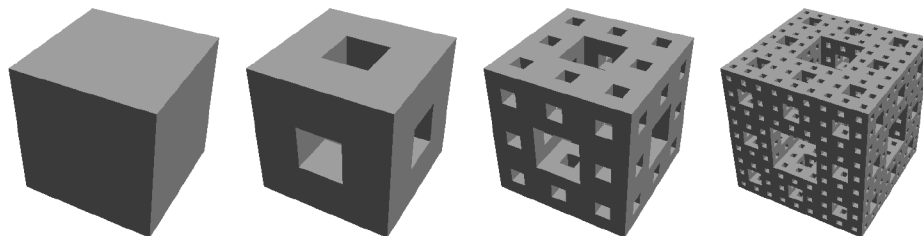


Rys. 1. Sześciokątny przekrój sześcianu

## Kroimy kostkę

Joanna JASZUŃSKA

Podzielmy kostkę na 27 przystających sześcianów (jak w kostce Rubika), a następnie wyrzucimy 7 z nich: ten ze środka oraz środkowy na każdej ze ścian. W kolejnych krokach konstrukcji powtarzamy powyższą operację dla każdego z pozostałych mniejszych sześcianów (rys. 2).

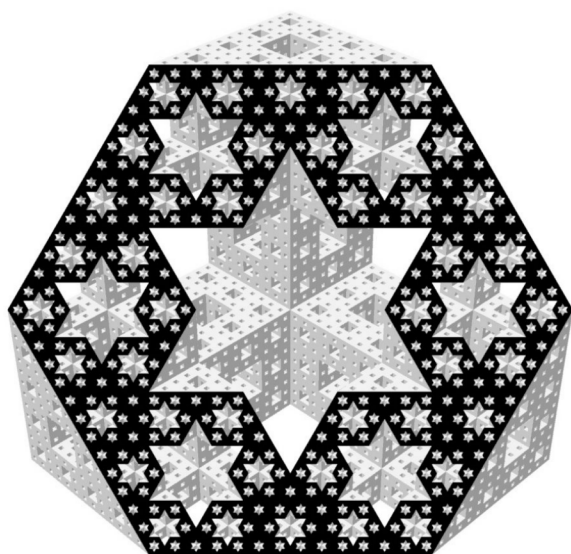


Rys. 2. Trzy początkowe kroki konstrukcji kostki Menger'a (Wikimedia Commons, autor: Mattcomm)

Po nieskończenie wielu takich krokach otrzymalibyśmy *kostkę Menger'a* – fraktal o zerowej objętości, nieskończonej powierzchni i innych ciekawych własnościach. Zatrzymajmy się jednak po czwartym kroku konstrukcji.

Sześcian można przeciąć płaszczyzną prostopadłą do głównej przekątnej i przechodzącą przez środki niektórych jego krawędzi, w przekroju uzyskując sześciokąt foremny (rys. 1, oznaczmy płaszczyznę cięcia przez  $\pi$ ).

Jaki jest kształt i układ dziur na takim sześciokątym przekroju czwartego kroku konstrukcji kostki Menger'a?

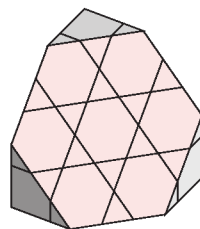


Rys. 3. (Wikimedia Commons, autor: Cmglee)

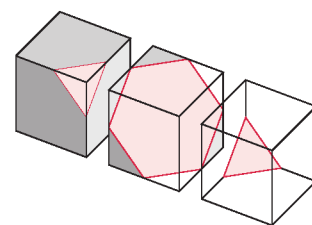
Odpowiedź widać na rysunku 3. Uzasadnimy dwoma sposobami, że w pierwszym kroku konstrukcji na środku przekroju otrzymujemy dziurę w kształcie gwiazdki.

**Sposób I.** Przekrojmmy płaszczyzną  $\pi$  (jak na rysunku 1) cały sześcian podzielony na 27 mniejszych kostek. Zarówno środkowa kostka, jak i kostki przy środkach krawędzi, przez które przechodzi płaszczyzna  $\pi$ , przecięte są w taki sam sposób jak całość, w przekroju uzyskujemy więc siedem odpowiednio mniejszych sześciokątów foremnych (rys. 4).

Płaszczyzna  $\pi$  przecina też 12 innych małych kostek, przechodząc w każdej z nich przez środki trzech krawędzi o wspólnym wierzchołku. Takie przekroje są trójkątami równobocznymi (rys. 5).



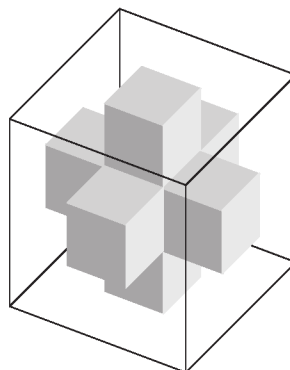
Rys. 4



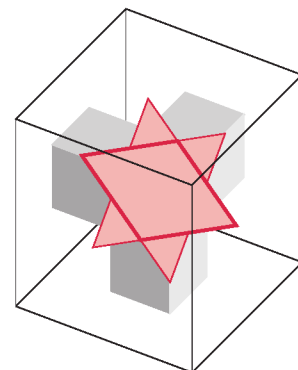
Rys. 5. Przekroje małych kostek

Sześciany usunięte w pierwszym kroku konstrukcji kostki Menger'a składają się na sześciokąt na środku przekroju i sześć przylegających do niego trójkątów, co w sumie daje właśnie sześcioramienną gwiazdkę. W kolejnym kroku konstrukcji analogiczne mniejsze gwiazdki wycinane są z pozostałych sześciu sześciokątów z przekroju z rysunku 4, co tłumaczy także układ dziur widocznych na rysunku 3.

**Sposób II.** Pierwszy krok konstrukcji kostki Menger'a można inaczej opisać jako wydrążenie w sześcianie trzech tuneli wyznaczonych przez kwadraty na środkach przeciwległych ścian (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

Przekrój płaszczyzną  $\pi$  każdego z tych tuneli to romb o kątach  $60^\circ$  i  $120^\circ$  (na rys. 5 na taki romb składają się dwa trójkąty i sześciokąt). Środkowa dziura-gwiazdka z rysunku 3 powstaje z trzech takich rombów (rys. 7).