz z $m = 1$) spełnia wówczas zadane warunki.

Natomiast używając twierdzenia Fermata ($p = a^2 + b^2$), kilku uczestników znalazło rozwiązanie $s = p - 2a + 1, m = b$; dla takich liczb zachodzi bowiem równość $sp = (p - a)^2 + b^2$, z której łatwo wynikają wymagane własności (oczywiście zamieniając a i b , dostaniemy kolejne rozwiązanie).

Jeden z uczestników postawił pytanie (motywowane próbami numerycznymi), czy nie wystarczy ograniczać poszukiwań do wartości $s \leq 5$. Otóż nie; na przykład dla $p = 1237$ najmniejszy czynnik s , dla którego $sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2$ jest kwadratem, to $s = 10$.

Zadanie 744. [$k \in \mathbf{N}, k > 1; M \subset \mathbf{N}; \forall m, n \in M: mn \leq k^2|m - n| \Rightarrow |M| \leq 2k - 1$; czy $\forall k > 1 \exists M(\text{j.w.}), |M| = 2k - 1$?] (WT=2,74; LPR=5).

M. Miodek, J. Olszewski, M. Spychała, T. Wietecha – bez zastrzeżeń; **J. Cisło**: bezbłędny dowód pierwszej tezy oraz prawidłowa odpowiedź na końcowe pytanie (nie dla wszystkich k istnieje taki M ; kontrprzykład np. dla $k = 9$) – uzasadnienie przez algorytm wrzucania do M kolejnych najmniejszych możliwych liczb, bez wyraźnego uzasadnienia (zresztą nietrudnego), że jeśli ten algorytm wymusza $|M| < 2k - 1$, to każdy inny też. Jeszcze kilka prac z dobrym dowodem w pierwszej części, ale bez poprawnego rozwiązania w drugiej.

Za rok – kolejne omówienie wybranych zadań.

Niebo w lutym

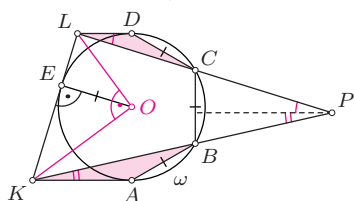


Rozwiązanie zadania M 1556.

Do rozwiązania zadania wystarczy wykazać, że $\sphericalangle KPL = 30^\circ$, gdyż czworokąt $ABCD$ jest połową sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg ω , a zatem krótszy łuk BC stanowi $\frac{1}{6}$ tego okręgu. Równoważnie wystarczy dowieść, że

$$\sphericalangle AKB + \sphericalangle DLC = 30^\circ.$$

Wobec równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL = 150^\circ$ powyższy warunek jest równoważny podobieństwu trójkątów ABK i DCL .



Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na okręgu ω . Ponieważ $\sphericalangle AKO = \sphericalangle EKO$ oraz $\sphericalangle DLO = \sphericalangle ELO$, więc

$$\begin{aligned} \sphericalangle KOL &= 180^\circ - \sphericalangle OKL - \sphericalangle OLK = \\ &= 180^\circ - \frac{\sphericalangle AKL + \sphericalangle DLK}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Skoro E jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie OKL , to $EK \cdot EL = OE^2$. W połączeniu z równościami $EK = AK, EL = DL$ oraz $OE = AB = DC$, uzyskujemy

$$AK \cdot DL = AB \cdot DC, \quad \text{czyli} \quad \frac{AK}{AB} = \frac{DC}{DL}.$$

Tym samym, wobec $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL$, otrzymujemy podobieństwo trójkątów ABK i DCL , które jest równoznaczne z tezą zadania.

Zima jest właśnie na półmetku i okres roku z najkrótszymi dniami i najdłuższymi nocami już minął. Słońce wędruje szybko na północ, zwiększając swoją wysokość w południe o prawie 10° , stąd w trakcie miesiąca dnia przybywa o prawie dwie godziny. W lutym Słońce przejdzie z gwiazdozbioru Koziorożca do gwiazdozbioru Wodnika, w którym znajduje się planeta Neptun, w związku z czym można ją obserwować tylko na początku miesiąca, lecz obserwacje są trudne, gdyż zanim zrobi się wystarczająco ciemno, planeta zbliży się mocno do linii widnokręgu. Neptun spotka się ze Słońcem 4 marca, a potem przejdzie na niebo poranne. Ale ze względu na małe nachylenie ekliptyki do porannego widnokręgu na przełomie zimy i wiosny planeta pozostanie niewidoczna z dużych północnych szerokości geograficznych do drugiej połowy czerwca. W lutym blask Neptuna wyniesie $+8^m$.

W przeciwieństwie do nieba porannego na niebie wieczornym ekliptyka o tej porze roku jest nachylona pod dużym kątem. Dlatego kreśląca swoją pętlę na niebie nieco ponad 40° na północny wschód od Neptuna planeta Uran jest nadal dobrze widoczna. Uran spotka się ze Słońcem w drugiej połowie kwietnia, a w lutym Słońcu braknie do niego jeszcze około 60° i na początku nocy astronomicznej (ok. 18:30 na początku miesiąca i ok. 19:15 pod jego koniec) planeta zajmie pozycję na wysokości odpowiednio ponad 40 i 20 stopni nad zachodnim widnokręgiem. 20 lutego z Uranem spotka się Księżyc w fazie 22%. W trakcie miesiąca jasność Urana spadnie z $+5,8$ do $+5,9^m$. W lutym planeta utworzy prawie idealny prostokąt z gwiazdami α, μ i ν Psc, przy czym Uran zajmie północno-zachodni róg tej figury. Krótko po koniunkcji ze Słońcem pod koniec kwietnia planeta przejdzie do gwiazdozbioru Barana. Po opozycji, przypadającej w tym roku 24 października, Uran odwiedzi jeszcze gwiazdozbiór Ryb, w którym spędzi koniec tego i początek przyszłego roku, ale już w lutym 2019 r. planeta wejdzie do Barana na dłużej i spędzi tam kolejnych 6 lat.

Z bliżej nas krążących planet Układu Słonecznego tylko planety zewnętrzne są widoczne dość dobrze, wszystkie w drugiej połowie nocy. Najlepsze warunki obserwacyjne są dla Jowisza, będącego 3 miesiące przed opozycją i wschodzącego wciąż grubo po północy, wędrującego przez środek gwiazdozbioru Wagi. Przez cały luty planeta porusza się ruchem prostym, zmieni ten kierunek dopiero na początku marca i do końca miesiąca zwiększy dystans do gwiazdy Zuben Elgenubi do prawie 8° . W lutym blask Jowisza zwiększy się z -2 do $-2,1^m$, zaś jego tarcza urośnie z 36 do $39''$. Księżyc spotka się z Jowiszem 8 lutego, przy fazie 45% .

Drugi na nieboskłonie pojawia się Mars, wschodzący przed godziną 3. Czerwona Planeta zacznie miesiąc od spotkania ze świecą blaskiem $+2,5^m$ gwiazdą

**Rozwiązanie zadania M 1555.**

Bez straty ogólności przypuścimy, że każdy z wyjściowych trójkątów ma przeciwprostokątną długości 1 oraz przyprostokątne długości a oraz b . Z podobieństwa trójkątów otrzymanych podczas wykonywania cięć wynika, że każdy z otrzymywanych w wyniku cięć trójkątów będzie miał przeciwprostokątną długości $a^m b^n$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych m, n . Każdemu takiemu trójkątowi przyporządkujemy liczbę 2^{-m-n} .

Zauważmy, że dozwolone cięcie trójkąta o przeciwprostokątnej $a^m b^n$ prowadzi do powstania kawałków o przeciwprostokątnych $a^{m+1} b^n$ oraz $a^m b^{n+1}$. Suma liczb przyporządkowanych tym trójkątom jest równa $2 \cdot 2^{-m-n-1} = 2^{-m-n}$, czyli równa liczbie przyporządkowanej trójkątowi wyjściowemu. To oznacza, że suma liczb przyporządkowanych trójkątom nie ulega zmianie podczas wykonywania cięć.

Początkowo suma liczb przyporządkowanych wszystkim kawałkom papieru jest równa $4 \cdot 2^{-0-0} = 4$. Gdyby w pewnym momencie żadne dwa kawałki nie były przystające, to w szczególności przyporządkowane im pary (m, n) byłyby różne, wobec czego suma wartości liczb przyporządkowanych wszystkim kawałkom byłaby mniejsza (ostro) od

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m-n} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że w każdym momencie pewne dwa trójkąty są przystające.

**Rozwiązanie zadania M 1557.**

Rozważmy macierz $A = [a_{ij}]$ wymiarów $n \times n$, w której $a_{ij} = 1$ jeżeli pole o współrzędnych (i, j) danej tablicy jest wyróżnione oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas

$$A^T A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k \end{bmatrix} = J + (k-1)I,$$

gdzie J oraz I to odpowiednio macierz jedynek oraz macierz identyczności wymiarów $n \times n$. Łatwo sprawdzić, że dla $k \neq 1$ macierz $A^T A$ jest nieosobliwa, skąd wynika, że również macierz A jest nieosobliwa. Wobec tego

$$AA^T = AA^T AA^{-1} = A(J + (k-1)I)A^{-1}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że $AJ = JA = kJ$, skąd wobec powyższej równości mamy

$$AA^T = JAA^{-1} + (k-1)AIA^{-1} = J + (k-1)I.$$

To oznacza, że każda para różnych wierszy macierzy A ma iloczyn skalarny równy 1, co w myśl definicji macierzy A kończy dowód.

Graffias, czyli najbardziej na północny zachód wysuniętą jasną gwiazdą głównej figury Skorpiona, oznaczanej na mapach nieba grecką literą β . Jest to interesująca gwiazda również z tego powodu, że jest to układ wielokrotny, w którym dwa najjaśniejsze składniki o jasnościach 2,6 oraz 5,1^m dzieli odległość prawie 14". W rzeczywistości jest to układ sześciu gwiazd, złożony z dwóch par po trzy gwiazdy. 1 lutego Mars przejdzie niecałe 22' na południe od tego układu, 8 lutego przejdzie do gwiazdozbioru Wężownika, a dobę później spotka się z nim Księżyc w fazie 35%, mijając go niecałe 4° na północ. 10 lutego Mars przejdzie 5° na północ od Antaresa – najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, zaś miesiąc skończy dobrze wewnątrz Wężownika, około 18° na zachód od Saturna i jednocześnie trochę ponad 11° na zachód od pary słynnych mgławic Strzelca M8 i M20. W trakcie miesiąca jasność Marsa wyraźnie wzrośnie aż z +1,2 do +0,8^m, choć jego tarcza zwiększy średnicę tylko z 5 do 6". Bliska minimalnej będzie faza marsjańskiej tarczy, wynosząca 89%.

Szósta planeta od Słońca na początku lutego wschodzi około godziny 5, zaś pod jego koniec – prawie 1,5 godziny wcześniej. Saturn następnie 2 lata spędzi w gwiazdozbiorze Strzelca. W tym sezonie obserwacyjnym planeta wykona pętlę w północno-zachodniej części gwiazdozbioru, mniej więcej 3° na północ od świecącej z jasnością +2,8^m gwiazdy Kaus Borealis, nadal wędrując przez najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity. W tym roku Saturn przejdzie przez opozycję pod koniec czerwca, zaś w lutym porusza się będzie ruchem prostym, oddalając się od pary mgławic M8 i M20 na odległość ponad 6°. Przez cały miesiąc blask planety utrzyma się na poziomie +0,5^m, a jej tarcza urośnie do 16". Srebrny Glob z Saturnem spotka się w dniach 10 i 11 lutego. Najpierw około godz. 6 rano Księżyc w fazie 18% dotrze na niecałe 5° do Saturna. Dobę później Księżyc przesunie się kilkanaście stopni na wschód i o tej samej porze, mając tarczę oświetloną w 12%, znajdzie się 8° na wschód od planety. W tym samym momencie Księżyc przejdzie bardzo blisko gwiazdy 3. wielkości $\xi 2$ Sgr. W Łodzi Księżyc minie ją w odległości 1,5 minuty kątowej, natomiast w Suwałkach będą to sekundy kątowe. Krótkie zakrycie da się obserwować m.in. w Sejnach, Puńsku i Wizajnach.

Warunki obserwacyjne dwóch planet wewnętrznych są złe. Merkury 17 lutego przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem i może byłby widoczny na początku lutego, gdyby nie to, że znajdzie się wtedy z naszej perspektywy pod ekliptyką. Planeta zacznie pojawiać się nisko nad zachodnim widnokregiem dopiero na początku marca, dążąc do maksymalnej elongacji wschodniej w połowie przyszłego miesiąca. Będzie to najlepszy okres widoczności wieczornej Merkurego w tym roku, ale więcej na ten temat napiszę za miesiąc. Druga z planet wewnętrznych, planeta Wenus, oddała się od Słońca po styczniowej koniunkcji, ale ze względu na dużą odległość od Ziemi planeta porusza się bardzo powoli, przez co zacznie być widoczna dopiero pod koniec lutego, bardzo nisko nad zachodnim widnokregiem tuż po zmierzchu. Blask Wenus wyniesie $-3,9^m$, średnica tarczy $-10''$, zaś faza -98% . Na początku marca obie planety utworzą ciasną parę.

Naturalny satelita Ziemi styczeń zakończył pełnią i zaćmieniem, a ponieważ okres synodyczny Księżyca trwa ponad 29 dni, następna pełnia przypadnie dopiero w marcu. Zatem luty będzie miesiącem bez pełni Księżyca, a Srebrny Glob mocno rozświetli noc na początku i na końcu miesiąca. Okres ciemnych nocy przypada na środek lutego. 1 lutego Księżyc ponownie zakryje Regulusa, lecz tym razem południowa granica zakrycia przetnie południową Szwecję. U nas Srebrny Glob przejdzie kilka minut kątowych na północ od niego. 7 lutego przypada ostatnia kwadra Księżyca, dobę później zakryje on gwiazdę 4. wielkości γ Lib. 15 lutego Srebrny Glob przejdzie przez nów, jednocześnie przesłaniając na chwilę Słońce. Będzie to zaćmienie częściowe, widoczne z Antarktydy oraz Argentyny i Chile. Po nowiu 21 lutego wieczorem Księżyc w fazie 32% zakryje gwiazdę μ Ceti, natomiast 23 lutego, również wieczorem i już w fazie 54% – Aldebarana. Może to być efektowne zakrycie, widoczne gołym okiem.

Ariel MAJCHER