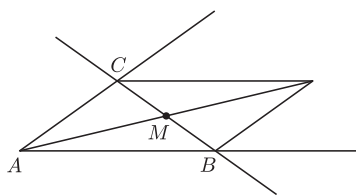


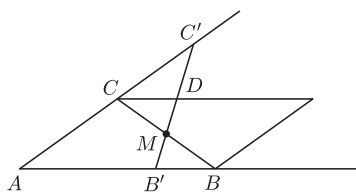
## Zabawy w kącie

Jarosław GÓRNICKI

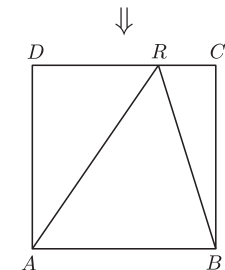
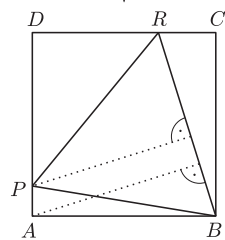
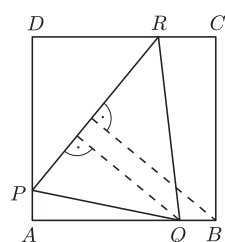
Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska



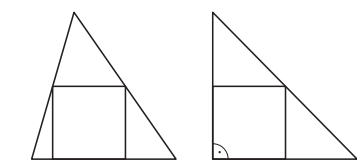
Rys. 1



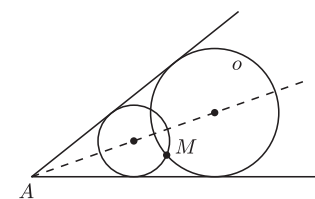
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

W każdym zjawisku przyrody można dostrzec dążenie do osiągnięcia jakiegoś maksimum lub minimum. Umiejętność wyznaczania wartości ekstremalnych nie powinna więc być niczym niezwykłym. Oto zadanie z niespodzianką, które proponuję rozwiązać samodzielnie (wrócimy do niego na końcu artykułu):

**Zadanie 1.** Przez dany punkt leżący we wnętrzu kąta poprowadzić prostą o najkrótszym odcinku między jego ramionami.

Tymczasem rozważymy kilka innych ciekawych problemów.

**Zadanie 2.** Przez dany punkt  $M$  leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$  poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$ , wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym polu.

**Rozwiązanie.** Wykreślamy równoległobok, którego dwa boki leżą na ramionach kąta o wierzchołku  $A$ , a jego przekątne przecinają się w punkcie  $M$ . Przekątna tego równoległoboku, która przecina ramiona kąta (w punktach  $B$  i  $C$ , rys. 1), wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym polu.

Jeśli  $B'C' \neq BC$  jest inną prostą przechodzącą przez punkt  $M$  (na przykład taką, że  $|AB'| < |AB|$ , rys. 2), to, korzystając z przystawiania trójkątów  $B'BM$  i  $DCM$ , mamy:

$$\begin{aligned} |\triangle AB'C'| &= |AB'MC| + |\triangle CMD| + |\triangle CDC'| > \\ &> |AB'MC| + |\triangle CMD| = |AB'MC| + |B'MB| = |\triangle ABC|. \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** Wykazać, że maksymalne pole trójkąta zawartego w kwadracie jednostkowym jest równe  $\frac{1}{2}$ , a minimalne pole trójkąta zawierającego kwadrat jednostkowy jest równe 2.

**Rozwiązanie.** Pierwsza część jest łatwa. Weźmy kwadrat jednostkowy  $ABCD$  i w nim trójkąt  $PQR$ , którego wierzchołki leżą na różnych bokach kwadratu tak, że  $P, Q, R \notin \{A, B, C, D\}$ . Wówczas trójkąt  $PQR$  łatwo zastąpić trójkątem o większej wysokości, czyli większym polu (rys. 3):

$$|\triangle PQR| < |\triangle PBR| < |\triangle ABR| = \frac{1}{2}.$$

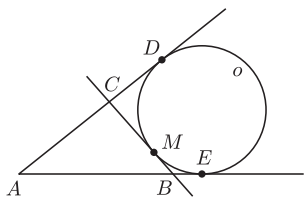
Druga część jest konsekwencją zadania 2. Jeśli trójkąt ma najmniejsze pole wśród trójkątów zawierających kwadrat (jednostkowy), to środki boków tego trójkąta muszą należeć do boków kwadratu. Oznacza to, że jeden bok kwadratu musi należeć do boku trójkąta, a przeciwny bok kwadratu łączy środki boków trójkąta (rys. 4). Nietypowe w tym zadaniu jest to, że istnieje wiele różnych realizacji warunków ekstremalnych.

**Zadanie 4.** Przez dany punkt  $M$  leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$  poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$ , wyznacza trójkąt  $ABC$  o najmniejszym obwodzie.

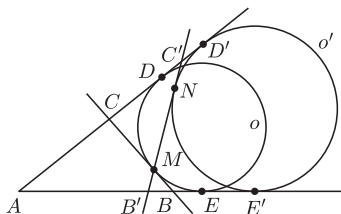
**Rozwiązanie.** W kąt o wierzchołku  $A$  wpisujemy dwa okręgi przechodzące przez punkt  $M$  (rys. 5). Do większego z nich, powiedzmy  $o$ , w punkcie  $M$  wyznaczamy styczną, która przecina ramiona kąta w punktach  $B$  i  $C$  (rys. 6). Tak utworzony trójkąt  $ABC$  spełnia warunki zadania i ma najmniejszy obwód równy  $|AD| + |AE|$ , gdzie  $D$  i  $E$  to punkty styczności okręgu  $o$  z ramionami kąta (jest tak, bo  $|MC| = |CD|$  i  $|MB| = |BE|$ ).

Jeśli  $B'C' \neq BC$  jest inną prostą zawierającą punkt  $M$ , to okrąg  $o'$  dopisany do trójkąta  $AB'C'$  jest styczny do ramion kąta w punktach  $D'$  i  $E'$  oraz do odcinka  $B'C'$  w punkcie  $N \neq M$  (rys. 7). Ponieważ punkt  $M$  leży na zewnątrz okręgu dopisanego  $o'$ , więc okrąg  $o'$  ma większy promień niż okrąg  $o$  i obwód trójkąta  $AB'C'$  jest równy  $|AD'| + |AE'| > |AD| + |AE|$ .

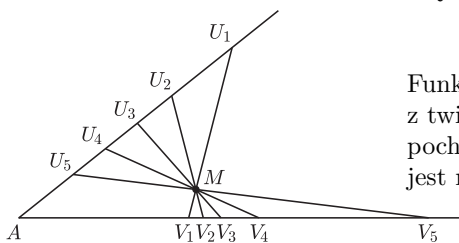
Odrobina geometrii pozwoliła nam sprawnie rozwiązać trzy zadania. Kto próbował rozwiązać zadanie 1, ten wie, że jest ono trudniejsze.



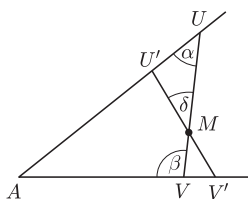
Rys. 6



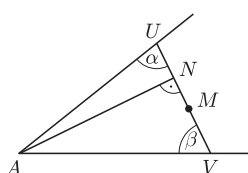
Rys. 7



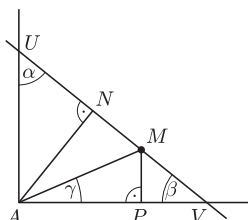
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

**Rozwiązanie zadania 1.** Rozpocznijmy od wykazania, że istnieje najkrótszy odcinek realizujący warunki zadania. Niech  $M$  będzie danym punktem we wnętrzu kąta o wierzchołku  $A$ . Odcinek, którego końce ślizgają się po ramionach kąta od położenia  $U_1V_1$  przez  $U_2V_2, U_3V_3$ , itd. do położenia  $U_5V_5$  (rys. 8) i przechodzący przez punkt  $M$ , zmienia swoją długość w sposób ciągły. Ponieważ długość ta najpierw maleje, a potem wzrasta, więc wśród rozpatrywanych odcinków istnieje taki odcinek  $UV$ , którego długość jest najmniejsza.

Spróbujmy ten odcinek scharakteryzować. Niech  $U'V' \neq UV$  będzie innym odcinkiem zawierającym punkt  $M$  i łączącym ramiona kąta. Niech  $|\sphericalangle AUM| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle MVA| = \beta$ ,  $0 < \alpha + \beta < \pi$ , a mniejszy z kątów o wierzchołku  $M$  (między odcinkami  $UV, U'V'$ ) ma miarę  $\delta$  (rys. 9). Dla małych kątów  $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  rozważmy funkcję

$$f(\delta) = |U'V'| = |U'M| + |MV'|.$$

Z twierdzenia sinusów, zastosowanego do trójkątów  $UMU'$  i  $VMV'$ , mamy

$$\frac{|MU'|}{\sin \alpha} = \frac{|MU|}{\sin(\pi - (\alpha + \delta))}, \quad \frac{|MV'|}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{|MV|}{\sin(\pi - \delta - (\pi - \beta))},$$

więc

$$f(\delta) = |MU| \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \delta)} + |MV| \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \delta)}.$$

Funkcja ta jest różniczkowalna, osiąga minimum dla  $\delta = 0$ , więc zgodnie z twierdzeniem Fermata spełnia warunek  $f'(0) = 0$ , który po obliczeniu pochodnej i niezbyt skomplikowanych przekształceniach trygonometrycznych jest równoważny warunkowi

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Jaki jest sens geometryczny tego warunku? Niech  $N$  będzie rzutem (prostopadłym) wierzchołka  $A$  na odcinek  $UV$  (rys. 10). Wyznaczając  $\operatorname{ctg} \beta$  i  $\operatorname{ctg} \alpha$  z trójkątów prostokątnych  $ANU$  i  $ANV$ , łatwo stwierdzamy, że  $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{|NV|}{|NU|}$ . Oznacza to, że  $|MU| = |NV|$  i  $|MV| = |NU|$ , czyli punkt  $N$  jest symetryczny do punktu  $M$  względem środka odcinka  $UV$ .

Niespodzianką (trudnością) w tym zadaniu jest to, że – poza szczególnymi przypadkami – odcinka  $UV$  nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Dlaczego tak jest? Niech kąt przy wierzchołku  $A$  będzie prosty. Wtedy, przy oznaczeniach takich jak na rysunku 11, jeśli  $UV$  jest najkrótszym odcinkiem łączącym ramiona kąta i przechodzącym przez punkt  $M$ , to

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Z twierdzenia Talesa  $\frac{|MU|}{|PA|} = \frac{|MV|}{|PV|}$ , więc  $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{|PA|}{|PV|}$ . Ponieważ  $\frac{|PA|}{|MP|} = \operatorname{ctg} \gamma$ ,  $\frac{|PV|}{|MP|} = \operatorname{ctg} \beta$ , więc

$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta},$$

gdzie  $\gamma$  jest miarą kąta  $MAP$ . W konsekwencji  $\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{ctg}^2 \beta$ , więc  $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \gamma}$ . Gdyby istniała konstrukcja najkrótszego odcinka  $UV$ , to, biorąc  $|AP| = 2$  i  $|MP| = 1$ , otrzymamy odcinek  $|PV| = \sqrt[3]{2}$ , który umożliwia wykonanie zadania podwojenia sześcianu jednostkowego. Wystarczy teraz wiedzieć (!), że jest to niemożliwe do zrealizowania za pomocą cyrkla i linijki (patrz np. M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, Biblioteczka Deltę 1, WSiP, Warszawa 1979).

Puentą niech będą słowa Adama Mickiewicza

#### PRAKTYKA

„Na co będą potrzebne, pytało pacholę –  
Trójkąty, czworoboki, koła, parabole?”

„Że potrzebne – rzekł mędrzec – musisz teraz wierzyć;  
Na co potrzebne, zgadniesz, gdy zaczniesz świat mierzyć.”