



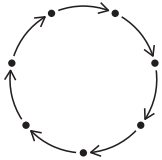
Okrągły stół i trójkąty

Joanna JASZUŃSKA

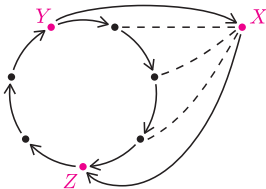
Turniej to zestaw rozgrywek pomiędzy pewną liczbą graczy, w którym każdy gra dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych i nie ma remisów. Jeśli zawodnik wygrał wszystkie swoje mecze, nazwiemy go *zwycięzcą*.

Cykl to taki ciąg co najmniej trzech różnych zawodników, w którym każdy wygrał z następnym, a ostatni z pierwszym (rys. 1). *Trójkąt* to cykl o długości trzy.

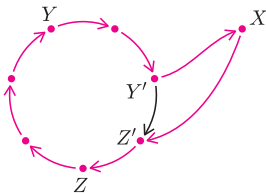
$A \rightarrow B$ oznacza, że A wygrał z B .



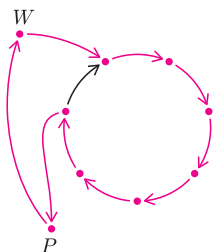
Rys. 1. Uczestnicy cyklu przy okrągłym stole; każdy wygrał z osobą siedzącą na lewo od niego.



Rys. 2



Rys. 3. Cykl dłuższy o 1 od cyklu C



Rys. 4. Cykl dłuższy o 2 od cyklu C

1. Wykaż, że w każdym turnieju istnieje zwycięzca lub istnieje trójkąt.
2. Wykaż, że jeśli w turnieju nie ma trójkąta, to wszystkich graczy można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał ze wszystkimi zawodnikami stojącymi za nim.
3. Udowodnij, że jeśli w turnieju istnieje cykl o więcej niż trzech graczach, to istnieje trójkąt.
4. Udowodnij, że po każdym turnieju albo można wszystkich uczestników ustawić w cykl, albo można ich tak podzielić na dwie grupy \mathcal{G} i \mathcal{D} , że każdy z grupy \mathcal{G} wygrał z każdym z grupy \mathcal{D} .

Rozwiązania

R1. Niech M będzie zawodnikiem, który wygrał maksymalną liczbę meczów. Jeśli wygrał wszystkie, jest zwycięzcą. W przeciwnym wypadku istnieje zawodnik W , który wygrał z M oraz istnieje przynajmniej jeden zawodnik pokonany przez M .

Gdyby gracz W zwyciężył ze wszystkimi, którzy przegrali z M , to W wygrałby więcej meczów niż M (bo pokonał też M) – sprzeczność. Zatem W przegrał z którymś z graczy, z którymi wygrał M , czyli istnieje trójkąt. \square

R2. Z zadania 1 wiemy, że skoro nie ma trójkąta, to istnieje zwycięzca Z_1 ; ustawmy go na początku rzędu. W gronie pozostałych graczy również nie ma trójkąta, więc istnieje gracz Z_2 , który pokonał ich wszystkich (ale nie Z_1) – ustawmy go na drugim miejscu rzędu. Kolejnych graczy ustawiamy analogicznie. \square

R3. Niech $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$ będzie cyklem, gdzie $k > 3$. Rozważmy mecz $A_1 - A_3$. Jeśli wygrał go gracz A_3 , otrzymujemy trójkąt $A_1 A_2 A_3$. W przeciwnym przypadku otrzymujemy cykl $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$ o $k - 1$ graczach. Jeśli jest ich więcej niż 3, postępujemy dalej analogicznie. \square

R4. Jeśli nie ma żadnych cykli, to nie ma trójkątów i na mocy zadania 1 istnieje zwycięzca. Wówczas niech grupa \mathcal{G} składa się tylko z niego, a grupa \mathcal{D} z pozostałych zawodników.

Jeśli istnieją cykle, to rozważmy cykl C o maksymalnej długości. Jeżeli C zawiera wszystkich graczy, to teza jest spełniona. W przeciwnym przypadku istnieje osoba X , która nie należy do cyklu C .

Wykażemy, że X albo wygrał ze wszystkimi zawodnikami z C , albo ze wszystkim przegrał. Załóżmy przeciwnie, że X przegrał z Y , ale wygrał z Z z cyklu (rys. 2). Wówczas w cyklu C na „drodze” od Y do Z istnieją tacy dwaj *kolejni* zawodnicy Y', Z' , że X przegrał z Y' , ale wygrał z Z' . Wtedy cykl C można wydłużyć, dołączając zawodnika X pomiędzy Y' a Z' (rys. 3), sprzecznie z założeniem o maksymalności C .

Jeżeli istnieją zawodnicy W i P spoza cyklu C , którzy odpowiednio wygrali i przegrali ze wszystkimi z cyklu, to W wygrał z P , gdyż w przeciwnym razie cykl można by wydłużyć o tych dwóch graczy w sposób przedstawiony na rysunku 4.

Niech do grupy \mathcal{G} należą wszyscy zawodnicy, którzy wygrali z graczami z C , do \mathcal{D} ci, którzy przegrali z uczestnikami C . Wszystkich graczy z cyklu C dołączmy do dowolnego spośród zbiorów \mathcal{G}, \mathcal{D} . W ten sposób otrzymujemy żądany podział. \square

Zadanie domowe

5. Wykaż, że po każdym turnieju wszystkich jego uczestników można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.