

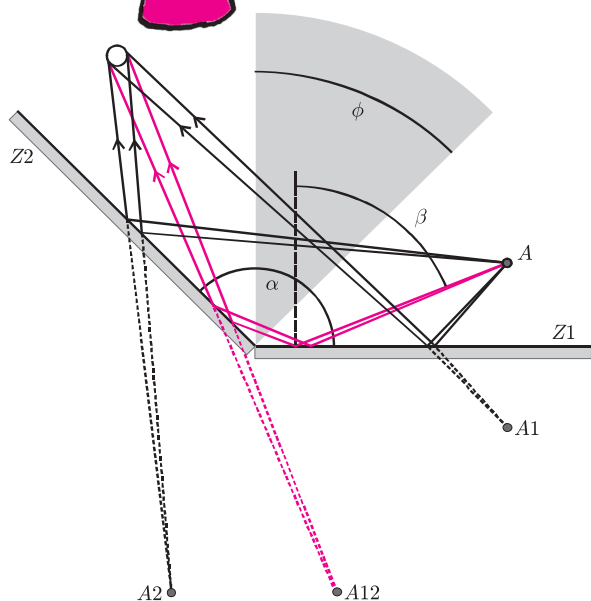
Odbicia w dwóch zwierciadłach

Grzegorz DERFEL*



Odbicie światła od zwierciadła płaskiego, przerabiane w szkole w ramach optyki geometrycznej, uważane jest za zagadnienie banalne. Bywa czasem uatrakcyjniane rozważaniem kwestii, dlaczego lustro zamienia stronę lewą z prawą, a nie zamienia góry z dołem. Natomiast znacznie ciekawsze – a architektom niezwykle przydatne w projektowaniu ciekawych wnętrz – okazuje się zbadanie zjawiska odbicia światła od pary zwierciadeł, których płaszczyzny tworzą dowolny kąt. Może wtedy dojść do wielokrotnych odbić, w wyniku których powstaje wiele obrazów. Okazuje się, że liczba powstałych obrazów zależy nie tylko od kąta między zwierciadłami, ale też od położenia przedmiotu.

Rozważmy więc dwa zwierciadła stykające się wzdłuż pewnej krawędzi, przed którymi znajduje się oglądany przedmiot, który dla wygody utożsamimy z pojedynczym punktem. Oznaczmy przez α kąt, jaki tworzą odbijające płaszczyzny zwierciadeł. Możemy przyjąć, że zachodzi $\alpha < 180^\circ$, gdyż dla kątów większych od 180° odbicia wielokrotne nie mogą wystąpić, a dla $\alpha = 180^\circ$ mamy po prostu do czynienia z jednym zwierciadłem. Z najprostszym przypadkiem mamy do czynienia dla $\alpha > 120^\circ$. Promienie wychodzące z przedmiotu ulegają wtedy najmniejszej ilości odbić. Jako przykład wybierzmy $\alpha = 135^\circ$. Rysunek 1 pokazuje, jak zwierciadło $Z1$ wytwarza obraz $A1$ przedmiotu A , a zwierciadło $Z2$ – obraz $A2$; powstają więc dwa obrazy. Promienie odbite trafiają do oka obserwatora (oznaczonego kółkiem) z dwóch kierunków.



Rys. 1. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego $\alpha = 135^\circ$.

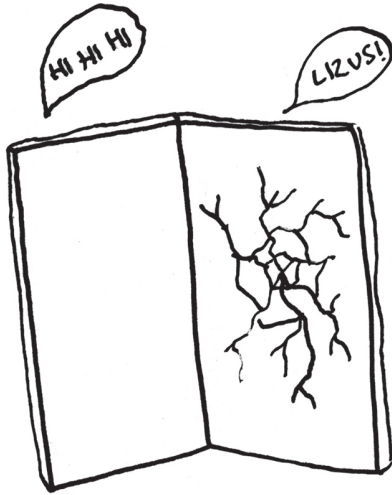


Fot. 1. Kąt między zwierciadłami jest równy $\alpha = 135^\circ$. Kredka leżąca w obszarze zacieniowanego klina ma dwa obrazy, kredka położona poza klinem – trzy.

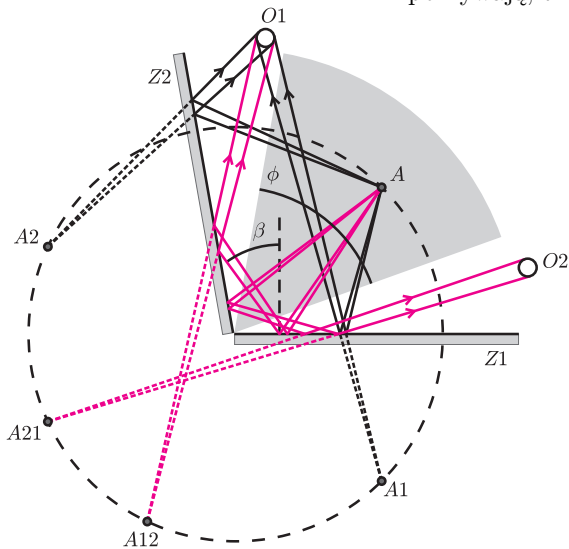
Możliwe jest powstanie trzeciego obrazu widocznego dla tego samego obserwatora, gdy promienie padające z punktu A odbijają się kolejno od zwierciadeł $Z1$ i $Z2$. Punkt przecięcia przedłużeń promieni wychodzących z układu wyznacza położenie obrazu $A12$. Jest to możliwe, jeśli kąt odbicia od pierwszego zwierciadła β (a więc i kąt padania na nie) jest większy od $\alpha - 90^\circ$ (45° w naszym przykładzie), bo tylko wtedy promień odbity od $Z1$ trafia na zwierciadło $Z2$. Wynika stąd, że trzy obrazy powstają, jeśli punkt przedmiotu należy do obszaru przylegającego do zwierciadła $Z1$ i ograniczonego płaszczyzną tworzącą z nim kąt $90^\circ - \beta = 180^\circ - \alpha$, czyli 45° . Zauważmy, że podwójnemu odbiciu ulegają tylko promienie zmierzające ku zwierciadłu $Z1$, natomiast promienie wychodzące z tego obszaru w kierunku zwierciadła $Z2$ odbijają się tylko raz. Oczywiście, istnieje drugi obszar o takich samych właściwościach przyległy do $Z2$. Promienie wychodzące z niego ulegają podwójnemu odbiciu, jeśli biegną ku zwierciadłu $Z2$. Widać więc, że promienie pochodzące z każdego

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

z tych dwóch obszarów mogą wytworzyć trzy obrazy: dwa powstałe z pojedynczych odbić od każdego lustra i jeden powstały w wyniku dwukrotnego odbicia. Jeśli natomiast przedmiot znajduje się pomiędzy wyróżnionymi płaszczyznami, czyli należy do obszaru w kształcie klina określonego kątem $\phi = \alpha - 2(180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 360^\circ$ (tu: 45°), to możliwe są tylko dwa pojedyncze odbicia. Z ostatniego wzoru wynika, że dla $\alpha = 120^\circ$ kąt $\phi = 0^\circ$, a więc klin zastąpiony jest płaszczyzną dzielącą obszar między lustrami na połowy. Punkt przedmiotu dowolnie położony poza tą płaszczyzną ma trzy obrazy.



Jeśli kąt α jest mniejszy od 120° , lecz nadal jest rozwarty, to również można wyróżnić takie obszary między lustrami, że promienie z nich wychodzące ulegają różnej ilości odbić. Rysunek 2 ilustruje to dla $\alpha = 100^\circ$. Podobnie jak poprzednio promień wychodzący z wybranego punktu odbija się dwa razy, jeśli pierwszy kąt odbicia spełnia warunek $\beta > \alpha - 90^\circ$, czyli $\beta > 10^\circ$. Płaszczyzna ograniczająca zbiór takich punktów przylegający do zwierciadła $Z1$ tworzy z tym zwierciadłem kąt $90^\circ - \beta = 180^\circ - \alpha = 80^\circ$. Punkty przedmiotu należące do tego obszaru mają więc trzy obrazy, tak jak w poprzednim przykładzie. Drugi obszar, utworzony przez punkty o tej samej własności, przylega do zwierciadła $Z2$ i ma wielkość określoną takim samym kątem. Oba obszary pokrywają się częściowo. Część wspólna tworzy klin o rozwartości $\phi = \alpha - 4(\alpha - 90^\circ) = 360^\circ - 3\alpha = 60^\circ$. Każdy punkt tego klina ma cztery obrazy: dwa powstałe po pojedynczych odbiciach i dwa utworzone w wyniku podwójnych odbić w obu zwierciadłach. Rysunek 2 ilustruje także fakt, że nie wszystkie obrazy są widoczne z jednego miejsca: obserwator $O1$ nie może zobaczyć obrazu $A21$. Klin powiększa się, gdy α maleje, i przy $\alpha = 90^\circ$ zajmuje cały obszar między zwierciadłami, tj. $\phi = 90^\circ$. Jednak przy tym szczególnym kącie oba obrazy uzyskane przez podwójne odbicia dokładnie się pokrywają, tzn. $A12 = A21$, więc każdy punkt przedmiotu ma tylko trzy obrazy.



Rys. 2. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego $\alpha = 100^\circ$.



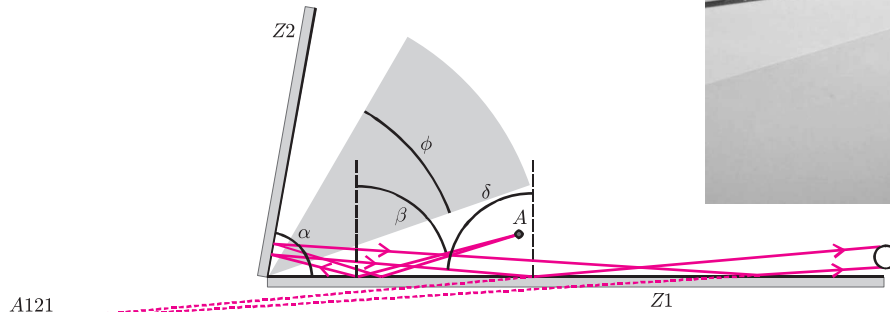
Fot. 2. Kąt między zwierciadłami jest równy $\alpha = 100^\circ$. Widać po trzy obrazy każdej z kredek. Kredka położona w obszarze zacienionego klina może mieć jeszcze jeden obraz, ale jest on niewidoczny z wybranego miejsca obserwacji.

Gdy kąt między lustrami jest mniejszy od 90° , to podwójne odbicie od każdego zwierciadła zachodzi dla każdego punktu położonego między zwierciadłami. Powstają więc zawsze co najmniej cztery obrazy. Ponadto pojawia się możliwość trzykrotnego odbicia zilustrowana dalej na rysunku 3 dla $\alpha = 80^\circ$. Trzecie odbicie, wytwarzające obraz $A121$, jest możliwe, jeśli promień z punktu przedmiotu pada np. na zwierciadło $Z1$ pod kątem β , odbija się, dociera do $Z2$ i po drugim odbiciu skierowany jest ku zwierciadłu $Z1$, tj. pada na nie pod kątem δ mniejszym od 90° . Wspomagając się rysunkiem 3, można wykazać, że kąty δ i β są powiązane relacją $\delta = 2\alpha - \beta$. W granicznym przypadku $\delta = 90^\circ$ relacja ta określa kąt β (w naszym przykładzie równy 70°), który wyznacza szerokość kątową $90^\circ - \beta = 20^\circ$ obszaru przyległego do zwierciadła $Z1$, złożonego z punktów wysyłających promienie odbijające się trzykrotnie. Drugi taki obszar przylega do zwierciadła $Z2$. Pomiedzy tymi obszarami utworzony jest klin

o rozwartości $\phi = 5\alpha - 360^\circ = 40^\circ$. Punkty mieszczące się w klinie mają po cztery obrazy, a te na zewnątrz klina – po pięć. Klin zmniejsza się, gdy α maleje i redukuje się do płaszczyzny dwusiecznej dla $\alpha = 72^\circ$.

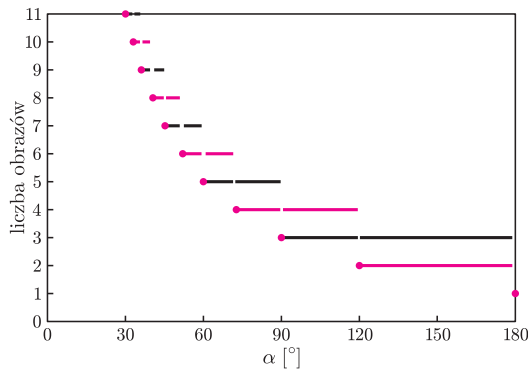


Fot. 3. Kąt między zwierciadłami jest równy $\alpha = 80^\circ$. Kredka położona w obszarze zacienionego klina ma cztery obrazy, a kredka położona poza klinem o jeden więcej dzięki trzykrotnemu odbiciu przedstawionemu na rysunku 3.

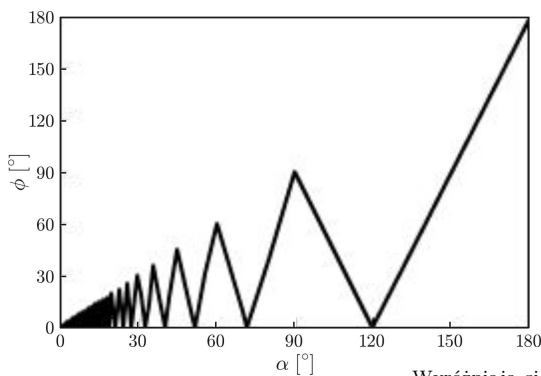


Rys. 3. Schemat zjawiska wielokrotnego odbicia dla kąta między zwierciadłami równego $\alpha = 80^\circ$.

Analogiczne rozważania kontynuowane dla coraz mniejszych kątów α dają podobne wyniki, pokazując podział przestrzeni między lustrami na obszary, którym odpowiadają różne liczby obrazów. Ogólnie liczba obrazów rośnie, gdy α maleje, i zmierza do nieskończoności, gdy zwierciadła stają się równoległe. Wszystkie one, jak również obserwowany przedmiot, leżą na okręgu o środku położonym na wspólnej krawędzi zwierciadeł.



Rys. 4. Liczba obrazów która powstaje przy danym kącie α . Kolorowe linie i punkty dotyczą przedmiotów położonych w obrębie klina, a czarne linie – poza klinem.



Rys. 5. Rozwartość klina ϕ w zależności od kąta między lustrami.

α	k	n	m	ϕ	
135°		2	3	45°	$3\alpha - 360^\circ$
120°	3	2	3	0°	
100°		4	3	60°	$360^\circ - 3\alpha$
90°	4	3	–	90°	
80°		4	5	40°	$5\alpha - 360^\circ$
72°	5	4	5	0°	
70°		6	5	10°	$360^\circ - 5\alpha$
60°	6	5	–	60°	
56°		6	7	32°	$7\alpha - 360^\circ$
$51\frac{3}{7}^\circ$	7	6	7	0°	
50°		8	7	10°	$360^\circ - 7\alpha$
45°	8	7	–	45°	
42°		8	9	18°	$9\alpha - 360^\circ$
40°	9	8	9	0°	
38°		10	9	18°	$360^\circ - 9\alpha$
36°	10	9	–	36°	
34°		10	11	14°	$11\alpha - 360^\circ$
$32\frac{8}{11}^\circ$	11	10	11	0°	
31°		12	11	19°	$360^\circ - 11\alpha$
30°	12	11	–	30°	

Wyróżniają się kąty, których pewne wielokrotności stanowią kąt pełny, tj. $\alpha_k = 360^\circ/k$, gdzie $k > 1$ jest liczbą naturalną. Liczba n obrazów powstających dla tych kątów dana jest wzorem $n = (360^\circ - \alpha_k)/\alpha_k = k - 1$. Wzór ten jest słuszny tylko dla punktów mieszczących się w obszarach w kształcie klina lub na płaszczyźnie dwusiecznej, do której kurczy się on dla pewnych kątów α . Tabela zawiera także wartości n dla przykładowych kątów wybranych z przedziałów zawartych między wartościami α_k . Liczba m oznacza liczbę obrazów punktów znajdujących się poza klinem.