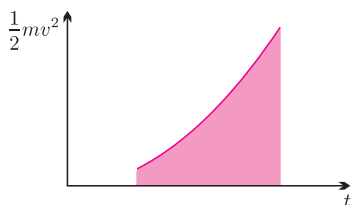


## Mechanika analityczna



Działanie dla cząstki swobodnej odpowiada polu pod krzywą wykresu energii kinetycznej  $\frac{1}{2}mv^2$ . Jeśli cząstka porusza się w polu siły o energii potencjalnej  $V$ , energię kinetyczną należy zastąpić wyrażeniem  $\frac{1}{2}mv^2 - V$ . Wyrażenie to, będące różnicą energii kinetycznej i potencjalnej, nosi nazwę *lagranżjanu* od nazwiska Josepha Louisa Lagrange'a, natomiast sumę energii kinetycznej i potencjalnej nazywa się *hamiltonianem* od nazwiska Williama Rowana Hamiltona. Hamiltonian może być więc interpretowany jako całkowita energia układu (tak rozumianej energii dotyczy twierdzenie Noether, o którym mowa na stronie 11).

Pojęcia takie jak lagranżjan czy hamiltonian mają swoje odpowiedniki w mechanice kwantowej, teorii grawitacji czy kwantowej teorii pola opisującej oddziaływania cząstek elementarnych. Klasyczna mechanika analityczna, w której lagranżjan i hamiltonian pojawiły się po raz pierwszy jako funkcje, za pomocą których można zakodować całą informację o ewolucji układu mechanicznego, stanowi swoisty wzorzec budowania teorii fizycznej, który był później rozwijany i stosowany do opisu innych zjawisk.

Klasyczny przykład zastosowania rachunku wariacyjnego to problem znalezienia kształtu, który przybierze łańcuch powieszony za końce na dwóch słupkach. Żeby go rozwiązać, należy znaleźć kształt, dla którego suma wkładów do energii potencjalnej od wszystkich ogniw łańcucha będzie minimalna. Warunek na znikanie wariacji całkowitej energii potencjalnej daje się przetłumaczyć na proste równanie różniczkowe opisujące krzywą, wzdłuż której ułoży się łańcuch.

Mechanika klasyczna opisuje dynamikę zarówno małych układów mechanicznych zbudowanych z ciężarków, dźwigni i sprężyn, jak i całego Układu Słonecznego, za pomocą kilku praw sformułowanych pierwszy raz przez Newtona pod koniec XVII wieku. Cały XVIII wiek to intensywny rozwój metod matematycznych inspirowanych mechaniką Newtona, pozwalających na coraz prostszy opis mechaniki i coraz efektywniejsze metody rozwiązywania równań opisujących układy mechaniczne. Sukces mechaniki klasycznej sprawił, że na początku XIX wieku niektórzy, jak cytowany na poprzedniej stronie Laplace, uwierzyli, że cały świat da się opisać prostymi, deterministycznymi prawami.

Niezwykle ważnym, dlatego że wielokrotnie później stosowanym w innych teoriach, schematem pojęciowym okazała się *zasada stacjonarnego działania* (znana także jako *zasada najmniejszego działania*). Współcześnie używane w mechanice klasycznej sformułowanie tej zasady podał William Rowan Hamilton w 1834 roku, opierając się na wynikach Fermata, Maupertuis, Eulera i Lagrange'a. Zasada ta mówi, że dla układu mechanicznego o pewnym określonym stanie początkowym i końcowym (np. początkowe i końcowe położenia cząstki) spośród wszystkich możliwych ruchów przeprowadzających stan początkowy w końcowy zostanie wybrany ten, dla którego pewna funkcja zwana *działaniem* jest *stacjonarna*. Stacjonarność oznacza, że przy niewielkim odchyleniu od wyróżnionej trajektorii ruchu wartość działania praktycznie się nie zmienia. Taka sytuacja ma miejsce m.in. wtedy, gdy działanie przyjmuje dla tej trajektorii wartość ekstremalną (minimalną lub maksymalną).

Ale czym właściwie jest działanie? Ogólna definicja, odwołująca się do analizy matematycznej, znacznie upraszcza się dla cząstki swobodnej o masie  $m$ . W tym przypadku wystarczy rozważyć energię kinetyczną tej cząstki,  $\frac{1}{2}mv^2$ , gdzie  $v$  jest prędkością cząstki, i zsumować – a w zasadzie scałkować – tę energię po wszystkich chwilach ruchu, powiedzmy od  $t = 0$  do  $t = T$ , gdy cząstka przebywa odległość  $d$ . Okazuje się, że minimalnej wartości działania  $S$  odpowiada w tym przypadku ruch po prostej ze stałą prędkością. Łatwo podać proste przykłady ilustrujące ten wynik. Jeśli cząstka porusza się ze stałą prędkością, ale nie po linii prostej, to jej tor jest wówczas dłuższy, musi poruszać się zatem z większą prędkością, a to zwiększa wartość działania. Rozważmy więc ruch po prostej, ale ze zmienną prędkością:  $v_1$  w pierwszej połowie czasu trwania ruchu i  $v_2$  w drugiej. Wówczas  $d = \frac{T}{2} \cdot v_1 + \frac{T}{2} \cdot v_2$ , skąd wynika

$$S = \frac{mT}{2} \left( \left( v_1 - \frac{d}{T} \right)^2 + \frac{d^2}{T^2} \right)$$

i  $S$  przyjmuje wartość minimalną dla  $v_1 = \frac{d}{T} = v_2$ .

Takie sformułowanie praw mechaniki budziło pewien niepokój, ponieważ nasuwało się naturalne pytanie, czy cząstka „wybierając” trajektorię w jakiejś chwili musi „znać” swoją dalszą trajektorię aż do chwili kończącej jej ruch w przyszłości? Niepokój ten był nieuzasadniony, ponieważ wyprowadzane z zasady stacjonarnego działania równania ruchu były lokalne, czyli zmiana pędu cząstki w danej chwili czasu była równa działającej na nią sile zależnej od położenia i prędkości tylko w tej chwili. Otrzymywano więc opis równoważny opisowi za pomocą zasad dynamiki Newtona. Rozwinięty właśnie w celu wyprowadzania równań ruchu z zasady stacjonarnego działania *rachunek wariacyjny* znajduje zastosowanie w wielu innych teoriach.

Spektakularnym przykładem jego zastosowania były wydarzenia z końca 1915 roku, kiedy David Hilbert wyprowadził świeżo odkryte przez Einsteina równania ogólnej teorii względności z zasady wariacyjnej (odpowiednio dla tej teorii sformułowanej), czym zrobił ogromne wrażenie na Einsteinie, który doszedł do tych równań zupełnie inną drogą. Po tych wydarzeniach Einstein w swojej pracy naukowej regularnie wykorzystywał rachunek wariacyjny.

W mechanice klasycznej *wariacją* krzywej nazwano niewielkie zaburzenie tej krzywej, natomiast *wariacją działania* nazwano różnicę wartości działania dla krzywej zaburzonej i niezaburzonej. Zasada stacjonarnego działania wyróżnia te trajektorie, dla których wariacja działania znika. Można się było zastanawiać, dlaczego akurat takie trajektorie są wybierane przez naturę, ale nie dało się na to odpowiedzieć na gruncie mechaniki klasycznej. Znacznie później Dirac i Feynman podali wyjaśnienie oparte na mechanice kwantowej, ale to już temat na zupełnie inną opowieść.

Szymon CHARZYŃSKI, Krzysztof TURZYŃSKI