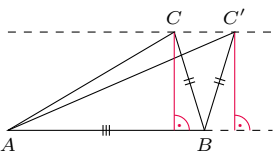
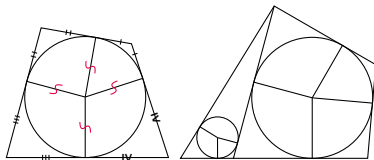


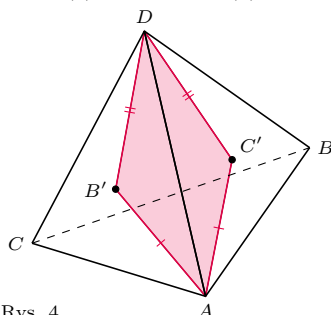
Rys. 1 (a) $BD = 30$ (b) $AC = 30$



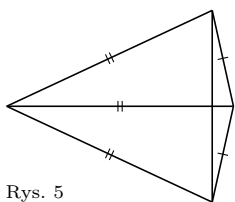
Rys. 2. Trójkąt ABC jest ostrokątny, $AB \neq BC = BC'$, $CC' \parallel AB$



Rys. 3 (a) (b)



Rys. 4



Rys. 5

Niniejszy odcinek *Deltoidu o okrągłym* (w systemie jedenastkowym) numerze jest odcinkiem ostatnim. Nie kryjemy smutku z tego powodu, cieszymy się jednocześnie, że na naszych łamach ta wspaniała seria ukazywała się przez okrągłych 10 lat. Mamy nadzieję, że jeszcze wiele razy nazwisko Autorki zagości w naszym spisie treści.

Joasiu, za Twoją nienaganną punktualność w dostarczaniu materiałów, zegarmistrzowską dokładność przy ich korekcie, a przede wszystkim za deltoidową fantastyczność serdecznie dziękujemy!

Redakcja

O deltoidach

1. Deltoid wypukły ma boki długości 25 i 39, a jego krótsza przekątna ma długość 30. Wyznacz długość dłuższej przekątnej tego deltoиду.
2. Czy istnieją nieprzystające czworokąty wypukłe $ABCD$, $PQRS$ o równych polach i takie, że $AB = PQ$, $BC = QR$, $CD = RS$, $DA = SP$?
3. Wykaż, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na siedem deltoidów.
4. Wykaż, że powierzchnię dowolnego czworokąta można rozciąć na sześć części, z których każda po rozłożeniu na płasko jest deltoidem.
5. Czy istnieje taki czworokąt wypukły, który nie jest rombem i którego każda przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?
6. Stół do bilarda ma kształt deltoиду $ABCD$ o osi symetrii AC i kątach prostych przy B i D . Bila wybita z wierzchołka A po odbiciu od boku BC , a następnie od AD trafia w wierzchołek C . Wykaż, że środek drogi bili leży na AC .
7. Dany jest deltoid $ABCD$ o osi symetrii BD . Punkty K, M, N są odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego z bokami AB, BC, DA ; proste BD i MN przecinają się w punkcie P . Wykaż, że punkty A, K, P, N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania i wskazówki

R1. Przy oznaczeniach jak na rysunku 1 (a), korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy $AE = 36$ oraz $CE = 20$, więc $AC = 56$.

Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie! Oś symetrii AC deltoidu może zawierać jego krótszą przekątną (rys. 1 (b)). Wówczas $25^2 - CE^2 = 39^2 - (30 - CE)^2$, co prowadzi do równości $CE = 1/15$ oraz $BD = 2 \cdot BE = 2\sqrt{25^2 - (1/15)^2}$. \square

R2. Trójkąty ABC, ABC' z rysunku 2 mają równe pola i nie są przystające. Niech D, D' będą obrazami B w symetrii odpowiednio względem AC i AC' . Wówczas deltoidy $ABCD$ i $ABC'D'$ spełniają warunki zadania: mają równe pola i odpowiednie boki oraz nietrudno sprawdzić, że są nieprzystające i wypukłe. \square

R3. Jeśli w dany czworokąt da się wpisać okrąg, to można go rozciąć na cztery deltoidy, jak na rysunku 3 (a), a następnie jeden z nich na kolejne cztery (bo w każdy deltoid wypukły można wpisać okrąg), łącznie uzyskując siedem deltoidów.

Jeśli zaś w dany czworokąt nie da się wpisać okręgu, to wpiszmy mały okrąg w dowolny z jego kątów i powiększajmy ten okrąg, aż dotknie jednego z pozostałych boków. Pozwala to podzielić dany czworokąt na czworokąt opisany na okręgu i trójkąt, a następnie na siedem deltoidów, jak na rysunku 3 (b). \square

R4. Niech B', C' będą punktami styczności sfery wpisanej w czworokąt ze ścianami odpowiednio ADC, ADB (rys. 4). Wówczas $AB' = AC'$ i $DB' = DC'$ jako odcinki stycznych do tej sfery, więc $AB'DC'$ po rozplaszczeniu jest deltoidem. Podobnie uzyskujemy pozostałe deltoidy. \square

R5. Taki czworokąt istnieje (rys. 5). \square

Inny przykład to czworokąt utworzony przez cztery z wierzchołków pięciokąta foremnego.

W6. Warto rozważyć romb $ACA'C'$ o środku w punkcie B . Oznaczmy przez E punkt przecięcia drogi bili z odcinkiem AC , niech E' będzie obrazem E w symetrii względem BC . Wystarczy dowieść, że $AE' = E'C'$ i że odcinki te są równe rozprostowanym odpowiednim fragmentom drogi bili. Przyda się fakt, iż kąt padania bili równy jest kątowi odbicia.

W7. Twierdzenie Brianchona dla czworokąta opisanego na okręgu orzeka, że przekątne i proste łączące przeciwległe punkty styczności przecinają się w jednym punkcie. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle APK = \sphericalangle ANK$, korzystając np. z $AP \parallel KM$, z równoramienności trójkąta KPM i z twierdzenia o stycznej i cięciwie.

Zad. 1 pochodzi z *Autorskiego Tygodnika Matematycznego TRAPEZ* Jarosława Wróblewskiego, zad. 3 z LXII Olimpiady Matematycznej, zad. 5 ze zbiorów Jerzego Bednarczuka, a zad. 7 z 18 Rosyjskiej Olimpiady Matematycznej. Dziękuję Łukaszowi Bożykowi i Krzysztofowi Ciesielskiemu za pomoc w gromadzeniu materiałów do tego artykułu.