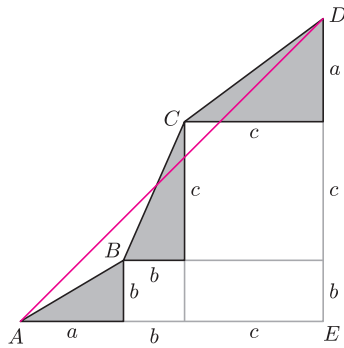
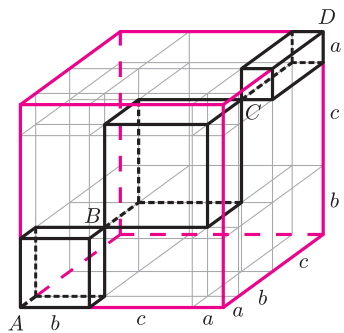


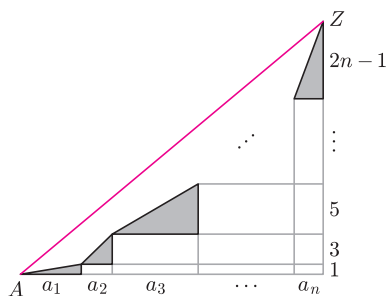
We wszystkich zadaniach przyjmujemy, że a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.



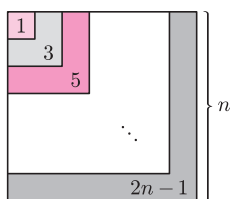
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Najkrótsza łamana

Joanna JASZUŃSKA

Niektóre nierówności, pozornie niezwiązane z geometrią, można zaskakująco łatwo udowodnić, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa i prosty geometryczny fakt, że *najkrótszą łamaną pomiędzy dwoma punktami jest łączący je odcinek*. Fakt ten można stosować na płaszczyźnie, można w przestrzeni trójwymiarowej, nic też nie stoi na przeszkodzie, by używać go w czterech lub więcej wymiarach.

1. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$.
2. Udowodnij, że $\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c)$.
3. Wykaż, że $\sqrt{a + b + 2c} + \sqrt{b + c + 2a} + \sqrt{c + a + 2b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.
4. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \geq \sqrt{6(a + b + c)}$.
5. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2}$ dla $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, takich, że $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$.

Rozwiązania

R1. Ustawmy trzy trójkąty prostokątne jak na rysunku 1. Wówczas $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{2}(a + b + c)$. \square

R2. Ustawmy prostopadłości o wymiarach $a \times b \times b$, $b \times c \times c$ oraz $c \times a \times a$ tak, jak na rysunku 2. Wówczas $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{3}(a + b + c)$. \square

Uwaga. Zadanie można też rozwiązać na płaszczyźnie, ustawiając trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i $b\sqrt{2}$, b i $c\sqrt{2}$ oraz c i $a\sqrt{2}$ tak, jak na rysunku 1.

R3. Ustawmy trzy czterowymiarowe hiperprostopadłości (odpowiedniki trójwymiarowych prostopadłościów) o wymiarach $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{c}$, $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ oraz $\sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b}$ analogicznie do sytuacji z rysunku 2. Wtedy $\sqrt{a + b + c} + \sqrt{b + c + a} + \sqrt{c + a + b}$ to długość łamanej od A do D , natomiast odcinek AD to przekątna 4-wymiarowego hipersześcianu o krawędzi $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, czyli $AD = \sqrt{4}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, co kończy dowód. \square

Uwaga. Rozwiązanie w przestrzeni trójwymiarowej można uzyskać, ustawiając prostopadłości o wymiarach $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{2c}$, $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{2a}$ oraz $\sqrt{c} \times \sqrt{a} \times \sqrt{2b}$.

R4. Ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i 1 , b i 1 oraz c i 1 podobnie, jak na rysunku 1. Wtedy $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} = AB + BC + CD \geq AD = \sqrt{(a + b + c)^2 + 3^2}$. Ponadto $(a + b + c)^2 + 3^2 \geq 6(a + b + c)$, ponieważ $((a + b + c) - 3)^2 \geq 0$. \square

R5. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a_i oraz $2i - 1$ tak, jak na rysunku 3. Przeciwnprostokątna i -tego trójkąta ma wtedy długość $\sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2}$, więc dla łamanej od A do Z uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2} \geq AZ = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n (2i - 1)\right)^2}.$$

Z założenia $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$, a rysunek 4 ilustruje znaną tożsamość $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$. Stąd $AZ = \sqrt{n^4 + n^4} = \sqrt{2}n^2$ i to jest szukana najmniejsza wartość danego wyrażenia. Jest ona osiągnięta, gdy łamana od A do Z jest odcinkiem, czyli gdy $a_i = 2i - 1$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Zadania domowe

6. Udowodnij nierówność $\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}$.
7. Udowodnij, że $\sqrt{a^2 + 3b^2} + \sqrt{b^2 + 3c^2} + \sqrt{c^2 + 3a^2} \geq 2(a + b + c)$.
8. Wykaż, że $\sqrt{a^2 + 2b^2 + 2c^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2 + 2a^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2 + 2b^2} \geq \sqrt{5}(a + b + c)$.

Zachęcam do samodzielnego wymyślania nierówności, które można rozwiązać opisaną tu metodą, a także do rozwiązywania powyższych zadań innymi metodami.