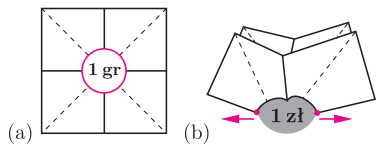




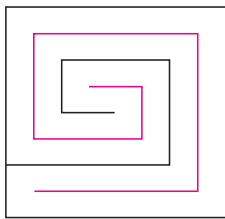
# Niemożliwe wycinanki

Joanna JASZUŃSKA

1. Czy można wyciąć w kartce dziurę w kształcie monety 1 gr, a następnie przełożyć przez tę dziurę monetę 1 zł?
2. Mamy kartkę o wymiarach  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$  i nożyczki. Czy można wyciąć taką dziurę, przez którą przejdzie człowiek?
3. Czy w sześcianie o krawędzi 20 zmieści się kwadrat o boku 21?
4. Czy w sześcianie o krawędzi 20 można wywiercić tunel, przez który da się przesunąć sześcian o krawędzi 21?



Rys. 1. Wzdłuż linii ciągłych zginamy w jedną stronę, wzdłuż przerywanych – w drugą.



Rys. 2. Uproszczony schemat, należy wycinać gęstszą spiralę.

## Rozwiązania

Wszystkie odpowiedzi są pozytywne. Oto przepisy, jak te wycinanki zrealizować.

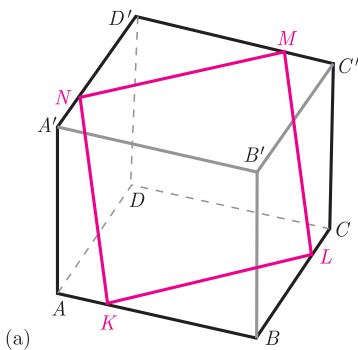
**R1.** Po wycięciu dziury warto utworzyć cztery pomocnicze zagięcia (rys. 1(a)). Następnie kartkę złożyć w pół wzdłuż jednego z nich i odciągnąć od siebie końce dziury (rys. 1(b)), uzyskując dłuższy, wąski otwór.  $\square$

**R2.** Kartkę można np. najpierw rozciąć wzdłuż spiralnej linii, uzyskując bardzo długi, poskręcany pasek (rys. 2), a następnie naciąć wzdłuż prawie całej długości tego paska, otrzymując w nim wystarczająco dużą dziurę.  $\square$

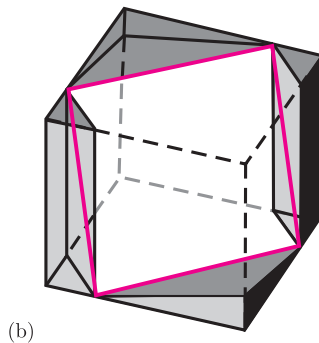
**R3.** Niech punkty  $K, L, M, N$  leżą na krawędziach  $AB, BC, C'D', D'A'$  sześcianu  $ABCD A'B'C'D'$  tak, że  $AK/AB = CL/CB = C'M/C'D' = A'N/A'D' = 1/4$  (rys. 3(a)). Wówczas  $KL = 3/4 \cdot AC = 3/4 \cdot 20\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ , podobnie  $MN = KL$  i odcinki te są równoległe, więc punkty  $K, L, M, N$  leżą w jednej płaszczyźnie, a wobec symetrii problemu równoległobok  $KLMN$  jest prostokątem.

Korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa (kolejno dla trójkątów  $AA'N$  oraz  $AKN$ ) obliczamy, iż również  $KN = 15\sqrt{2}$ , zatem  $KLMN$  jest kwadratem o boku długości  $15\sqrt{2} > 15 \cdot 1,4 = 21$ .

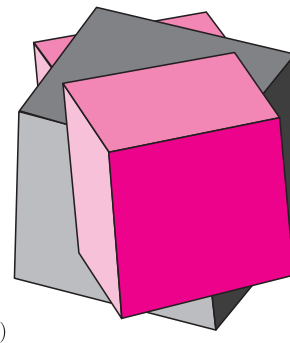
Jeśli każdy z jego wierzchołków przybliżymy do jego środka o taką samą odpowiednio małą odległość, uzyskamy w rezultacie kwadrat  $K'L'M'N'$  o krawędzi 21, którego wierzchołki leżą wewnątrz danego sześcianu.  $\square$



Rys. 3 (a) Kwadrat o boku  $> 21$



(b) Tunel o przekroju  $KLMN$



(c) Kolorowy sześcian przesuwany przez tunel w szarym sześcianie

**R4.** Wywiercimy tunel, którego przekrojem poprzecznym jest kwadrat  $K'L'M'N'$  z poprzedniego zadania (wygląda to prawie jak na rys. 3(b)). Zauważmy, że tunel ten nie ma punktów wspólnych z żadną z krawędzi sześcianu składających się na łamaną zamkniętą  $ABCC'D'A'A$  (zaznaczoną na czarno na rys. 3(a)), istotnie więc część sześcianu pozostająca wokół tunelu nie rozpada się i tworzy wielościennej obręcz, przez którą da się przesunąć sześcian o krawędzi 21 (rys. 3(c)).  $\square$

Tunel o przekroju  $KLMN$  pozwala przesunąć przez dany sześcian największy możliwy inny sześcian (o krawędzi o około 6% większej), nazywany *sześcianem księcia Ruperta*. Polecam animację na stronie <https://www.youtube.com/watch?v=-2jjgHsxEu4>