

Doświadczenie, polegające na wielokrotnym rzucaniu monetą (symetryczną lub nie) ma tę zaletę, że każdy ma jakieś wyobrażenia dotyczące wyników. Nietrudno na przykład uwierzyć, że stosunek liczby orłów  $S_n$  do liczby rzutów  $n$  nie będzie się wiele różnił od  $p$  – prawdopodobieństwa otrzymania orła w pojedynczym rzucie.

I rzeczywiście, jest to prawo wielkich liczb udowodnione przez Jacoba Bernoulliego pod koniec XVII w. Dokładniej, dla każdego  $\varepsilon > 0$  mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = 1.$$

Oznacza to, że im większe  $n$ , tym (na ogół) mniejsza szansa dużego odchylenia  $\frac{S_n}{n}$  od  $p$ . Nie znaczy to jednak, że ciąg liczb  $\frac{S_n(\omega)}{n}$  zmierza do  $p$  dla prawie wszystkich zdarzeń elementarnych  $\omega$  (czyli że  $\frac{S_n}{n}$  dąży do  $p$  z prawdopodobieństwem 1). Gwarantuje to dopiero poniższe – mocniejsze – twierdzenie: dla każdego  $\varepsilon > 0$  mamy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left( p - \varepsilon \leq \frac{S_n}{n} \leq p + \varepsilon \text{ dla wszystkich } n \geq m \right) = 1.$$

Dla dowodu oszacujemy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A_n = \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\}$ . Niech  $q = 1 - p$ . Zdarzenie  $A_n$  przedstawimy w postaci sumy zdarzeń  $\{S_n = k\}$  dla odpowiednio dobranych  $k$ . Pamiętając, że  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} P \left( \frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon \right) &\leq \sum_{k \geq n(p+\varepsilon)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k \geq n(p+\varepsilon)} e^{-\lambda((p+\varepsilon)n-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq \\ &\leq e^{-\lambda n \varepsilon} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{\lambda q})^k (qe^{-\lambda p})^{n-k} = \\ &= e^{-\lambda n \varepsilon} (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n \leq \\ &\leq e^{-\lambda n \varepsilon} (pe^{\lambda^2 q^2} + qe^{\lambda^2 p^2})^n \leq e^{-\lambda n \varepsilon} (pe^{\lambda^2} + qe^{\lambda^2})^n \leq \\ &\leq e^{-\lambda n \varepsilon} \cdot e^{\lambda^2 n}. \end{aligned}$$

W trzeciej od końca nierówności skorzystaliśmy z faktu, że  $e^x \leq 1 + x \leq e^{x^2} + x$ . Wybieramy teraz  $\lambda$  minimalizujące prawą stronę, czyli  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$  i otrzymujemy nierówność Bernsteina:

$$P \left( \frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon \right) \leq e^{-n \frac{\varepsilon^2}{4}} \text{ dla } \varepsilon > 0.$$

Analogicznie  $P \left( \frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon \right) \leq e^{-n \frac{\varepsilon^2}{4}}$ .

Ponieważ dopełnienie iloczynu zbiorów jest sumą dopełnień (wzory de Morgana), więc

$$P \left( \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right) = 1 - P \left( \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c \right)$$

( $A^c$  oznacza tu zdarzenie przeciwne do  $A$ ). Ponadto,

$$P \left( \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c \right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n^c) \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} e^{-n \frac{\varepsilon^2}{4}} \rightarrow 0, \text{ gdy } m \rightarrow \infty.$$

Stąd otrzymujemy żądany wynik.

Z powyższych rozważań wynika, że zmienna losowa  $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$  jest dla dużych  $n$  silnie skupiona wokół zera. A jeśli będziemy rozpatrywać  $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ ? O zachowaniu się tego wyrażenia mówi twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a (de Moivre, 1733;



### Rozwiązanie zadania M 831.

Jeśli  $S$  oznacza pole trójkąta,  $2p$  – jego obwód,  $r$  – promień okręgu wpisanego, zaś  $a$ ,  $b$  i  $c$  – długości boków, to wówczas

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(wzór Herona), a ponadto  $S = rp$ . Z tych wzorów wynika, że

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Podstawiając wartości podane w treści zadania przekonujemy się łatwo, że dla każdego z trójkątów promień koła wpisanego jest równy 6.



### Rozwiązanie zadania M 830.

Skoro  $n^2 + 1997n = (n+k)^2$  dla pewnego naturalnego  $k$ , to  $1997n = 2nk + k^2$ .

Stąd  $k \leq 998$ , a wtedy

$$1997n \leq 2 \cdot 998n + 998^2,$$

czyli  $n \leq 998^2$ .

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} (998^2)^2 + 1997 \cdot (998^2) &= \\ &= (998^2)^2 + 2 \cdot 998 \cdot (998^2) + 998^2 = \\ &= (998^2 + 998)^2. \end{aligned}$$

Szukaną liczbą jest więc 998.

Laplace udowodnił to twierdzenie później, nie powołując się na poprzednika):

$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Innymi słowy,  $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$  ma asymptotycznie rozkład normalny (gaussowski).

Załóżmy teraz, że moneta jest symetryczna, czyli  $p = \frac{1}{2}$ . Czy różnica między liczbą orłów i reszek będzie ograniczona? Posługując się, na przykład, twierdzeniem de Moivre'a-Laplace'a można udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 tak nie będzie. Mało tego, wartość bezwzględna różnicy jest w pewnym sensie rzędu  $\sqrt{n \log \log n}$ , a dokładniej, jeśli  $R_n$  oznacza liczbę reszek, to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1$$

z prawdopodobieństwem 1. Oczywiście ze względu na symetrię

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = -1.$$

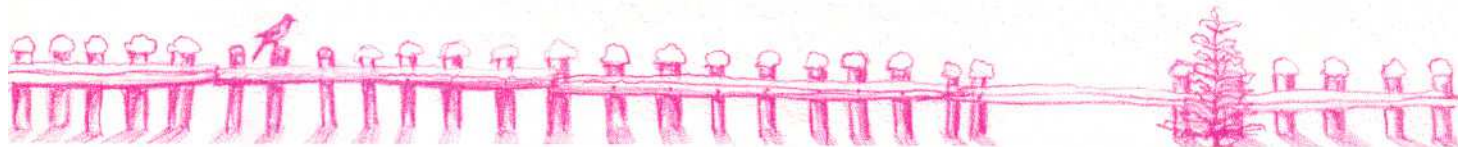
Jest to tzw. prawo iterowanego logarytmu (Chinczyn, 1924).

Wobec tego  $S_n - R_n$  będzie powracać do zera nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1. Jednak średni czas oczekiwania na powrót do zera jest nieskończony.

I na zakończenie dość paradoksalny wynik: jeśli rzucamy symetryczną monetą  $n$  razy i zapisujemy kolejne wartości  $S_k - R_k$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ , czyli przewagę orłów nad reszkami, to okazuje się, że jest mała szansa na to, by dodatnie i ujemne różnice pojawiły się z grubsza tyle samo razy. Przeciwnie, typowy wynik to taki, że orły (lub reszki) prowadzą przez większość czasu. Można wyliczyć asymptotyczny rozkład dla czasu prowadzenia (prawo arcusa sinusa, P. Lévy, 1939): niech  $T_n$  oznacza czas, przez jaki prowadzi orzeł w serii  $n$  rzutów. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{T_n}{n} < t\right) = \int_0^t \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{2 \arcsin \sqrt{t}}{\pi}.$$

Teraz widać drugą niewątpliwą zaletę doświadczenia polegającego na rzutach monetą: umożliwia ono dokonanie przeglądu podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa.



## Grudzień

Przez cały grudzień zbliżamy się jeszcze do Słońca, co nie przeszkadza, że robi się coraz zimniej. Bowiem o warunkach klimatycznych decyduje nie odległość Ziemi od Słońca, zmniejszająca się zresztą w bardzo małych granicach, lecz nasłonecznienie, a to określone jest przez porę roku, czyli położenie Słońca na ekliptyce (por. *Patrz w niebo*, str. 17). Na południowej półkuli Ziemi jest „odwrotnie”, tzn. kończy się wiosna i zbliża się lato. Święta Bożego Narodzenia są jednak na całym świecie jednocześnie, dlatego np. Australijczycy będą – jak zwykle – chodzić z małymi choinkami na plażę. I tylko Święty Mikołaj będzie miał kłopoty z podróżowaniem na saniach.

Zima zaczyna się (u nas) 21 XII o godz. 21:07, Słońce wstępuje wtedy w znak Koziorożca. Dni będą się już wydłużać, ale mrozy zapewne jeszcze przed nami, gdyż Słońce musi wznieść się zdecydowanie wyżej, by móc ogrzać wyziębiony grunt. W Koziorożcu lub w jego pobliżu znajdują się w grudniu trzy planety: Wenus, Mars i Jowisz, dość wcześnie więc zachodzą po zachodzie Słońca, przy czym Wenus w połowie miesiąca osiąga maksimum jasności. Saturn w Rybach widoczny jest w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 14 XII. Księżyc bardzo zbliży się do Saturna 9 XII i do Aldebarana 13 XII, ale oba te zbliżenia dla nas wypadają w ciągu dnia.

T.K.