

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 43,72
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 37,67
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Jacek Konieczny (Poznań)	24,15
Tomasz Wietecha (Tarnów)	9 – 17,44
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	1 – 12,68

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2011–2013 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (9), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

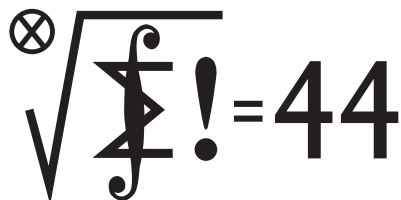
„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

W ostatnich latach zakres umiejętności matematycznych nabywanych w liceum bardzo się skurczył, w szczególności dotyczy to rachunku różniczkowego. Dlatego wszystkie zadania z fizyki zaproponowane w ubiegłym roku w Klubie 44F można było rozwiązać, posługując się elementarną matematyką. Wymagało to czasami wyboru odpowiedniego układu odniesienia. Na przykład, w zadaniu 543, gdzie należało wyznaczyć naprężenie ograniczającej ruch biegnącego psa linki zakończonej pierścieniem przesuwającym się po drucie, wygodnie było wybrać układ odniesienia związany z pierścieniem, co pozwalało sprowadzić problem do ruchu jednego ciała. Podobnie w zadaniu 561 z kondensatorem w polu magnetycznym najwygodniej było prowadzić rozważania w układzie odniesienia, w którym nie ma pola elektrycznego. Niekiedy potrzebny był sprytny pomysł, jak w zadaniu 546 z wodą wyciekającą spod naczynia. Okazuje się jednak, że większość uczestników ligi rachunkiem różniczkowym i całkowym posługuje się biegle, toteż przysyłane rozwiązania często różniły się od firmowych – i były bardziej pracochłonne.

W konkurencji „najwyższy stopień trudności” pierwsze miejsce ($WT = 2,7$) zajęło zadanie 553 (ładowanie kondensatora przez diodę o znanej charakterystyce). Błędy były tu dosyć urozmaicone, najczęściej nie uwzględniano faktu, że podczas pierwszego etapu ładowania na diodzie jest niezerowe napięcie. Zaskoczeniem był stosunkowo wysoki stopień trudności ($WT = 2,44$) zadania 554 (zsuwanie się pierścienia z gumowego kabła), gdzie w kilku rozwiązaniach nie uwzględniono w bilansie energetycznym zmiany energii sprężystości kabła rozciąganego podczas ruchu pierścienia.

Na szczególne uznanie zasługuje sposób prezentacji rozumowań przez Tomasza Wietechę, który przysłał propozycje rozwiązań wszystkich zadań, konkurując w poszczególnych seriach o palmę pierwszeństwa z Andrzejem Idzikiem i Michałem Koźlikiem.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

Zadania z matematyki nr 675, 676

Redaguje Marcin E. KUCZMA

675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n , dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a , b , c , o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od 120° , znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d . Dowieść, że zachodzi równość $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$.

Zadanie 676 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

Przypominamy treść zadań:

667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiornie właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

667. Rozważamy pola brzegowe (przylegające co najmniej jednym bokiem do brzegu szachownicy). Zliczamy pary sąsiadujących pól brzegowych, mających różne kolory. Na starcie liczba takich par wynosi $4(n - 1)$; w stanie docelowym wynosi 0. Jeden ruch może zmniejszyć liczbę takich par co najwyżej o 4. Zatem liczba ruchów, po których plansza może stać się jednokolorowa, jest nie mniejsza niż $n - 1$.



Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2012/13

Rami Marcin Ayoush	–	41,55
Adam Dzedzej	–	1–40,33
Marek Spychała	–	1–39,37
Janusz Fiett	–	38,75
Andrzej Idzik	–	1–37,70
Marcin Małogrosz	–	37,48
Wojciech Maciak	–	36,72
Zbigniew Sewartowski	–	1–35,45
Jędrzej Garnek	–	1–32,90
Tomasz Kochanek	–	32,40
Grzegorz Karpowicz	–	1–31,51
Janusz Olszewski	–	14–27,53
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Paweł Duch	–	26,60
Tomasz Wietecha	–	9–26,56
Michał Koźlik	–	26,46
Stanisław Bednarek	–	25,92
Franciszek Salezy Sikorski	–	1–24,69
Michał Miodek	–	1–24,39
Wojciech Tobiś	–	21,08
Bartłomiej Dyda	–	5–20,18
Janusz Wojtal	–	16,17

Legenda (przykładowo): stan konta 9–26,56 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 26,56 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 15 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2011, 2012 lub 2013.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałeczki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (14), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczański, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisko (10), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”:

Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

Pola narożne mają na starcie różne kolory, więc w którymś ruchu musimy użyć prostokąta, zawierającego jakieś pole narożne. Wszelako taki ruch zmniejszy rozważaną wielkość co najwyżej o 2. W takim razie $n - 1$ ruchów nie wystarczy do uzyskaniażądanego celu, potrzeba co najmniej n ruchów.

Pozostaje zauważyć, że n ruchów faktycznie już wystarczy: w początkowych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugim wierszu, wszystkie kolumny stają się jednokolorowe (plansza „w zebry”). W kolejnych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugiej kolumnie i gotowe.

668. Maksymalna podgrupa właściwa grupy mnożymy liczb wymiernych dodatnich – tak się w języku algebry nazywa obiekt, którego istnienie należy rozstrzygnąć. Podamy przykład takiej podgrupy. Każda liczba $q \in \mathbb{Q}^+$ (wymierna dodatnia) daje się przedstawić w postaci

$$(1) \quad q = 2^k \cdot \frac{\ell}{m}; \quad k, \ell, m \text{ całkowite; } \ell, m > 0 \text{ nieparzyste;}$$

wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Określamy zbiór G , zaliczając doń te liczby powyższej postaci, które mają wykładnik k parzysty. Nie wszystkie liczby $q \in \mathbb{Q}^+$ się tu znalazły, więc G jest podzbiorem właściwym zbioru \mathbb{Q}^+ . Jest on zamknięty względem działań mnożenia i dzielenia (tworzy podgrupę grupy \mathbb{Q}^+) – to jasne. Trzeba jeszcze wykazać, że jeżeli \tilde{G} jest podgrupą grupy \mathbb{Q}^+ , zawierającą G i nie identyczną z G , to $\tilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

Wybermy więc i ustalmy dowolny element $q_0 \in \tilde{G} \setminus G$. Jest to liczba postaci (1):

$$q_0 = 2^{k_0} \cdot \frac{\ell_0}{m_0}; \quad \ell_0, m_0 > 0 \text{ nieparzyste,}$$

przy czym wykładnik k_0 jest nieparzysty. Wszystkie iloczyny q_0q , gdzie $q \in G$, należą do \tilde{G} . Pisząc q w postaci (1), z parzystym k , mamy

$$(2) \quad q_0q = 2^{k_0+k} \cdot \frac{\ell_0\ell}{m_0m}.$$

Gdy k przebiega zbiór wszystkich liczb parzystych, $k_0 + k$ przebiega zbiór wszystkich liczb nieparzystych. Ponadto każdy ułamek L/M o liczniku i mianowniku dodatnim nieparzystym możemy uzyskać jako drugi czynnik przedstawienia (2), biorąc $\ell = Lm_0$, $m = M\ell_0$.

To znaczy, że w zbiorze \tilde{G} znajdują się wszystkie liczby wymierne dodatnie z nieparzystą potęgą dwójki. Liczby z parzystą potęgą dwójki, czyli elementy zbioru G , też się w \tilde{G} znajdują. Zatem, istotnie, $\tilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

[Nieco ogólniej, można było wziąć dowolne liczby pierwsze p, p' (różne lub nie) i określić G jako zbiór wszystkich ułamków $p^k \cdot \ell/m$, gdzie $\ell, m > 0$ są niepodzielne przez p , zaś wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest podzielny przez p' ; takie ułamki również tworzą maksymalną podgrupę właściwą (w podanym przykładzie przyjęliśmy $p = p' = 2$).]

* * *

Odnotujmy małe odświeżenie w *Regulamini*: rozwiązania zadań oraz wszelką korespondencję w sprawach ligi można przysyłać, jak dotychczas, pocztą tradycyjną (do czego zachęcamy); można też pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (co zresztą część uczestników już od jakiegoś czasu robi, *Regulamin* zaś goni życie; wprowadzony retusz jedynie afirmuje istniejący stan rzeczy).

* * *

Geometria w lidze coś słaba. Gdy przejrzeć zadania z kilkunastu niedawnych numerów (oraz ich rozwiązania), rzuci się w oczy, że te geometryczne przedziwnie łatwe. W czym rzecz? Nieodżałowany trener Kazimierz Górski zwykł mawiać: tak się gra, jak przeciwnik pozwala.

Otóż wydaje się, że upodobania geometryczne u regularnych uczestników ligi znajdują się na dalszym planie. Regularnych – kto to? Grono uczestników,

„jednokrotni”:

T. Biegański, W. Boratyński,
M. Czerniakowska, A. Dzedzej,
P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek,
J. Garnek, L. Gasiński, A. Gluza,
T. Grzesiak, K. Hryniewiecki,
A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski,
A. Jóźwik, G. Karpowicz, J. Klisowski,
J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz,
T. Kulpa, A. Langer, R. Latała,
P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki,
M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk,
B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga,
R. Mazurek, H. Mikołajczak,
M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek,
R. Mitraszewski, M. Mostowski,
W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła,
B. Piotrowska, W. Pompe,
M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel,
Z. Sewartowski, F. S. Sikorski,
R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak,
M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk,
W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach,
K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus,
K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie 648 [$F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \Rightarrow$ ciąg $(F_{n+2}^{1/n})$ jest malejący] ($WT = 2,68$; $LPR = 7$). Dla rutyniarzy (**J. Cisło**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**, **W. Bednarek**, **K. Kamiński**, a także redaktor ligi w rozwiązaniu firmowym) było jasne, że należy użyć wzoru Bineta

$$\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2, \quad F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5},$$

i dalej prowadzić stosowne szacowania, stopniowo redukując tezę zadania – mniej lub bardziej zręcznie – do prostszych nierówności. To teraz popatrzmy, jak na tym tle wygląda rozwiązanie, które przysłała **Karolina Cynk**, uczennica liceum (niestety praca otrzymała ocenę nieco niższą od maksymalnej, z powodu usterki, o której niżej).

Dowodzona nierówność

$$(1) \quad F_{n+2}^{n+1} > F_{n+3}^n$$

wynika dla n nieparzystych wprost stąd, że $F_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, $F_{n+3} < \varphi^{n+3}/\sqrt{5}$. Ciekawy moment następuje teraz: dla n parzystych Autorka rezygnuje z Bineta i dowodzi (1) przez indukcję ze skokiem 2, startując od $n = 2$ ($F_4^3 = 27 > F_5^2 = 25$); dla parzystego $n > 2$ zakłada indukcyjnie, że $F_n^{n-1} > F_{n+1}^{n-2}$, po czym korzysta (tu jest istota pomysłu!) z dwóch nierówności pomocniczych:

$$(2) \quad F_{n+1}F_{n+2} > F_nF_{n+3} \quad \text{oraz} \quad F_{n+2}^3 > F_nF_{n+3}^2$$

– wystarczy podnieść pierwszą z nich do potęgi $n - 2$, pomnożyć przez drugą i przez tę z założenia indukcyjnego, by dostać tezę (1). Pierwsza nierówność (2) jest znana i łatwa (lewa strona jest o 1 większa od prawej); drugą można zaś uzasadnić na przykład tak:

$$\begin{aligned} F_{n+2}^3 - F_nF_{n+3}^2 &= \\ &= F_{n+2}^3 - (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1})^2 = \\ &= F_{n+2}^3 - F_{n+2}F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1}) = \\ &= F_{n+1}(F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}) = F_{n+1} \end{aligned}$$

rzecz jasna, ewoluuje – jedni z wolna wycofują się z zabawy, nowi dochodzą, ale istnieje wyraźny trzon sympatycznego grona tych, którzy są z nami stale, od dość dawna lub od bardzo dawna (maksimum stażu wynosi tyle, co wiek ligi) i nie wydają się znużeni. I widać, że w większości czują się zdecydowanie lepiej w tematyce niegeometrycznej.

W każdym numerze jedno zadanie pochodzi z nadsyłanych propozycji. Algebra i analiza są tam reprezentowane bardzo mocno; liczby całkowite i szeroko rozumiana kombinatoryka – też nie najgorzej. Okręgów, trójkątów, przekształceń płaszczyzny – raczej nie widać. Te zadania musi wyszukiwać redaktor ligi. Gdy więc decyduje się zamieścić jedno z proponowanych zadań algebraicznych, ono zaś sprawia wrażenie rzetelnie trudnego, trzeba je dopełnić do pary zadaniem znacznie łatwiejszym, no i z odmiennej tematyki. Korelacja: [geometria \leftrightarrow łatwa] staje się nieunikniona...

Popatrzmy niżej. Do corocznego przeglądu zostały wybrane zadania ciekawsze i trudniejsze (zręczne rozwiązania, znaczące uogólnienia, wysoki współczynnik trudności, niewielka liczba rozwiązań). Są tu wyłącznie zadania o numerach parzystych, a więc proponowane przez Czytelników – i jest to prawie wyłącznie algebra z analizą (zadanie 658, mimo formalnie geometrycznej treści, to też czysta algebra).

(różnica w ostatnim nawiasie ma wartość 1, wobec parzystości n); w tym fragmencie była w pracy pomyłka – po jej poprawieniu rozumowanie przebiega prostotą wszystkie pozostałe!

Tomasz Wietecha wykazał nierówność (1) w obu przypadkach indukcyjnie, co jednak dla n nieparzystych okazało się bardziej uciążliwe niż skorzystanie ze wzoru Bineta.

Interesującą interpretację kombinatoryczną tezy zadania wskazał **Jerzy Cisło**: rozważamy macierze zero-jedynkowe o rozmiarach: n wierszy, $n+1$ kolumn. Lewa i prawa strona nierówności (1) – to odpowiednio liczba takich macierzy, w których nie ma dwóch jedynek jedna tuż nad drugą oraz liczba takich, gdzie nie ma dwóch jedynek jedna obok drugiej. W takiej macierzy jest mniej par klatek sąsiadujących pionowo niż par sąsiadujących poziomo, dlatego pierwszy z tych warunków jest „łatwiejszy” do spełnienia niż drugi. To przekonująca *agitacja* za słuszością tezy (1)... ale *wykazać* jej słuszość – to to samo, co zrobić zadanie.

Zadanie 650 [Ile maksymalnie wież można ustawić na szachownicy $n \times n$, by wśród dowolnych k wież były dwie, które się atakują?] ($WT = 2,51$; $LPR = 10$). Łatwo ustawić $n(k - 1)$ wież; wystarczy zapelnąć nimi prostokąt $n \times (k - 1)$. Więcej się nie da – chyba wszyscy rozwiązujący pokazali to prościej, niż rozwiązanie firmowe. Szczególnie urzekło nas takie oto, banalnie proste, rozumowanie (**J. Garnek**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**): w pola pierwszego wiersza planszy wpisujemy kolejno liczby $[1, \dots, n]$; w pola drugiego wiersza: $[2, \dots, n, 1]$; i tak dalej, cyklicznie; ostatni wiersz: $[n, 1, \dots, n - 1]$; gdy na planszy postawimy więcej niż $n(k - 1)$ wież, to dla pewnego $r \in \{1, \dots, n\}$ w polach z wpisaną liczbą r znajdzie się więcej niż $k - 1$ wież; a więc co najmniej k wież; i żadne dwie z nich nie atakują się wzajemnie!

Zadanie **652** [$a, b, c > 0, n \geq 1 \Rightarrow \sum \frac{a^{n+1}}{a+b} \geq \sum \frac{a^n}{2}$] ($WT = 2,45; LPR = 13$). Użyte oznaczenie – to *sumy cykliczne* (na przykład lewą stronę nierówności należy odczytać jako $\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a}$).

Rozwiązanie, które zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (wydrukowane jako firmowe) wydało się prowadzącemu ligę tak trikowe, że zakwalifikował zadanie jako trudne. Jednakże – robione inną metodą – wcale się takim nie okazało, o czym świadczy spora liczba dobrych prac. We wszystkich (prawie) tych pracach istotne jest spostrzeżenie, że trójki (a, b, c) , $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$ są jednakowo uporządkowane, więc w myśl twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych:

$$\sum a^n \geq \sum a^{n-1}b.$$

Rozumowanie, które z wykorzystaniem tego spostrzeżenia prowadzi do tezy zadania, było w każdej pracy inne (nierówności między średnimi, wypukłość, pochodne; rozbiecie na przypadki lub nie). Redaktor ligi wybrał po jednym pomysłem z kilku przeczytanych prac i teraz może z ich użyciem zaproponować takie rozwiązanie: dzięki łatwej do sprawdzenia nierówności $\frac{a(a-b)}{a+b} \geq \frac{a-b}{2}$ dla $a, b > 0$, jeśli L i P oznaczają lewą i prawą stronę nierówności danej do udowodnienia, to

$$\begin{aligned} L - P &= \sum \left(\frac{a^{n+1}}{a+b} - \frac{a^n}{2} \right) = \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a(a-b)}{a+b} \geq \\ &\geq \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{1}{4} \left(\sum a^n - \sum a^{n-1}b \right) \geq 0 \end{aligned}$$

i gotowe. Rachunek w takiej dokładnie postaci nie pojawił się w żadnej pojedynczej pracy uczestnika – to emanacja mądrości zbiorowej.

A zmyślne rozwiązanie firmowe – czy ktoś znalazł? Ależ tak: **Janusz Olszewski**.

Zadanie **658** [Czworościan foremny o krawędzi a ; punkt P w odległościach d_1, \dots, d_4 od wierzchołków $\Rightarrow (a^2 + \sum d_i^2)^2 = 4(a^4 + \sum d_i^4)$] ($WT = 1,81; LPR = 11$). Pan **Tomasz Ordowski** przysłał to zadanie wraz z rozwiązaniem, zaznaczając, że autorem rozwiązania jest **Jerzy Cisło**. Zostało ono zamieszczone jako firmowe w numerze 7/2013. Przypomnijmy, że dowód polegał na umieszczeniu czworościanu w przestrzeni \mathbb{R}^4 , z wierzchołkami na osiach, wzięciu punktu P , leżącego w jednej trójwymiarowej hiperpłaszczyźnie z owymi wierzchołkami, i rachowaniu na jego współrzędnych; przy takim ujęciu rachunki mocno zyskują na prostocie (rachunki w pracach uczestników ligi nie wychodziły poza \mathbb{R}^3 i już nie były tak proste...).

Autor rozwiązania zauważył, że przenosi się ono na $(n-1)$ -wymiarowy sympleks foremny o krawędzi a w przestrzeni \mathbb{R}^{n-1} i dowolny punkt $P \in \mathbb{R}^{n-1}$ w odległościach d_1, \dots, d_n od wierzchołków; wystarczy umieścić sympleks w \mathbb{R}^n , z wierzchołkami na osiach, by dokładnie takim samym rachunkiem uzyskać wzór

$$(3) \quad (a^2 + d_1^2 + \dots + d_n^2)^2 = n(a^4 + d_1^4 + \dots + d_n^4)$$

(oba wymienieni autorzy wspólnie zajmowali się tym zagadnieniem jeszcze przed zaproponowaniem go jako zadania dla ligi).

Autor zadania wskazał nieco szerszy kontekst: n -wymiarowa objętość V_n sympleksu n -wymiarowego o wierzchołkach A_1, \dots, A_{n+1} jest dana znanym wzorem $V_n^2 = c_n \det M$, gdzie M jest macierzą $(n+2) \times (n+2)$, w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & K \end{bmatrix},$$

K to macierz $(n+1) \times (n+1)$ o wyrazach $|A_i A_j|^2$, $J = [1, \dots, 1]$, zaś $c_n = (-1)^{n+1} 2^{-n} (n!)^{-2}$. Gdy punkty A_1, \dots, A_{n+1} leżą w jednej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyźnie, sympleks (zdegenerowany) ma objętość zerową ($\det M = 0$); gdy ponadto punkty A_1, \dots, A_n są wierzchołkami $(n-1)$ -wymiarowego sympleksu *foremnego*, a punkt $A_{n+1} = P$ leży w jego hiperpłaszczyźnie, w odległościach d_i od wierzchołków, równanie $\det M = 0$ prowadzi do wzoru (3).

Wyprowadzenie wzoru $V_n^2 = c_n \det M$ (tzw. wyznacznik Cayleya–Mengera) można znaleźć na przykład pod www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm; dla $n = 3$ także w artykule *Siatka czworościanu* w numerze 9/2013 (przyp. redaktora ligi, który z niemalym zaciekawieniem wyczytał w zacytowanym materiale internetowym, że wzór ów dla $n = 3$ odkrył renesansowy malarz Piero della Francesca) (!).

Zadanie **662** [$x_0 > 0; x_{n+1} = x_n^2 / (e^{x_n} - 1); q_n = n(2 - nx_n) / \ln n; \lim q_n = ?$] ($WT = 2,84; LPR = 5$). Ten sam ciąg (x_n) był przedmiotem wcześniejszego zadania **654**, w którym należało obliczyć granicę $\lim nx_n$; wynik 2. Zatem ciąg $(2 - nx_n)$ dąży do zera; ale jak szybko? odpowiedź daje obliczenie granicy $\lim q_n = 4/3$; tak więc $2 - nx_n = O(\ln n/n)$. Kluczem do obliczenia był wzór Stolza – korzystali z niego wszyscy, którzy zadanie zrobili, a także rozwiązanie firmowe.

Paweł Najman proponował oba te obliczenia ($\lim nx_n = ?; \lim q_n = ?$) jako jedno zadanie. Rozbiecie na dwa zadania to już pomysł redaktora ligi. Rzecz w tym, że wzór Stolza jest dobrze znany zawodowym matematykom oraz studentom matematyki, ale niekoniecznie studentom innych kierunków oraz pozostałym Czytelnikom.

Granicę $\lim nx_n = 2$ można było wyznaczyć różnymi sposobami; zadanie 654 rozwiązało kilkanaście osób. Tam też *można było* użyć wzoru Stolza – i został on użyty w rozwiązaniu firmowym, wydrukowanym w tym samym numerze, co treść zadania 662 – właśnie po to, by obliczenie granicy ciągu (q_n) znalazło się w zasięgu szerszego grona uczestników ligi; by dać wszystkim oręż do ręki. Wystarczyło przed zaatakowaniem zadania 662 starannie zapoznać się z rozwiązaniem zadania 654, gdzie wzór Stolza został dokładnie sformułowany, a jego stosowanie – wyjaśnione. Mimo tak wyrazistej wskazówki, tylko pięciu uczestników uporało się z tym: **J. Garnek, K. Kamiński, M. Małogrosz, J. Olszewski, T. Wietecha**.